

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Мастер академске студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Механика лома

Број индекса: 325/2012

Никола Б. Лазаревић

**Тема: Концепт контурног J - интеграла и његова
примена у прорачуну конструкција**

~ Мастер рад ~

Комисија за преглед и одбрану:

1. **Проф. др Весна Марјановић - Ментор**

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог мастер рада кандидат би требало:

- Да у уводном делу објасни основне поставке механика лома и да посебан осврт на еласто - пластичну механику лома.
- Да у првом делу рада дефинише контурни J - интеграл и његову везу са брзином ослобађања енергије G .
- Други део рада треба да садржи методе за одређивање J - интеграла и важност правилног одређивања фактора интензитета напона K .
- На крају би требало размотрити и анализирати неколико примера одређивања контурног J - интеграла савременим софтерима.

Препоручена литература:

- [1] Шумарац Д. и Крајчиновић Д., "Основи механике лома", Научна књига, Београд, 1990.
- [2] Ђулафић, В. Б., "Увод у механику лома", Универзитет Црне Горе, Машински факултет, Подгорица, 1999.
- [3] Милосављевић, М., Радојковић М. и Кузмановић Б., "Основи челичних конструкција", Грађевинска књига, Београд, 1986.

Резиме:

У оквиру рада, извршено је прикупљање, систематизација и анализа података везаних за механику лома, како линеарно еластичне механике лома, тако и еластично пластичне механике лома. Описане су методе одређивања, J - интеграла, одосно развоја прслина, као и одређивање фактора интензитета напона и њихових критичних вредности. Приказан је практични пример аналитичког израчунавања J - интеграла, као и фактора интензитета напона. На крају је дат пример новијих, софтверских, решења израчунавања J - интеграла, који су будућност испитивања важних конструкција.

Кључне речи: J - интеграл, прслина, еластично - пластичне механике лома, фактор интензитета напона.

Abstract:

In this work we have gathered, systematized and analyzed the facts concerning the fracture mechanics. These facts concern equally the linear-elastic fracture mechanics and the elastic-plastic fracture mechanics as well. We have described the methods of determination of the J - integral, the development of the cracks as well as the determination of the stress intensity factors and their critical values. We have presented a practical example of the analytical calculation of the J -integral as well as the stress intensity factors. In the end we have given an example of the newer, software solutions of the calculation of the J - integral, who are the future of the important structures research

Key words: J - integral, crack, elastic - plastic fracture mechanics, the stress intensity factor.

Садржај

1.0 Увод	1
2.0 Опште о механци лома.....	5
2.2 Основне дефиниције механике лома	8
2.2.1 Основни облици образовања повшина прелома.....	8
2.2.2 Фактор интензитета напона	9
2.2.3 Критична величина фактора интензитета напона K_{IC} (жилавост лома при раванској деформацији)	12
2.3 Појам еластично-пластичне механике лома	12
2.4 Услови примене ЛЕМЛ и ЕПМЛ.....	15
3.0 Концепт контурног J -интеграла.....	17
3.1 Основна дефиниција J -интеграла	18
3.2 Веза између J -интеграла и брзине ослобађања енергије G	19
3.2.1 J -интеграл и стабилност енергетске равнотеже	21
3.2.1.1 Графичка интерпретација	22
3.3 Вредности J -интеграла код прелина.....	23
3.4 J -интеграл као критеријум лома	26
4.0 Методе одређивања J -интеграла	28
4.1 Модел процеса лома и J_R крива отпорности.....	28
4.2 ЕПРИ поступак за срачунавање J -интеграла	29
4.2.1 Теоретска основа	30
4.2.2 Срачунавање J_{pl}	30
4.2.3 Израчунавање J_{el}	31
4.3 Стандардне експерименталне методе за одређивање J_{IC} и J_R	31
4.3.1 Метода више епрувета	32

4.3.2 Метода једне епрувете	34
а) За случај употребе епрувете на затезање	34
б) За случај епрувете за савијање.....	36
4.4 Израчунавање K_{IC} и J_{crit}	38
4.5 J -интеграл код Баренблат-Дагдејловог модела	39
5.0 Пример аналитичког израчунавања J - интеграла.....	40
6.0 Пример нумеричког израчунавања J - интеграла.....	44
7.0 Закључак.....	49
Литература	51

1.0

Увод

Механика лома, као наука, бави се проучавањем развоја прслина у кртим и квази кртим телима. Термин механика лома има двојаки смисао, у ужем смислу односи се на истраживање услова развоја прслине, а у ширем смислу обухвата и део отпорности материјала, који се односи на завршну фазу процеса деформисања под дејством оптерећења.

Механика лома има важну примену како у пројектовању нових конструкција, провери поузданости постојећих, тако и у провери поузданости и процени преосталог века трајања конструкција у којима су се појавиле иницијалне прслине.

Брзина израчунавања раста прслине од изузетне је важности, да би смо могли знати стварно стање и век трајања конструкције. Механика лома је дисциплина у којој је неопходно повезивање теоретских разматрања са експерименталним резултатима са једне стране и појавом ломова и хаварија у експлоатацији конструкција са друге стране.

Корени механике лома налазе се у првим описаним испитивањима механичких особина и лома, која су вршили Леонардо да Винчи (*Leonardo da Vinci*), Галилео Галилеј (*Galileo Galilei*) и други велики научници.

Средином XX века, као одговор на необјашњиве хаварије бродова, мостова, железничких пруга, појављује се већи број истраживача који су се бавили проблемима лома. Свакако један од истакнутијих међу њима је Ирвин (*George Rankin Irwin* - 1952, 1954), који је модификовао Грифит-ову теорију (*Alan Arnold Griffith* - 1921). Према њему, важну улогу при ширењу прслине игра концентрација напона при непосредној околини врха прслине. Као квантитативна мера

концентрације напона у околини врха прслине уводе се величине фактора интензитета напона: K_I , K_{II} и K_{III} .

Шездесетих година XX века појављују се нови, фундаментални радови из механике лома. Најзначајнији међу њима су радови Рајс-а (*Rudolph Archibald Reiss* - 1968) засновани на дефинисању J интеграла и анализи његових особина. Теорија заснована на коришћењу J интеграла развијена је са циљем да се успостави квантитативна мера појаве нестабилног ширења прслине. Развија се критеријум лома заснован на примени J интеграла. [5]

На прелазу од чисто кртог лома ка жилаво-кртом лому механика лома је морала да проучава не само феномен лома већ и деформације које предходе лому. У случају чистог кртог лома деформација је само еластична, енергија се троши на развој прслине до њене критичне дужине, док се лом одвија без додатног утршка енергије. У случају жилаво - кртог и жилавог лома знатна енергија се троши за развој пластичне деформације, која претходи лому и која се развија у процесу лома.

У механици се под прслином подразумева одсуство веза (адхезија) између два суседна слоја атома.

До кидања атомских веза може да дође само као последица значајних концентрација напона у околини микроскопских (ређе макроскопских) дефеката у материјалу. Само дефекти који поседују оштре (атомски) ивице и врхове могу да изазову концентрације напона довољне за прекид атомских веза. Такви дефекти су обично:

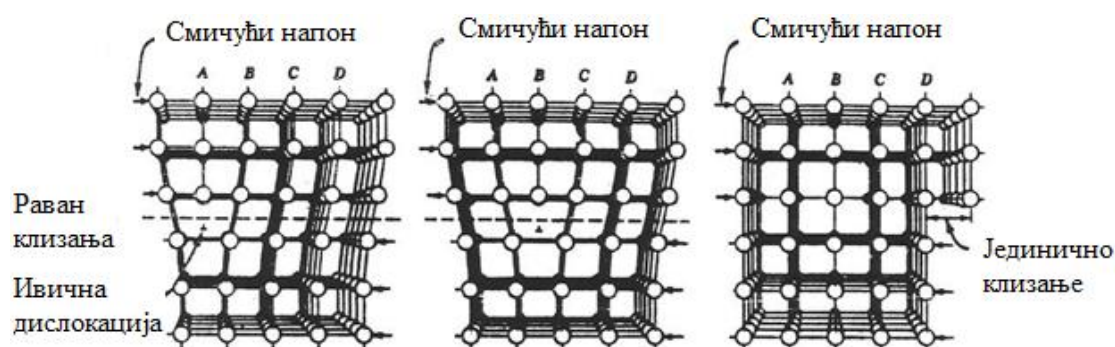
- настали при фабрикацији, површинској обради или при инсталацији или
- последица предходних оптерећења.

На нивоу атомске решетке основни дефекти су:

- дислокација,
- атомска шупљина (мањак једног атома у решетци или такозвани шотки-јев дефект (*Walter Hermann Schottky*)),
- страни атом у решетци или
- атом померен са свог места (интерститијални атом, такозвани Френкел-ов дефект (*Jakow Iljitsch Frenkel*)).

Од највећег значаја је први од ових дефеката, дислокација.

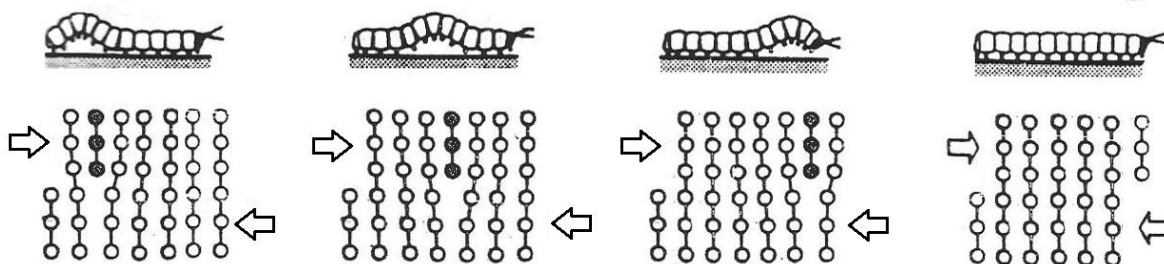
На слици (1.1) је приказана ивична дислокација која се састоји од једне сувишне полуравни атома.



Слика 1.1 - Померање дислокације ка контури

При оптерећењу смичућим силама дислокација се помера у правцу силе (са лева на десно на слици 1.2). При том померању атомске везе се прекидају испред дислокације и поново успостављају по њеном проласку. Као резултат клизања дислокација долази до деформације смицања између две равни атома (одвојене површином смицања).

Пошто се атомске везе по проласку дислокације поново успостављају свака од конфигурација приказана на слици 1.2 је стабилна. Према томе, по растерећењу накупљена нееластична деформација клизања остаје у материјалу.



1.2 - Успостављање везе по проласку дислокације

Основне карактеристике ове врсте деформације која је позната под именом пластично течење су:

- број атомских веза у материјалу се не мења током оптерећења и
- нееластична деформација остаје по растерећењу.

Развој стандарда за одређивање жилавости лома при раванској деформацији, K_{IC} , омогућио је примену линеарно-еластичне механике лома на реалне конструкције, израђене од материјала високе чврстоће. Услов важења тих испитивања је развијање мале зоне пластичне деформације око врха прслине пре него што дође до развоја прслине и лома. Директно одређивање жилавости лома K_{IC} и њена примена је ограничена само на материјале високе чврстоће, јер је код већине конструкцијских материјала око врха прслине развијена велика зона пластичне деформације. Због тога су анализом пластичног понашања материјала са прслином, којом се бави еласто-пластична механика лома, уведена још два параметра:

- отварање врха прслине CTOD и
- контурни (J) интеграл, независан од путање интеграције.

У линеарно-еластичној области, када су испуњени услови равanske деформације, ова два параметра представљају критичне величине (δ_{IC} и J_{IC}) и директно су повезани са величином K_{IC} . Погодност примене параметара δ и J је у могућности њихове анализе и после развоја значајних пластичних деформација, са једне стране, као и у погодности њиховог стандардима прописаног експерименталног одређивања, са друге стране. [4]

Као показатељ еластично - пластичне механике лома J -интеграл је параметар жилавости лома. Он је на пример код заварених конструкција осетљивији од других параметара на нехомогеност и асиметрију понашања шавова.

J -интеграл први је потпуно разјаснио и применио Рајс, мада се његова ранија примена може наћи у радовима, Ешелби-ја (*John Douglas Eshelby* - 1955), Сандерс-а (*Owen Alfred Saunders* - 1960), Черепанов-а (*G. P. Cherepanov* - 1968, превод на енглески језик 1974). [1]

2.0

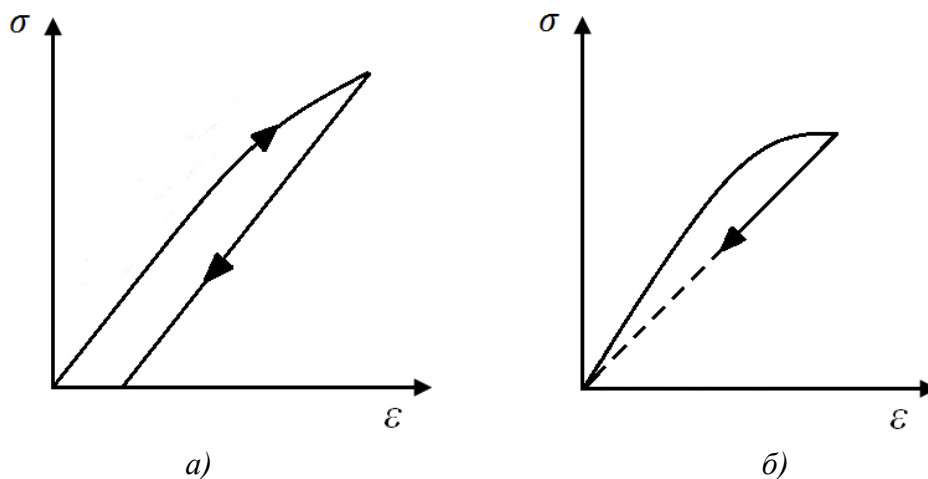
Опште о механци лома

Пошто модул еластичности материјала:

$$E = a_0 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial X} \right)_{X=a_0} = \frac{2\pi a_0}{\lambda} \sigma_{max} , \quad (2.1)$$

где је: a_0 - почетна дужина прслине; λ - Ламелова константа; σ_{max} - максимални напон.

Модул еластичности материјала директно зависи од броја, типа и распореда атомских веза у чврстом телу. Из прве од ових карактеристика може се закључити да се при овој врсти деформације еластични параметри материјала не мењају. Нагиб криве напона и деформације при растерећењу једнак је нагибу исте криве при првобитном оптерећењу (слика 2.1, а).



Слика 2.1 - (а) Пластична и (б) крта деформација чврстог тела

Међутим, нису сви материјали дуктилни (односно, не теку пластично при оптерећењу) у свим околностима. У материјалима као што је стакло, бетон, керамика или гвожђе, до лома при затезању долази нагло и без приметне пластичне деформације. У таквим материјалима енергија се троши не на промену облика него на прскање (формирање нових површина унутар тела).

Пошто су неке од атомских веза искидане током оптерећења модул еластичности је мањи од почетног. Нагиб линије растарећења је мањи од нагиба првобине линије оптерећења. У реалним материјалима деформација је, у највећем броју случајева, комбинација два екстремна случаја приказана на сликама (2.2, а, б).

Рад међуатомских сила при прекидању атомских веза (настанку прслине) не може бити мањи од енергије потребне за стварање нових површина унутар материјала, 2γ :

$$\int_{a_0}^{a_0+(\lambda/2)} \sigma dx = 2\gamma \quad (2.2)$$

Максимални напон који идеална решетка (без дефеката) може да поднесе без прекида атомских веза (теоријска чврстоћа материјала) је:

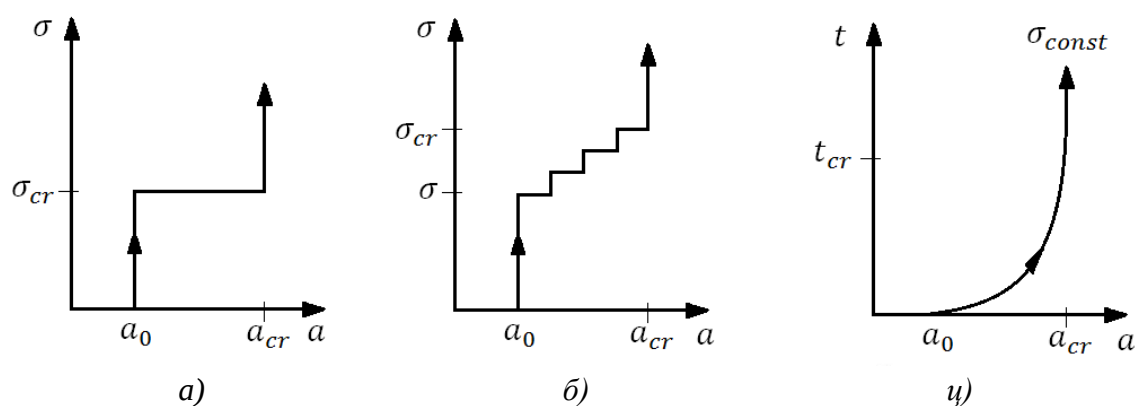
$$\sigma_t = \sigma_{max} = \sqrt{\frac{E\gamma}{a_0}} \quad (2.3)$$

Према критеријуму (2.2) или (2.3), почетне прслине постају опасне само када енергија ослобођена кидањем атомских веза (лева стране једначине 2.2) превазиђе енергију која је потребна за стварање нових површина. Преостали део енергије је узрок динамичкој пропагацији прслина која се одвија брзином Релејевих таласа у телу.

Постоје три главна начина пропагације субкритичних прслина:

- крти лом условљен порастом напона услед оптерећења - у овом случају максимални напон расте са оптерећењем све док не достигне вреоност (2.2) и проузрокује крти (нагли) лом.
- крто - жилав лом - при коме постојећа прслина расте у коначним (али малим) прираштајима дужине проузрокованим спајањем са атомским празнинама у околини свог врха. Спајање је обично условљено клизањем по равнима смицања које спајају врх прслине и празнине.
- поступан лом (статички замор) при константном пољу напона - условљен хемијским реакцијама (као што је корозија) услед којих површинска енергија опада све док се једнакост (2.2) не успостави доводећи до кртог лома.

