

Садржај

Резиме	2
1. Увод	3
1.1 Област примене	3
1.2 Типови конструкција	4
1.3 Конструисање и пројектовање	4
1.4 Основни конструкцијски елементи	5
1.5 Предности и недостаци металних конструкција	7
2. Конструктивно обликовање стубова оптерећених аксијалном притискујућом силом простог и сложеног попречног пресека	7
2.1 Опште	7
2.2 Линеарна теорија еластичног извијања	9
2.3 Извијање у пластичној области	12
2.4 Несавршености реалних штапова	14
2.4.1 Сопствени напони	14
2.4.2 Почетне (иницијалне) деформације	15
2.5 Криве извијања	16
2.6 Прорачун стабилности аксијално притиснутих штапова једноделног попречног пресека према стандарду	17
2.7 Дужине извијања	24
2.8 Одређивање дужине штапа према стандарду	25
2.8.1 Предмет стандарда	25
2.8.2 Одређивање дужине извијања штапова (стубова)	25
2.9 Аксијално притиснути штапови константног вишеделног попречног пресека	28
2.10 Прорачун стабилности аксијално притиснутих штапова константног вишеделног пресека према стандарду	31
3. Пример прорачуна и комплетна конструкција једног притиснутог стуба	36
4. Закључак	44
Литература	45

Резиме

Циљ овог рада је да се прикаже пројектовање притиснутих штапова изведених од стандардних ваљаних челичних профила. Извршена је суштинска подела на једноделне и вишеделне попречне пресеке. За разлику од затегнутих штапова, чије се димензионисање своди на контролу напона у попречном пресеку, код притиснутих штапова то није довољно. Проблем еластичне стабилности која се при овоме јавља решава се налажењем границе до које постоји стабилна равнотежа између унутрашњих и спољашњих сила. Посебан осврт дат је на прорачун и конструкцијско обликовање стубова оптерећених аксијалном притискујућом силом, поготово штапова сложеног попречног пресека (вишеделни штапови), чије су предности у могућности промене геометријских карактеристика (момената инерције) размицањем елемената. Целина и повећање стабилности се постиже местимичним спајањем самосталних елемената спојним лимовима. За један конкретан пример у раду је дат комплетан прорачун и конструисање притиснутог стуба, спољних лимова, главе и подножја стуба.

Кључне речи: Притиснути штап, еластична стабилност, аксијална притискујућа сила, момент инерције...

Abstract

The aim of this work is to present the designing of pressing rods derived from standardized rolled steel profiles. Completed the core division into single and multi-part cross-sections. Unlike the strained rods whose sizing down to control the force in the cross section of pressed rods is not enough. Elastic stability problem that arises when this is solved by finding the extent where is a stable equilibrium between the internal and external forces. A special emphasis was given to the calculation and constructions of forming the pillars axial pressing force, especially of complex cross section (multipart sticks) whose benefits and abilities to change the geometric properties (moment of inertia) were changing elements. Assembly and increase stability can be achieved in some places by merging independent elements connecting plates. For a specific example, the work gives a complete an estimate and construction of pressing pillar, merges with connecting plate, head and foot of the pillars.

Key words: Pressing rod, elastic stability, axial pressing force, moment of inertia...

1. Увод

1.1 Област примене

Под појмом металне конструкције подразумевају се конструкције које су претежно или потпуно израђене од метала. Сама конструкција састоји се од делова, који уграђени у конструкцију сачињавају функционалну целину. Конструкције се деле према конструисању, изradi и примени на: [7]

- ❖ мостове (друмски, железнички, пешачки, гвоздене скеле);
- ❖ зграде;
- ❖ транспортна средства (бродови, авиони, возови, аутомобили);
- ❖ носеће конструкције индустријских постројења (дизалице, претоварни мостови, транспортери, копачи, резервоари, постоља и сл.)



Слика 1.0 – *Мост Golden Gate, USA* [8]

Као материјал израде у металним конструкцијама се у највећој мери примењује челик, а све чешће и алуминијум. Алуминијум се примењује код конструкција код којих тежина има значајну улогу. Постоје и спрегнуте конструкције које су израђене од више различитих материјала.

Што се специфичности израде тиче, металне конструкције карактеришу врло мала машинска дорада (обрада ивица и бушење рупа) и спајање готових облика добијених

ваљањем (лимови код лимених конструкција и штапни профили код штапних решеткастих конструкција). [7]



Слика 1.1 – *Пример једне металне конструкције* [9]

1.2 Типови конструкција

Облик пресека употребљених делова (елемената) конструкције и решење општег облика конструкције условљавају поделу металних конструкција на:

- решеткасте конструкције
- лимене конструкције

У свакој конструкцији циљ је постићи најекономичније искоришћење материјала, а да се истовремено задовољи намена и преношење оптерећења.

Избор конструкције зависи и од низа чиниоца као што је врста напрезања које се у конструкцији јавља.

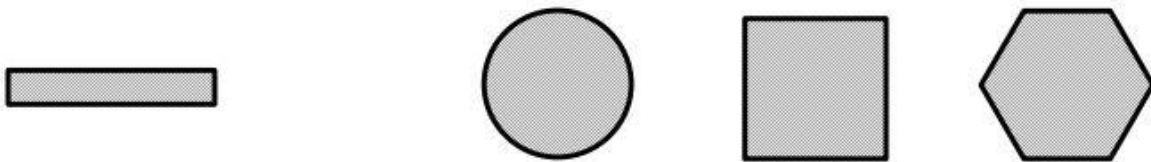
1.3 Конструисање и пројектовање

Осим намене, пројекат мора задовољити и архитектонске и естетске услове. Свако решење служи уједно као и извор идеја за нова решења. Пројекат конструкције мора садржати довољно података за конструкцијску разраду и детаљан прорачун, усвојене технолошке поступке и само извођење конструкције. Треба обезбедити лак приступ свим деловима (ради подмазивања, заштите од корозије), омогућити отицање воде са конструкције и задовољити све услове заштите на раду (ограде, скеле и сл.)

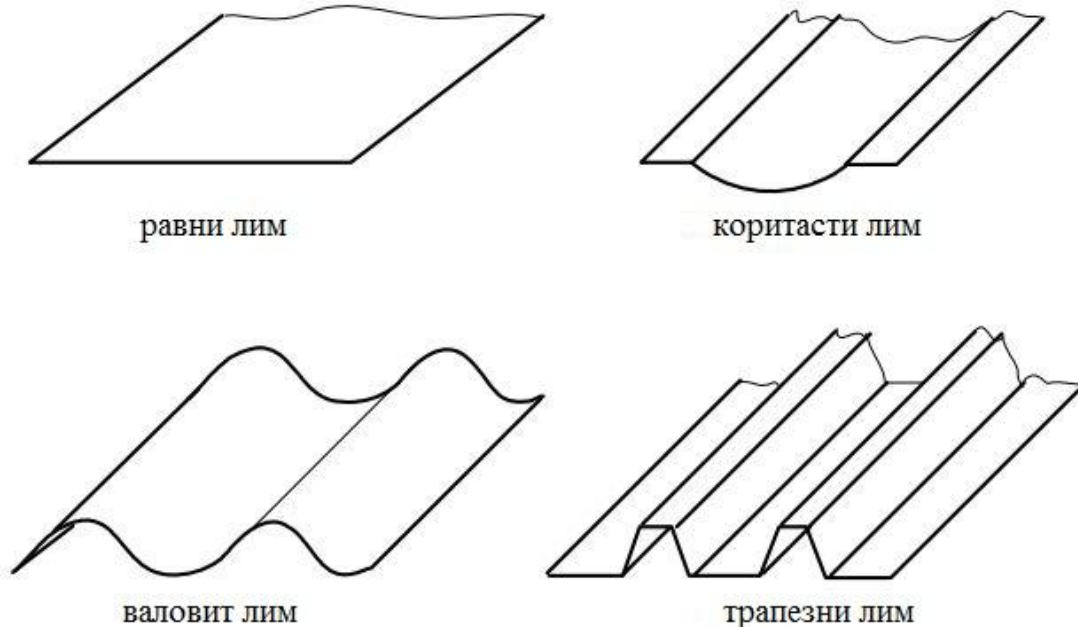
1.4 Основни конструкцијски елементи

Економичост примене челика у металним конструкцијама произилази управо из могућности коришћења, обликовања и прераде готових основних конструкцијских елемената који се деле на три основне групе:

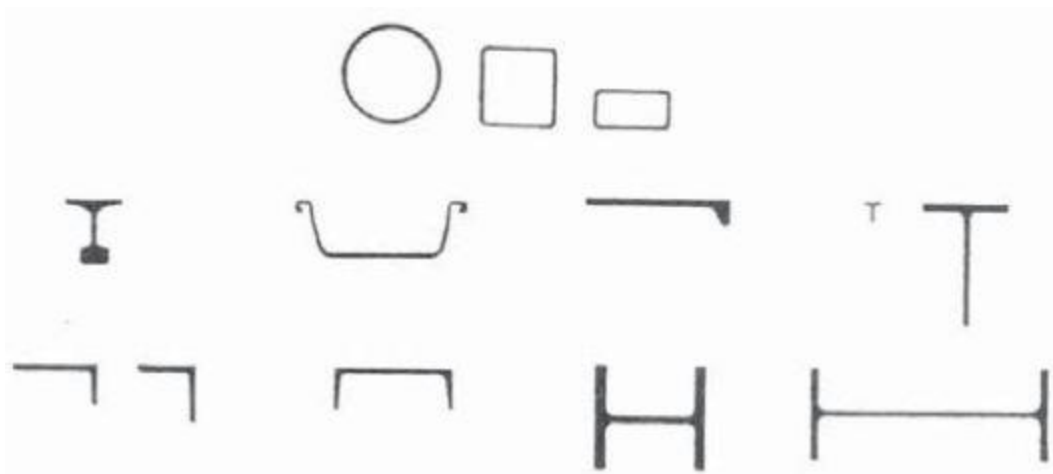
- траке (ламеле) и пуни профили (сл. 1.2)
- лимови (сл. 1.3)
- профилни носачи (сл. 1.4):
 - сложени профили (сл. 1.5)
 - хладно обликовани профили (сл. 1.6)



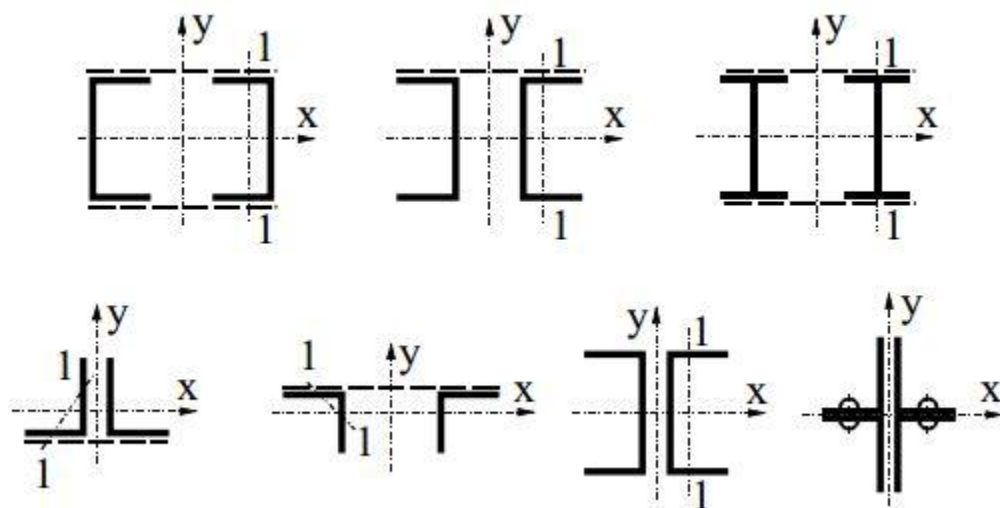
Слика 1.2 - Траке и пуни профили



Слика 1.3 - Лимови



Слика 1.4 - Профилни носачи



Слика 1.5 - Сложени профили



Слика 1.6 - Хладно обликовани профили

1.5 Предности и недостаци металних конструкција

Металне конструкције имају своје предности и недостатке.

Главне предности металних конструкција су:

- могућа потпуна фабричка израда конструкције а самим тим и монтажа готових делова
- висока механичка својства,
- мале димензије и тежине елемената челичних конструкција,
- лака манипулација, транспорт, монтажа и демонтажа,
- релативно лако фундавање,
- велика сеизмичка отпорност,
- флексибилност и адаптивност,
- захтевају врло мало машинске обраде (рупе, брушење ивица, попречни завари на спојевима)
- могућност комбиновања различитих материјала

Недостаци металних конструкција:

- потребно одржавање ради заштите од корозије
- неотпорност на пожаре (добри проводници топлоте па им порастом температуре знатно падају механичка својства)

2. Конструктивно обликовање стубова оптерећених аксијалном притискујућом силом простог и сложеног попречног пресека

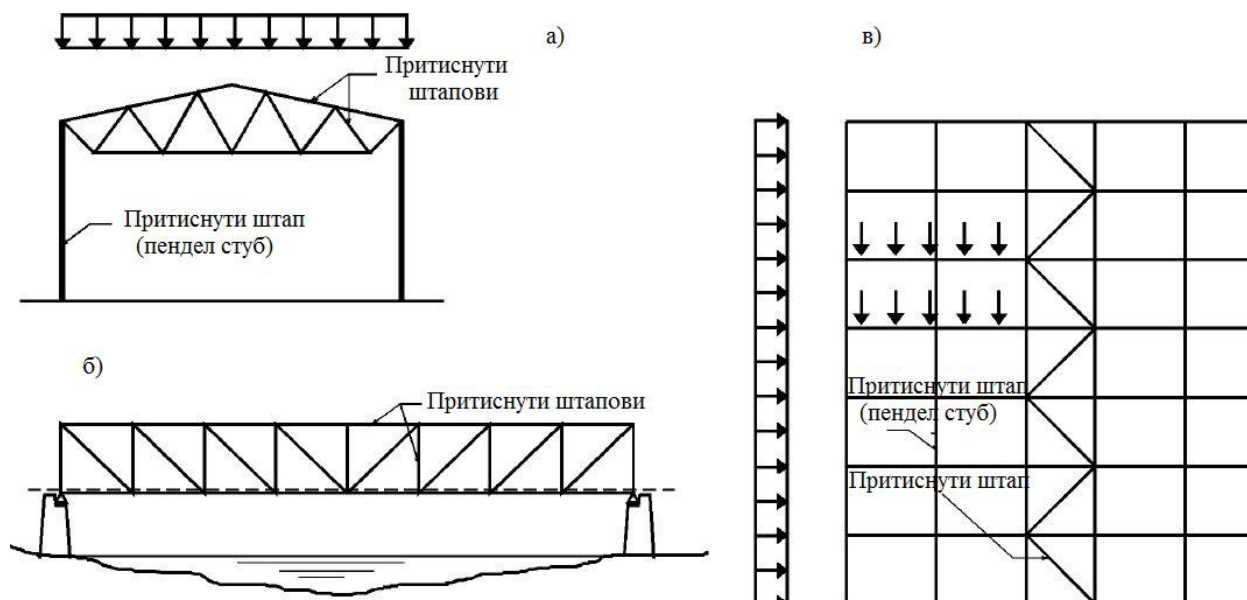
2.1 Опште

Велики број елемената у носећим челичним конструкцијама или њихових делова изложен је потпуном или делимичном притиску. Стубови, притиснути штапови решеткастих носача (појасни и штапови испуне) као и лучни носачи изложени су напону притиска по целој површини попречног пресека, док су гредни носачи, ригле и стубови оквира као и остали елементи оптерећени на савијање само делимично притиснути (попречни пресеци изложени притиску и затезању). За разлику од аксијално затегнутих штапова, при разматрању елемената чији су макар и поједини делови попречног пресека притиснути, мора се водити рачуна о њиховој стабилности. Може се, дакле, рећи да напон притиска изазива појаве нестабилности челичних конструкција. Поље примене притиснутих штапова у грађевинским конструкцијама је изузетно велико, а неке

