

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: **Машинско инжењерство**

Ниво студија: **Основне академске студије**

Модул: **Информатика у инжењерству**

Предмет: **Коначни елементи I**

Број индекса: **731/2012**

Јована П Друловић

**Моделирање пиезоелектричног ефекта коришћењем методе коначних елемената
завршни рад**

Комисија за преглед и одбрану:

Датум одбране: _____

1. **Др Мирослав Живковић - ментор**

Оцена: _____

2. _____

3. _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да опише пиезоелектрични ефекат, прикаже основне теоријске поставке и математичко моделирање коришћењем методе коначних елемената.

Препоручена литература:

- [1] M. Kojić, M. Živković, R. Slavković, and N. Grujović, “Metod konacnih elemenata I”, Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski fakultet, Kragujevac, Srbija, 1998.
- [2] M. K. Jain, P. D. Wolf – “A Three Dimensional Finite Element Model of Radiofrequency Ablation with Blood Flow and its Experimental Validation”, Vol. 28, pp. 1075-1084, 2000.
- [3] M. Kojić, N. Filipović, B. Stojanović, N. Kojić., “Computer Modelling in Bioengineering – Theoretical Background, Examples and Software”, J. Wiley and Sons, 2008.

Крагујевац, датум:

ментор:

Др Мирослав Живковић, ред. проф.

Резиме

Рад је настао као резултат интересовања за области моделирања пиезоелектричног ефекта коришћењем методе коначних елемената. Приказане су основне теоријске поставке које описују процес моделирања пиезоелектричног ефекта и дата је примена у методи коначних елемената. На крају рада дати су примери моделирања пиезоелектричног ефекта.

Abstract

The work was created as a result of interest in the field of modeling piezoelectric effect using the method of finite elements. The basic theoretical assumptions that describe the process of modeling a piezoelectric effect and the date of the application of the finite element method. At the end of the paper are examples of modeling a piezoelectric effect.

Садржај

1. Увод	5
2. Пиезоелектрични ефекат.....	6
3. Извођење једначина коначних елемената	7
3.1. Конститутивне релације за пиезоелектрично тело у вакууму	7
3.2. Подела домена на чворове и елементе	15
3.3. Једначине коначних елемената	20
4. Примери	23
4.1. Радијално поларизована пиезоелектрична цев.....	23
4.2. Вишеслојна греда са пиезокерамиком у делу једног слоја	26
5. Закључак	29
Литература.....	30

1. Увод

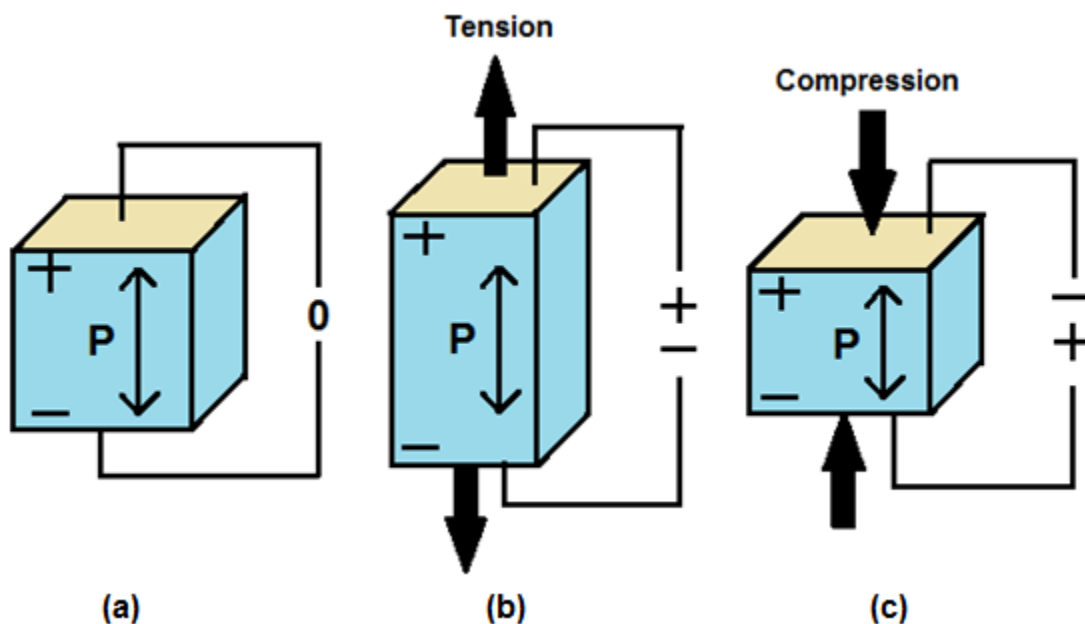
Кроз завршни рад “Моделирање пиезоелектричног ефекта коришћењем методе коначних елемената” биће приказана примена пиезоелектричног ефекта и начин његовог функционисања. Проучавајући област примене, дошло се до сазнања да се данас пиезоелектрични ефекат користи у многим гранама технике. Најзаступљенији је у подручјима електротехнике, медицине, аутомобилске индустрије, као и многим другим областима. У даљем раду биће, приказане једначине којима се описује моделирање пиезоелектричног ефекта и његов значај.