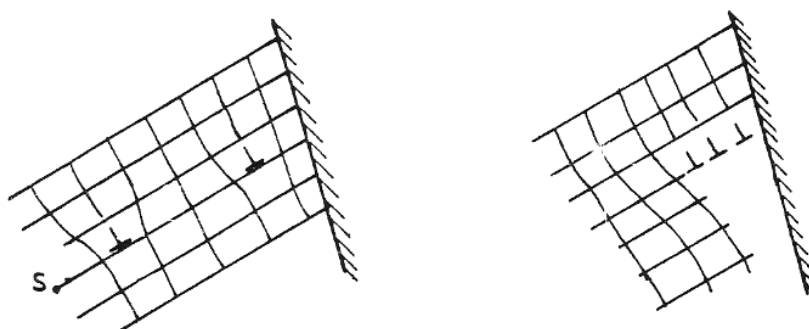
Ова три начина су приказана на слици (2.2)



Слика 2.2 - Три начина субкритичне пропагације прслина

На слици (2.3). приказан је случај поликристалног чврстог тела у коме се дислокације емитоване из извора S у материјалу крећу по равни клизања под дејством напона смицања. Кретања дислокација је несметано све док не допру до границе зрна која у најчешћем броју случајева представља непробојну баријеру. Сабијање дислокација у баријеру је праћено напонском концентрацијом услед које долази до кидања веза између суседних атома.

Та врста прслина, настала као резултат пластичне деформације концентрисане на једној или више клизних равни, позната је под именом "*Zener - Stroh*" прслина.



Слика 2.3 - Формирање "*Zener - Stroh*" прслина сабијањем дислокација између граница зрна

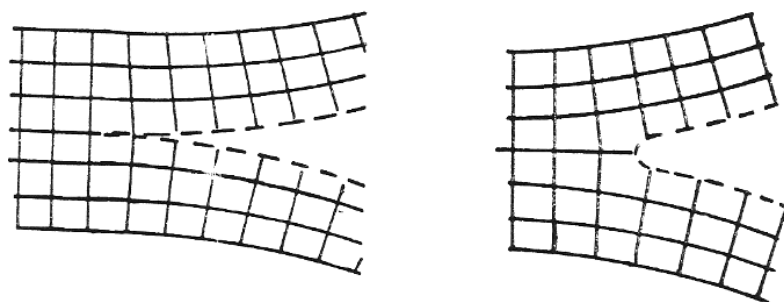
Други механизми при којима се при спречавању несметаног клизања дислокација појављују напонске концентрације које могу да доведу до појаве прслине су познати ни под именом "*Straw - Friedel*" мехазма, "*Cottrell*" чвора, "*Roze*" канала и тако даље.

Међутим до прислина може да дође током деформације и без дислокација. У материјалима као што је керамика, везе између атома (јонске и ковалентне) су електро - статичке природе. Јачина ових веза скоро потпуно онемогућава појаву деформације клизањем дислокација.

За разлику од дуктилне, крта деформација може да се дефинише:

- кидањем атомских веза, и
- одсуством преостале деформације по растерећењу конструкције.

У чистом кристалу фронт прслина може да буде атомски оштар или полукружан (слика 2.4).



Слика 2.4 - Оштар и затупљен фронт прслине

Од оштрине фронта прслине зависи и величина концентрације напона. Фронт прслине је атомски оштар само ако из њега није могуће емитовати дислокацију. У том случају прслина је много опаснија јер се целокупна енергија концентрише у сам врх прслине при чему може да дође до наглог и катастрофалног лома.

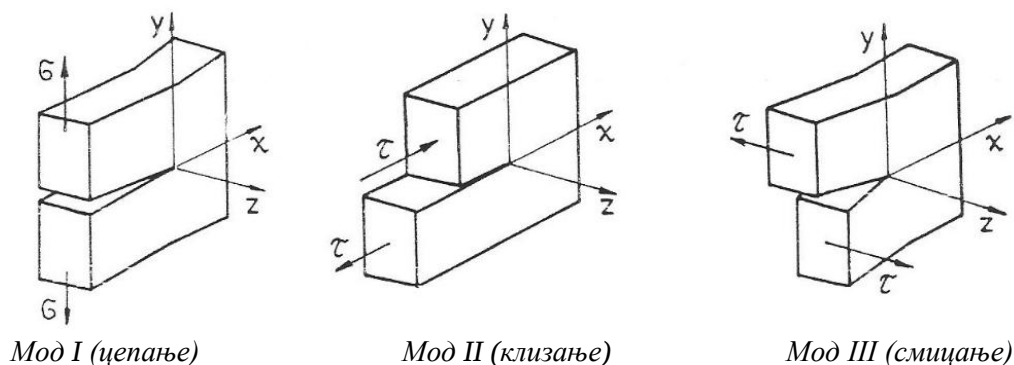
2.2 Основне дефиниције механике лома

2.2.1 Основни облици образовања површина прелома

Раздвојене површине прслине представљају неоптерећене границе напрегнутог тела, због тога расподела напона у близини врха прслине зависи од облика образовања површине прелома. На слици (2.5) приказани су основни облици померања елемената које обухвата врх прслине (по Ирвину).

- Мод I - развој прслине цепањем, дефинисан је раздвајањем површине прелома симетрично у односу на првобитну раван прслине.
- Мод II - развој прслине клизањем, дефинисан је померањем једне површине прелома по другој у истој равни, али у супротним смеровима.
- Мод III - развој прслине смицањем, дефинисан је померањем једне површине прелома по другој дуж целе прслине тако да се тачке које су пре развоја прслине биле у истој вертикалној равни после развоја прслине распоређују по различитим равнима.

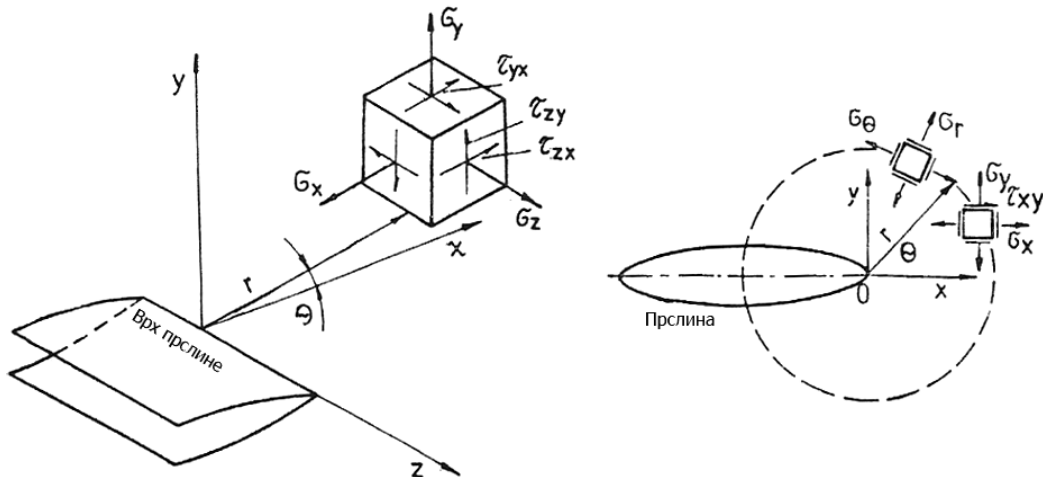
Најопаснији ломови настају при развоју прслина цепањем (Мод I).



Слика 2.5 - Основни модови развоја прслине и образовања површине прелома

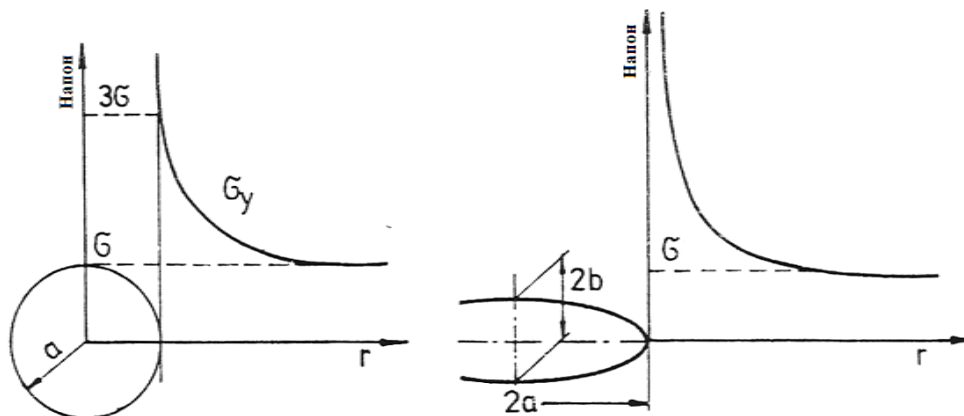
2.2.2 Фактор интензитета напона

Фактор интензитета напона одређује величину компоненти напона при неједнакој расподели напона. На слици (2.6) приказане су компоненте напона у близини врха прслине у просторном и равном координатном систему правоуглих и поларних координата.



Слика 2.6 - Компоненте напона у близини врха прслине у просторном и равном систему правоуглих и поларних координата

Користећи класична решења теорије еластичности за случај концентрације напона око кружног и око елиптичног отвора у бесконачној затегнутој плочи (слика 2.7) може се утврдити величина компоненте напона σ_y .



Слика 2.7 - Концентрација напона око кружног и око елиптичног отвора у бесконачној затегнутој плочи

Расподела напона за случај кружног отвора:

$$\sigma_y = \sigma \left(1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{2r^4} \right) \quad (2.4)$$

показује да је за $r = a$ напон највећи и износи $\sigma_y = 3\sigma$, ово представља решење Кирша.

Из израза за случај елиптичног отвора следи:

$$\sigma_y = \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) = \sigma \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right), \quad (2.5)$$

где је: $\rho = \frac{b^2}{a}$ полупречник кривине у темену елипсе, добија се за $b \rightarrow 0$, односно за $\rho \rightarrow 0$, $\sigma_{ymax} \rightarrow \infty$; ово одговара отвору типа прслине у који за дате услове прелази елиптични отвор у бесконачној плочи.

Општи израз у тензорском облику је:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \quad (2.6)$$

у развијеном облику даје, за Мод I развоја прслине:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

За раванско стање напона $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, а за раванску деформацију $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$, где је ν поасонов коефицијент.

Параметар K_I у овим једначинама је фактор интензитета напона. Када $r \rightarrow 0$ (у самом врху прслине) напони постају бесконачно велики.

Фактор интензитета напона K је тада мера сингуларности напона у врху прслине. Обзиром да се разматрају еластични напони, они морају бити пропорционални спољашњем оптерећењу. За случај једноосног затезања услед оптерећења σ на бесконачној раздаљини, биће K_I пропорционално σ .

За бесконачну плочу једина карактеристична дужина је дужина прслине, па фактор интензитета напона може да се представи у облику:

$$K_I = C\sigma\sqrt{a}. \quad (2.8)$$

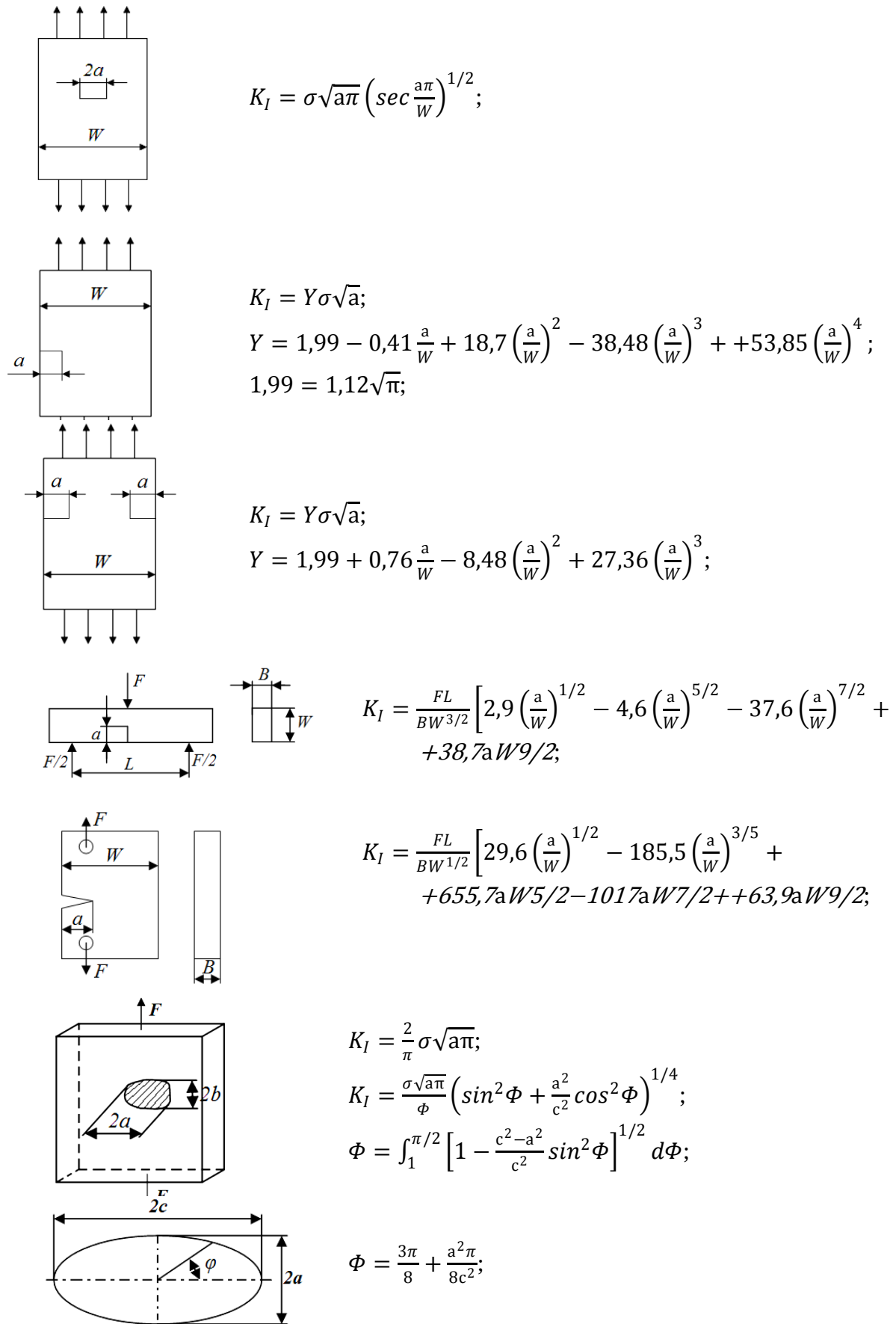
Лако је показати да је $C = \sqrt{\pi}$, како за једноосно, тако и за двоосно затегнуту бесконачну плочу, па је:

$$K_I = \sigma\sqrt{a\pi}. \quad (2.9)$$

Слично је за облик II и III:

$$K_{II} = \tau\sqrt{a\pi} \quad K_{III} = \tau\sqrt{a\pi} \quad (2.10)$$

Практичан значај има величина фактора интензитета напона плоча коначних димензија са прслином одређене дужине. Међутим, због граничних услова решење овог проблема је сложено, па су доступна приближна решења за средишњу или ивичну прслину у плочи коначних димензија. На слици (2.8) наводе се резултати за неке карактеристичне облике плоча и врсте оптерећења.

Слика 2.8 - Основни облици епрувета са прслином и формуле за одређивање K_I

2.2.3 Критична величина фактора интензитета напона K_{IC} (жилавост лома при раванској деформацији)

Жилавост прслине при раванској деформацији K_{IC} је особина материјала, која се мери у зависности од фактора интензитета напона K_I . За Мод I развоја прслине цепањем има димензију напон $\times$ (дужина)^{1/2}, па је према томе:

$$K_{IC} = \sigma_c \sqrt{a\pi}, \quad (2.11)$$

где је: σ_c напон при коме долази до појаве лома. Да би се одредила величина K_{IC} зарезана епрувета са прслином погодних димензија се оптерећује поступно растућим оптерећењем док прслина не достигне дужину која проузрокује нестабилни и брзи лом. Однос K_I и оптерећење које делује на епрувету је функција облика и димензија епрувете. Величина K_{IC} која одговара оптерећењу нестабилног развоја прслине је величина K_{IC} одређена у испитивању. Величина K_{IC} зависи од температуре и брзине дејства оптерећења. Експериментално је утврђено да ниво K_{IC} већине конструкцијских материјала не зависи од облика и мера епрувета.

Између критичног фактора интензитета напона K_{IC} и силе развоја прслине постоји зависност:

$$\begin{aligned} K_{IC}^2 &= E \cdot G_{IC} \text{ - за раванско стање напона} \\ K_{IC}^2 &= (1 - \nu^2)E \cdot G_{IC} \text{ - за раванску деформацију} \end{aligned} \quad (2.12)$$

где је: E - модул еластичности, G_{IC} - критична вредност брзине ослобађања енергије, ν - поасонов коефицијент.