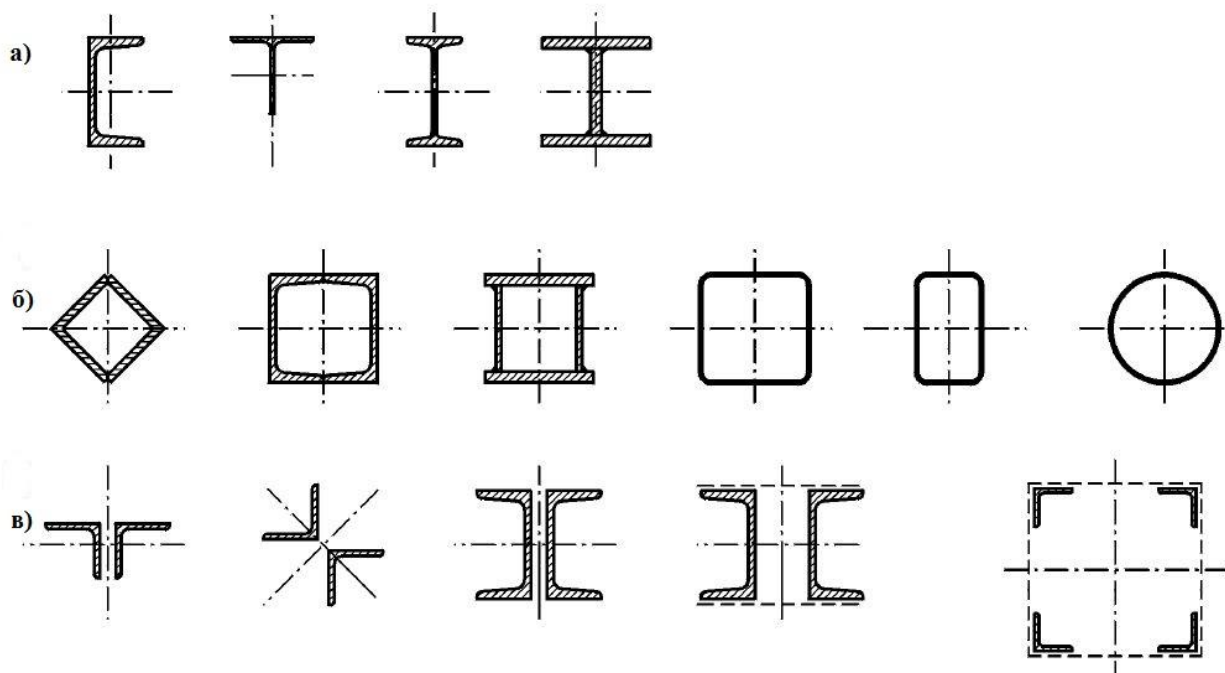
могућности примене приказане су на слици 2.0. Аксијално притиснути штапови се јављају као:

- појасни штапови и неки штапови испуне решеткастих носача у зградарству и мостоградњи (слика 2.0а,б),
- неки штапови хоризонталних и вертикалних спрегова у зградарству (слика 2.0 в) и мостоградњи,
- стубови код индустријских и спратних зграда (слика 2.0 а,в).

Код највећег броја притиснутих елемената гранична носивост није условљена критеријумом носивости, већ критеријумом стабилности. Појам стабилности може се, најједноставније, дефинисати као проблем "превременог" лома конструкције. Наиме, услед нестабилности притиснутих елемената, долази до исцрпљења носивости попречног пресека пре достизања допуштених напона. Како је челик материјал са високим механичким карактеристикама, али и релативно скуп, челични елементи се изводе као танкозидни (отворени или затворени) елементи, па се јављају и сви проблеми везани за стабилност танкозидних носача, као што су бочно извијање и избочавање. [1]



Слика 2.0 - Неке могућности примене аксијално притиснутих штапова у челичним конструкцијама: а) појасни штапови и дијагонале; б) појасни и штапови испуне решеткастих носача; в) штапови хоризонталних и вертикалних спрегова



Слика 2.1 - Попречни пресеци аксијално притиснутих штапова: а) ваљани или заварени профили отвореног попречног пресека; б) сандучасти профили; в) различити облици вишеделних попречних пресека

Попречни пресеци аксијално притиснутих штапова могу се изводити од једног или више међусобно повезаних делова. Према томе може се извршити подела на **једноделне** или **вишеделне попречне пресеке**. Ова подела није само систематска већ и суштинска, јер се начин прорачуна аксијално притиснутих штапова једноделног и вишеделног пресека битно разликује. Као једноделни попречни пресеци користе се ваљани или заварени профили отвореног попречног пресека приказани на слици 2.1а. Због уједначених геометријских карактеристика за обе главне осе инерције, изузетно су рационални шупљи профили, првенствено цеви, мада се веома често употребљавају и сандучасти профили добијени заваривањем од ваљаних профила или лимова (слика 2.1б). Широку примену имају и различити облици вишеделних попречних пресека, који се често користе, како у мостоградњи тако и у зградарству (слика 2.1в).

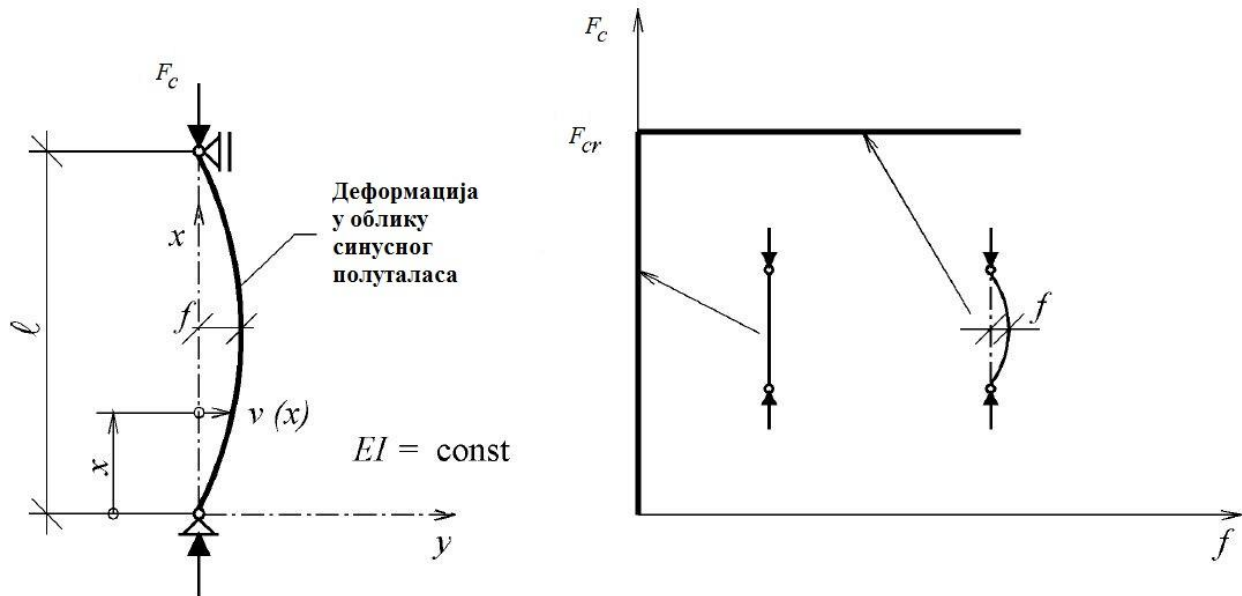
2.2 Линеарна теорија еластичног извијања

Проблем извијања аксијално притиснутог штапа у еластичној области први је обрадио Ојлер (Euler) још 1744. године. Он је разматрао извијање идеалног аксијално притиснутог штапа.

Основне претпоставке на којима се заснива Ојлерова теорија еластичног извијања су:

- ❖ штап је идеално прав (нема геометријских имперфекција),
- ❖ штап је зглобно ослоњен на оба краја,
- ❖ попречни пресек је константан и једноделан,
- ❖ спречене су торзионе деформације и
- ❖ материјал је хомоген, изотропан и линеарно еластичан.

Осим ових претпоставки, сматра се да је крива $F - f$ (нормална сила - угиб) билинеарна, као што је приказано на слици 2.2. Наиме, за све силе $F < F_{cr}$, нема бочних померања f , што значи да нема ни извијања све док се не достигне $F = F_{cr}$. Овако формулисан проблем назива се проблем бифуркационе стабилности.



Слика 2.2 - Извијање аксијално притиснутог штапа [1]

Да би се одредила вредност критичног оптерећења мора се посматрати деформисано стање штапа. Услови равнотеже деформисаног штапа дају основну диференцијалну једначину овог проблема. Момент савијања услед нормалне силе у произвољном пресеку је:

$$M = F_c \cdot v(x) \quad (2.1)$$

Ако се у диференцијалну једначину савијања штапа:

$$v''(x) = -M / EI \quad (2.2)$$

уврсти момент у функцији померања v , добија се следећа диференцијална једначина:

$$v''(x) + k^2 v(x) = 0 \quad (2.3)$$

где је:

$$k^2 = F_c / EI . \quad (2.4)$$

Једначина (2.3) је диференцијална једначина извијања аксијално притиснутог штапа.

То је диференцијална једначина другог реда са константним коафицијентима (F_c и EI су константе) чије се опште решење може претпоставити у следећем облику:

$$v(x) = A \cdot \sin kx + B \cdot \cos kx . \quad (2.5)$$

Увођењем граничних услова:

$$v(0) = 0 \text{ и } v(l) = 0 \quad (2.6)$$

из услова о егзистенцији нетривијалног решења добија се:

$$F_k \equiv F_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2} \quad (2.7)$$

где су:

E модул еластичности,

I момент инерције попречног пресека у равни извијања,

l дужина штапа.

Извијање обострано зглобно ослобођеног штапа основни је случај извијања. Могуће је, међутим, одредити критичну силу и за штапове са другачијим условима ослањања увођењем појма *дужина извијања* l_i . Ако се у изразу (2.7) дужина штапа замени дужином извијања добија се релација која важи и за друге случајеве ослањања. На слици 2.3 приказане су дужине извијања штапова са различитим условима ослањања.

Критични напон извијања може се лако одредити када је позната критична сила:

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_e^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i^2}{l_e^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (2.8)$$

где су:

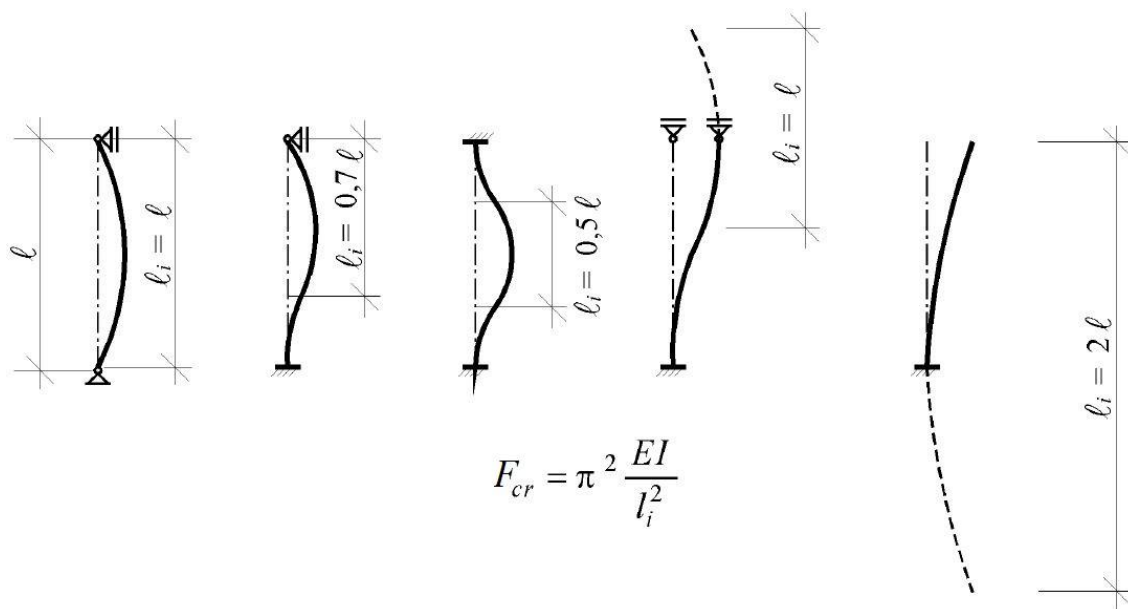
A површина попречног пресека,

$i = \sqrt{I/A}$ полупречник елипсе инерције,

λ виткост штапа.

На основу претходне једначине (2.8) може се закључити да критични напон извијања зависи само од виткости елемената јер је у линеарно еластичној области модул еластичности $E = const$. Критични напон се мења у функцији виткости λ по закону хиперболе (Ојлерове хиперболе).

Челик је, међутим, као већина осталих реалних материјала еласто-пластичан. Наиме, он поседује еластичне особине само до одређеног нивоа напрезања ($\sigma < f_p$), а при вишим напонима долази до пластификације. У пластичној области више не важи претпоставка о линеарно еластичној вези напона и деформације, па је област примене Ојлерове хиперболе ограничена.



Слика 2.3 - Дужина извијања штапова у функцији услова ослањања [1]