Овај завршни рад се састоји из пет поглавља:

- У првом поглављу рада су изложене уводне напомене, дат је увод у тему завршног рада.
- У другом поглављу истакнута је примена моделирања пиезоелектричног ефекта
- У трећем поглављу дата је теоријска основа, односно приказане су једначине које описују процес пиезоелектричног ефекта
- У четвртном поглављу наведени су примери моделирања, где се налазе и резултати истог
- Пето поглавље је закључак овог рада, где су сумирани резултати рада.

1. Пиезоелектрични ефекат

Пиезоелектрични ефекат је појава стварања електричног напона на површини кристала (чврсти диелектрик - изолатор) који је еластично деформисан спољашњом силом. Једна страна (површина) тог кристала наелектрисаће се негативно, а друга позитивно. Дакле, кристал постаје електрички поларизован. Поларизација кристала је највећа када је напрезање усмерено у правцу пиезоелектричне осе кристала. Променом смера деформације (истезање - притисак) долази до поларизације обрнутог смера. Пиезоелектрични ефекат представља вид конверзије механичке енергије у електричну и обрнуто. Јавља се у два облика: директни и инверзни ефекат.



Слика.1: Приказ пиезоелектричног напона на површини материјала

Директни ефекат се формулише на следећи начин: када на пиезоелектрични материјал делује сила F , на његовој површини се генерише пропорционална количина електрицитета:

$$Q = d_{ij} F$$

Где је d_{ij} константа за дати материјал. Индекс i означава смер напрезања у односу на орјентацију кристалне решетке (код кристала) или у односу на правац поларизације (код керамичких материјала). Индекс j означава раван у којој је постављена електрода са које се добија излазни сигнал.

Инверзни пиезоелектрични ефекат се састоји у механичкој деформацији претварача када се он изложи дејству електричног поља, односно наелектрише неком количином електрицитета. Директни и инверзни пиезоелектрични ефекат су у потпуности реципрочни, т.ј. реч је о једној истој појави.

Најзначајнији пиезоелектрични материјали су кварц (SiO_2), Рошелова со, турмалин, топаз, кост, свила, дрво, материјали попут разних врста керамике, пластике и кристала, а у новије вријеме PZT керамике.

Иако је дуго након открића био само занимљив лабораторијски ефект, с временом је пронашао примену у бројним уређајима. Својство пиезоелектричних кристала нашло је широку употребу у многим гранама технике, посебно у електроници за израду прецизних осцилатора високо стабилних фреквенција. Применом пиезоелектричних кристала у електронским осцилаторима дигиталних и аналогних уређаја, постиже се прецизност реда милионитог дела херца, док се обичним осцилаторним колима постиже само око 10 хиљадитих дијелова херца. Уз то, широка примена пиезоелектричних ефеката и кристала је и у електроакустици, за израду микрофона, слушалица, детектора ултразвука и разних ултразвучних претварача.

Пиезоелектрични ефекат такође има примену код мерења механичких величина. Највише се користи код акцелерометара (давачи убрзања), давача силе и давача притиска.

Пиезоелектрични ефекат јавља и код живих бића - кости делују као сензори за силу. Када се изложе сили, кости производе електрични напон пропорционалан унутрашњем оптерећењу. Напон стимулише нагомилавање кошчаног материјала, што проузрокује ојачање коштане структуре на тим местима где је локално померање (деформација) била највећа. Овако настају структуре са оптималним односом масе и носивости.

2. Извођење једначина коначних елемената

3.1. Конститутивне релације за пиезоелектрично тело у вакууму

У овом одељку је приказано извођење једначина коначних елемената за пиезоелектрично тело у вакууму, коришћењем Галеркинове методе тежинских остатака. Одговарајућа формулација коначних елемената за пиезоелектричне структуре у вакууму, базирана на Хамилтоновом принципу [1].