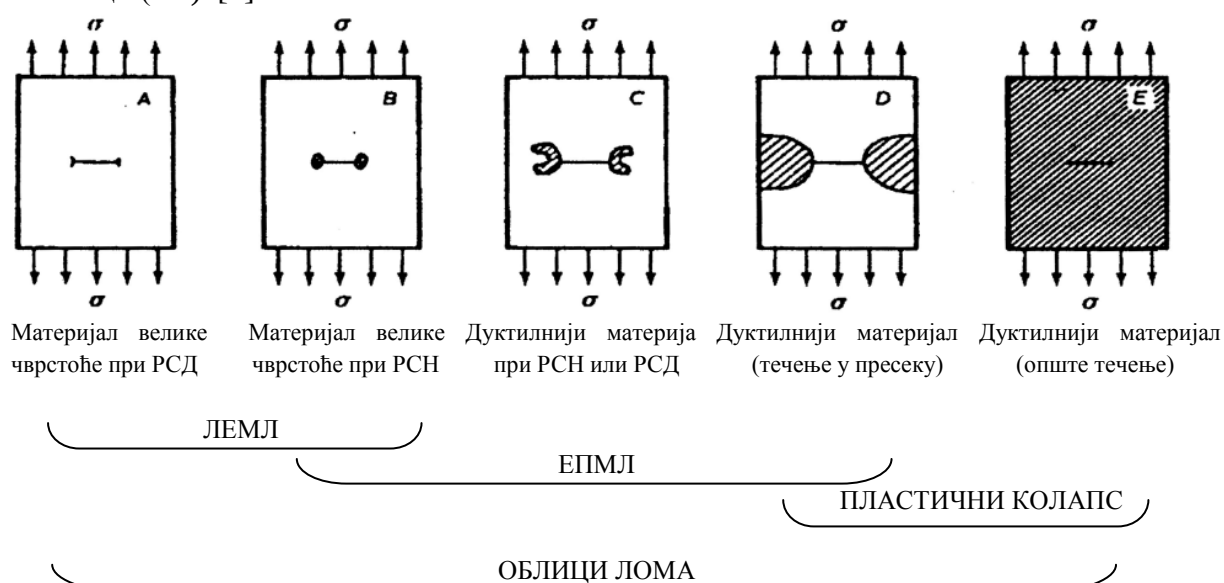
Под одређеним условима ниво K_{IC} може да се искористи за одређивање оптерећења које материјал може пренети без лома, са прслином одређених димензија. При том је пластична деформација на врху прслине ограничена величине, што одговара раванском стању деформација. Међутим, реални материјали се не понашају еластично - крто при деформисању како то предвиђа линеарно еластична механика лома, па је због тога потребно спецификовати захтеве за даља испитивања, које даје меродавну карактеристику материјала K_{IC} . Ти захтеви се односе на минимално потребну дебљину епрувете да се добије раванско стање деформације и максимално одступање од линеарности у дијаграму оптерећење - померање отвора прслине.

2.3 Појам еластично-пластичне механике лома

Све док је величина пластичне зоне на врху прслине мала у поређењу са дужином прслине се може примењивати линеарно-еластична механика лома (ЛЕМЛ). Ово је обично случај код материјала код којих се лом појављује при напонима који су знатно испод напона течења и у условима раванског стања деформација (РСД). У таквим околностима лом се може дефинисати помоћу K -

фактора и одговарајуће жилавости лома K_{IC} . Када превлада раванско стање напона (РСН) величина пластичне зоне је већа, али и даље знатно мања од дужине прслине. Лом се у тим условима појављује при напонима мањим од напона течења па се применом модификоване ЛЕМЛ, као на пример преко P - кривих, преко којих се могу добити задовољавајуће процене преостале носивости. Поступци ЛЕМЛ се највише користе у авионској и ракетној индустрији, где је критеријум смањења тежине од примарног интереса, због чега се морају користити материјали високе чврстоће, који су истовремено и крти.

Уколико је величина пластичне зоне велика у односу на дужину прслине тада ЛЕМЛ више не важи, већ се морају применирати методе еласто - пластичне механике лома (ЕПМЛ). Шематски приказ области примене метода ЛЕМЛ и ЕПМЛ са становишта релативне величине пластичне зоне за пролазну прслину у плочи је дат на слици (2.9). [2]



Слика 2.9 - Области примене метода ЛЕМЛ и ЕПМЛ за дефинисање појаве лома

Као могући, упоредни, параметар код материјала ниске чврстоће и ниског напона на граници течења може да се користи померање отвора прслине (Crack Opening Displacement - COD), које је предложио ВЕЛС (Victorian Essential Learning Standards) и које је за испитивање дефинисано предлогом стандарда "DD 19 BSI".

Померања u у правцу x -осе и v у правцу y -осе су:

$$u = 2(1 + \nu) \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} [1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}] \quad (2.13)$$

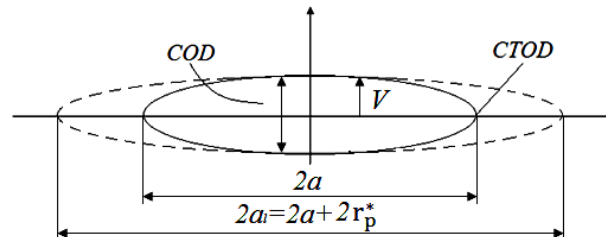
$$v = 2(1 + \nu) \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2}} \sin \frac{\theta}{2} [2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2}]$$

За случај приказан на слици (2.10) интересно је померање v . С обзиром на примењени координатни систем може да се напише:

$$COD = 2v = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (2.14)$$

Отварање је највеће на месту $x = 0$:

$$COD_{max} = \frac{4\sigma a}{E}. \quad (2.15)$$



Слика 2.10 - Померање отвора прслине

Ако се око врха прслине ($x = a$) развије пластично деформисано подручје, онда померање отвора врха прслине (CTOD) може бити различито од нуле, односно више не важи релација 2.14. Помоћу Ирвинове корекције величина пластично деформисаног подручја из релације 2.14 гласи:

$$COD = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{(a + r_p^*)^2 - x^2} \quad (2.16)$$

па је $x = a$, јер је $a \gg r_p^*$

$$CTOD = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{(a + r_p^*)^2 - x^2} = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{2a r_p^*} = \frac{4K_I^2}{\pi \sigma_T E} \quad (2.17)$$

За $K_I = K_{IC}$ израз 2.17 важи као и у линеарно еластичној механици лома, што захтева мерење CTOD, а оно је за рутинска испитивања веома непогодно.

Применом модела (Dugdale-a) било је могуће исказати CTOD у облику:

$$CTOD = \frac{8\sigma_T a}{\pi E} \log \sec \frac{\sigma \pi}{2 \sigma_T}. \quad (2.18)$$

Даљим развијањем у ред, овај израз даје:

$$CTOD = \frac{8\sigma_T a}{\pi E} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma \pi}{2 \sigma_T} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{\sigma \pi}{2 \sigma_T} \right)^4 + \dots \right], \quad (2.19)$$

што се из услова $\sigma < \sigma_T$, своди на већ изведену зависност (2.17).

$$CTOD = \frac{\pi \sigma^2 a}{E \sigma_T} = \frac{G_I}{\sigma_T}, \quad (2.20)$$

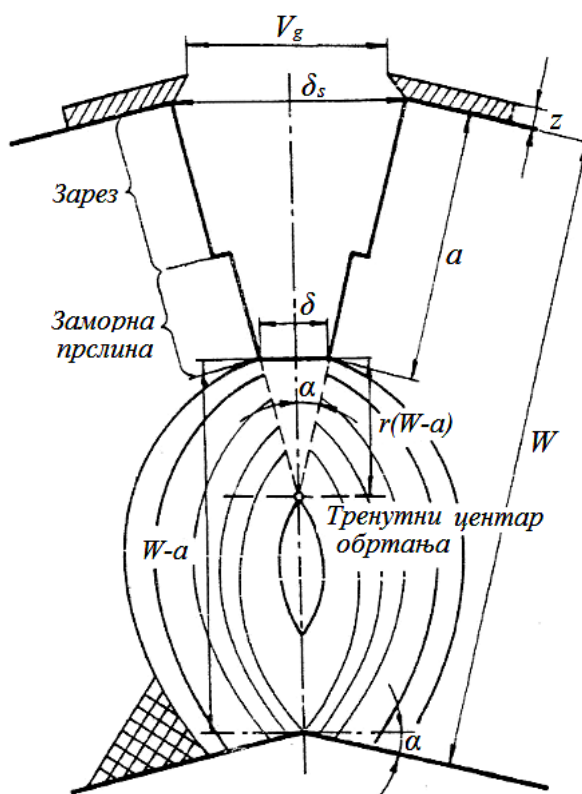
с' тим да постоји разлика у фактору $\frac{4}{\pi}$.

Због тога се у општем изразу може написати:

$$CTOD = \frac{G_I}{\lambda \sigma_T} = \frac{K_I^2 (1 - \nu^2)}{E \lambda \sigma_T} \quad (2.21)$$

Вредности λ крећу се између 1 и 2,14. За крпе материјале се мерењем CTOD може одредити величина K_{IC} , што следи из релације 2.21. за најчешће коришћену вредност $\lambda = 1$. Међутим, за жилаве материјале, код којих није могуће одредити K_{IC} , коришћењем CTOD_C (за $\sigma = \sigma_M$ и израза 2.18) може се упоредити отпорност

Мерење померања отвора прслине и оцена његовог значења везани су са много утицајних фактора који ограничавају практичну примену. Предлогом стандарда "DD 19 BSI" препоручена је епрувета за савијање силом као најпогоднија за одређивање критичне величине CTOD (σ_c). При том треба имати у виду да се због померања врха прслине помера и тренутни центар обртања при савијању, што значи да мера V_g не мора да представља увек исту величину δ , односно да ће исту величину δ представљати само ако угао α при развоју прслине остаје константан. Ово није увек испуњено као што се може закључити са слике (2.11).



Слика 2.11 - Геометријске зависности и пластично деформисано подручје пуног пресека при деформацији епрувете за σ_c

2.4 Услови примене ЛЕМЈ и ЕПМЈ

Проблем величине пластичне зоне има два аспекта. На првом месту то је проблем кратких прслина код материјала мале жилавости лома. За њих напон лома тежи бесконачности када се дужина прслине $2a$ приближава нули (слика 2.12). Како је ово немогуће, очигледно је да напон лома не може бити дефинисан помоћу ЛЕМЛ. Преостала чврстоћа при дужини прслине $(2a/W)_I$ дефинисана је тачком B , што је ниже од напона у тачки A одређеног применом ЛЕМЛ, а виша од граничног напона σ_L у тачки L који дефинише пластични колапс. Према критеријуму Федерсена, на основу којег је дефинисана тачка B , да би се ЛЕМЛ могла применити процењени критични напон σ_c начелно треба да буде мањи од $\frac{2}{3} \sigma_T$.

Други случај за који се не може применити ЛЕМЛ се појављује када се користе материјал високе жилавости. Уколико материјал има високу жилавост лома $\overline{K_{IC}}$, напон лома $\overline{\sigma_c}$ (тачка D на слици 2.12) одређен применом ЛЕМЛ је уек већи од граничне носивости σ_L (тачка C на слици 2.12). То значи да се $\overline{K_{IC}}$ не може мерити, јер се пластична деформација лигамената и пластични колапс појављује при напону у тачки C , а тачка D је фиктивна јер се одговарајући напон не може достићи. Другим речима лом ће бити контролисан механизмом општег течења у пресеку за који не важи ни ЛЕМЛ ни ЕПМЛ. [2]



Слика 2.12 - Дијаграм преостале чврстоће за крт и дуктилан материјал

Међутим, у условима ометања пластичне деформације и утицаја на ефективни напон течења σ_{Tef} и жилавости лома K_{IC} , тачке C и D на слици (2.12) могу бити блиске. У таквим ситуацијама ЕПМЛ може бити коришћена за предвиђање понашања при лому при чему се пластично течење у равни прслине одвија неометено, а прслина ће напредовати уколико се после пластичне деформације на врху прслине достигне критична вредност J -интеграла, J_C , или отворања врха прслине, δ_C , респективно.

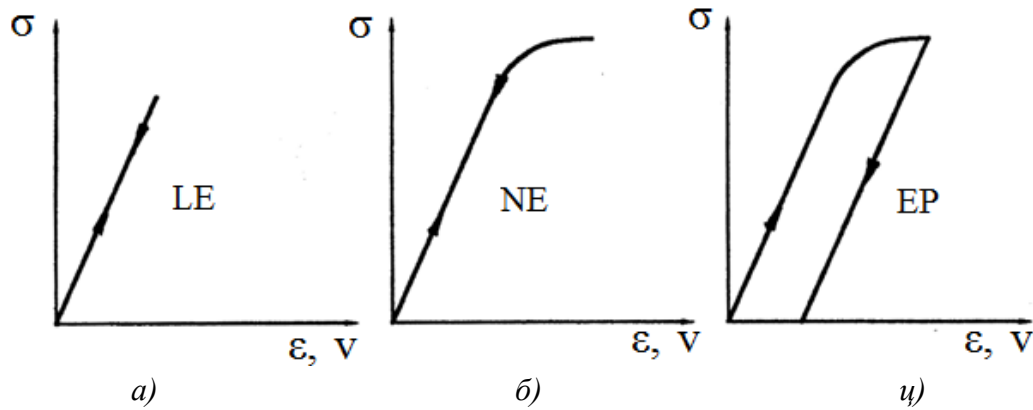
Може се помислити да су појаве ометеног деформисања само специјални и ретки случајеви. Напротив, они су са практичног становишта од примарне важности. У енергетским постројењима и хемијској индустрији највећи део прслина се појављује у деловима под великим притиском, као што су посуде и цевоводи, који су израђени са дебелим зидовима. Такође и код платформи за вађење нафте на отвореном мору се често срећу проблеми прслина у дебелим завареним пресецима. Зато није изненађујуће што је највећи допринос развоју ЕПМЛ дошао од ових индустрија. Постоји неколико метода које могу послужити за решавање проблема ЕПМЛ али су најшире прихваћене две:

1. Концепт J -интеграла;
2. Концепт отвора врха прслине δ_t .

3.0

Концепт контурног J -интеграла

Контурни J -интеграл показао се веома успешним као параметар који карактерише лом тела која се еластично-пластично деформишу. Идеализујући еластично - пластичну деформацију као нелинеарно еластичну, Рајс је поставио основу за проширивање поступака механике лома и ван области ограничења ЛЕМЛ. На слици (3.1) приказана је зависност напон-деформација ($\sigma - \epsilon$) при једноосном затезању за линеарно еластично, нелинеарно еластично и еластично-пластично понашање материјала. Понашање материјала (на слици 3.1, б и ц) при задавању оптерећења је идентично али се оно разликује при растерећењу. Наиме, еластично-пластични материјал при растерећењу прати линеарну зависност нагиба једнаког јанго-вом модулу еластичности (E), док нелинеарно еластични материјал прати исту стазу коју је имао при оптерећивању. То значи да за еластичан материјал постоји једнозначна зависност између напона и деформације без обзира да ли се ради о фази оптерећивања или растерећивања. За еластично-пластичан материјал, међутим, у случају појаве било каквог растерећивања дате деформације може кореспондирати више од једне вредности напона. Све док напони оба материјала (слика 3.1) монотонно расту, њихов механички одговор, односно, деформације ће бити идентичне. Другим речима деформациона теорија пластичности, која је базирана на нелинеарно-еластичном понашању материјала, може бити важећа све док не дође до растерећења и пада напона у материјалу.[2]



Слика 3.1 - Зависности напон-деформација $\sigma - \epsilon$ при једноосном затезању, за линеарно еластично (а), нелинеарно еластично (б) и еластично-пластично понашање материјала (ц)

3.1 Основна дефиниција J -интеграла

Разматра се оптерећено хомогено тело (слика 3.2), линеарно или нелинеарно-еластичних особина и слободно од запреминских сила. За њега се може дефинисати линијски интеграл за дводимензионални проблем облика:

$$\oint_S (W dy - \vec{T}_i \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x} ds), \quad (3.1)$$

где су:

S - произвољна затворена линија интеграције (у смеру супротном од кретања казаљке на сату);

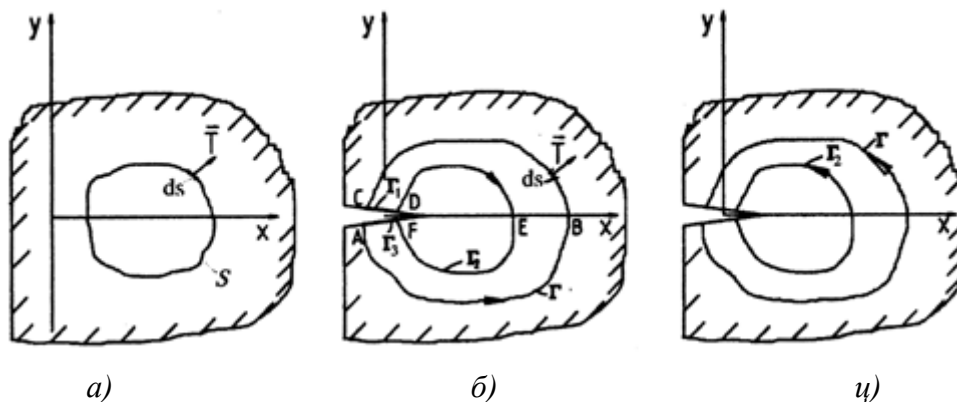
$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$ - густина енергије деформације где су σ_{ij} и ϵ_{ij} тензори напона и деформације, респективно;

$\vec{T}_i = \sigma_{ij} \vec{n}_j$ - вектор затезања на кривој S ;

$\vec{u}_i$ - вектор померања;

$\vec{n}_j$ - јединични вектор управан на криву S и

ds - елемент дужине лука по кривој S .



Слика 3.2 - Путања интеграције контурног J -интеграл за еластично тело без прслине (а) са прслином (б) и независност вредности J -интеграла од путање интеграције (ц).