2.3 Извијање у пластичној области

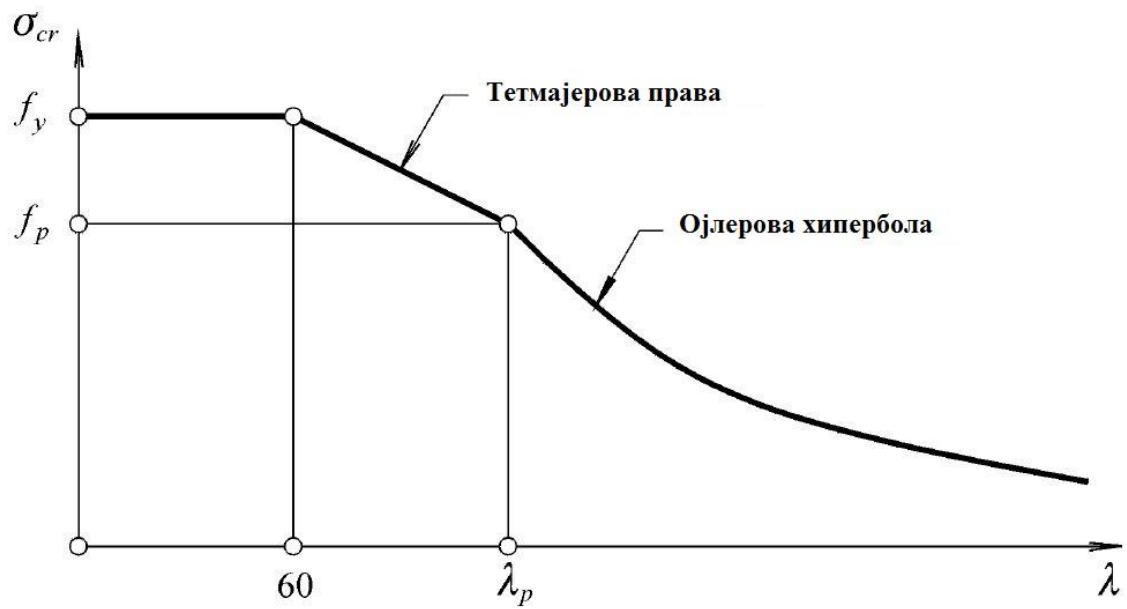
Како је домен примене Ојлерове линеарне теорије еластичног извијања ограничен само на напоне мање од границе пропорционалности ($\sigma < f_p = 0,8 \cdot f_y$), јавља се потреба за дефинисањем закона промене критичног напона извијања σ_{cr} у области нелинеарног понашања материјала. Прве експерименте у овој области вршио је Баушингер (Baushinger), док је прве изразе за везу напона и виткости у пластичној области дао Тетмајер (Tetmayer). Тетмајер је предложио линеарну везу између критичног напона и виткости у пластичној области:

$$\sigma_{cr} = f_y \quad \text{за} \quad 0 < \lambda < 60$$

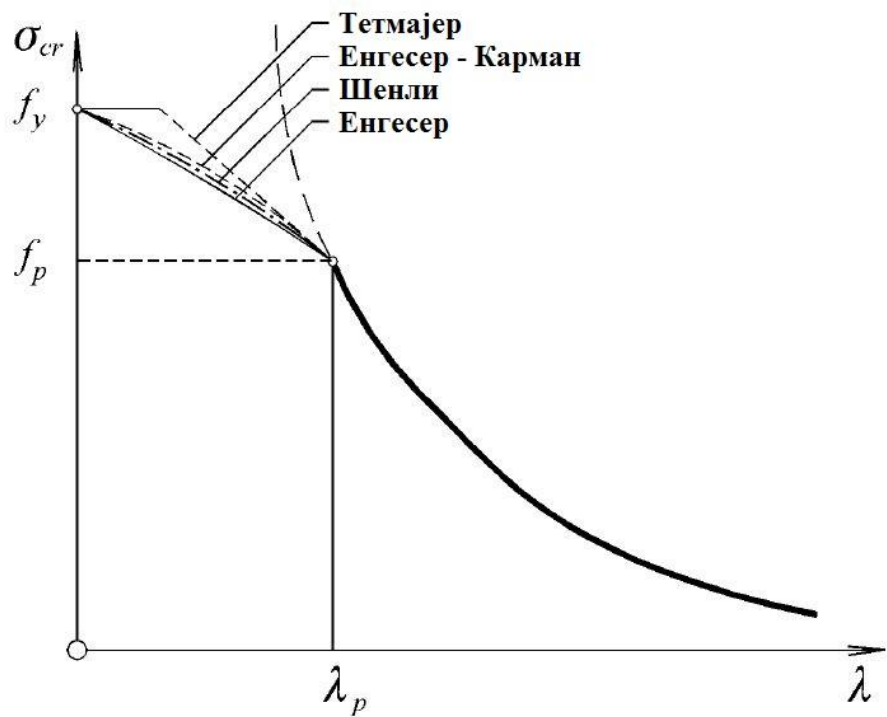
$$\sigma_{cr} = C_1 - C_2 \cdot \lambda \quad \text{за} \quad 60 < \lambda < \lambda_p$$

где је: $\lambda_p = \pi \sqrt{E / f_p}$ виткост на граници пропорцијалности.

Енгесер (Engesser) је у својим истраживањима обухватио промену модула еластичности у пластичној области уводећи тангентни модул еластичности ($E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$) у већ познате Ојлерове изразе за критичну силу и напон. Касније су се многи научници бавили овом проблематиком углавном ослањајући се на Енгесерова истраживања. Тако су Карман (Karman) и Шенли (Shanley) извршили модификацију Енгесерове криве. На слици 2.5 приказане су неке од најзначајнијих кривих извијања у пластичној области.

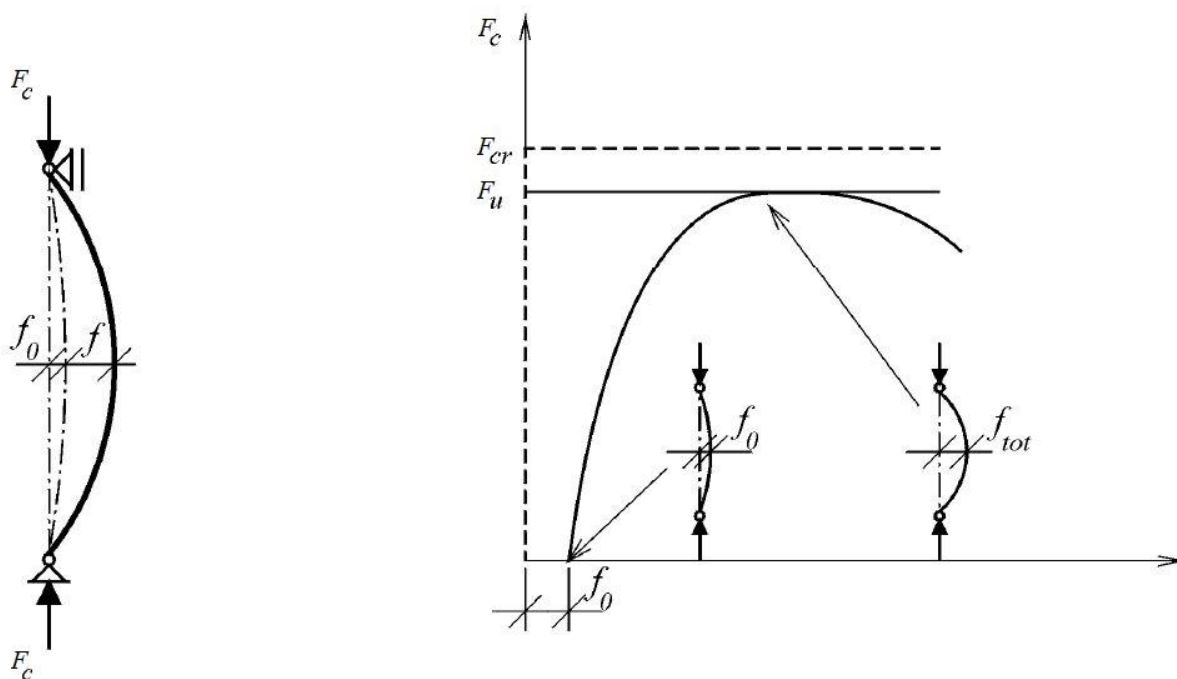


Слика 2.4 - Графичка презентација Тетмајерових израза за σ_{cr} [1]



Слика 2.5 - Криве извијања у пластичној области [1]

Досадашња разматрања заснована су на претпоставкама о идеално правом штапу, централном оптерећењу и идеално хомогеном материјалу. Међутим, осе реалних штапова не могу никада бити апсолутно праве нити оптерећење може бити идеално централно унесено. Ове имперфекције проузрокују додатне утицаје савијања изазване ексцентричним силама F . Механизам извијања дефинисан је реалном кривом $F - f$ (слика 2.6.). Јасно се види да је стварна критична сила F_u мања од теоријске (F_{cr}) услед несавршености реалних штапова.



Слика 2.6 - Смањење носивости реалних штапова - стварна крива $F - f$ [1]

2.4 Несавршености реалних штапова

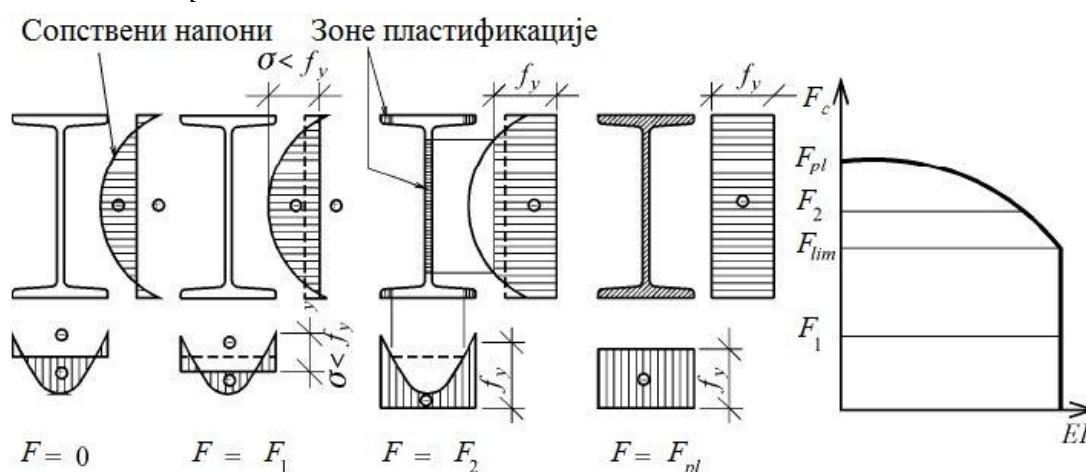
2.4.1 Сопствени напони

Сопствени напони који су у равнотежи у оквиру попречног пресека могу бити термичке (ваљање, заваривање) и механичке природе (исправљање). Утицај сопствених напона на носивост притиснутих штапова може се објаснити на следећи начин. Нека влакна попречног пресека се пластифицирају пре него што средишни напон достигне границу развлачења f_y . Тако пластификоване зоне изазивају смањење крутости пресека. На слици 2.7. приказан је развој пластичних зона у попречном пресеку аксијално притиснутог штапа. Може се уочити да је крутост пресека константна све док оптерећење не достигне вредност F_{lim} . Сила F_{lim} представља, наиме, максималну спољашњу силу коју пресек може да пренесе без појаве пластичних зона.

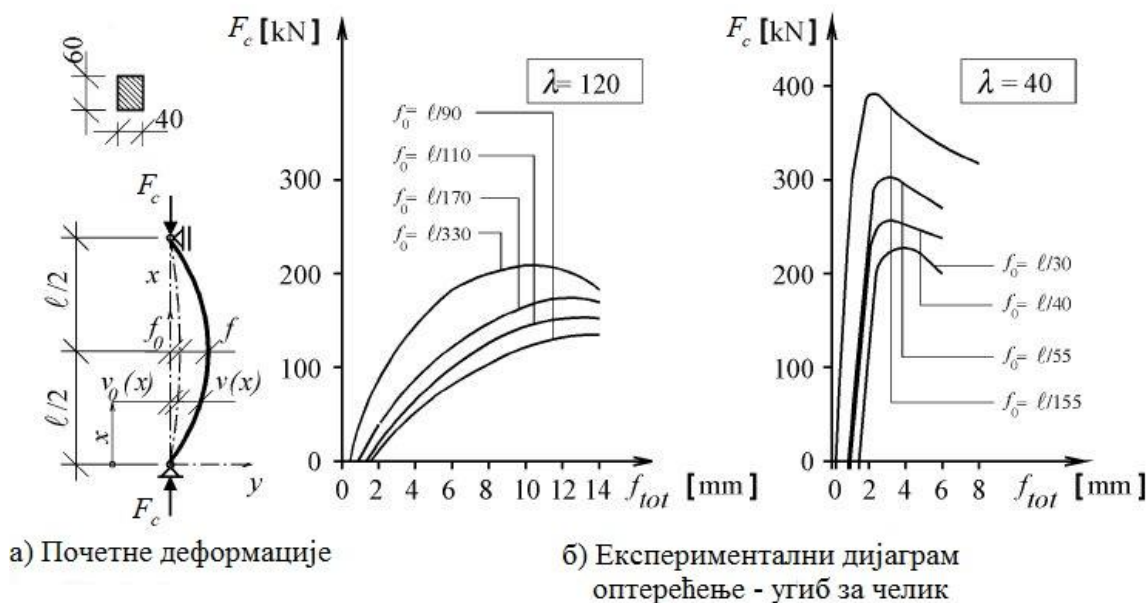
2.4.2 Почетне (иницијалне) деформације

Као што је већ поменуто, реални штапови, како ваљани тако и образовани заваривањем, израђени су са извесним геометријским имперфекцијама. Осе штапова не само што нису идеално праве, већ образују просторне криве. Ове насавршености представљају почетне деформације при извијању штапа и изазивају секундарне утицаје који имају за последицу смањење граничне носивости. Оне, наравно, морају бити мање од дозвољених вредности које су прописане одговарајућим стандардом. Ако се посматра обострано зглобно ослоњен, аксијално притиснут штап (слика 2.8а), почетна деформација може да се претпостави у облику синусног полуталаса:

$$v_0(x) = f_0 \sin \frac{\pi}{l} x \quad (2.9)$$



Слика 2.7 - Утицај сопствених напона на пластификацију попречног пресека [1]



Слика 2.8 - а) Почетне деформације; б) Експериментални дијаграми F - f [1]

Под утицајем аксијалне силе притиска F_c , а услед ексцентрицитета, на штап делује и момент савијања:

$$M = F_c \cdot v_0 \quad (2.10)$$

Овај момент изазива одговарајуће деформације, које утичу на даље повећање момента (теорија другог реда). Ако се у диференцијалну једначину извијања уведу и почетне деформације може се написати:

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \frac{F_c}{EI} (v(x) + v_0(x)) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \frac{F_c}{EI} \cdot v(x) = -\frac{F_c \cdot f_0}{EI} \sin \frac{\pi}{l} x \quad (2.11)$$

Интеграцијом се добија израз за померање $v(x)$:

$$v(x) = \frac{f_0}{\frac{\pi^2}{F_c \cdot l^2 / EI} - 1} \sin \frac{\pi}{l} x. \quad (2.12)$$

Максимални додатни угиб f се јавља у средини штапа ($x = l/2$):

$$v(l/2) = f = \frac{f_0}{F_{cr} / F_c - 1}, \quad (2.13)$$

па је укупни максимални угиб:

$$f_{tot} = f_0 + f = f_0 \cdot \frac{1}{1 - F_c / F_{cr}} \quad (2.14)$$

где је F_{cr} критична сила еластичног извијања идеално правог штапа.

Пресек у средини штапа је, дакле, напрегнут нормалном силом F_c и моментом савијања $M = F_c \cdot f_{tot}$. На слици 2.8б приказан је утицај почетне деформације на граничну носивост аксијално притиснутих штапова за две различите виткости. Може се закључити да је код штапова са малом виткошћу ($\lambda = 40$) носивост квази линеарна све до лома. Супротно, код јако витких штапова ($\lambda = 120$) угиби су много већи, а криве нису линеарне. Осим тога смањење граничне силе је знатно веће и у великој мери зависи од величине почетне деформације. Осим поменутих имперфекција, које највише утичу на носивост аксијално притиснутих штапова, постоје и друге, мање значајне. То су пре свега:

- ❖ промена границе развлачења по попречном пресеку,
- ❖ промена модула еластичности и
- ❖ ексцентричност оптерећења.

2.5 Криве извијања

Реална крива извијања треба да представља модификацију теоријске криве извијања (Ојлер - Енгесер), односно њено прилагођавање стварним условима, водећи рачуна о свим, поменутих, имперфекцијама. Истраживања, међутим, говоре да је немогуће проверу носивости свих притиснутих елемената извршити помоћу једне, јединствене криве извијања. Наиме, неопходно је узети у обзир многе параметре као што

су: величина почетне деформације, ниво сопствених напона, облик попречног пресека, начин израде и дебљина делова елемента (ножица и ребра). Да би се обухватили сви ови аспекти дефинисана је серија кривих извијања. За сваки појединачни случај може се одредити меродавна крива извијања и на основу ње извршити провера носивости. Европске криве извијања, које данас имају најширу примену, настале су као резултат дугогодишњих, како експерименталних тако и теоријских истраживања, која су спровођена у развијеним земљама Европе. Оне преко бездимензионалног коефицијента χ , дефинишу отпорност елемента на извијање у функцији релативне виткости ($\bar{\lambda}$) и имперфекција штапа. Имперфекције се узимају у обзир помоћу еквивалентних геометријских имперфекција (w_0) које обухватају:

- ❖ почетне деформације и то у износу $l/1000$ и
- ❖ сопствене напоне.