Треба уочити да је вектор затезања $\vec{T}_i$ уствари напон нормалан на криву интеграције S . То значи да уколико би путања интеграције била постављена по контури тела, $\vec{T}_i$ би претстављао нормалне напоне који делују на тој истој контури. [2]

Рајс је, примењујући једначине равнотеже, релације између деформација и померања и Гринову теорему, показао да уколико се интегрише по било којој затвореној кривој $S = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ која се налази унутар или по контури тела и не садржи никакав сингуларитет, јер је врх прслине изван S (слика 3.2, б и ц), вредност интеграла:

$$\oint_S = \int_{\Gamma} + \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} = 0, \quad (3.2)$$

што је у складу са теоремом о конзервацији енергије. Како је за сегменте контуре Γ_1 и Γ_3 дуж површине прслине $dy = 0$ и $T_i = 0$, то је $\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_3} = 0$, па следи да је:

$$\int_{\Gamma} + \int_{\Gamma_2} = 0 \quad \text{или} \quad \int_{\Gamma} = - \int_{\Gamma_2}. \quad (3.3)$$

Другим речима вредност Рајсовог J -интеграла је јединствена и на зависи од путање интеграције Γ .

$$J = \int_{\Gamma} (W dy - \vec{T}_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds) \quad (3.4)$$

Као последица путања интеграције се може изабрати у непосредној близини врха прслине и то у пластичној зони, ван пластичне зоне или пак дуж контуре тела увек полазећи од једне до друге површине прслине (слика 3.2, ц). Још једном треба нагласити да је Рајс претпоставио да важи деформацијска теорија пластичности, и да су напони и деформације у еласто - пластичном или пластичном подручју тела исти као и за нелинеарно-еластично понашање тела (слика 3.1).

3.2 Веза између J -интеграла и брзине ослобађања енергије G

За случај да је елемент константне ширине и да се само дужина прслине мења, брзина ослобођене енергије се може написати у облику:

$$G = - \frac{d\Pi}{dA} \quad (3.5)$$

Аналитички се може доказати да је вредност J -интеграла еквивалентна брзини ослобађања енергије кроз контуру око врха прслине која напредује кроз линеарно или нелинеарно еластичан материјал. Како је за линеарно еластичан материјал брзина ослобађања енергије (сила развоја прслине) дефинисана изразом 3.5, може се и за нелинеарно еластично понашање користити уопштени израз:

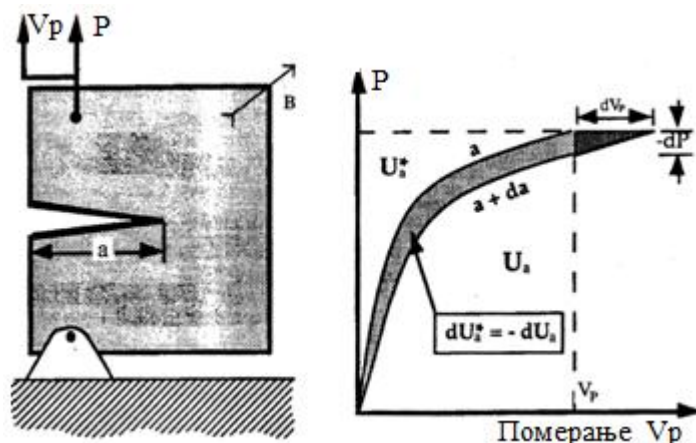
$$J \equiv G = - \frac{d\Pi}{dA} = - \frac{d(U_a - W_p)}{dA}, \quad (3.6)$$

где је Π потенцијална енергија система, U_a деформациона енергија тела са прслином, W_p рад спољашњих сила, док је A површина прслине. У циљу поједностављења,

разматра се плоча константне дебљине B , са прслином дужине a , при чему је зависност сила - померање на месту дејства силе $P - V_p$ приказана на слици 3.3, десно. За случај контроле силе при расту прслине је:

$$\Pi = U_a - P \cdot V_p = -U_a^*, \quad (3.7)$$

где је $U_a^* = \int_0^P V_p dP$ комплементарна деформациона енергија. [2]



Слика 3.3 - Графичка интерпретација J -интеграла као брзине ослобађања деформационе енергије за нелинеарно-еластично понашање тела са прслином

Полазећи од једначине 3.6 следи да је:

$$J = -\frac{d\Pi}{da} = \left(\frac{dU_a^*}{Bda}\right)_P \quad (3.8)$$

За случај фиксiranог померања при расту прслине је $W_p = 0$, па је:

$$J = -\frac{d\Pi}{da} = -\left(\frac{dU_a}{Bda}\right)_{V_p} \quad (3.9)$$

У складу са сликом 3.3, dU_a^* се разликује од $-dU_a$ за износ $1/2dPdV_p$ што је занемарљиво мало у поређењу са dU_a . Отуда произилази да је вредност J -интеграла иста за оба разматрана крајња случаја. Уопштено, J -интеграл не зависи од начина задавања спољашњег оптерећења при расту прслине, што је у складу са закључком који важи за G , за линеарно еластично понашања материјала. Такође, и површина између кривих $P-V_p$ за прслине блиских дужина има значење брзине ослобађања еластичне енергије. Једначине 3.8 и 3.9 се могу користити за експериментално одређивање J -интеграла на сличан начин како је то урађено за линеарно-еластично тело. Наиме, како је и за нелинеарно-еластично понашање вредност J -интеграла дефинисана изразом:

$$J = -\frac{d\Pi}{da} = \begin{cases} -\int_0^{V_p} \left(\frac{\partial P}{\partial da}\right)_{V_p} dV & \text{за случај } V_p = \text{const} \\ \int_0^P \left(\frac{\partial V_p}{\partial da}\right)_P dP & \text{за случај } P = \text{const} \end{cases} \quad (3.10)$$

За еластично-пластичне материјале, који нас првенствено интересују, J -интеграл се начелно може променити само под условом да не делује неки од облика растерећења на врху прслине. На пример због смањења спољашњег оптерећења или због раста прслине при контроли померања, када је ограничено растерећење неизбежно. Такође, већи део деформационе енергије коју еластично-пластични материјал апсорбује при оптерећивању се при расту прслине или растерећењу не ослобађа. Због тога, уместо што дефинише енергију која се ослобађа из тела при расту прслине, J -интеграл описује разлику између апсорбованих енергија тела која садрже прслине веома блиских дужина. Ова разлика је у физичком смислу значајна само у случају када прслина расте јер су тада растерећења у околини врха прслине неизбежна.

Према томе величине J и G су међусобно једнаке. Поред тога, очигледно је да J представља негативан извод потенцијалне енергије по дужини прслине. Како негативан извод потенцијалне енергије по генерализованој координати представља генерализовану силу, то се може закључити да J -интеграл представља генерализовану силу на промени дужине прслине. Овај врло важан став користи се и код Термодинамичког објашњења механике лома. [1]

3.2.1 J -интеграл и стабилност енергетске равнотеже

Полазећи од разматрања линеарно - еластичног понашања материјала и уважавајући идентичност у физичком смислу између Q и J за случај нелинеарно еластичног понашања материјала (слика, 3.1) услов равнотеже при расту прслине се може изразити у облику:

$$J(P, a) = J_R(\Delta a), \quad (3.11)$$

где је J_R крива отпорности у условима еластично-пластичног понашања материјала. Граница између стабилне и нестабилне равнотеже при расту прслине је по истој аналогiji дата једначином:

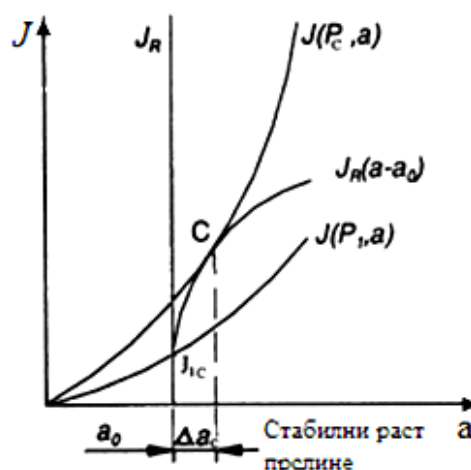
$$\left(\frac{dJ}{da}\right) = \frac{dJ_R(a-a_0)}{da}, \quad (3.12)$$

при чему општи израз за $\frac{dJ}{da}$ зависи од система контроле оптерећења при чему је, $\left(\frac{dJ}{da}\right)_{V_P} \leq \left(\frac{dJ}{da}\right)_{V_T} \leq \left(\frac{dJ}{da}\right)_P$. Другим речима може се донети закључак да је са становишта појаве нестабилног раста прслине оптерећење статичким оптерећењем најкритичнији облик задавања оптерећења. [2]

3.2.1.1 Графичка интерпретација

Критеријум лома, дефинисан једначином 3.11 и једначином 3.12, омогућава одређивање силе P_c и дужине прслине на граници стабилног раста прслине a_c , као и величину стабилног раста Δa_c . Уцртавањем криве отпорности материјала према лому $J_R(a - a_0)$ и силе развоја прслине $J(P, a)$ за низ нивоа оптерећења $P = \text{const}$ (слика 3.4), та граница је одређена тангентном тачком између једне криве из фамилије $J(P, a)$ и криве отпорности материјала J_R . Том приликом раст прслине почиње у тачки која одговара вредности J_{IC} и он је стабилан све до тачке C , када постаје нестабилан што доводи до брзог лома. Треба нагласити да презентирана процедура важи за случај када се ради о проблему са контролом оптерећења P карактеристичног за оптерећење бродова, авиона, дизалица, када након појаве нестабилног раста не долази до смањења спољњег оптерећења. [2]

У случају разматрања проблема са контролом померања V_p , карактеристичног за термичка напрезања, при појави нестабилности долази истовремено и до оптерећења што доводи до успоравања раста и одлагања коначног лома. Због тога се таква нестабилност може назвати и привремена нестабилност.



Слика 3.4 - Анализа стабилности раста прслине преко J криве за два карактеристична нивоа напона и J_R криве отпорности

За силу развоја прслине вредност J -интеграла за одређени систем оптерећење-тело, са прслином не зависи од начина задавања оптерећења, али вредност зависи. Другим речима, и појава нестабилности дефинисана тангентном тачком C зависи од начина задавања оптерећења. На слици (3.5) приказана је зависност сила - померање ($P - V_p$) за случај материјала чија J_R крива има облик дат на слици (3.5). Тачке 1_z и 2_i означавају тренутке почетка затупљивања врха оштре прслине и иницирања раста прслине, респективно, и њихов положај не зависи од система контроле. Максималну вредност, P_{max} , сила достиже у тачки 3, која истовремено представља и тренутак појаве нестабилног раста прслине при деловању статичког терета. Ова тачка истовремено претставља и носивост тела P_c јер се силе након тога не може повећати. Другим речима, стабилни раст прслине $a_0 \sim a_0 \approx a_i$ се одвија од тренутка њеног почетног раста у тачки до тачке 3 када је достигла критичну дужину $(a_0)_3 = a_0 + (\Delta a_0)_3$.

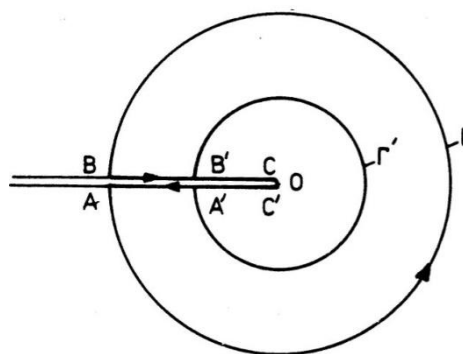


Слика 3.5 - Зависност сила - померање ($P-V_p$) при контроли силе, P , контроли укупног удаљеног померања, V_T , и контроли локалног померања, V_p

За случај контроле укупног померања V_T и за коначну попустљивост C_m , нестабилност се појављује у тачки 4 при сили $(P_c)_4 < P_c$. При томе је критична дужина прслине $(a_c)_4 > (a_c)_3$. Раст прслине у конструкцији, оптерећеној **у** контроли локалног померања V_p , увек је стабилан и праћен сталним смањењем лигаментa ($\Delta a \rightarrow l$) док сила тежи нули ($P \rightarrow 0$). И при контроли силе и при контроли померања напон расте до одређеног максимума. Нестабилност при контроли силе се подудара са појавом максималног напона, али при контроли померања раст прслине остаје стабилан и након тога. До ове тачке максималног напона нема разлике у понашању при контроли силе и при контроли померања (слика 3.5). Контролом померања управља крутоост система (оптерећење + конструкција), што значи да појава нестабилности зависи од система и не зависи од карактеристике материјала. Међутим, и у таквим случајевима најважније је дефинисати највећи носећи напон σ_c или носивост P_c , па c' обзиром да је понашање до те тачке приближно исто као са оним када процесом раста прслине управља сила, може се применити иста анализа. [2]

3.3 Вредности J -интеграла код прслина

Нека је дата затворена контура $ABB'A'A$ у околини врха прслине слика (3.6), [1]



Слика 3.6 - J -интеграл код врха прслине

Из израза (3.2) важи:

$$\oint_{ABB'A'A} (Wdy - \vec{T}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x} ds) = 0 \quad (3.11)$$

Ако се интеграл (3.11) представи као збир интеграла, по деловима путање:

$$\int_{AB} (...) - \int_{A'B'} (...) + \int_{BB'} (...) + \int_{A'A} (...) = 0 \quad (3.12)$$

На деловима BB' и $A'A$ је $dy = 0$ и $\vec{T}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x} = 0$ тако да интеграли на том делу изчежавају. Из (3.12) следи:

$$\int_{\Gamma} (...) = \int_{\Gamma'} (...) \quad (3.13)$$

Према томе за било коју глатку путању која обухвата врх прслине вредност J је константна. Користећи најмању путању $\text{COC}' = \Gamma_t$, добија се:

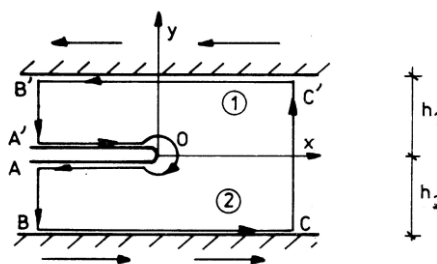
$$J = \int_{\Gamma_t} Wdy. \quad (3.14)$$

Израз (3.14) представља средњу вредност унутрашње енергије.

Као илустрација примене J интеграла може да послужи пример полубесконачне прслине на граници између две плоче од различитих материјала, (слика 3.7) (Черепанов, 1983), изложених смицању. Материјал 1: $0 \leq y \leq h_1$; и материјал 2: $-h_2 \leq y \leq 0$ поседују модуле смицања μ_1 и μ_2 . На граници два материјала гранични услови су:

$$[u_y] = 0, \quad \tau_{xy} = k \quad \text{za} \quad y = 0, \quad x < 0,$$

где је $k \geq 0$ експериментално утврђена критична вредност адхезије два слоја. [1]

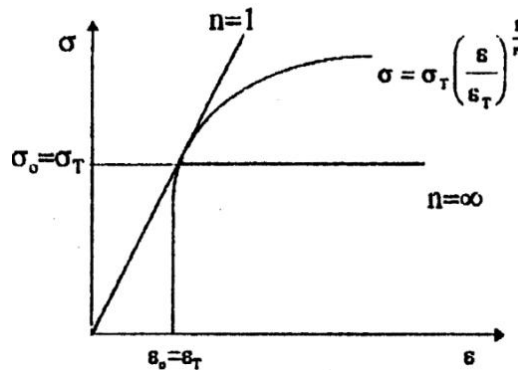


Слика 3.7 - Приказ J -интеграла

Хачинсон, Рајс и Розенгрин су такође показали да се J -интеграл може посматрати не само као енергетски, већ и као параметар интензитета поља напона, који једнозначно карактерише поље напона и деформација у околини врха прслине. При томе су претпоставили да при једноосном затезању материјал показује степену зависности између пластичне деформације и напона. Уколико се укључе и еластичне деформације, добија се Рамберг-Озгудов израз за једноосну деформацију (слика 3.8).

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n, \quad (3.15)$$

где су σ_0 и $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ вредности референтног напона и деформације, респективно, α је бездимензиона константа, док је n експонент деформационог ојачавања. [2]



Слика 3.8 - Рамберг-Осгудов модел понашања материјала који деформационо ојачава и $\sigma_0 = \sigma_T$

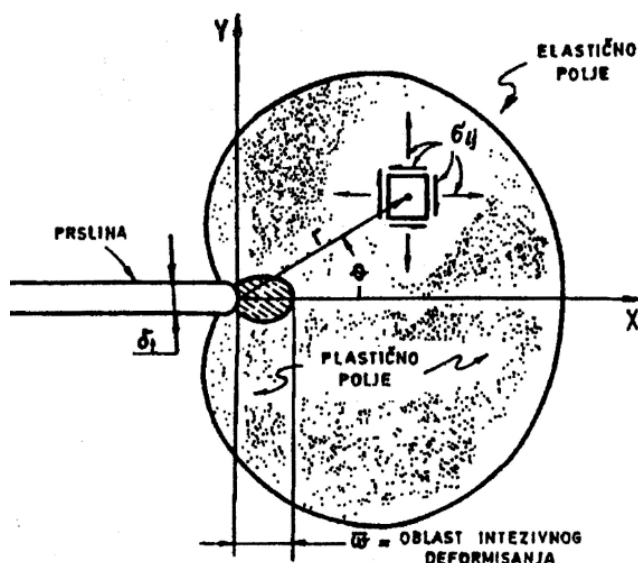
Вредност референтног напона може бити произвољно одабрана, али се најчешће усваја да је то напон течења ($\sigma_0 = \sigma_T$), а $\varepsilon_0 = \varepsilon_T = \sigma_T/E$. Параметри подешавања α и n се одређују линеарном регресијом са log-log графика зависности напона од пластичне деформације $\sigma = f(\varepsilon_p)$. Не улазећи у детаље извођења, независност J -интеграла од путање интеграције је очувана само у случају да производ $\sigma \times \varepsilon$ у близини врха прслине варира са $\frac{1}{r}$ односно да је:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{f(\theta)}{r} \quad (3.16)$$

На растојању веома блиском врху прслине, унутар пластичне зоне, еластичне деформације су мале у поређењу са укупном деформацијом. Зато се зависност $\sigma - \varepsilon$ своди на једноставну степену промену. Ова два услова доводе до поља напона и деформација испред врха прслине која се могу дати у облику:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(r, \theta, n) = k_1 \left(\frac{I}{r}\right)^{\frac{1}{n+1}} \\ \varepsilon_{ij}(r, \theta, n) = k_2 \left(\frac{I}{r}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \end{cases} \quad (3.17)$$

где су k_1 и k_2 константе пропорционалности које зависе од карактеристика материјала у једначини 3.15 и напонског стања. За линеарно еластичан материјал је $n = 1$, па претходни израз предвиђа сингуларитет поља напона и деформација типа што је у сагласности са теоријом ЛЕМЛ. Расподела напона и деформација у непосредној околини врха прслине, дефинисана једначином 3.17 и шематски приказана на слици 3.9, за облик I оптерећења и за одговарајуће контурне услове се у литератури назива Хачинсон-Рајс-Розенгринов (ХРР) сингуларитет.



Слика 11 - Еластично-пластично поље напона у околини врха прслине дефинисано J -интегралом

Јасно је да J -интеграл дефинише амплитуду ХРР сингуларитета, баш као што фактор интензитета напона K или сила развоја прслине Q карактерише амплитуду сингуларитета поља напон и деформација на врху прслине у линеарно-еластичном материјалу. У посебном случају линеарно еластичног понашања материјала је $n=1$ па се ово решење своди на решење које је за ЛЕМЛ дао Ирвин у облику $J = G = \frac{K^2}{E}$. Отуда J -интеграл потпуно описује услове који владају унутар пластичне зоне на врху прслине. При томе тело ослабљено прслином и од материјала који деформационо ојачава при ограниченом, малом, течењу има две сингуларно-доминантне зоне: једну у еластичној области, где напони варирају са $\frac{1}{\sqrt{r}}$ и другу у пластичној зони, где напони варирају са $\frac{1}{r^{1/n+1}}$. Ова друга зона обично опстаје дуго након нестанка линеарно-еластичне зоне сингуларитета у тренутку када величине пластичне зоне на њеном врху постане релативно велика. [2]

3.4 J -интеграл као критеријум лома

Као и у случају поља еластичног сингуларитета потребно је задовољити неке услове да би се осигурало постојање поља сингуларитета J -интеграла око врха прслине. На слици (3.9) приказано је подручје на врху прслине у коме се материјал интензивно деформише, уз појаву шупљина. То подручје се назива "процесна зона лома", $\bar{\omega}$, и мора да буде мала у односу карактеристичне величине тела са прслином. Одређивање овог ограничења базира на експерименталним резултатима али се обично примењује услов да је:

$$B, b, a > 25 \frac{J}{\sigma_Y}, \quad (3.18)$$

где је $b = W - a$ лигамент епрувете, а $\sigma_Y = \frac{\sigma_T + \sigma_M}{2}$ напон ојачавања. У том случају критеријум лом у еластично-пластичним условима се може изразити у облику:

$$J(\sigma, a) = J_c, \quad (3.19)$$

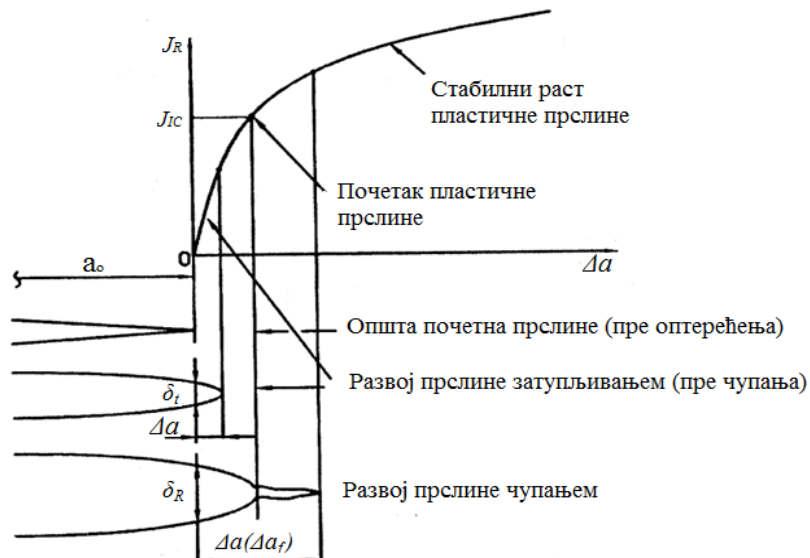
где је J_c мера жилавости лома, односно карактеристика материјала, а J -интеграл функција оптерећења дужине прслине и геометрије тела. [2]

4.0

Методe одређивања J -интеграла

4.1 Модел процеса лома и J_R крива отпорности

Употреба J -интеграла као критеријума еластично-пластичног лома узета је са модела на слици (4.1), на којој су приказани узастопни стадијуми у развоју стабилне прслине у еластично-пластичном материјалу. Процес лома почиње када се епрувета или конструкција ослабљена прслином оптерети, при чему у поченој фази долази до њеног затупљивања. Ово затупљивање се повећава све док се не достигне оптерећење за напредовање прслине испред заобљеног чела. Вредност при коме се то прво напредовање прслине појављује дефинише меру жилавости лома J_{IC} . [2]



Слика 4.1 - Шематски приказ J - Δa при стабилном развоју прслине чупањем

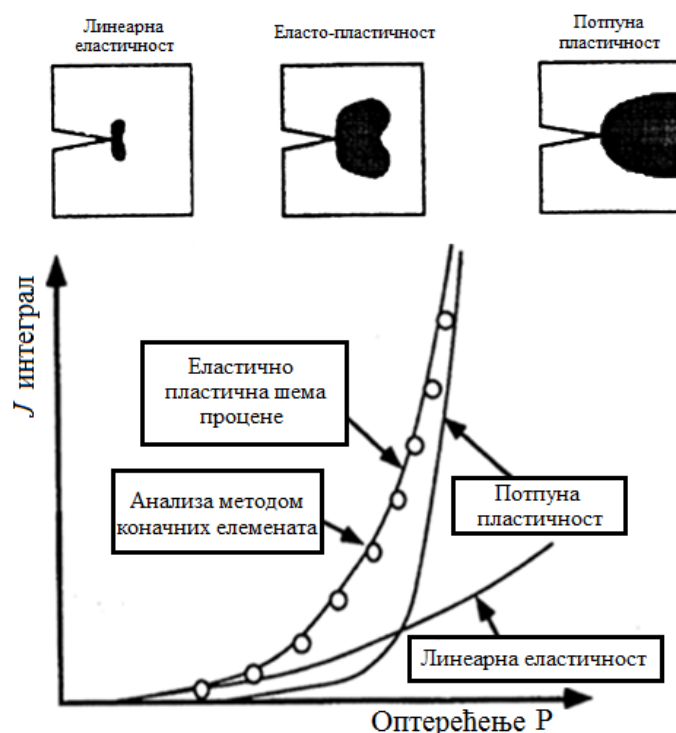
Следећи стадијум у развоју пластичног чупања је стабилни развој доминантне прслине која се може начинити видљивом, јер се појављује спајањем шупљина секундарног лома. Процес понашања прслине описан овим моделом се може повезати са J -интегралом при чему је карактеристична зависност J - Δa приказана на слици (4.1).

4.2 ЕПРИ поступак за срачунавање J -интеграла

J -интеграл је независан од путање интеграције. То значи да се она може погодно одабрати, тако да обухвата контуру елемента, која је истовремено и довољно удаљена од врха прслине и која се налази у еластичном пољу напона и деформација. Отуда се брзина ослобађања енергије за еластично-пластичне проблеме може одредити применом линеарно-еластичне анализе дуж контуре по којој делују оптерећења и померања која су позната. Зато је за срачунавање вредности J -интеграла могуће користити и нумеричке методе од којих се до сада највише примењује метода коначних елемената (МКЕ). Вредности J -интеграла за неке проблеме су, добијене на бази упрошћеног понашања материјала по круто-пластичном моделу или његовој комбинацији са прилагођеним еластично-пластичним моделима, док су Ши и Хачинсон узели у обзир и појаву деформационог ојачавања материјала користећи Рамберг-Озгудов модел. Најновији, знатно усавршенији инжењеријски приступ за срачунавање J -интеграла дали су Кумар, Герман и Ши. Они су предложили поступак који се састоји у одвојеном срачунавању, а затим сабирању његове еластичне компоненте J_{el} и компоненте при пуној пластичности лигамента J_{pl} у облику:

$$J = J_{el}(a_{ef}) + J_{pl}(a, n) \quad (4.1)$$

Њихов прилаз је након разраде и провере прихваћен од Института за истраживање електричне енергије (Електриц Повер Ресеарч Институте - ЕПРИ) и публикован у инжењерском приручнику. На слици (4.2) је шематски приказана зависност J -интеграла и његових компоненти од задате силе P . Може се уочити да је пластична компонента J_{pl} занемарљива при малим оптерећењима, али да доминира при великим. Резултујућа, збирна вредност J -интеграла се добро слаже са резултатима добијеним методом коначних елемената за еластично-пластичне услове. [2]

Слика 4.2 - ЕПРИ шема за срачунавање J -интеграла

4.2.1 Теоретска основа

Уколико се посматра тело ослабљено прслином и оптерећено до постизања пуне пластичности лигаментa, еластичне деформације се тада могу занемарити. Претпоставља се да понашање материјала може бити описано другим чланом Рамберг-Озгудовог израза (једначина 3.15):

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n. \quad (4.2)$$

Знајући да би J -интеграл дефинисао поље напона, оптерећење мора бити пропорционално, те се прва од једначина (3.17) за J -интеграл може исказати и у облику:

$$J = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 L h \left(\frac{P}{P_0} \right)^{n+1}, \quad (4.3)$$

где је h бездимензиона функција која зависи од геометрије и n , одређује се нумеричком анализом, L је карактеристична дужина тела, а P_0 је референтно оптерећење. Једначина (4.3) одређује вредност J -интеграла при пуној пластичности пресека. У условима линеарно еластичног понашања материјала ($n = 1$) J расте сразмерно са P^2 . [2]

4.2.2 Срачунавање J_{pl}

У условима пуне пластичности изрази за израчунавањем J -интеграла, J_{pl} , померање усана отвора прслине $(V_m)_{pl} = V_{pl}$ и померања нападне тачке силе $(V_P)_{pl} = \Delta_{pl}$ за већину геометрија имају облик:

$$J_{pl} = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 b h_1 \left(\frac{a}{W, n} \right) \left(\frac{P}{P_0} \right)^{n+1}, \quad (4.4)$$

$$V_{pl} = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 b h_2 \left(\frac{a}{W, n} \right) \left(\frac{P}{P_0} \right)^{n+1}, \quad (4.5)$$

$$\Delta_{pl} = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 b h_3 \left(\frac{a}{W, n} \right) \left(\frac{P}{P_0} \right)^{n+1}, \quad (4.6)$$

где је b - джина лигамент, a - джина прслине док су h_1 , h_2 и h_3 одговарајући бездимензиони параметри. За референтно оптерећење P_0 , се обично усваја гранична сила P_L , базирана на референтном напону $\sigma_0 = \sigma_T$ или $\sigma_Y = \frac{\sigma_T + \sigma_M}{2}$, при којој за разматрани случај долази до пуне пластичности нето пресека. Величине h -фактора за различите геометрије и вредности n , и граничне силе P_L , се могу наћи у ЕПРИ публикацијама и књигама из механике лома. [2]

4.2.3 Израчунавање J_{el}

Величина еластичног удела J -интеграла J_{el} представља еквивалент брзине ослобађања енергије, G , за ефективни дужину прслине, која се одређује применом модификованог Ирвиновог израза:

$$a_{ef} = a + \frac{1}{1 + \left(\frac{P}{P_0} \right)^2} \cdot r_p, \quad (4.7)$$

Величина пластичне зоне на врху прслине за материјал који има експонент деформацијског ојачавања n , израчунава се применом израза:

$$r_p = \frac{1}{\beta_\pi} \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2, \quad (4.8)$$

где је $\beta = 2$ за РСН, а $\beta = 6$ за РСД. Треба уочити да једначина 4.7 представља корекцију првог реда, јер се a_{ef} односно r_p срачунава за K_I , а не за K_{ef} , чиме се избегава поступак итерације. Само уврштавање утицаја пластичне зоне при срачунавању J_{el} , поред тога што нема теоретско покриће, релативно мало доприноси повећању његове вредности. Међутим, и поред тога, корекција је уврштена да би се остварио гладак прелаз са линеарно еластичног на потпуно пластично понашање. Истовремено, вредности J -интеграла срачунате на бази ових корекција су ближе вредностима добијеним методом коначних елемената у еластично-пластичној области. [2]

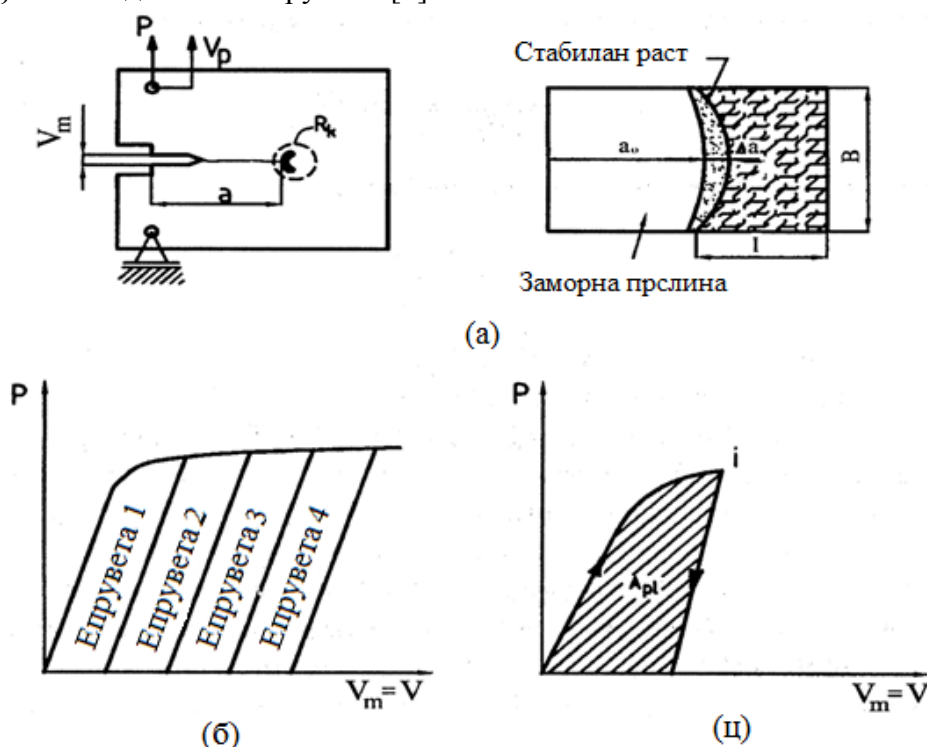
4.3 Стандардне експерименталне методе за одређивање J_{IC} и J_R

Користећи могућност да се J -интеграл одреди преко споља мерених величина (једначина 3.10) Рајс је први презентовао одређивање критичне вредности J_{IC} , експерименталним путем и применом само једне епрувете. Велики проблем код примене тог поступка представља прецизно откривање тренутка почетка раста прслине. При томе се полази од претпоставке да се иницирање раста прслине

појављује при максимално достигнутој сили, што је погрешно, а како се у околини максималног оптерећења вредност J -интеграл брзо мења долази до великог расипања вредности J_{IC} . Са друге стране поступак не даје могућност добијања J_R криве отпорности која описује раст прслине након иницијације, што је предложени поступак чинило неподесним за стандардизацију. [2]

4.3.1 Метода више епрувета

Метода више епрувета предложена од Ландеса и Беглија је кориговала претходне недостатке и послужила је као основ за утврђивање стандарда АСТМ Е813 за одређивање J_{IC} . Поступак је шематски приказан на слици (4.3). Испитивања се изводе на 4 до 5 готово идентичних, у овом случају, ЦТ-епрувета (слика 4.3, а) код којих су дужине заморних прслина a_0 исте, а $\frac{a_0}{W} > 0,5$. Свака епрувета се затеже до одређене вредности ($P_i, V_i; i = 1, 2, 3, 4 \dots$) као на слици (4.3), након чега се потпуно растеређује. Након тога се епрувета загрева на одређеној температури како би се истакао тамни део површине стабилног раста прслине (слика 4.3, а) од светле површине, накнадног статичког прелома или прелома замарањем при веома малим амплитудама оптерећења. Вредности дужине прслине a_0 и њеног стабилног прираштаја, Δa_i се због појаве заобљеног чела прслине дефинишу као просечна вредност физичке дужине прслине a_p , од бар девет мерења равномерно распоређених по дебљини епрувете. [2]