Аналитичкој формулацији европских кривих извијања највише су допринели истраживачи Ајртон (*Ayrton*) и Пери (*Perry*), као и Макуа (*Maquoi*) и Рондал (*Rondal*) са Универзитета у Лијежу. Европске криве извијања су нашле примену у стандардима готово свих европских земаља и Еврокоду 3. Оне, такође, представљају основ стандарда за центрично притиснуте штапове.

2.6 Прорачун стабилности аксијално притиснутих штапова једноделног попречног пресека према стандарду

Стандарди за прорачун центрично притиснутих једноделних штапова из 1986. године заснивани су на властитим искуствима и условима, али и на препорукама развијених земаља Европе. Овим стандардом обухваћен је прорачун носивости реалних штапова, дакле уведен је у прорачун утицај имперфекција.

Напомиње се да је овим стандардом, такође, обухваћен и прорачун вишеделних центрично притиснутих штапова, под условом да су самостални елементи међусобно повезани на растојању не већем од $15 \cdot i_{\min}$, где је $i_{\min}$ минимални полупречник инерције самосталног елемента.

Провера носивости центрично притиснутих штапова може се обавити на два начина, према следећим изразима:

$$\sigma_N = \frac{F_c}{A} \leq \sigma_{i,dop} = \chi \cdot \sigma_{dop} = \chi \frac{f_y}{\gamma} \quad \text{или у бездимензионалном облику} \quad (2.15a)$$

$$\bar{\sigma}_N = \frac{1}{\chi} \cdot \frac{\gamma \cdot F_c}{F_{pl}} \leq 1 \quad (2.15b)$$

где су:

F_c	нормална сила притиска,
A	површина попречног пресека,
σ_N	нормални напон услед аксијалне силе притиска,
σ_{dop}	допуштен нормални напон,
$\sigma_{i,dop}$	допуштен нормални напон извијања,
f_y	граница развлачења челика,
$F_{pl} = f_y \cdot A$	пластична отпорност попречног пресека,
$\chi = \sigma_{cr,y} / f_y$	бездимензионални коефицијент извијања,
$\sigma_{cr,i}$	критични напон извијања,
ν	коефицијент сигурности,
γ	фактор сигурности,
$\gamma = \nu^I = 1,50$	за основно оптерећење,
$\gamma = \nu^{II} = 1,33$	за основно + допунско оптерећење,
$\gamma = \nu^{III} = 1,20$	за основно + изузетно оптерећење.

У претходном делу било је речи о вези између критичног напона извијања $\sigma_{cr,i}$ и виткости штапа. Та зависност може се написати и у бездимензионалном облику увођењем коефицијента извијања χ и релативне виткости $\bar{\lambda}$. Коефицијент χ добија се када се критични напон подели са напоном на граници развлачења. Да би се очувала законитост виткост λ треба поделити са одговарајућом виткошћу на граници развлачења λ_v . Сада између бездимензионалних коефицијената χ и $\bar{\lambda}$ постоји иста веза као између критичног напона и виткости. Виткост на граници развлачења може се добити из познатог Ојлеровог израза за критични напон:

$$f_y = \pi^2 \frac{E}{\lambda_1^2} \Rightarrow \lambda_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (2.16)$$

Из претходног израза види се да λ_1 зависи само од f_y односно од врсте челика ($E = const.$). Међутим, мора се водити рачуна да је код дебелозидних носача ($t > 40mm$) смањен напон на граници развлачења, па се за овакве пресеке уводи редукована граница развлачења $f_{y,R} = 0,9 \cdot f_y$. У табели 2.1 дате су вредности виткости на граници развлачења за челике Č 0361 и Č 0561.

Табела 2.1 - Вредности виткости λ_1 за различите врсте челика и дебљине лима [1]

Квалитет челика	$t \leq 40 \text{ mm}$		$t > 40 \text{ mm}$	
	$f_y \text{ [kN/cm}^2\text{]}$	λ_1	$f_y \text{ [kN/cm}^2\text{]}$	λ_1
Č 0361	24	92,9	21,6	98,0
Č 0561	36	75,9	32,4	80,0

Када је дефинисана виткост на граници развлачења λ_1 , а уз познату виткост штапа ($\lambda = l_i / i$) може се израчунати и релативна виткост ($\bar{\lambda}$):

$$\bar{\lambda} = \sqrt{F_{pl} / F_{cr}}. \quad (2.17)$$

Међутим, бездимензионални коефицијент извијања χ не зависи само од релативне виткости $\bar{\lambda}$. Овим коефицијентом су, наиме, обухваћене и имперфекције. У зависности од облика попречног пресека и степена еквивалентних геометријских имперфекција, а у функцији параметра $\bar{\lambda}$, бездимензионални коефицијент извијања χ се одређује на основу одговарајуће криве извијања. ЈУС предвиђа пет кривих извијања A_0 , A , B , C и D од којих су три основне (A , B и C). Крива A обухвата пресеке у чијим се ивичним влакнима јављају заостали напони затезања, док кривој C припадају пресеци са заосталим напонима притиска. Крива B је између ова два крајња случаја. Ако се ради о елементима израђеним од челика бољег квалитета са $f_y \geq 43,0 \text{ kN/cm}^2$ примењују се криве A_0 , A и B уместо кривих A , B и C . За пресеке код којих је дебљина $t > 40 \text{ mm}$ примењује се крива D . Класификација појединих врста попречног пресека према припадајућим кривама извијања приказана је у табели 2.3. Вредност коефицијента извијања χ у зависности од криве извијања и релативне виткости штапа могу се прочитати са дијаграма (слика 2.9), или се могу добити аналитички на основу математичке интерпретације кривих извијања, и то на следећи начин:

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{за } \bar{\lambda} \leq 0,2 \\ \frac{2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\bar{\lambda}^2}} & \text{за } \bar{\lambda} > 0,2 \end{cases} \quad (2.18)$$

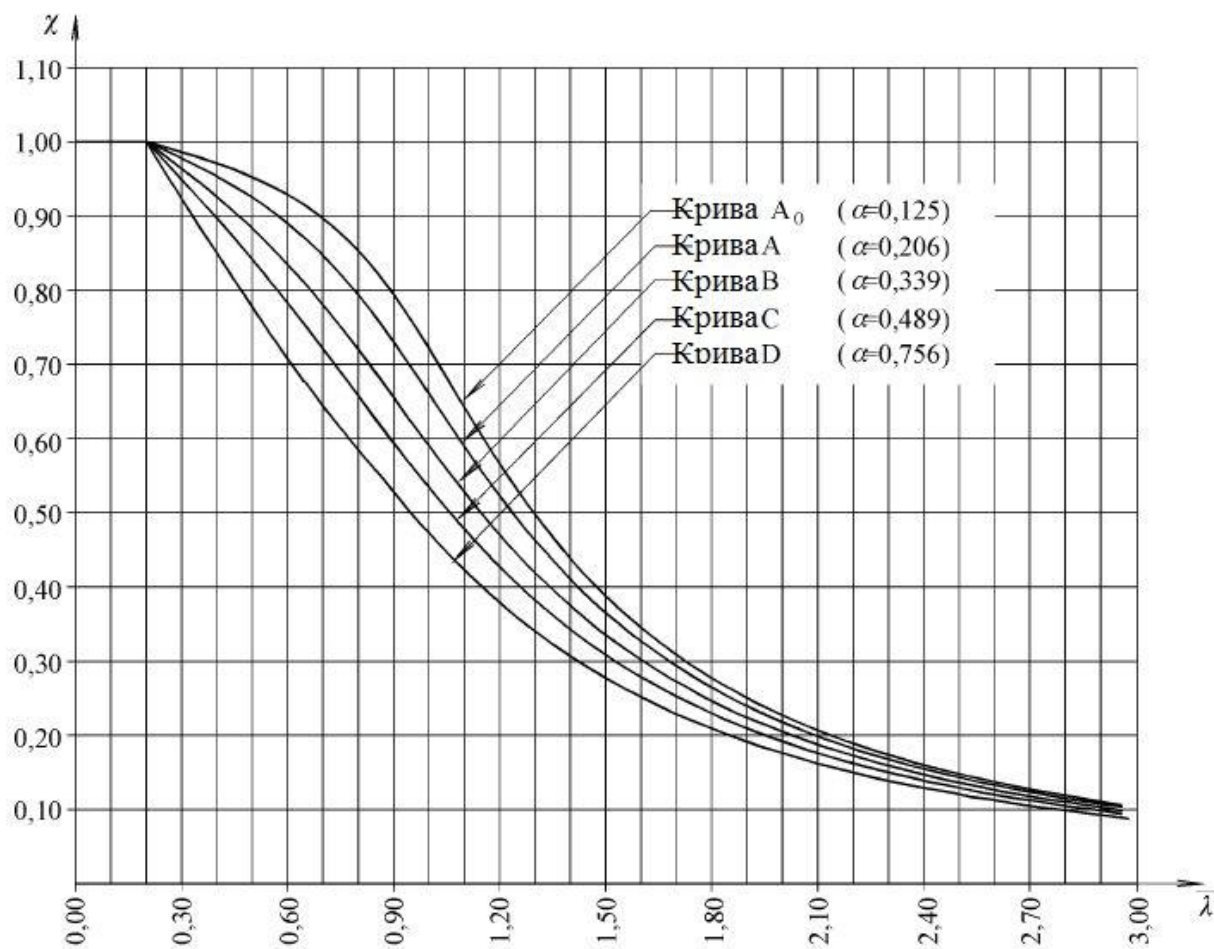
где је:

$$\beta = 1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \quad (2.19)$$

а α представља степен еквивалентних геометријских имперфекција и има вредности у зависности од криве извијања. У табели 2.2 дате су вредности α у функцији криве извијања.

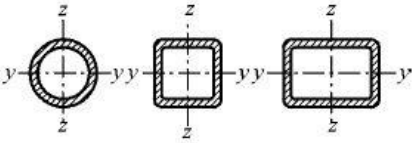
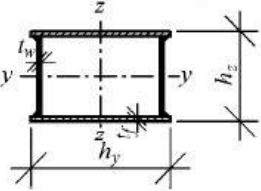
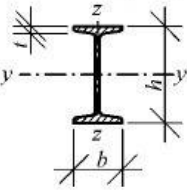
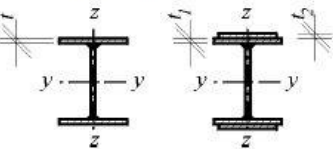
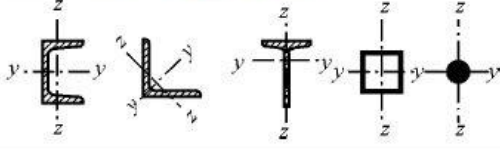
Табела 2.2 - Вредности коефицијента геометријске несавршености α за различите криве извијања [1]

Крива извијања	A ₀	A	B	C	D
α	0,125	0,206	0,339	0,489	0,756



Слика 2.9 - Криве извијања [1]

Табела 2.3 - Избор криве извијања за различите облике попречних пресека и осе извијања [1]

Тип попречног пресека ¹⁾		Извијање управно на осу	Крива ^{2) 3)} извијања
Шупљи профили 		y-y z-z	A
Заварени сандучасти пресеци 	Конструкциони шавови	y-y z-z	B
	Дебели шавови (пуни провар)	y-y z-z	C
Ваљани I - пресеци 	$h/b > 1,2$ $t < 40 \text{ mm}$	y-y z-z	A(A ₀) B(A)
	$h/b \leq 1,2$ $t \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	B(A) C(B)
	$t > 40 \text{ mm}$	y-y z-z	D
Заварени I - пресеци 	$t \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	B C
	$t > 40 \text{ mm}$	y-y z-z	C D
U - L - T - НОР - И пуни пресеци 		y-y z-z	C
1) Пресеци који нису заступљени у овој табели класификују се према Т.2.4 и 2.5. [1] У случају недоумице за пресеке са $t < 40 \text{ mm}$ применити криву извијања C. 2) Криве извијања дате у заградама примењују се за челике са $f_y > 430 \text{ MPa}$ и $t < 40 \text{ mm}$ 3) На бази експериментално и нумерички верификованих података за поједине типове попречних пресека могу се алтернативно применити за друге криве извијања.			

Табела 2.4 даје бројчане вредности коефицијента извијања χ у функцији релативне виткости $\bar{\lambda}$ и криве извијања. За међувредности параметра $\bar{\lambda}$ вредности коефицијента χ одређују се линеарном интерполацијом.

Табела 2.4 - Вредности бездимензионалног коефицијента χ [1]

$\bar{\lambda}$	Крива				
	A_0	A	B	C	D
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3	0,9859	0,9775	0,9641	0,9491	0,9235
0,4	0,9701	0,9528	0,9621	0,8973	0,8504
0,5	0,9513	0,9243	0,8842	0,8430	0,7793
0,6	0,9276	0,8900	0,8371	0,7854	0,7100
0,7	0,8961	0,8477	0,7837	0,7247	0,6431
0,8	0,8539	0,7957	0,7245	0,662	0,5797
0,9	0,7961	0,7339	0,6612	0,5998	0,5288
1,0	0,7253	0,6656	0,5978	0,5399	0,4671
1,1	0,6482	0,5960	0,5352	0,4842	0,4189
1,2	0,7732	0,5300	0,4781	0,4338	0,3762
1,3	0,5053	0,5703	0,4269	0,3808	0,3385
1,4	0,4461	0,4179	0,3817	0,3492	0,3055
1,5	0,3953	0,3724	0,3422	0,3145	0,2766
1,6	0,3520	0,3332	0,3079	0,2842	0,2512
1,7	0,3150	0,3994	0,2781	0,2577	0,2289
1,8	0,2853	0,2702	0,2521	0,2345	0,2093
1,9	0,2559	0,2449	0,2294	0,2141	0,1920
2,0	0,2323	0,2229	0,2095	0,1962	0,1766
2,1	0,2117	0,2039	0,1920	0,1803	0,1630
2,2	0,1937	0,1867	0,1765	0,1662	0,1488
2,3	0,1779	0,1717	0,1628	0,1537	0,1399
2,4	0,1639	0,1585	0,1506	0,1425	0,1302
2,5	0,1515	0,1467	0,1397	0,1325	0,1214
2,6	0,1404	0,1362	0,1299	0,1234	0,1134
2,7	0,1305	0,1267	0,1211	0,1153	0,1062
2,8	0,1216	0,1182	0,1132	0,1097	0,0997
2,9	0,1136	0,1105	0,1060	0,1012	0,0937
3,0	0,1063	0,1036	0,0994	0,0951	0,0882

Све напред речено односи се на пресеке код којих је задовољена локална стабилност, односно спречено избочавање појединачних делова пресека, ребра или ножица. Услов који мора бити задовољен да би било спречено локално избочавање је:

$$\sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,D}}} \leq 0,7 \quad (2.20)$$

где је $\sigma_{cr,D}$ критични напон линеарног избочавања дефинисан следећим изразом:

$$\sigma_{cr,D} = k_{\sigma} \cdot \sigma_E = k_{\sigma} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{\bar{b}} \right)^2 = k_{\sigma} \cdot 1,898 \cdot \left(\frac{100 \cdot t}{\bar{b}} \right)^2 \left[\frac{kN}{cm^2} \right] \quad (2.21)$$

$\bar{b}$ меродавна ширина елемента,

k_{σ} коефицијент избочавања,

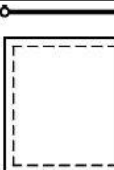
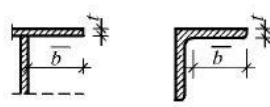
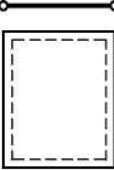
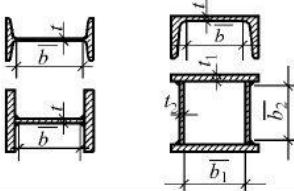
σ_E Ојлеров критични напон избочавања.