Слика 4.3 - Поступак одређивања методом више епрувета

Вредност J -интеграла за сваку епрувету се одређује из дијаграма сила-померање, $P - V_m$, користећи израз:

$$J = J_{el} + J_{pl}, \quad (4.9)$$

где су J_{el} и J_{pl} еластична и пластична компонента J -интеграла, респективно. За ЦТ епрувете, вредност J_i у тачки V_i ; P_i је:

$$J_{(i)} = \frac{K_{(i)}^2(1-\nu)}{E} + J_{pl(i)}, \quad (4.10)$$

где је на основу стандарда ASTM E 399 за одређивање K_{IC} :

$$K_{(i)} = \frac{P_i}{\sqrt{B_N W}} f(a_0/W). \quad (4.11)$$

Вредност $J_{(pl)i}$ се срачунава применом израза:

$$J_{pl(i)} = \frac{\eta A_{pl(i)}}{B_N b_0}, \quad (4.12)$$

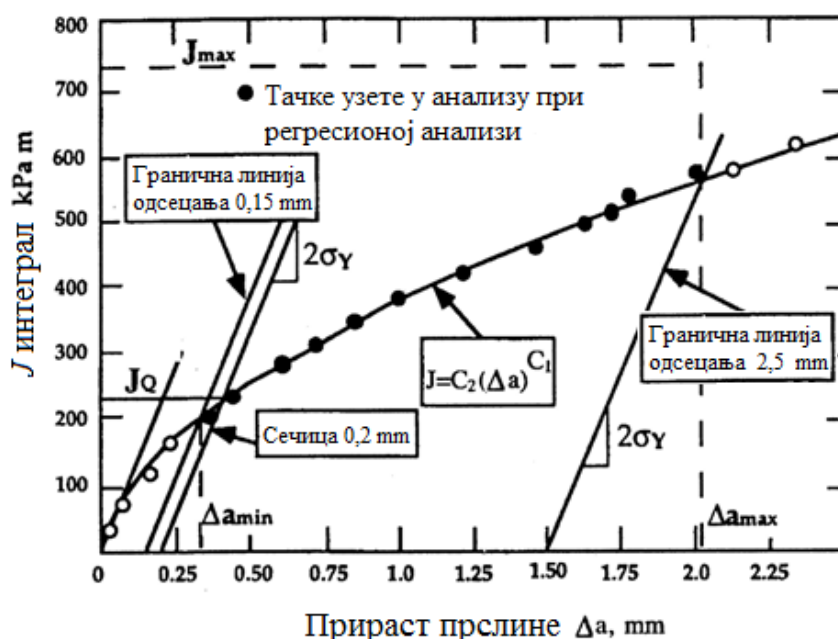
где је: i - тачка на P - V кривој (слика 4.3, ц), $A_{pl(i)}$ - површина испод P - V криве и лево од праве растерећења (слика 4.3, ц), B_N - нето дебљина епрувете, $b_0 = (W - a_0)$ лигамент епрувете, $\eta = 2 + 0,522b_0/W$ за ЦТ-епрувете, а $\eta = 2$ за СЕНБ епрувете. Вредности $f(a_0/W)$ у изразу за срачунавање $K_{(i)}$ као и еластичне попустљивости епрувете $K_{(i)} = (\Delta V / \Delta P)_i$ (слика 4.3) која је потребна да би израчунала површина $A_{pl(i)}$, као мера енергије утрошене на пластичну деформацију, су дефинисане стандардом ASTM E 813. На основу података (J_i ; a_i) за серију епрувета може се зависност $J = J(\Delta a_i)$, односно крива отпорности J_R приказати у облику степене функције $J = C_2(\Delta a_i)^{C_1}$. Коефицијенти C_1 и C_2 се одређују регресионом методом најмањих квадрата, при чему се узимају само они подаци који се налазе унутар линија одбацивана које су паралелне са правом затупљивања, а повучене за дужине прслина $\Delta a = 0,15 \text{ mm}$ и $\Delta a = 1,5 \text{ mm}$ (слика 4.4). Линија затупљивања на слици (4.4), описује процес који непосредно претходи иницирању и стабилном расту прслине дуктилним чупањем у коме прслина привидно расте због заобљавања њеног врха (слика 4.3), је дефинисана изразом:

$$J = 2\sigma_Y \Delta a, \quad (4.13)$$

где је: $\sigma_Y = \frac{\sigma_T + \sigma_M}{2}$ напон ојачавања.

Гранична линија $0,15 \text{ mm}$ обезбеђује да је Δa најмање $0,15 \text{ mm}$, што омогућава прецизније мерење. Гранична линија $1,5 \text{ mm}$ обезбеђује да је Δa , начелно мање од 6% преосталог лигамента епрувете, што обезбеђује применљивост израза за израчунавање вредности J -интеграла. Истовремено, вредности J_i морају бити мање од максималне $J_{max} = b_0 \sigma_Y / 15$ коју капацитет епрувете дозвољава.

Вредност J -интеграла зависи од дефиниције почетка стабилног раста прслине дуктилним чупањем. И ако то на први поглед и није тешко, треба водити рачуна да се мерењем добију конзистентни резултати. [2]



Слика 4.4 - Шематски приказ поступка дефинисања J_R криве отпорности и вредности J_Q према стандардима E 1152-87 и E 813-87

Због тога се стандардом ASTM E 813-87 дефинише као почетак раста прслине и тренутак када она напредује за 0,2mm од почетне дужине прслине a_0 . То значи да је вредност J_Q за критичну вредност J_{IC} дефинисана пресеком сечеца паралелне линији затупљивања повучене из $\Delta a = 0,2 \text{ mm}$ и експоненцијалне J_R криве $J = C_2(\Delta a_i)^{C_1}$ (слика 4.4). Да би J_Q важило као J_{IC} мора се испунити низ захтева од којих су најважнији да је:

$$B; b_0 > 25 \frac{J_Q}{\sigma_Y}, \quad (4.14)$$

и да је нагиб:

$$\frac{dJ}{da} Q < \sigma_Y. \quad (4.15)$$

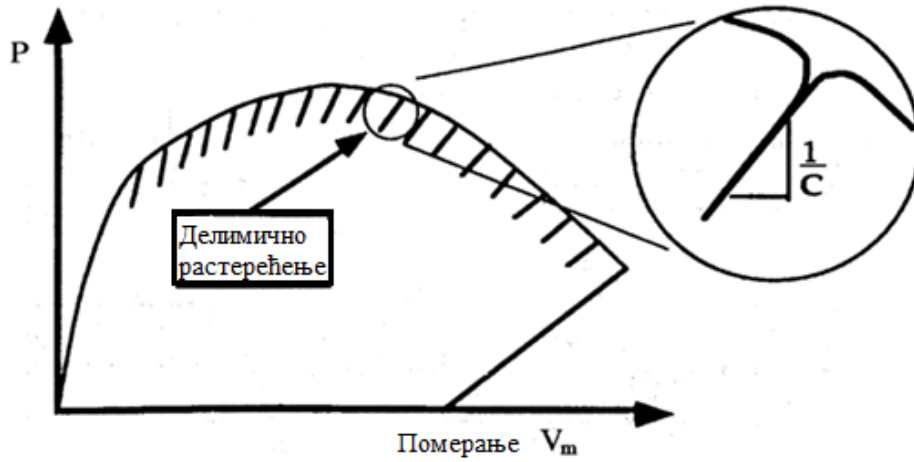
Треба напоменути да једначина (4.12) не узима у обзир раст прслине, већ је базирана на почетној дужини прслине. Због тога се претходни изрази користе само кад је од интереса одређивање мере жилавости лома J_{IC} , која дефинише, условно речено, почетак раста прслине. Другим речима, вредност J_{IC} не зависи од тога да ли је при израчунавању J -интеграла и дефинисању J_R криве узета у обзир корекција услед раста прслине. Уколико је, од интереса и укупна J_R крива, при срачунавању J -интеграла се мора применити корекција услед раста прслине.

4.3.2 Метода једне епрувете

а) За случај употребе епрувете на затезање

За добијање J_R криве није неопходно користити више епрувета ако може да се континуално прати или у одређеним интервалима утврди дужина прслине. Сада за то стоје на располагању технике пада потенцијала и попустљивости епрувете. Техника попустљивости се састоји у томе да се током процеса затезања епрувете повремено делимично еластично растерети и поново оптерети (слика 4.5). На бази

нагиба праве која дефинише попустљивост епрувете $C_i = (\Delta V / \Delta P)_i$ и (попустљивост се повећава и нагиб праве растерећења се смањује како прлина напредује) могуће је применом израза за калибрацију $a_i = f(C_i)$, за дати тип епрувете, одредити дужину прсине a_i . [2]



Слика 4.5 - Типични изглед криве сила - померање $P - V_m$ са повременим растерећењима за примену методе попустљивости.

Да би се за дату историју оптерећења добила J_R крива отпорности у тренутку растерећења i , J -интеграл се за растућу прсину срачунава коришћењем израза:

$$J_{(i)} = \frac{K_{(i)}^2(1-\nu)}{E} + J_{pl(i)}. \quad (4.16)$$

Фактор интензитета напона K_i је дат изразом:

$$\begin{cases} K_{(i)} = \left[\frac{P_i}{(BB_N W)^{1/2}} \right] \frac{2 + \frac{a_{(i)}}{W}}{\left(1 - \frac{a_{(i)}}{W}\right)^{3/2}} \cdot f_1\left(\frac{a_{(i)}}{W}\right), \text{ где је:} \\ f_1 = \left[0.886 + 4.64 \left(\frac{a_{(i)}}{W}\right) - 13.32 \left(\frac{a_{(i)}}{W}\right)^2 + 14.72 \left(\frac{a_{(i)}}{W}\right)^3 - 5.60 \left(\frac{a_{(i)}}{W}\right)^4 \right]. \end{cases} \quad (4.17)$$

Пластична компонента J -интеграла дефинисана је изразом:

$$J_{pl(i)} = \left[J_{pl(i-1)} + \left(\frac{\eta_{i-1}}{b_{i-1}} \right) \frac{A_{pl(i)} - A_{pl(i-1)}}{B_N} \right] \left[1 - \frac{\gamma_{(i-1)}}{b_{(i-1)}} (a_i - a_{i-1}) \right], \quad (4.18)$$

и у којој је за ЦТ епрувете: $\eta_i = 2 + (0.522)b_{(i)}/W$, $\gamma_i = 1 + (0.76)b_{(i)}/W$, W - ширина епрувете, b_i - тренутна дужина лигамента, B_N - нето дебљина епрувете, a_i - тренутна дужина прсине, а $A_{pl(i)} - A_{pl(i-1)}$ је прираштај површине испод добијене криве сила - померање ($P-V$), а између линија константних померања на местима $i-1$ и i . У складу са J -интегралом дефинисаним на бази деформационе теорије, вредност $A_{pl(i)} - A_{pl(i-1)}$ се може изразити у облику:

$$A_{pl(i)} - A_{pl(i-1)} = \frac{(P_i + P_{i-1})(V_{i(pl)} - V_{i-1(pl)})}{2}, \quad (4.19)$$

где је $V_{i(pl)}$ померање на правцу линије силе само услед пластичне деформације. Дужине прслина при сваком делимичном растерећену се одређује методом попустљивости. Стандард АСТМ Е 1152 ограничава област важења J -интеграла за растућу прслину и везује га за карактеристичне величине епрувете у облику:

$$B; b_0 \geq \frac{20 J_{max}}{\sigma_Y}, \quad (4.20)$$

или
$$J_{max} = \left\{ \frac{b_0 \sigma_Y}{20}; \frac{B \sigma_Y}{20} \right\}_{min}, \quad (4.21)$$

са једне, и величину напредовања прслине до 10% од лигамента

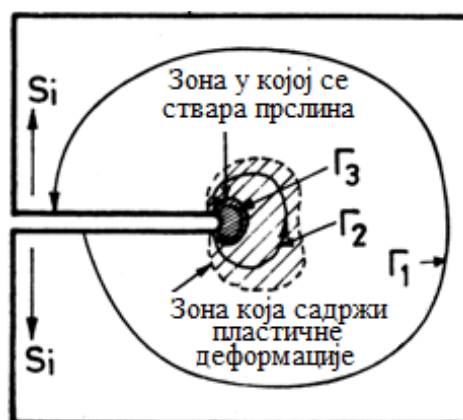
$$\Delta a_{max} \leq 0.1 b_0, \quad (4.22)$$

са друге стране, што је приказано на слици (4.5). При интерпретацији експерименталних података вредности за које је $J > J_{max}$ и $\Delta a > \Delta a_{max}$ не треба узимати у обзир.

Треба нагласити да је ограничење за примену методе једне епрувете чињеница да захтева примену софистициране опреме као што су мерни уређаји, појачивачи сигнала, давачи и комјутерски управљана кидалица са могућношћу снимања и обраде података.

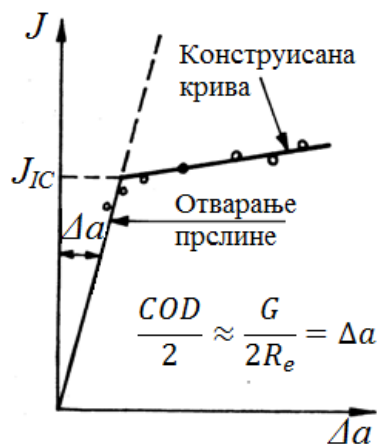
б) За случај епрувете за савијање

Одређивање J_{IC} и у овом поступку основно је питање како одредити критичну вредност J_{IC} . Слика (4.6) лепо приказује три могућа случаја полагања контуре за израчунавање J -интеграла. Али је јасно да ће само J -интеграл по контури 3 у зони где се ствара прслина, дати вредност J_C . Како је та зона мала, може се смањењем димензија епрувета та зона проширити и генералисањем доћи до закључка да се смањивањем дебљине епрувете та зона проширује и да се онда у таквом пољу добије $J_I = J_{IC}$. Отуда и закључак да се смањивањем димензија епрувете (по закону сличности) преко везе $J_{IC} = G_{IC} = (1 - \nu^2) \frac{K_{IC}}{E}$ може да добије и ова карактеристика материјала K_{IC} . [3]



Слика 4.6 - Различити путеви интеграције $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ око зареза у случају ограничене зоне пластичне деформације

Има више начина да се то постигне. По једном, одређује се тачка где линеарна промена J прелази у криволинијску (слика 4.7), а то је када после фазе отварања прслине почиње фаза сталног, стабилног ширења прслине, односно нелинеарно понашање односа $J - \Delta a$.



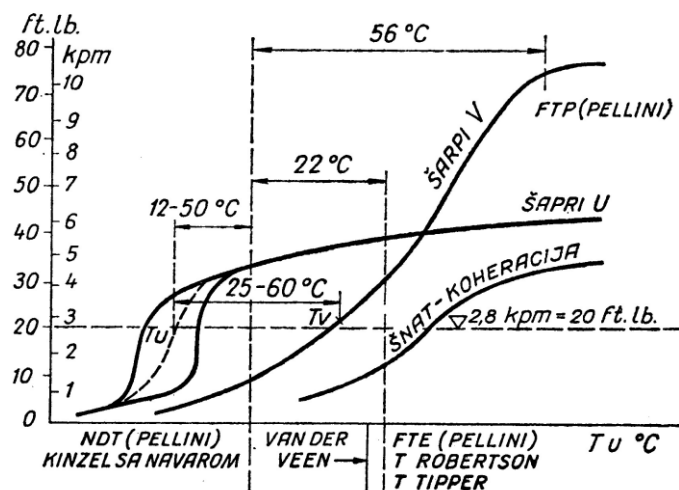
Слика 4.7 - Одредба J_{IC} полазећи од дијаграма померања отвора прслине (COD) из дијаграма $J - \Delta a$

По другом начину, који је комотнији, узимају се две потпуно исте епрувете (чак и за дужину прслине), од којих је једна оптерећивана, а друга служи само као слепа. Обе се вежу у серију у Томсонов мост. Напајање је наизменичном струјом (50 Hz) велике јачине (20 - 30A). Сигнали који се добијају су појачани, филтровани и посебно приказани. Регистровање овог поремећаја равнотеже омогућује тренутак кад се појави стабилна прслина. Заједничко регистровање сила, „померање према сили“ дозвољава дакле да се само једном епруветом одреди J_{IC} и K_{IC} , јер су они у вези:

$$J_{IC} = \frac{(1-\nu^2)K_{IC}^2}{E}, \text{ односно } K_{IC} = \sqrt{\frac{J_{IC} \cdot E}{1-\nu^2}} \dots \dots \text{ у МПа}\sqrt{m}.$$

Упоредом овако добијених вредности K_{IC} и вредности добијених према АСТМ показују да је сагласност одлична.

Класична испитивања су показала да се жилавост смањује са температуром (слика 4.8). Параметар K_{IC} је прави показатељ жилавости материјала и према томе и он ће у случају жилавих материјала да се снижава са снижењем температуре. Та се чињеница може искористити да се и са меким материјалом и релативно малим дебљинама може добити права вредност K_{IC} . При собној температури се добија K_{IC} већи (10 до 20 пута) него што је за крте материјале. Генерализујући ово искуство дошло се до закључка да се снижавањем температуре испитивања може да одреди температура прелаза у крстост, путем K_{IC} критеријума; при тој температури добијено K_I је K_{IC} за (меке) нискоугљеничне материјале. Треба водити рачуна да при овим температурама резултати зависе и од брзине, те треба одредити брзину експеримента према брзини напрезања будуће конструкције.



Слика 4.8 - Криве прелаза у крост за један исти челик добијене различитим типовима епрувета за удар

4.4 Израчунавање K_{IC} и J_{crit}

И ако су стандарди АСТМ Е 813-87 и АСТМ Е 1152-87 предвиђени за дуктилне материјале, најновији стандард Е 1737, који их обједињава, дозвољава примену J -интеграла и за крте материјале који се ломе механизмом цепања.

За услове раванског стања деформација (РСД) вредности K_{IC} и J_C дефинисане на истој тачки на $P - V$ кривој, повезане су изразом:

$$K_{IC} = \sqrt{\frac{J_C E}{1 - \nu^2}}, \quad (4.23)$$

где критична вредност J -интеграла J_C , може бити било J_{IC} , дефинисана у близини иницирања дуктилног раста прслине или, пак, у тренутку када се нестабилан раст прслине остварује механизмом цепања. Када се епрувете понашају на претежно еластичан начин, могу се одредити било K_{IC} или J_C , али случај са K престаје да важи са појавом већег пластичног деформисања на врху прслине. Димензиони захтеви за важеће одређивање J_{IC} и критичне вредности при цепању J_C , су много мање рестриктивни од оних за одређивање жилавости лома K_{IC} . Уколико се испуне потребни димензиони захтеви при одређивању J_C , онда се она преко једначине (4.23) може изразити у облику еквивалентног K_{IC} . Овако утврђена вредност K_{IC} , која се често означава са K_{IC} , може се сматрати као вредност која би се добила и експерименталним путем, али на довољно дебелим епруветама. Треба напоменути да је ова конверзија одговарајућа само када је критична вредност J_C , мера жилавости лома материјала која не зависи од величине. Вредност J_{IC} за почетак дуктилног раста прслине мора задовољити једначину (4.14). Такође, да би се конверзија могла извршити и у случају да се цепање при J_C , коме не претходи стабилан раст прслине одвијао под контролом J -интеграла мора се задовољити услов да је:

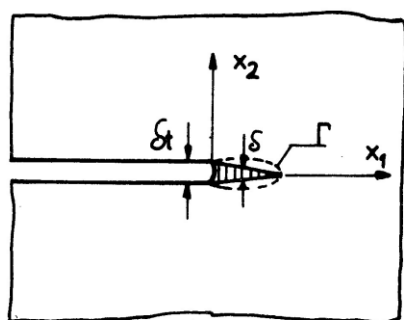
$$B; b_0 \geq \frac{MJ_C}{\sigma_Y}, \quad (4.24)$$

Према најновијим истраживањима за бездимензиону константу се препоручује вредност $M = 50$ као довољна, јер често коришћена вредност $M = 200$ даје исувише конзервативне резултате. [2]

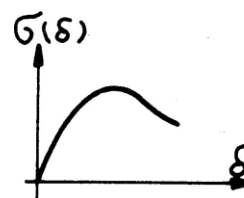
4.5 J -интеграл код Баренблат-Дагдејловог модела

Као пример прорачуна J -интеграла погодно је увести Баренблат-Дагдајелову прслину која ће бити на даље размотрена. За овај пример довољно је напоменути да је Баренблат-Дагдејлов модел заснован на претпоставци да је напон течења $\sigma = \sigma_Y = \text{const}$ на бесконачно узаном потезу дуж X_1 -осе.

Да би се одредила вредност J -интеграла код Баренблат-Дагдејловог модела, за контуру Γ узима се граница танке зоне пластичних напона (слика 4.9). [1]



а) Кохезиона зона на врху прслине



б) Напони у кохезионој зони

Слика 4.9 - Примена J интеграла код Баренблат-Дагдејловог модела

Како је на делу контуре $dX_2 = 0$, то J -интеграл (3.4) постаје:

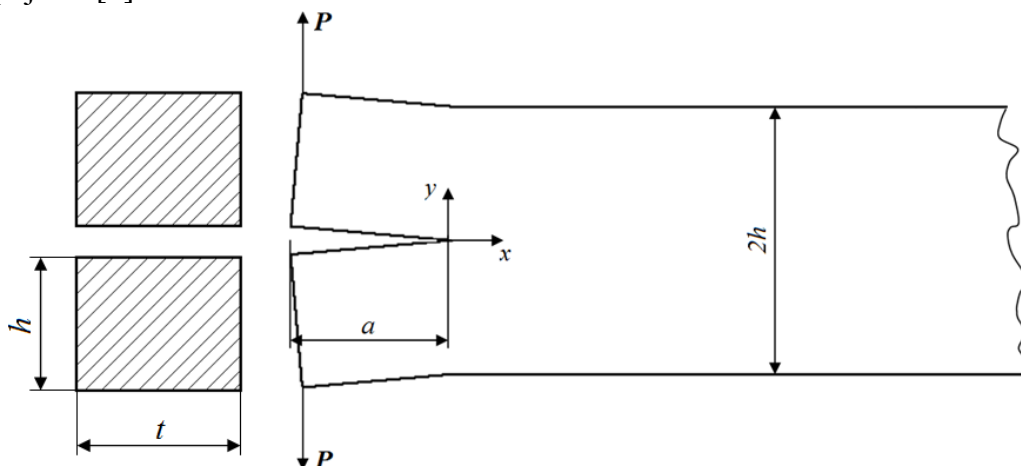
$$\begin{aligned} J &= - \int_{\Gamma} \vec{T}_i \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x} ds = -2 \int_{\Gamma} \sigma(\delta) \frac{1}{2} \frac{\partial \delta}{\partial x_1} \partial x_1 = \\ &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \int_0^{\delta} \sigma(\delta) \partial \delta \right\} \partial x_1 = \int_0^{\delta_t} \sigma(\delta) \partial \delta, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где је δ_t отварање на врху прслине. Према томе, ако је конфигурација прслине једна од оних за које је J познат, отварање прслине може се одредити директно из дијаграма сила - померање (слика 4.9, б).

5.0

Пример аналитичког израчунавања J - интеграла

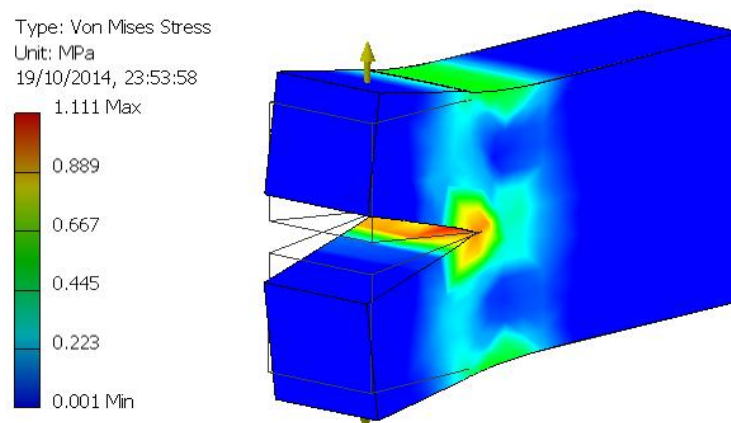
Помоћу J интеграла наћи фактор интензитета напона за проблем приказан на слици (5.1), у условима раванског стања деформације (РСД) и изотропно еластичног материјала. [6]



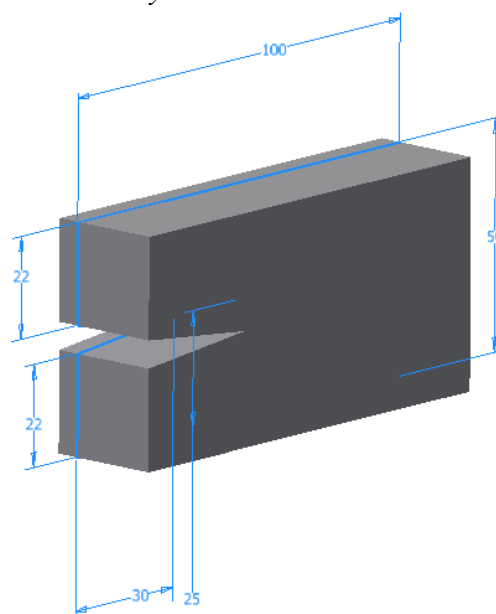
Слика 5.1 - Поставка проблема

Слика (5.2) представља прорачун и визуелизација добијених резултата *Von Mises*-ових напона у програму "Autodesk Inventor", на епрувети сличној као у поменутом задатку. Епрувета је димензија као што је приказано на слици (5.3) и оптерећена је са две затежуће силе од по 100N, обележене на слици (5.2) жутим стрелицама. За материјал епрувете изабран је челик просечног квалитета. Са слике

видимо да је највећи *Von Mises*-ов напон на врху прслине и износи негде око 1.1 МПа.

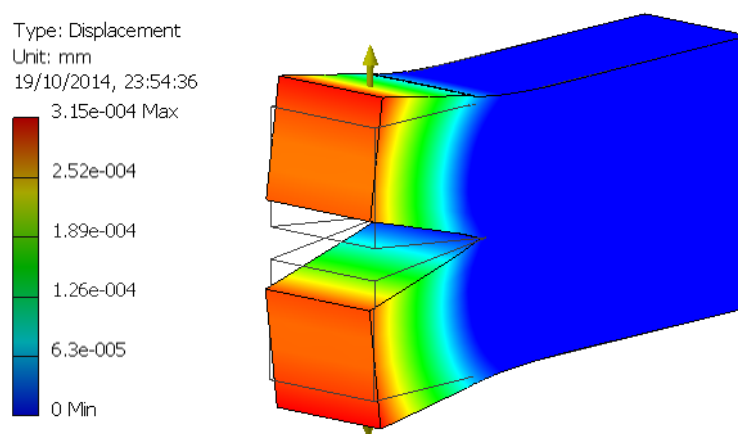


Слика 5.2 - Резултати *Von Mises*-ових напона



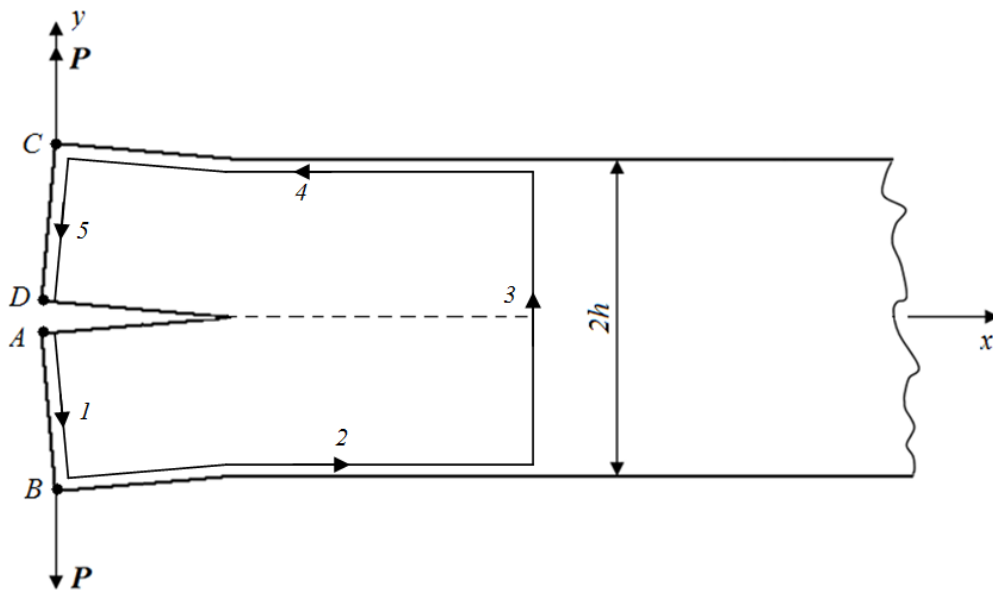
Слика 5.3 - Димензије епрувете

Највећа померања (слика 5.4) се налазе на крајевима епрувете и износе негде око $3,15 \cdot 10^{-4}$ mm.



Слика 5.4 - Резултати померања

Решење:



Слика 5.5 - Решење проблема

Контура Γ састоји се од контура: $\Gamma_1 \downarrow$, $\Gamma_2 \leftarrow$, $\Gamma_3 \uparrow$, $\Gamma_4 \rightarrow$ и $\Gamma_5 \downarrow$, па је:

$$J = J_{(1)} + J_{(2)} + J_{(3)} + J_{(4)} + J_{(5)}$$

$J_{(1)}$: На контури Γ_1 , је: $ds = dy$, $n_x = -1$, $T_x = -\sigma_x$, $T_y = 0$, следи да је:

$$J_{(1)} = \int_A^B W \cdot dy - \int_A^B T_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot ds$$

Како је за случај раванског стања деформације $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \epsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \sigma_x$ следи:

$$T_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\sigma_x \cdot \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \sigma_x = -\frac{(1-\nu^2)}{E} \cdot \sigma_x^2 = -2 \cdot W$$

где је: W - густина енергије деформације $W = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij}$

$$J_{(1)} = \int_A^B W \cdot dy - \int_A^B 2W \cdot dy = - \int_A^B W \cdot dy = - \int_h^0 W \cdot dy = \int_0^h W \cdot dy$$

$$W = \frac{1-\nu^2}{2E} \cdot \sigma_x^2, \quad \sigma_x = \frac{P \cdot a}{I_x} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right), \quad I_x = \frac{1}{12} \cdot h^3 \cdot t$$

$$W = \frac{1-\nu^2}{2E} \cdot \left[\frac{12 \cdot P \cdot a}{h^3 \cdot t} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \right]^2 = \frac{72 \cdot (1-\nu^2) \cdot P^2 \cdot a^2}{E \cdot h^6 \cdot t^2} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right)^2 =$$

$$W = \frac{72 \cdot (1-\nu^2) \cdot P^2 \cdot a^2}{E \cdot h^6 \cdot t^2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - h \cdot y + y^2\right)$$

$$J_{(1)} = \frac{72 \cdot (1-\nu^2) \cdot P^2 \cdot a^2}{E \cdot h^6 \cdot t^2} \cdot \int_0^h \left(\frac{h^2}{4} - h \cdot y + y^2\right) \cdot dy = \frac{72 \cdot (1-\nu^2) \cdot P^2 \cdot a^2}{E \cdot h^6 \cdot t^2} \cdot \left(\frac{h^3}{4} - \frac{h^3}{2} + \frac{h^3}{3}\right) =$$

$$J_{(1)} = \frac{72 \cdot (1-\nu^2) \cdot P^2 \cdot a^2}{E \cdot h^6 \cdot t^2} \cdot \frac{h^3}{12} = \frac{6 \cdot (1-\nu^2) \cdot P^2 \cdot a^2}{E \cdot h^3 \cdot t^2}$$

$$J_{(1)} = \frac{6 \cdot (1-\nu^2) \cdot P^2 \cdot a^2}{E \cdot h^3 \cdot t^2}$$

$J_{(2)}$: На контури Γ_2 је: $n_x = 0$, $T_x = T_y = 0$ па следи да је: $J_{(2)} = 0$

$J_{(3)}$: На контури Γ_3 је: $W = 0$, јер нема деформације, па следи да је: $J_{(3)} = 0$

$J_{(4)}$: На контури Γ_4 је: $n_x = 0$, $T_x = T_y = 0$ па следи да је: $J_{(4)} = 0$

$J_{(5)}$: На контури Γ_5 је: $ds = dy$, $n_x = -1$, $T_x = -\sigma_x$, $T_y = 0$, исто као на контури $J_{(1)}$, па је: $J_{(1)} = J_{(5)}$.

$$J = J_{(1)} + J_{(5)} = 2 \cdot J_{(1)} = \frac{12 \cdot (1-\nu^2) \cdot P^2 \cdot a^2}{E \cdot h^3 \cdot t^2}$$

$$J = \frac{12 \cdot (1-\nu^2) \cdot P^2 \cdot a^2}{E \cdot h^3 \cdot t^2}$$

За случај линеарно еластични материјал $J \equiv G$, па је коначно:

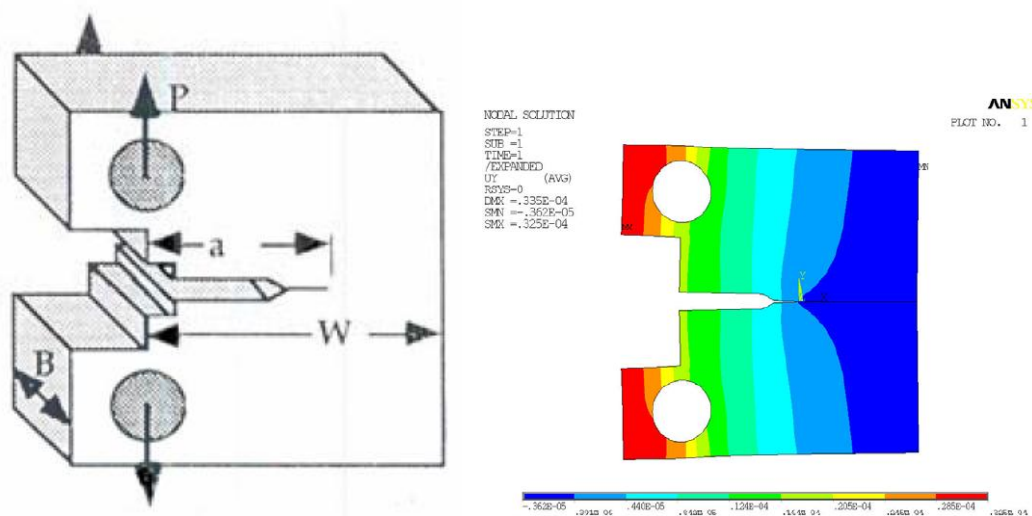
$$K_I = \sqrt{\frac{E \cdot G}{1-\nu^2}} = \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{12 \cdot (1-\nu^2) \cdot P^2 \cdot a^2}{E \cdot h^3 \cdot t^2}} = \sqrt{\frac{12 \cdot (1-\nu^2) \cdot P^2 \cdot a^2}{h^3 \cdot t^2}} = \frac{2 \cdot P \cdot a \cdot \sqrt{3}}{h \cdot t \cdot \sqrt{h}}$$

$$K_I = \frac{2 \cdot P \cdot a \cdot \sqrt{3}}{h \cdot t \cdot \sqrt{h}}$$

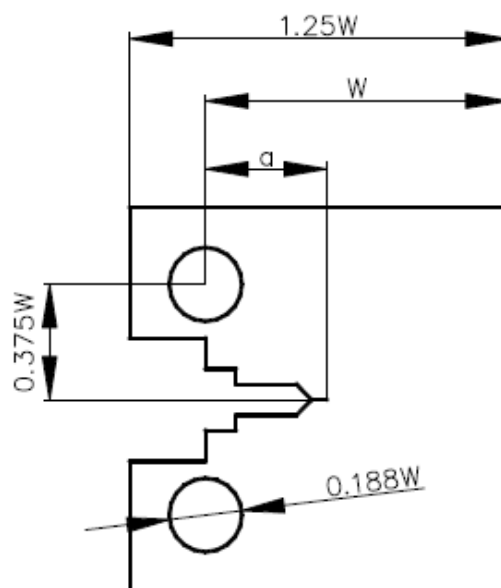
6.0

Пример нумерушког израчунавања J - интеграла

Помоћу софтвера "ANSYS", користећи J - интеграл израчунава се фактор интензитета напона K_I . Изглед испитиване епрувете и напони у њој приликом оптерећења приказани су на слици (6.1), а геометрија саме епрувете и прслине на слици (6.2), где је $W = 50 \text{ mm}$. [7]



Слика 6.1 - Изглед испитиване епрувете и напони у њој приликом затежуће силе P



Slika 6.2 - Geometija ispitivane epruvete

Коришћене су две врсте челика при испитивању и обележени су као "AISI 420" и "AISI 431". Први је нерђајући са мартензитном структуром који се користи за одговорне делове пумпи, као што су лопатице и клипњаче. Још се примењује и за делове вентила, алате за обраду пластике и стакла, стоматолошке и хирушке алате.