Када се у једначину (2.20) уврсти критични напон према изразу (2.21) у $E = 21000 kN/cm^2$ и $\nu = 0,3$ услов (2.20) добија следећи облик:

$$\bar{b}/t \leq 0,665 \sqrt{k_{\sigma} \cdot \frac{E}{f_y}} \quad (2.22)$$

где је $\bar{b}/t$ виткост посматраног дела попречног пресека штапа. Из претходне једнакости може се закључити да гранична виткост зависи од врсте челика (f_y) и коефицијента избочавања k_{σ} . Коефицијент избочавања k_{σ} зависи од начина напрезања и услова ослањања. У табели 2.5 дате су граничне вредности виткости у функцији од начина ослањања и врсте челика. Вредности коефицијента k_{σ} дате су за конзолне и обострано ослоњене притиснуте елементе.

Табела 2.5 - Граничне вредности виткости елемената попречног пресека $(\bar{b}/t)_{\max}$

Услови ослањања	k_{σ}	Гранична виткост	$(\bar{b}/t)_{\max}$		Карактеристични примери
			Č0361	Č0561	
	0,426	$\frac{\bar{b}}{t} \leq 0,434 \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	13	11	
	4,00	$\frac{\bar{b}}{t} \leq 1,33 \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	39	32	

Уколико није задовољен услов стабилности (2.20) у изразима (2.15а) и (2.15б) граница развлачења f_y замењује се граничним напонам избочавања σ_{ux} , који је дефинисан према стандарду за избочавање. Локална нестабилност притиснутих елемената изазвана избочавањем делова пресека може се, међутим, увести у прорачун и помоћу редукције делова попречног пресека. Уводи се, наиме појам ефективне ширине:

$$b_{eff} = \chi_D \cdot \bar{b} \quad (2.23)$$

$$\chi_D = \frac{0,6}{\sqrt{\bar{\lambda}_D^2 - 0,13}} \leq 1 \quad (2.24)$$

$$\bar{\lambda}_D = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,D}}}. \quad (2.25)$$

За $\bar{\lambda}_D \leq 0,7$ коефицијент $\chi_D = 1,0$ дакле $b_{eff} = \bar{b}$ односно активна је цела ширина елемента попречног пресека. Међутим, за $\bar{\lambda}_D > 0,7$ је $\chi_D < 1,0$ па се редукује ширина елемента попречног пресека ($b_{eff} < \bar{b}$).

Провера носивости пресека код којих нису испуњени услови локалне стабилности помоћу концепта ефективне ширине, аналогна је са провером носивости код пресека код којих је испуњен услов локалне стабилности (у једначинама (2.15а) и (2.15б) и даље фигурише f_y), са тим да се уместо површине пресека A при прорачуну користи ефективна површина

$$(A_{eff} = \sum_{i=1}^n b_{eff,i} \cdot t_i).$$

2.7 Дужине извијања

Дужина извијања се до сада везивала искључиво за услове ослањања штапа, а сва разматрања заснивана су на претпоставци о константној нормалној сили F и константном моменту инерције. У пракси се, међутим, врло често јављају штапови променљивог попречног пресека који су оптерећени такође променљивом нормалном силом. Осим тога, услови ослањања могу бити знатно компликованији (еластично укљештење, еластично бочно ослањање, бочно померљив систем,...). Све ово може се обухватити прорачуном по теорији II реда, узимајући у обзир почетне геометријске и структурне имперфекције. Међутим, прорачун се може спровести и једноставније, помоћу одговарајуће дужине извијања. Према томе може се закључити да дужина извијања не зависи само од услова ослањања већ и од распореда нормалних сила и промене момента инерције дуж штапа.

Шта је дужина извијања? Физички гледано, може се рећи да је дужина извијања дужина замењујућег обострано зглобно ослоњеног штапа константног пресека, оптерећеног константном нормалном силом, чија је критична сила $F_{cr} = \pi^2 \cdot EI / l_i^2$ једнака критичној сили посматраног штапа произвољних карактеристика. Са математичког аспекта, дужина извијања је растојање између суседних реалних или фиктивних превојних тачака извијеног штапа. Одређивање дужине извијања врши се помоћу коефицијента дужине извијања β и дужине штапа:

$$l_i = \beta \cdot l \quad (2.26)$$

Овим стандардом обухваћено је одређивање дужине извијања за низ случајева који се

најчешће јављају у пракси. За све специфичне случајеве, који нису обухваћени прописима, провера стабилности врши се помоћу теорије II реда.

2.8 Одређивање дужине штапа према стандарду

2.8.1 Предмет стандарда

Предмет овог стандарда је одређивање *дужине извијања* штапова константног и променљивог попречног пресека, оптерећених произвољно распоређеном нормалном силом, а у функцији различитих услова ослањања. Обрађене су четири карактеристичне групе елемената:

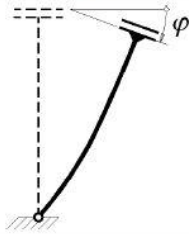
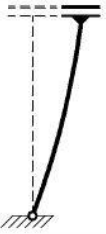
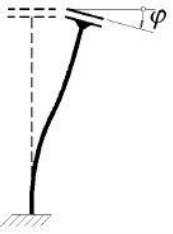
- ❖ штапови (стубови),
- ❖ штапови решеткастих носача,
- ❖ угаони штапови решеткастих стубова и
- ❖ моносиметрични танкозидни штапови отвореног попречног пресека.

2.8.2 Одређивање дужине извијања штапова (стубова)

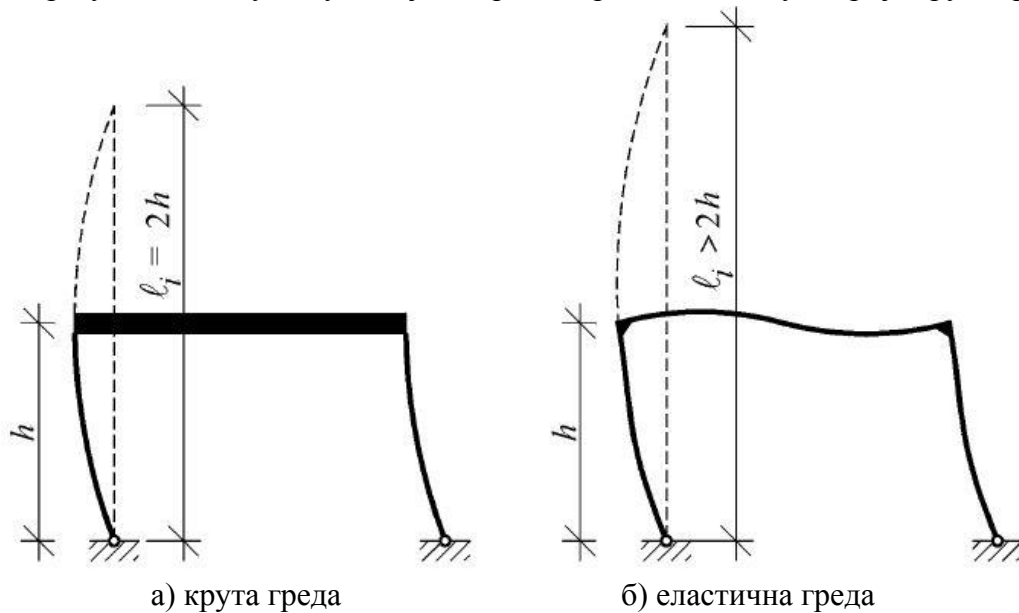
2.8.2.1 Штапови са константним моментом инерције и константном нормалном силом

Код оваквих елемената дужина извијања првенствено зависи од услова ослањања. Вредности коефицијента дужине извијања β у функцији услова ослањања приказане су у табели 2.6.

Табела 2.6 - Коефицијенти дужине извијања β за различите услове ослањања

a	b	c	d
			
$\beta = 2$	$\beta = 1$	$\beta = 0,7$	$\beta = 0,5$
e	f	g	h
			
$2 < \beta < \infty$	$\beta = 2$	$1 < \beta < 2$	$\beta = 1$

У горњем делу табеле 2.6 (a-d) приказани су, већ познати, основни - Ојлерови случајеви извијања. На овакав начин могу се одредити дужине извијања за самосталне – изоловане штапове, односно стубове. Дужина извијања стубова који су у склопу оквирних носача, осим од услова ослањања, зависи и од односа крутости греда (EI_b / l) и стубова (EI_c / h). У супротном (случајеви e или g), када је греда еластична (слика 2.10б), обртање чвора (φ) утиче на дужину извијања стуба, па се она мора одредити прецизнијом анализом. Дужине извијања стубова оквирних носача са померљивим или непомерљивим чворовима може се одредити према стандарду. За сложеније проблеме, који нису обрађени поменутом регулативом, дужину извијања треба одредити помоћу теорије другог реда. [1]



Слика 2.10 - Дужина извијања оквирних носача

2.8.2.2 Штапови константног попречног пресека са континуално променљивом нормалном силом

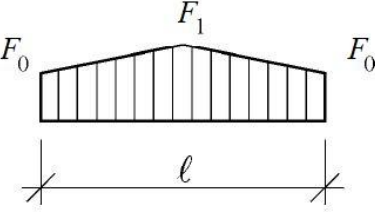
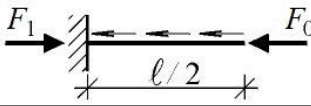
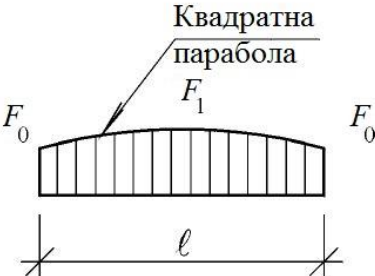
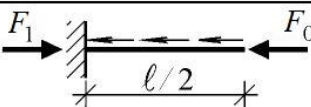
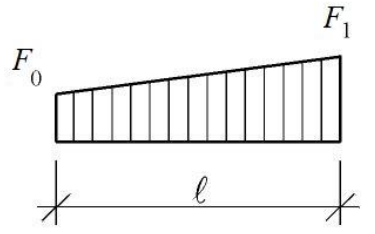
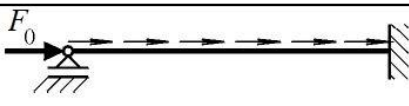
Промена нормалне силе притиска дуж штапа у реалним конструкцијама, уколико није скоковита, најчешће је линеарна, а ређе параболична. Стандардом су обухваћени и један и други случај, односно и линеарна и параболична промена. Нормална сила мења се од $F_{c,0}$ до $F_{c,1} = F_{c,\max}$, а прорачун се спроводи са $F_{c,\max}$ уз одговарајући коефицијент дужине извијања β , према табели 2.7. Треба напоменути да постоји ограничена примена израза за одређивање коефицијента). Изрази, дакле, важе само за:

$$-0,2 \leq F_{c,0} / F_{c,1} \leq 1. \quad (2.27)$$

Нормално, за $F_{c,0} / F_{c,1} = 1$ вредности коефицијента β израчунате помоћу формула из

табеле 2.7 поклапају се са вредностима из табеле 2.6 за штап са константном нормалном силом.

Табела 2.7 - Одређивање коефицијента дужине извијања) код штапова са континуално променљивом нормалном силом [1]

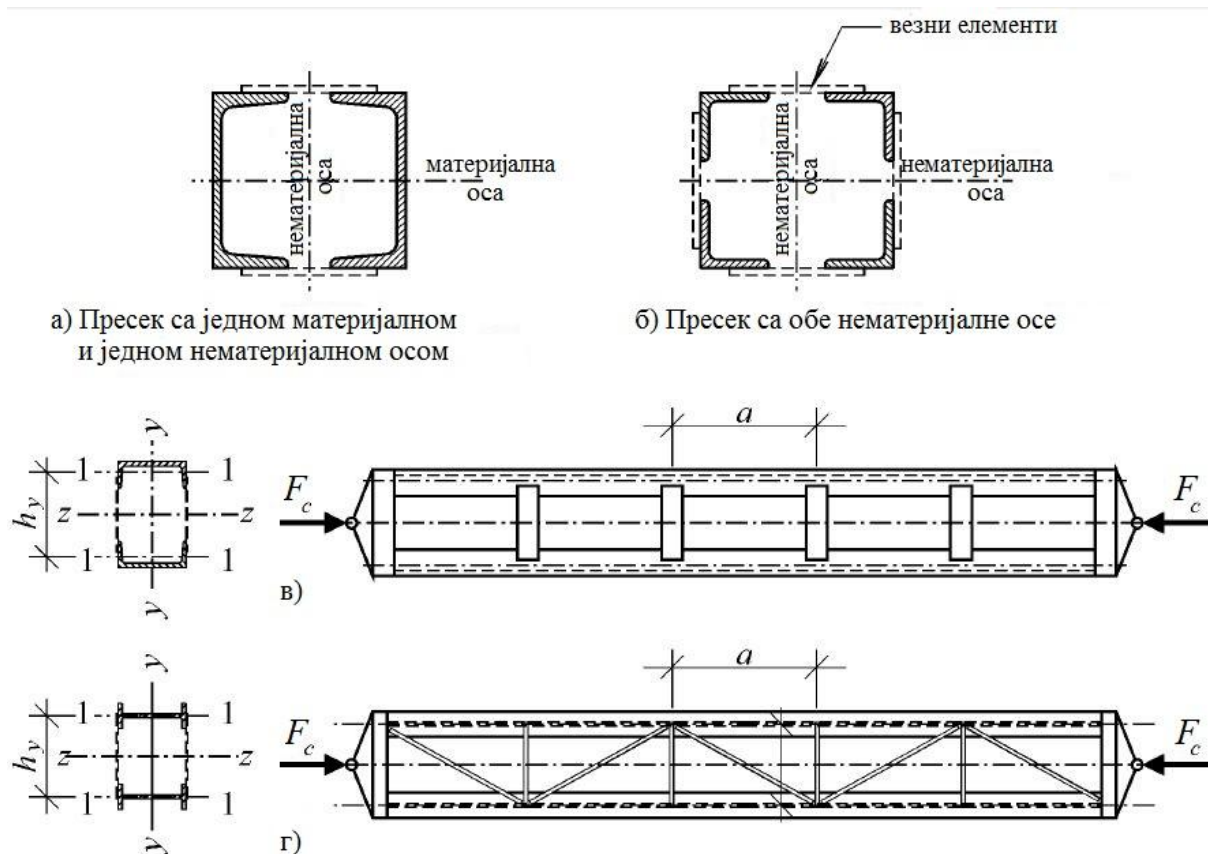
Дијаграм нормалних сила	Услови ослањања и оптерећење штапа	Коефицијент дужине извијања β
		$\beta = \sqrt{\frac{1 + 2,18 \cdot F_0 / F_1}{3,18}}$
		
		
		$\beta = \sqrt{\frac{1 + 1,09 \cdot F_0 / F_1}{2,09}}$
		
		$\beta = \sqrt{\frac{1 + 0,35 \cdot F_0 / F_1}{5,40}}$
		$\beta = \sqrt{\frac{1 + 0,88 \cdot F_0 / F_1}{1,88}}$
		$\beta = \sqrt{\frac{1 + 0,93 \cdot F_0 / F_1}{7,72}}$
		$\beta = \sqrt{\frac{1 + 0,51 \cdot F_0 / F_1}{3,09}}$
		$\beta = \sqrt{\frac{1 + 1,65 \cdot F_0 / F_1}{5,42}}$

2.9 Аксијално притиснути штапови константног вишеделног попречног пресека

Карактеристике вишеделних штапова:

- Попречни пресек се састоји од више самосталних елемената који су местимично повезани;
- Размицањем самосталних елемената повећавају се геометријске карактеристике попречног пресека;
- Рационалност у погледу утрошеног материјала;
- Више рада за израду вишеделног штапа;
- Једна од главних оса инерције је нематеријална;
- Другачије понашање у односу на једноделне штапове.