Друга врста челика "AISI 431" користи се за израду навртки и завртњева, вратила пумпи, пропелера пумпи и слично. Користи се у машиноградњи и хемијској индустрији због своје добре отпорности на корозију. [8]

Механичке особине поменутих челика дате су у табели (6.1), где су σ_T - напон течења, а σ_M - затезна чврстоћа.

У табели (6.2) дат је хемијски састав коришћених материјала.

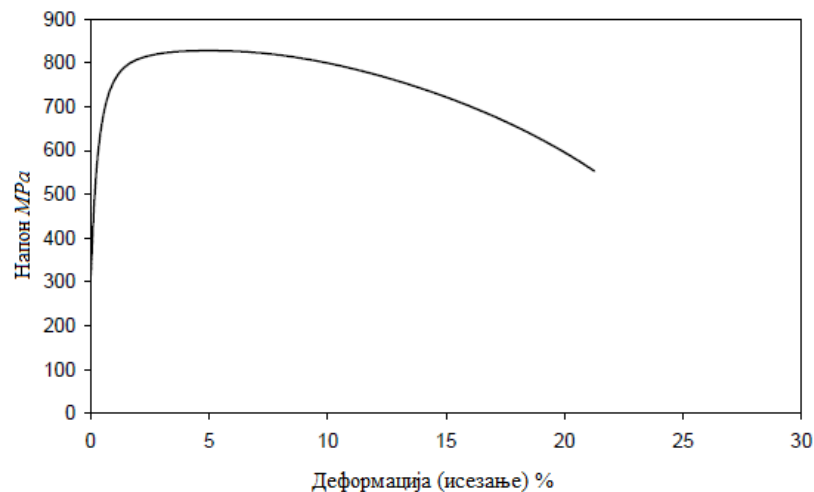
Табела 6.1 - Механичке особине материјала

Материјал	σ_T [MPa]	σ_M [MPa]
AISI 420	526	828
AISI 431	758,9	943,4

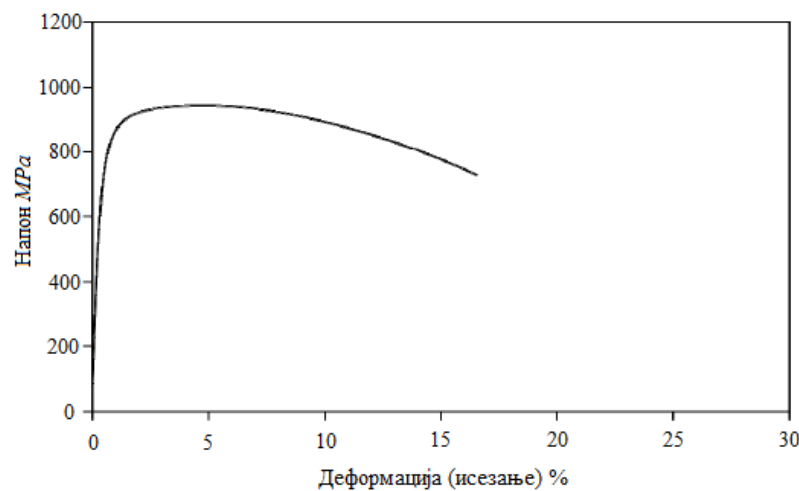
Табела 6.1 - Хемијски састав разматраних челика (%)

Материјал	C	Mn	P	Si	S	Ni	Cr	Остали
AISI 420	0,2	1,50	0,04	1,00	0,03	-	13,00	84,23
AISI 431	0,2	1,00	0,04	1,00	0,03	1,50	16,00	80,23

На сликама (6.3 и 6.4) приказани су дијаграми напон - деформација за испитиване челике.



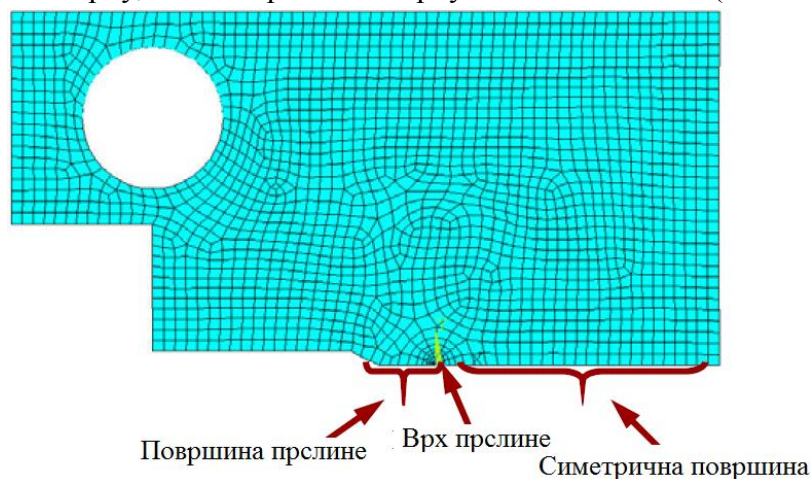
Слика 6.3 - Дијаграм напон - деформација за материјал AISI 420



Слика 6.4 - Дијаграм напон - деформација за материјал AISI 431

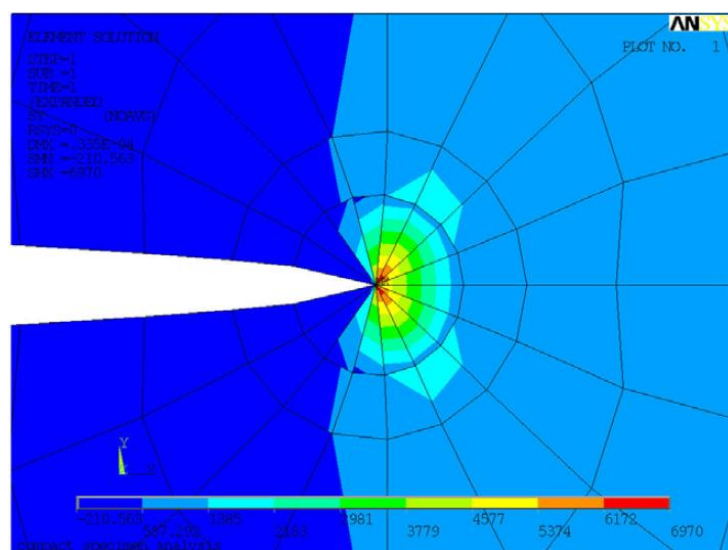
Да би експерименталном методом помоћу једне епруете израчунали J - интеграл узорак (епрувета) се обрађује "МКЕ" методом која је дефинисана "ASTM E1820" стандардом. Овом методом се процењује раст прслине, па се тако и вредност J - интеграла може одредити преко ширења прслине.

За примену "МКЕ" методе користимо дводимензионални модел компактног типа, по ISO стандарду, осмочворних четвороугаоних елемената (слика 6.5). [7]



Слика 6.5 - Половина епруете у "МКЕ" методи

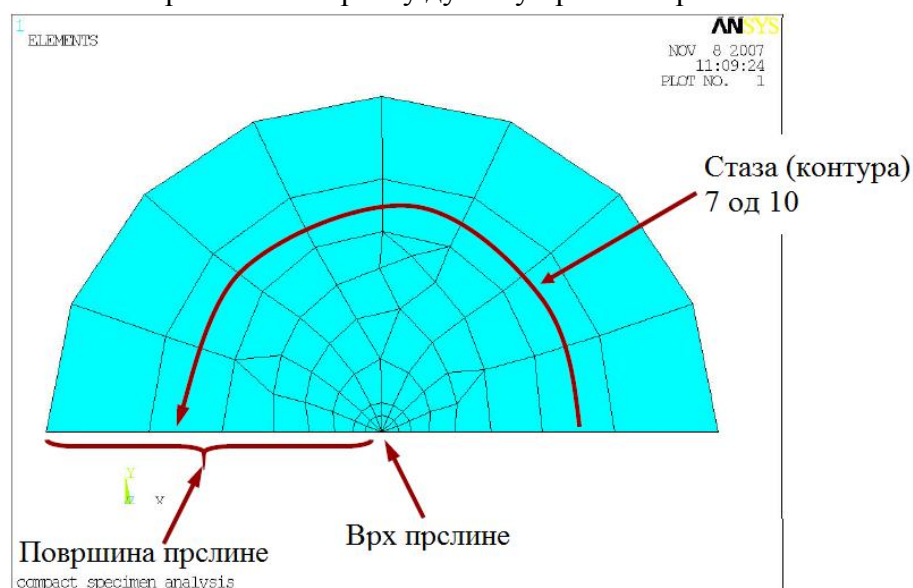
Посебна пажња се обраћа у дискретизацији врха прслине. Понашање материјала епрувете се сматра мултилинеарно, изотропно (каљено), а епрувета је оптерећена квази-статички, да би симулирали реалне услове, из експлатације слика (6.6).



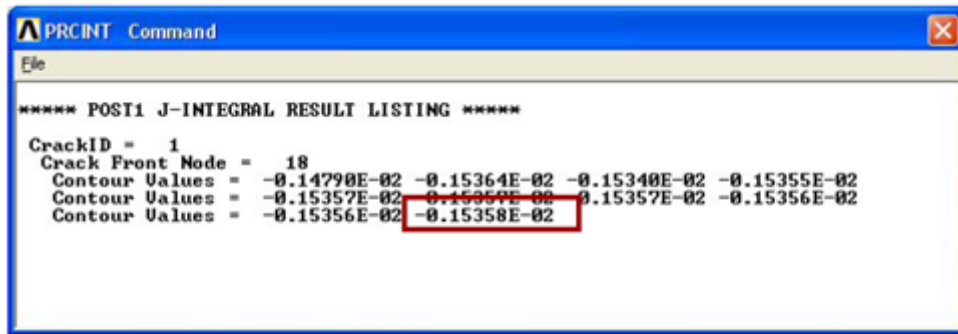
Слика 6.6 - Симулација оптерећене епрувете из софтвера "ANSYS"

Почетне величине прслине су дате по угледу на геометрију епрувете: $a/W = 0.25, 0.5, 0.75$. За симулацију прслине коришћено је постепено ослобађање чворова ограничења.

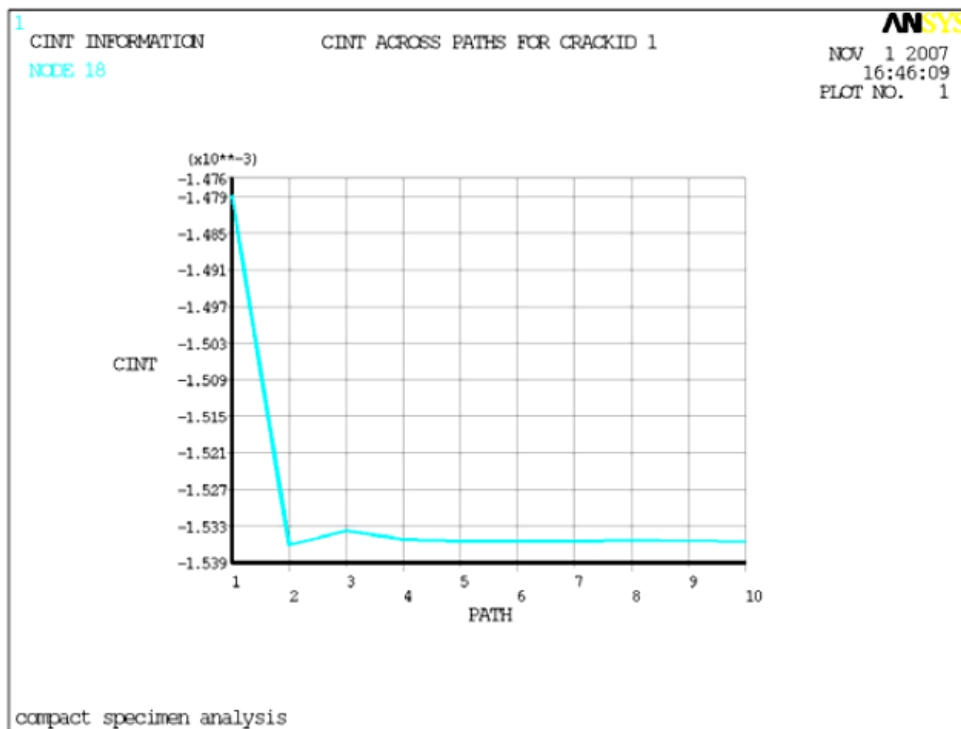
Након завршене "MKE" напонске симулације резултати су снимљени интеграционим тачкама елемената око врха прслине. То је учињено за сваку величину проширења прслине и резултати су коришћени као улаз за развијање нумеричког алгорита који израчунава J вредности на контуре (путање интегралења) које затварају врх прслине. Њихова просечна вредност представља коначну вредност J - интеграла за конкретну дужину прслине прслине.



Слика 6.7 - Визуелизација проблема израчунавања J - интеграла у софтверу "ANSYS"



$$J = 0,00154 \text{ Ib/in}$$



Слика 6.8 - Софтверско израчунавање J - интеграла и графички приказ истог

Под претпоставком да нема пластичног течења фактор интензитета напона K_I износи:

$$J = \frac{K^2 \cdot (1 - \nu^2)}{E},$$

$$J = 17.4 \text{ N/m}; \quad (0,00154 \text{ Ib/in})$$

$$E = 20,6 \text{ MPa}; \quad (30 \cdot 10^6 \text{ psi})$$

$$\nu = 0,3$$

следи да је:

$$K_I = 15,53 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}; \quad (225,3 \text{ psi} - \text{in}^{1/2})$$

7.0

Закључак

Механика лома, као наука, омогућила је да се дефинисање нових испитивања, којима се одређују величине параметара потребних да се оцени склоност ка развоју прслина и критични услови брзог развоја лома.

Данас постоје низ критеријума за оцену челика према кртом лому, као што је енергетски критеријум (G_{IC} , J_C), напонски критеријум (R_K , K_{IC} , K_{ID}) и деформациони критеријум (δ_C).

Теоретска оцена карактеристика механике лома показује да су критични коефициент интензитета напона K_{IC} , критична специфична енергија лома G , критично отварање прслине δ_C , као и интеграл Рајса, J_C , међусобно повезане.

Контурни J - интеграл користи се као параметар који карактерише лом тела која се еластично-пластично деформишу.

У условима ометања пластичне деформације и утицаја на ефективни напон течења σ_{Tef} и жилавости лома K_{IC} , ЕПМЛ може бити коришћена за предвиђање понашања при лому, где се пластично течење у равни прслине одвија неометено и прслина напредује уколико се после пластичне деформације на врху прслине достигне критична вредност J - интеграла, J_{IC} , или отворања врха прслине, δ_C . Ове појаве, ометеног деформисања, су са практичног становишта од примарне важности и могу се наћи у енергетским постројењима, хемијској индустрији и другим важним местима. Највећи део прслина се појављује у деловима под великим притиском, као што су посуде и цевоводи, који су израђени са дебелим зидовима.

Одређивање J - интеграла као критеријума лома се не ограничава, искључиво на постојање мале пластичне зоне, већ се J - интеграл, може израчунати при

постојању већих пластичних деформација, што је веома значајно. Вредност Рајсовог J - интеграла је јединствена и на зависи од путање интеграције. Од посебног значаја је чињеница да се J - интеграл може одредити и на готовим машинским деловима, због чега представља најперспективнији метод оцењивања отпора према кртом лому.

Критична вредност коефициента интензитета напона K_{IC} посебно је погодна за оцену кртих материјала. Мање вредности K_{IC} показују да је материјал више склон кртом лому. Вредност K_{IC} зависи, како од структуре материјала тако и од температуре и брзине деформисања при испитивању.

Првим примером смо показали како у условима раванског стања деформације може да се израчуна J - интеграл, а помоћу њега и фактор интензитета напона K .

Унапређењем науке и технологије дошло је до лакшег израчунавања J - интеграла. Појавом нових софтвера који су приступачнији и једноставнији за рад, олакшава се процес израчунавања и самог J - интеграла. Код оваквог решавања проблема најтеже је поставити реалне услове у којима се одвија експлатација конструкције.

На крају, потпуније разумевање понашања конструкције са прслином на основу испитивања епрувета са прслином и тумачења добијених резултата омогућава производњу економичнијих, сигурнијих и поузданијих конструкција.

Литература

- [1] Шумарац Д. и Крајчиновић Д., "Основи механике лома", Научна књига, Београд, 1990.
- [2] Ђулафић, В. Б., "Увод у механику лома", Универзитет Црне Горе, Машински факултет, Подгорица, 1999.
- [3] Милосављевић, М., Радојковић М. и Кузмановић Б., "Основи челичних конструкција", Грађевинска књига, Београд, 1986.
- [4] Бурзић З., Седмак С. и Мањго М., "Експериментално одређивање параметара механике лома заварених конструкција", Стручни рад, Београд, 2001.
- [5] Јовичић Г., Живковић М., Вуловић С., "Прорачунска механика лома и замора", Универзитетски уџбеник, Машински факултет, Крагујевац, 2011.
- [6] Николић Р., Вељковић Ј., Марјановић В., "Металне конструкције: збирка решених задатака", Факултет инжењерских наука, Крагујевац, 2013.
- [7] Вукелић Г., Брних Ј., "J-integral as possible criterion in material fracture toughness assessment", "Engineering Review Vol. 31", 2. Новембар, 2011.
- [8] https://caei.com/sites/default/files/CAEA_Fracture_Mechanics.pdf, 16.10.2014, 12:35, Крагујевац.