Једна од бољих особина због које се вишеделни штапови све чешће примењују је минимални утршак материјала. Вишеделни штапови се састоје од два или више самосталних елемената који су постављени на одређеном растојању и местимично су повезани (слика 2.11).



Слика 2.11 - Различити типови вишеделних штапова и њихових попречних пресека: в) штап рамовског типа; г) решеткасти вишеделни штап

Ови самостални елементи постављени су на извесном растојању од тежишта укупног пресека, па је на тај начин повећан момент инерције у односу на једну од главних оса без значајног повећања утrophа материјала.

Код вишеделних штапова карактеристична је појава нематеријалне осе која је једна од главних оса попречног пресека. Нематеријална оса не сече ни један самостални елемент, односно не пролази кроз пуни део попречног пресека.

Друга главна оса може бити такође нематеријална, али је чешће материјална. Материјална оса, супротно нематеријалној, пролази кроз попречни пресек самосталних елемената. Везни елементи, којима се самостални елементи повезују, постављају се увек у равнима управним на нематеријалну осу.

Самостални елементи су међусобно повезани везним елементима на одређеном еквидистантном растојању ($a = const$). У зависности од облика и врсте везних елемената разликују се два типа вишеделних штапова: *рамовски* и *решеткасти*.

Код рамовског типа везни елементи су пречке (спојни лимови), а код решеткастих дијагонале и вертикале.

Пречке се обавезно постављају на крајевима елемента и бар у трећинама дужине. У зависности од начина повезивања спојни елементи могу бити у виду везних лимова (пречки), код штапова рамовског типа (слика 2.11в), или као решеткаста испуна код решеткастих вишеделних штапова (слика 2.11г).

Гранична носивост вишеделног штапа на извијање око нематеријалне осе може се, међутим, одредити на исти начин као и код једноделног монолитног штапа, ако је растојање везних елемената $a < 15 \cdot i_1$.

У супротном случају постоји битна разлика, која се, пре свега, огледа у томе што код једноделних штапова ребро, уз релативно ниско искоришћење напона, прима трансверзалне силе, па се њихов утицај на деформацију носача може занемарити.

Код вишеделних пресека се, услед непостојања ребра, при извијању око нематеријалне осе мора узети у обзир учешће смицања на деформацију штапа. Дакле:

$$v = v_M + v_V \quad (2.28)$$

где је:

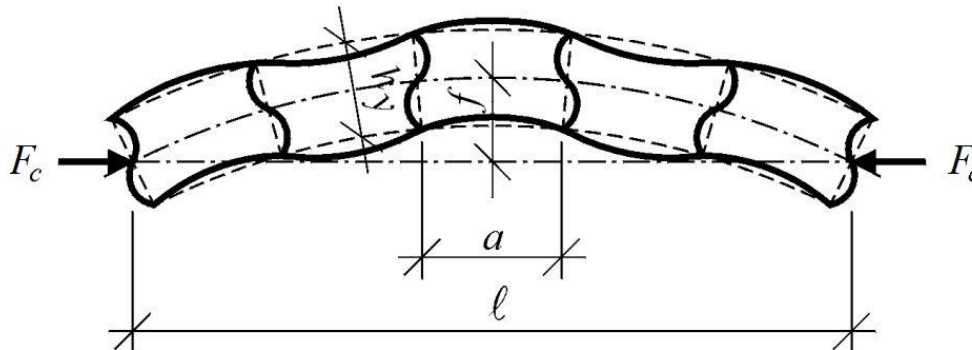
v_M угиб услед момента савијања,

v_V угиб услед трансверзалних сила.

У колико се посматра вишеделни штап рамовског типа са почетном геометријском имперфекцијом, оптерећен аксијалном силом притиска која расте постепено од 0 до граничне вредности, може се уочити да од самог почетка уношења оптерећења долази до појаве савијања штапа као целине (услед почетне имперфекције јавља се момент савијања $M_0 = F_c \cdot f_0$). Попречне деформације изазване савијањем утичу на повећање момента савијања (расте стрела параболе $M_0 = F_c \cdot f$; $f > f_0$), који изазива поновно повећање деформација. Попречне деформације се нелинеарно повећавају са порастом оптерећења, што има за последицу и нелинеаран пораст аксијалне силе у

самосталним елементима. Највећа аксијална сила јавља се у самосталном елементу у средини распона и то у елементу са конкавне стране вишеделног штапа. Насупрот томе, највећи утицаји у спојним елементима јављају се на крајевима штапа где су нагиб еластичне линије и трансверзална сила максимални.

Експериментална исраживања су показала да је гранична носивост вишеделног штапа достигнута када се исцрпи носивост, односно, стабилност најоптерећенијег самосталног елемента (слика 2.12) или, код решеткастих вишеделних штапова, најоптерећенијег штапа испуне.



Слика 2.12 - Деформације рамовског штапа

Диференцијална једначина извијања вишеделног штапа може се добити аналогно Ојлеровој диференцијалној једначини извијања једноделног штапа, уз увођење утицаја трансверзалних сила на деформацију. Геометријске имперфекције се такође претпостављају у облику синусног полуталаса:

$$v_0(x) = f_0 \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot x \quad (2.29)$$

где је f_0 почетна стрела штапа.

Момент савијања и трансверзална сила у штапу могу се написати у следећем облику:

$$M = F_c \cdot (v + v_0) \quad (2.30)$$

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (2.31)$$

Кривина штапа је једнака збиру кривина услед момента и трансверзалне силе:

$$\chi = \chi_M + \chi_V = v''_M + v''_V = v''. \quad (2.32)$$

док се део кривине услед смичућих сила одређује на основу клизања γ :

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = k \cdot \frac{V}{GA} \quad (2.33)$$

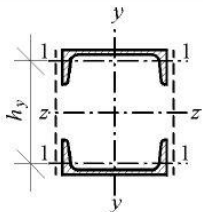
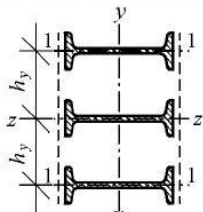
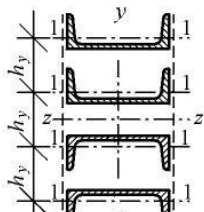
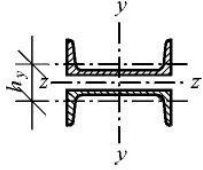
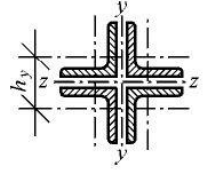
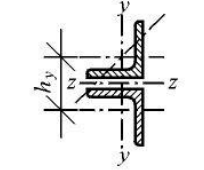
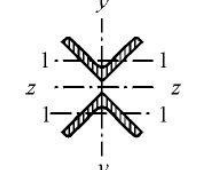
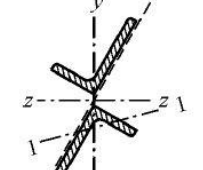
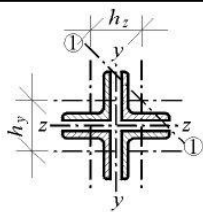
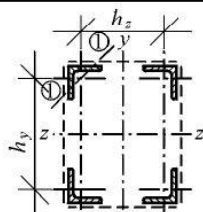
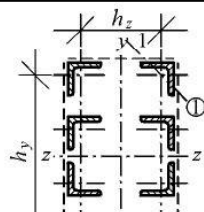
где су:

- k коефицијент смицања зависан од облика попречног пресека,
- G модул клизања.

2.10 Прорачун стабилности аксијално притиснутих штапова константног вишеделног пресека према стандарду

Предмет овог стандарда је провера глобалне (извијање око нематеријалне осе) и локалне стабилности вишеделних центрично притиснутих штапова. Штапови су, према облику попречног пресека, подељени у четири групе. Ова подела приказана је у оквиру табеле 2.8.

Табела 2.8 - Подела вишеделних штапова [1]

Тип	Опис	Облик пресека		
1	Вишеделни штапови који имају бар једну материјалну тачку	 $m = 2$	 $m = 3$	 $m = 4$
2	Вишеделни штапови који имају једну материјалну осу и код којих је чисто растојање између самосталних елемената једнако дебљини чворног лима	 $m = 2$	 $m = 3$	 $m = 4$
3	Дводелни штапови од укрштених угаоника	 $m = 2$	 $m = 3$	
4	Вишеделни штапови који немају материјалну осу	 $m_y = m_z = 2$	 $m_y = m_z = 3$	 $m_y = 2, m_z = 4$

Провера опште или глобалне стабилности при извијању око нематеријалне осе се, такође, врши према стандарду, односно помоћу израза (2.15а) или (2.15б). Утицај смичућих сила се узима у обзир тако што се коефицијент извијања χ (2.18) добија на основу еквивалентне релативне виткости ($\bar{\lambda}_{z,eq}$) за извијање око нематеријалне осе.

Еквивалентна релативна виткост може да се одреди на основу критичне силе за извијање око нематеријалне осе $F_{cr,V}$ на следећи начин:

$$\bar{\lambda}_{z,eq} = \sqrt{F_{pl} / F_{cr,V}} \quad (2.34)$$

или преко еквивалентне виткости:

$$\bar{\lambda}_{z,eq} = \sqrt{\lambda_z^2 + \frac{m}{2} \cdot \lambda_f^2} \Rightarrow \bar{\lambda}_{z,eq} = \frac{\lambda_{z,eq}}{\lambda_1} \quad (2.35)$$

где су:

$\bar{\lambda}_{z,eq}$ еквивалентна релативна виткост вишеделног штапа за нематеријалну осу z-z,

F_{pl} пластична отпорност попречног пресека ($F_{pl} = f_y \cdot A$),

A укупна површина попречног пресека $A = \sum_{i=1}^r A_i$,

$F_{cr,V}$ критична сила извијања вишеделног штапа,

λ_z виткост за осу z-z, без утицаја трансверзалних сила,

r број самосталних елемената,

m број самосталних елемената у једном правцу,

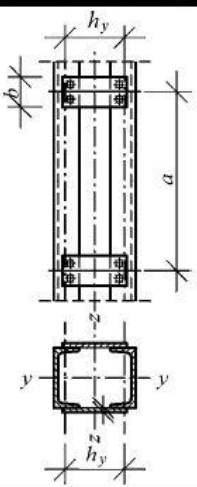
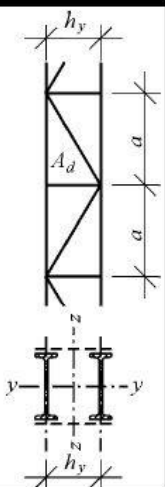
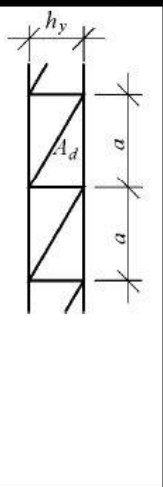
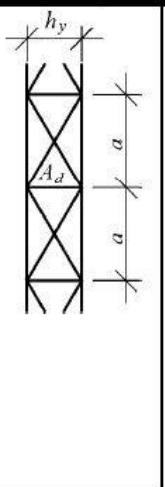
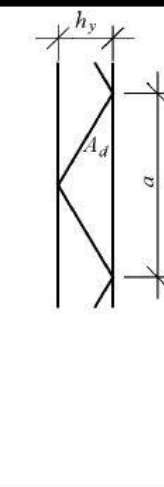
λ_f виткост самосталног елемента, односно појаса,

λ_1 виткост на граници развлачења према изразу.

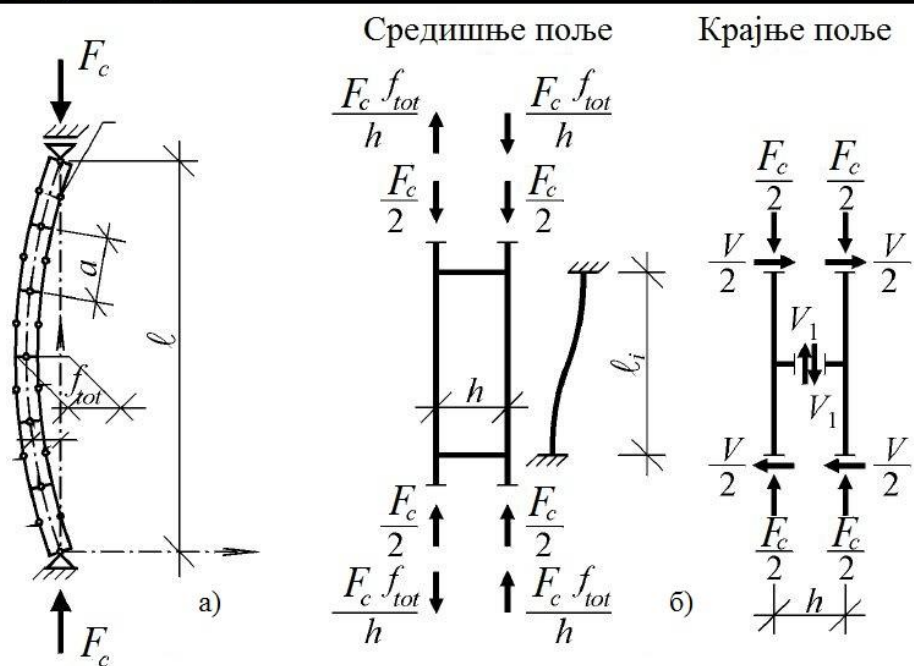
Вредности крутости на смицање S_y за критичну силу извијања $F_{cr,V}$ у зависности од типа штапа и врсте испуне приказане су у табели 2.9. Са A_d је обележен попречни пресек дијагонале, док A_r представља рачунску површину на основу које се одређује S_y и λ_f за решеткасте носаче, а у зависности од типа испуне.

У средини штапа, услед извијања, уз нормалну силу јавља се и максималан момент савијања $M = F_c \cdot f$. Овај момент изазива додатно аксијално напрезање самосталних елемената као што је приказано на примеру дводелног штапа са слике 2.13. Један самостални елемент трпи додатну силу притиска услед дејства момента савијања, док је други растерећен услед силе затезања.

Табела 2.9 - Вредности крутости на смицање S_y за различите типове вишеделних штапова [1]

	Рамовски штап	Решеткасти штап			
					
S_y	$2 \frac{\pi^2 \cdot EI_f}{a^2}$	$n \cdot EA_r \cdot \frac{a \cdot h_y^2}{d^3}$			
λ_f	$\frac{a}{i_f}$	$\pi \sqrt{\frac{A}{n \cdot A_r} \cdot \frac{d^3}{a \cdot h_y^2}}$			
A_r		A_d	A_d	$2A_d$	$0.5A_d$

n - број паралелних равни у којима су постављени спојни лимови или штапови испуне
 d - системна дужина дијагонале



Слика 2.13 - а) Прорачунски модел; б) Распоред пресечних сила

Максимална нормална сила у самосталном елементу износи:

$$F_f = \frac{F_c}{r} + \frac{M_z}{W_z} \cdot A_f \text{ или упрошћено } F_f = \frac{F_c}{2} + \frac{M_z}{h} \quad (\text{за дводелни штап}) \quad (2.36)$$

где је:

$$M_z = \frac{F_c \cdot f}{1 - \frac{v \cdot F_c}{F_{cr,v}}} = \frac{F_c \cdot f}{1 - \frac{v \cdot F_c}{F_{pl}} \cdot \bar{\lambda}_{z,eq}^2} \quad (2.37)$$

W_z отпорни момент у односу на тежишну осу најудаљенијег елемента ($f_0 = I_z / y_{f,max}$),

f_0 почетна геометријска имперфекција ($f_0 = l / 500$).

Провера стабилности самосталног елемента у средини штапа врши се са нормалном силом F_f и виткошћу λ_f (на основу табеле 2.9), према стандарду.

У крајњем пољу вишеделног штапа доминантан је утицај трансверзалних сила. Како је момент савијања функција угиба, а овај је претпостављен у облику синусне функције, добија се:

$$M = F_c \cdot (v + v_0) = F_c \cdot f \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot x. \quad (2.38)$$

Трансверзална сила, према томе, може да се одреди на следећи начин:

$$V = \frac{dM}{dx} = F_c \cdot f \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \cos \frac{\pi}{l} \cdot x \quad (2.39)$$

Максимална вредност трансверзалне силе је, дакле:

$$\max V = F_c \cdot f \cdot \frac{\pi}{l} = \frac{\pi}{l} \cdot \frac{F_c \cdot f_0}{1 - v \cdot \frac{F_c}{F_{cr,v}}} \quad (2.40)$$

а максимални момент савијања у самосталном елементу на крају штапа је:

$$M_f = \frac{\max V}{r} \cdot \frac{a}{2}. \quad (2.41)$$

Доказ носивости самосталног елемента у крајњем пољу врши се на основу следећег израза:

$$\max \sigma = \frac{F_c}{r} + \frac{M_f}{W_f} \leq \sigma_{dop} \quad (2.42)$$

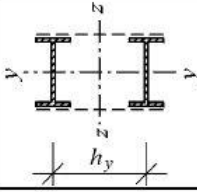
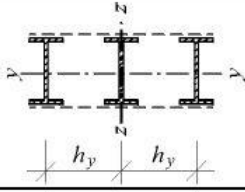
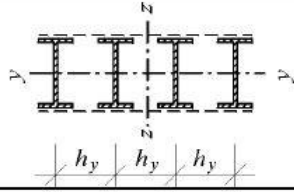
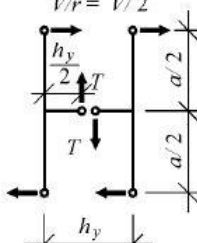
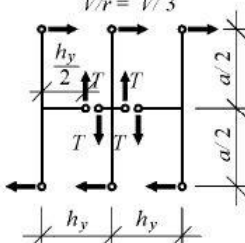
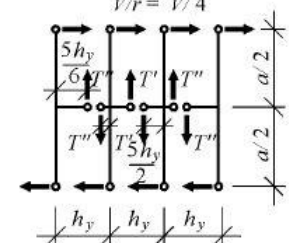
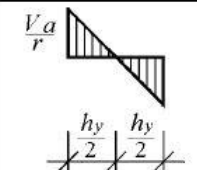
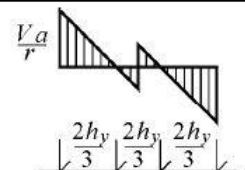
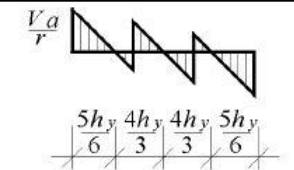
где је W_f отпорни момент самосталног елемента у односу на осу 1-1.

Поред провере глобалне и локалне стабилности вишеделног штапа неопходно је извршити контролу напона у везним елементима. Код вишеделних штапова рамовског типа спојни лимови прорачунавају се да приме утицаје смичућих сила V и момената M . Вредности утицаја V и M за поједине штапове вишеделних пресека приказане су у табели 2.10. Штапови испуне код вишеделних носача решеткастог типа димензионишу се да приме нормалну силу

$$F_{c,d} = \frac{\max V}{n} \cdot \frac{d}{h_y} \quad (2.43)$$

где је n број паралелних равни у којима је постављена решеткаста испуна, а d дужина дијагонале.

Табела 2.10 - Пресечне силе код везних елемената вишеделних штапова рамовског типа [1]

	Опис	$r=2$	$r=3$	$r=4$
1	Пресек вишеделног штапа			
2	Утицаји у јединичном пољу штапа			
3	Пресечна сила T у спојним лимовима	$T = \frac{V \cdot a}{h_y}$	$T = \frac{V \cdot a}{2h_y}$	$T' = 0,4 \frac{V \cdot a}{h_y}$ $T'' = 0,3 \frac{V \cdot a}{h_y}$
4	Моменти дијаграма у спојним лимовима			

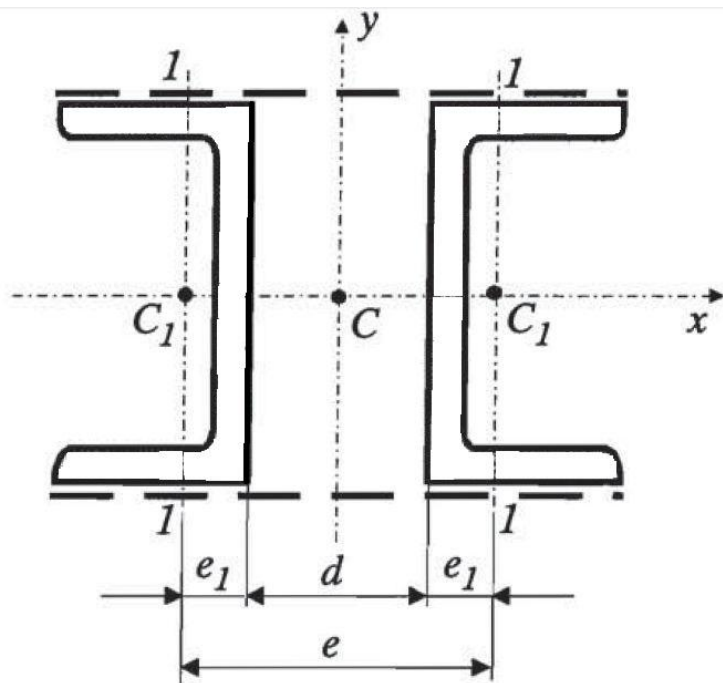
Такође је потребно прорачунати везе спојних лимова односно штапова испуне за самосталне елементе према утицајима на основу којих су везни елементи димензионисани. Дакле везе спојних лимова се димензионишу на основу M и V , а везе решеткастих штапова испуне према $F_{c,d}$. При пројектовању вишеделних штапова треба водити рачуна и о конструктивним детаљима. Број поља на који је штап подељен не сме бити мањи од три, а њихове дужине треба да буду једнаке. Код рамовских штапова обавезно је постављање спојних лимова и на крајевима штапа. Везе спојних лимова односно решеткасте испуне за самосталне елементе остварују се заваривањем или завртњевима који не дозвољавају проклизавање (упасовани, преднапрегнути). Уколико се употребљавају неупасовани завртњеви долази до наглог бочног померања и повећања почетних геометријских имперфекција (v_0), па је неопходно смањити смичућу крутост S_y дељењем са фактором 1,3, односно увећати виткост самосталног елемента фактором $\sqrt{1,3}$.

Штапови типа 2, 3 и 4.1 уместо спојних лимова имају везице. За штапове попречног пресека 3 и 4.1 дозвољено је постављање везица наизменично у две међусобно управне равни. Код вишеделних штапова типа 4.2 и 4.3 неопходно је предвидети попречна укрућења на местима спојних лимова односно у чворовима решеткасте испуне, како би се очувао непромењен облик попречног пресека.

3. Пример прорачуна и комплетна конструкција једног притиснутог стуба

3.1 Димензионисање и конструисање штапова

Стуб висине $h = 8[m]$ прима притисак $F = 1000[kN]$ (I случај оптерећења). Облик попречног пресека је дат на слици 3. Димензионисати и конструисати стуб, главни стуб и ножицу стуба од Č0361.



Слика 3.0 - Предложени облик попречног пресека

- *Димензионисање попречног пресека стуба*

$$\sigma_{dop} = 160 [MPa] \quad (\text{Таб. 2.11. стр. 55 МК}) [5]$$

$$\sigma'_{dop} = (0,6 \div 0,7) \cdot \sigma_{dop} \quad - \text{ За притиснути стуб (преорука за приближно одређивање профила за прву пробу)}$$

$$\rightarrow \sigma'_{dop} = 96 [MPa] \quad - \text{ Сем димензија профила треба одредити и растојање } d = ? \text{ да би потпуно димензионисали попречни пресек.}$$

$$A \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{\sigma'_{dop}} = \frac{1000 \cdot 10^3}{2 \cdot 96 \cdot 10^6} \geq 52,08 [cm^2]$$

Усваја се за прву пробу стандардни UPN280 профил са подацима:

$$I_{x_1} = 6280 [cm^4] \quad , \quad I_{y_1} = 399 [cm^4]$$

$$A_1 = 53,3 [cm^2] \quad , \quad e_1 = x_{c_1} = 2,53 [cm]$$

$$i_{y_1} = i_1 = 2,74 [cm] \quad , \quad i_{x_1} = 10,9 [cm]$$

$$\text{За пресек стуба 2 UPN280 је: } I_x = 2 \cdot I_{x_1} = 2 \cdot 6280 = 12560 [cm^4]$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot I_{x_1}}{2 \cdot A_1}} = \sqrt{\frac{I_{x_1}}{A_1}} = i_{x_1} = 10,9 [cm]$$

$$\lambda_x = \frac{h}{i_x} = \frac{800}{10,9} = 73 \xrightarrow{\text{Tabela}} \omega_x = 1,7 \quad (\text{Таб.4.2. стр.94 МК}) [5]$$

$$\sigma_{\omega_x} = \frac{F}{2 \cdot A_1} \cdot \omega_x = \frac{1000}{2 \cdot 53,3} \cdot 1,7 = 15,95 \left[\frac{kN}{cm^2} \right] = 159 [MPa]$$

$$\sigma_{\omega_x} = 159 [MPa] < 160 [MPa]$$

Пресек 2 UPN280 је добро изабран што се тиче стабилности на извијање око $x-x$ осе. Потребно је испитати да ли пресек задовољава критеријум стабилности и око осе $y-y$. Размак e , односно, d је непознат, па се одређује из услова да је материјал искоришћен на извијање око y -осе до $\sigma_{dop} = 160 [MPa]$.

$$\sigma_{\omega_y} = \frac{F}{A} \cdot \omega_{y_1} = \sigma_{dop}$$

$$\omega_{y_1} = \frac{2 \cdot A_1 \cdot \sigma_{dop}}{F} = \frac{2 \cdot 53,3 \cdot 16}{1000} = 1,7 \xrightarrow{\text{Табела}} \lambda_{y_1} = 73 \text{ (Таб.4.2. стр.94 МК)} [5]$$

$$\lambda_1 = \frac{c}{i_1} = \frac{100}{2,74} = 36 - (\text{За размак спојних лимова с усваја се вредност по препоруци}$$

$$c = 100[cm])$$

Са друге стране виткост штапа сложеног пресека:

$$\lambda_{y_1} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_1^2} \Rightarrow \lambda_y = \sqrt{\lambda_{y_1}^2 - \lambda_1^2} = \sqrt{73^2 - 36^2} = 63,5$$

$$\lambda_y = \frac{l_{ky}}{i_y} = \frac{h}{i_y}$$

$$i_y = \frac{h}{\lambda_y} = \frac{800}{63,5} = 12,6[cm]$$

$$I_y = i_y^2 \cdot A = 12,6^2 \cdot 2 \cdot 53,3 = 16923[cm^4]$$

$$I_y = 2 \cdot \left(I_{y_1} + x_{c_1}^2 \cdot A_1 \right) = 2 \cdot \left(I_{y_1} + \frac{e^2}{4} \cdot A_1 \right)$$

$$I_y = 2 \cdot I_{y_1} + \frac{e^2}{2} \cdot A_1 \Rightarrow e^2 \cdot \frac{A_1}{2} = I_y - 2 \cdot I_{y_1} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{2 \cdot (I_y - 2 \cdot I_{y_1})}{A_1}}$$

$$e = \sqrt{\frac{2 \cdot (16923 - 2 \cdot 399)}{53,3}} = 24,6$$

$$\text{за } e = 24,6 \Rightarrow d = e - 2 \cdot e_1 = 24,6 - 2 \cdot 2,53 = 19,54$$

$$\text{усваја се: } d = 22[cm]$$

$$\text{за } d = 22[cm] \Rightarrow e = d + 2 \cdot e_1 = 22 + 2 \cdot 2,53 = 27[cm]$$

$$I_y = 2 \cdot \left(399 + \frac{27^2}{4} \cdot 53,3 \right) = 20225[cm^4]$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{20225}{2 \cdot 53,3}} = 13,8[cm]$$

$$\lambda_y = \frac{h}{i_y} = \frac{800}{13,8} = 58$$

Контрола стабилности на извијање око у – у осе

$$\lambda_{y_i} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_1^2} = \sqrt{58^2 + 36^2} = 68$$

$$\lambda_{y_i} = 68 \xrightarrow{\text{Tabela}} \omega_{y_i} = 1,58 \quad (\text{Таб.4.2. стр.94 МК}) \quad [5]$$

$$\sigma_{\omega_y} = \frac{F}{A} \cdot \omega_{y_i} = \frac{1000}{2 \cdot 53,3} \cdot 1,58 = 14,8 \left[\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right] = 148 [\text{MPa}]$$

$$\sigma_{\omega_y} = 148 [\text{MPa}] < \sigma_{\text{dop}} = 160 [\text{MPa}]$$

Контрола размака спојних лимова

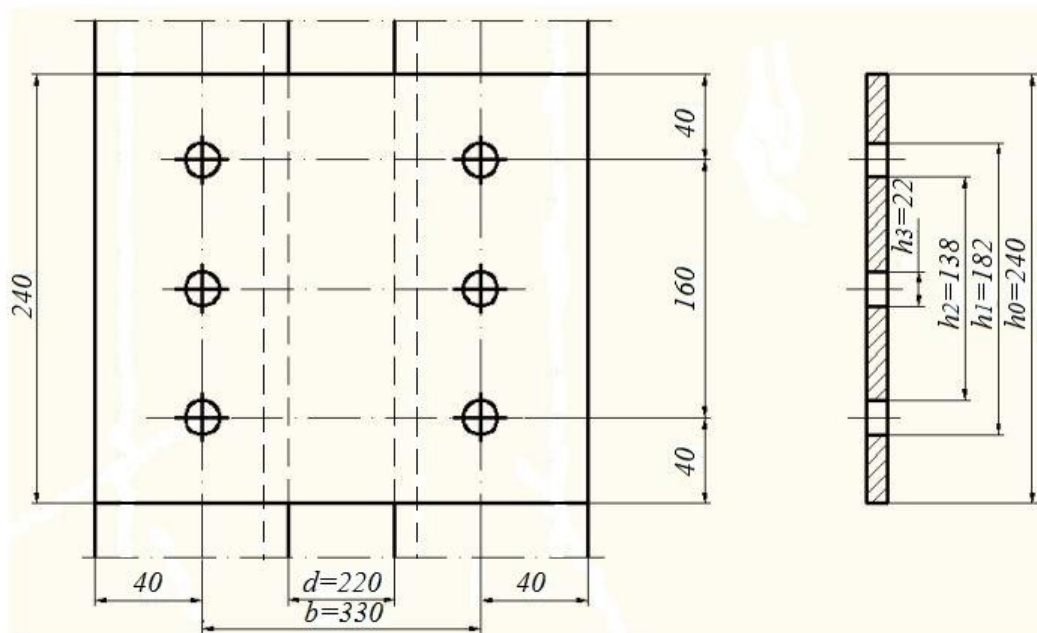
$$\lambda_1 = \frac{c}{i_1} \leq 50 \cdot \left(4 - 3 \cdot \frac{\sigma_{\omega_y}}{\sigma_{\text{dop}}} \right) = 50 \cdot \left(4 - 3 \cdot \frac{148}{160} \right) = 61,2$$

$$\lambda_1 = 36 < 61$$

Усваја се попречни пресек 2 UPN280 са размаком $d = 22[\text{cm}]$.

- Прорачун спојних лимова и њихове заковане везе за појасеве стуба

Усвајају се за спојне лимове следеће димензије:



Слика 3.1 - Димензије спојних лимова и распоред отвора за закивке

Трансверзална сила у стубу меродавна за димензионисање спојних лимова, према прописима је:

$$Q = \frac{A \cdot \sigma_{dop}}{80} = \frac{2 \cdot 53,3 \cdot 16}{80} = 21,32 [kN]$$

Смучућа сила у средини спојног лима је:

$$T = Q \cdot \frac{c}{e} = 21,32 \cdot \frac{100}{24,6} = 86,6 [kN]$$

Момент савијања у пресеку спојног лима на месту спољашњег закивка је:

$$M = \frac{T}{2} \cdot \frac{b_1}{2} = \frac{86,6}{2} \cdot \frac{330}{2} = 714 [kNcm]$$

Контрола напона у закованом спојном лиму

$$W_n = \frac{I_n}{\frac{h_0}{2}} = \frac{2 \cdot I_n}{h_0}$$

$$I_n = \frac{\delta \cdot (h_0^3 - h_1^3 + h_2^3 - h_3^3)}{12}$$

$$I_n = \frac{0,8 \cdot (24^3 - 18,2^3 + 13,8^3 - 2,2^3)}{12} = 694 [cm^4]$$

$$W_n = \frac{2 \cdot 694}{240} = 57,85 [cm^3]$$

$$\sigma = \frac{M}{W_n} = \frac{717}{57,85} = 12,4 \left[\frac{kN}{cm^2} \right] = 124 [MPa] < 160 [MPa]$$

Прорачун закивака

Распоред закивака $d_1 = [mm]$ дат је на слици

$$M = 717 [kNcm]$$

$$Q = \frac{T}{2} = \frac{86,6}{2} = 43,3 [kN]$$

Оптерећење једног закивка:

$$\text{део од трансверзалне силе } N_Q = \frac{Q}{m \cdot n} = \frac{T}{2 \cdot m \cdot n} = \frac{86,6}{6} = 14,43 [kN]$$

$$\text{део од момента савијања } N_M = M \cdot \frac{l_n}{m \cdot \sum_{i=1}^n l_i^2} = 717 \cdot \frac{16}{1 \cdot 16^2} = 44,8 [kN].$$

Резултујућа сила:

$$N_R = \sqrt{N_Q^2 + N_M^2} = \sqrt{14,43^2 + 44,8^2} = 47 [kN]$$

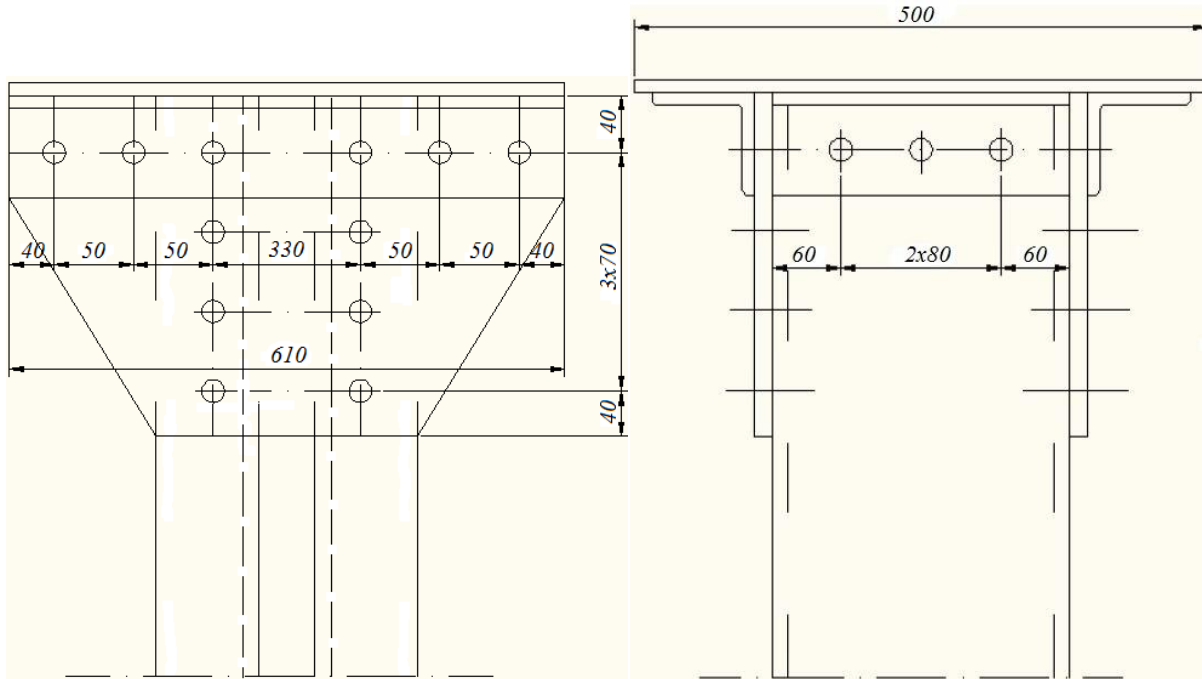
Контрола напона

$$\tau = \frac{4 \cdot N_R}{d_1^2 \cdot \pi} = \frac{4 \cdot 47}{2,2^2 \cdot \pi} = 12,38 \left[\frac{kN}{cm^2} \right] = 124 [MPa] < \tau_{dop} = 130 [MPa]$$

$$\sigma_b = \frac{N_R}{d_1 \cdot \delta} = \frac{47}{2,2 \cdot 0,8} = 26,7 \left[\frac{kN}{cm^2} \right] = 267 [MPa] < \sigma_{b_{dop}} = 320 [MPa]$$

Предложена веза спојних лимова закивцима задовољава.

- Прорачун главе стуба



Слика 3.2 – Конструкцијско решење главе стуба изложеног притиску

На ребра профила UPN280 преноси се сила преко шест двосечних закивака $d_1 = 20 [mm]$.

$$F_{\tau_r} = n \cdot \frac{d_1^2 \cdot \pi}{2} \cdot \tau_{dop} = 6 \cdot \frac{(22 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \pi}{2} \cdot 130 \cdot 10^6 = 593007 [N] = 593 [kN]$$

$$F_{\sigma_{br}} = n \cdot d_1 \cdot \delta \cdot \sigma_{dop} = 6 \cdot 2,2 \cdot 1 \cdot 32 = 422 [kN]$$

где је: $\delta = 10 [mm]$ - дебљина ребра UPN280 профила.

Меродавна сила за прорачун је $\min(F_{\tau_r}, F_{\sigma_{br}}) = F_r = 422 [kN]$

Остатак силе се преноси преко чворних лимова на ножице UPN280 профила.

$$F_p = F - F_r = 1000 - 422 = 578 [kN]$$

Потребан број једносечних закивака у ножицама

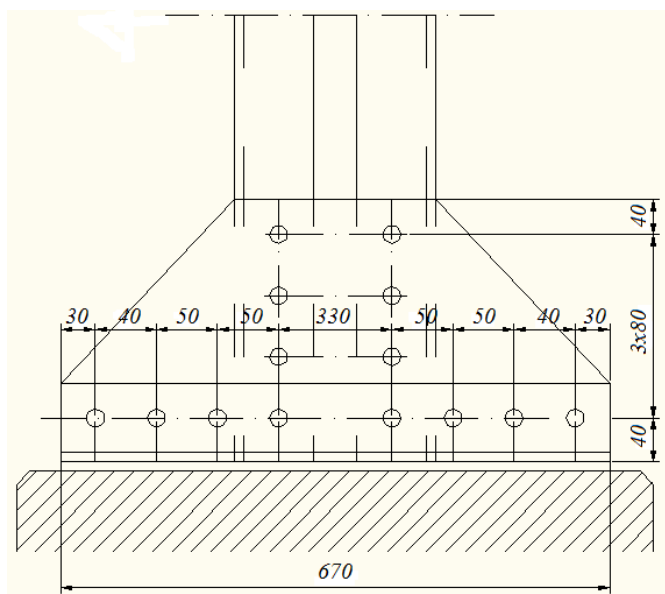
Усваја се за пречник закивака вредност $d_2 = 25 [mm]$ (усвајају се јачи закивци због великог дела силе који треба да пренесу)

$$n = \frac{F_p}{\frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \cdot \tau_{dop}} = \frac{578}{\frac{2,5^2 \cdot \pi}{4} \cdot 13} = 9,057$$

Усваја се $n = 12$ закивака $d_2 = 25 [mm]$ за везу ножица.

У конструкцији главе стуба има: $4\phi 25 + 12\phi 22$ на ножицама и $12\phi 25$ за везу угаоника.

- Прорачун ножице (постоља) стуба



Слика 3.3 - Конструкцијско решење стопа стуба изложеног притиску

Дебљина лежишне плоче је 12 mm (усвојено)

Димензија лежишне плоче су: $a = 280 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 90 + 2 \cdot 7 = 490 [mm]$.

Дозвољени притисак на фундамент (темељ) од бетона: $\sigma_{dop}^{bet} = 0,35 \left[\frac{kN}{cm^2} \right]$

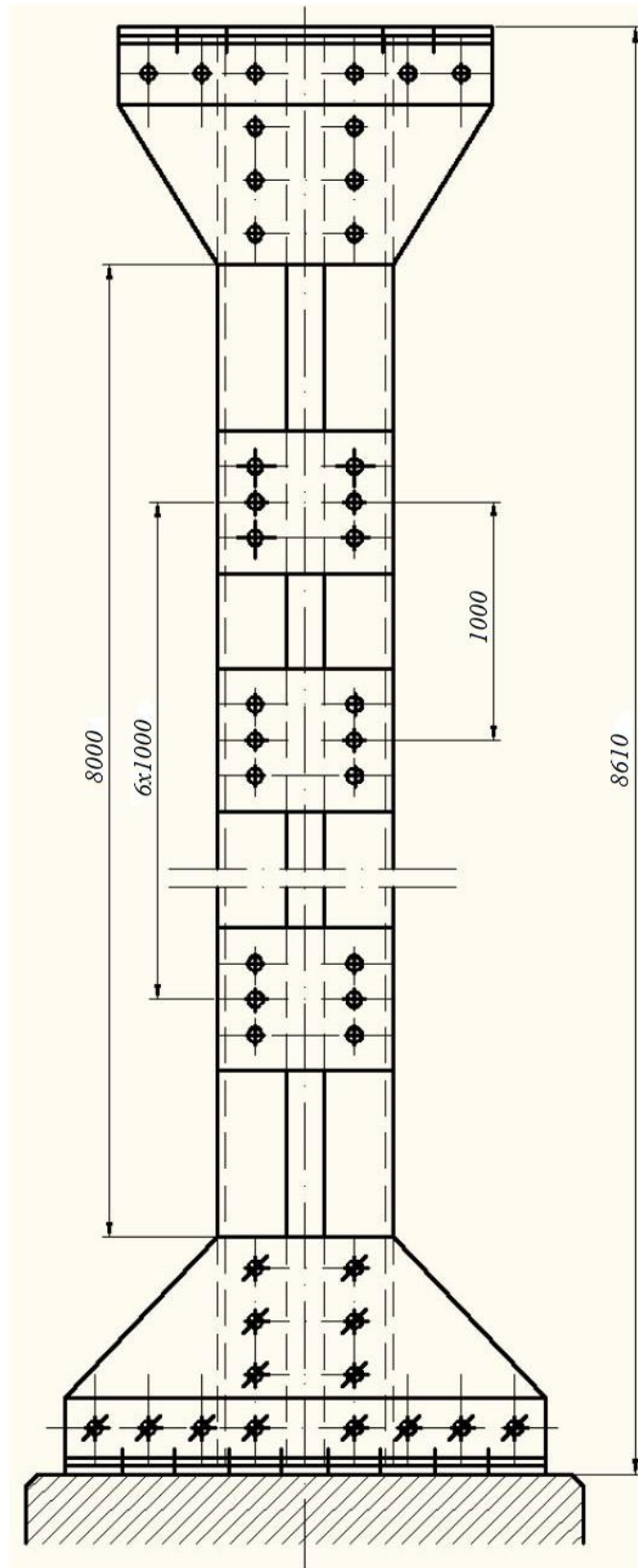
Потребна дужина лежишне плоче:

$$A_{pot} = \frac{F}{\sigma_{dop}^{bet}} = \frac{1000}{0,35} = 2857 [cm^2]$$

$$b \geq \frac{A_{pot}}{a} = \frac{2857}{49} = 58,3 [cm]$$

Усваја се конструктивно $b = 670 [mm]$.

Број закивака је најмање као и на глави, ако из конструктивних разлога не треба више на хоризонталном угаонику.



Слика 3.4 - Изглед стуба са спољним лимовима, главе и подножја стуба

4. Закључак

У овом раду је описано конструисање притиснутих штапова простог и сложеног попречног пресека. Прост (једноделни штап) чини један елемент, док се попречни пресек сложеног штапа састоји од више самосталних елемената који су местимично повезани спојним лимовима који могу бити међусобно паралелни или коси (спољашња или унутрашња решеткаста испуна). Ова веза се може остварити најчешће заваривањем где је сам прорачун доста компликован а конструкција једноставна, затим закивцима и веома ретко завртњевима.

Штап подразумева мале димензије попречног пресека у односу на дужину. Такви елементи се одликују виткошћу. Конструктивни елементи имају изразитије унутрашње аксијалне силе од унутрашњих момената. То су, рецимо, затеге код дизалица, висећих платформи, чланови лакних решеткастих носача итд. Будући да су стубови основа већине металних конструкција, од њих се захтева да испуне најстроже критеријуме у погледу чврстоће, крутости и стабилности. Обзиром да се преко стубова на тло преноси читаво оптерећење конструкције, јасно је зашто представљају један од најодговорнијих елемената конструкције.

Предности примене притиснутих штапова сложеног попречног пресека су следеће: могућа потпуна фабричка израда конструкције (примена стандардних ваљаних профила) и монтажа готових делова, висока механичка својства (остваривање велике крутости), мале димензије и тежине елемената челичних конструкција (уштеда у материјалу, знатно искоришћење попречног пресека), лака манипулација, транспорт, монтажа и демонтажа (како у радионици тако и на терену), релативно лако фундаирање, велика сеизмичка отпорност, флексибилност и адаптивност, захтевају врло мало машинске обраде (рупе, брушење ивица, попречни завари на спојевима), могућност комбиновања различитих материјала.

Литература

- [1] Буђевац Д., Марковић З. и др., Металне конструкције, , Београд 2007
- [2] Бабин Н., Бркљач Н., Шостаков Р., Металне конструкције, ФТН издаваштво, Нови Сад 2006
- [3] Милосављевић М., Радојковић М. И Кузмановић Б., Основи челичних конструкција
- [4] Петковић З., Острић Д., Металне конструкције у машиноградњи, Институт за механизацију Машинског факултета у Београду, Београд, 1996
- [5] Николић Р., Марјановић В., Металне конструкције – Приручник за прорачуне, Машински факултет, Крагујевац, 1998.
- [6] Николић Р., Вељковић Ј., Марјановић В., Металне конструкције – збирка решенох задатака, Машински факултет, Крагујевац, 2013.
- [7] Ж. Домазет, Л. Крстуловић Опара, Челичне конструкције – предавања из металних конструкција, Интернет адреса: http://docsfiles.com/pdf_vise_e_konstrukcije.html, Сплит, 2006, приступљено август, 2015.
- [8] <https://www.expedia.com/Golden-Gate-Bridge-San-Francisco.d508803.Vacation-Attraction>, ©2015 Expedia, приступљено септембар, 2015.
- [9] Производња и уградња кровних челичних конструкција Интернет адреса: http://www.tehnicom-serbia.com/krovne_celicne_konstrukcije.html, copyright © TehniCom D.O.O. 2013, приступљено август, 2015.