Посматрамо пиезоелектрично тело, на пример пиезоелектрични диск, запремине Ω_p са површином Γ_p која осцилује у вакууму (слика 2). Проблем је описан једначином кретања и конститутивним једначинама за пиезоелектрични медијум. Једначина кретања за пиезоелектрично тело има облик:

$$\rho_p \ddot{u}_i = T_{ij,j} \quad (1)$$

Претпостављамо да су осцилације хармонијске, где је члан $e^{i\omega t}$ дат у имплицитном облику, при чему је $\omega = 2\pi f$ угаона фреквенција. Тада се једначина (1) може поново написати као:

$$-\omega^2 r_p u_i = T_{ij,j} \quad (2)$$



Слика (2): Пиезоелектрично тело запремине Ω_p са површином Γ_p које осцилује у вакууму.

- Γ_f је део површине Γ_p на коме постоји вектор напона $\bar{t}_i$.
- Γ_u је део површине Γ_p на коме је задато померање $\bar{u}_i$.
- Γ_f је део површине Γ_p на коме је задат константни електрични потенцијал $\bar{f}$
- Γ_s је део површине Γ_p на коме је задата површинска густина наелектрисања $\bar{\sigma}$.

Претпоставља се да су површине Γ_u и Γ_f раздвојене и да је њихова унија једнака, и Γ_p да су површине Γ_f и Γ_s раздвојене и да је њихова унија једнака Γ_p .

Када се тражи временски хармонично решење, једначине које описују проблем имају облик:

$$-\omega^2 r_p u_i = T_{ij,j} \quad (3)$$

$$D_{i,i} = 0 \quad (4)$$

$$T_{ij} = C_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (5)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ik}^S E_k \quad (6)$$

заједно са одговарајућим граничним условима.

Гранични услови су дати на површини G_p пиезоелектричног тела. Површине G_u , G_T , G_f и G_s у дефинисание, где се претпоставља да G где се G_u и G_T раздвојене и да је њихова унија једнака G_p и да данаке њих G_f и G_s раздвојене и да је њихова унија једнака G_p , где:

- G_T је део површине G_p на чијој површини је задат вектор напона $\bar{t}_i$ (Neumann-ов гранични услови). За пиезоелектрични диск који вибрира у вакуму $\bar{t}_i$, је нула на свим површинама G_p пиезоелектричног диска, а тиме и $G_T = G_p$.
- G_u је део површине G_p на којој је задато померање $\bar{u}_i$ (Dirichlet-ов гранични услов). За већину проблема разматраних у овом раду, нису дата померања на површини пиезоелектричног диска, и на тај начин G_u је празан.
- G_f је део површине G_p на којој је задат константни електрични потенцијал $\bar{f}$ (Dirichlet-ов гранични услов). Када се траже сопствене вредности пиезоелектричног диска, електрични потенцијал је фиксиран на нулу у обе електроде, и стога је G_p једнак површини две електроде. За временски хармоничне анализе G_p је једнак површини једне или обе електроде, на којима је електрични потенцијал константан.
- G_s је део површине G_p на којој је задата површинска густина наелектрисања $\bar{S}$ (Neumann-ов гранични услов). Наелектрисање је једнако нули на деловима површине на којима нема електрода ($D_i n_i = 0$). Наелектрисање може бити задато на неуземљеној електроди у временски хармонијској анализи. Електрична поља изван пиезоелектричног медија се занемарују.

На основу наведеног, граничне услове можемо написати у следећем облику.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{у} \quad G_u \quad (7)$$

$$T_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{у} \quad G_T \quad (8)$$

$$- D_i n_i = \bar{s} \quad \text{у} \quad G_s \quad (9)$$

$$f = \bar{f} \quad \text{у} \quad G_f \quad (10)$$

Где је: $G_u \dot{\cup} G_T = G_p$ и $G_f \dot{\cup} G_s = G_p$ [2]

Везе између напона и померања, као и електричног поља и електричног потенцијала, имају облик:

$$S_{kl}(u) = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (11)$$

$$E_i(f) = -f_{,i} \quad (12)$$

У наставку је дата слаба формулација једначина (3) - (10). Слаба формулација проблема граничне-вредности са дефинисаним граничним условима може се добити множењем диференцијалних једначина којима је описан проблем са тежинским функцијама и интеграцијом по домену решења. Гранични услови се могу применити преко парцијалне интеграције добијених једначина. Слаба формулација проблема је еквивалентна класичној формулацији проблема датог у изразу (3) - (10).

Једначина (3) се множи тежинском функцијом $v_i, i = 1 \dots 3$. (одговара вектору померања), и интеграл по запремини Ω_p . Тежинска функција v_i је произвољна, осим под условом да $v_i = 0$ на G_u . У складу с тим, једначина (4) се множи тежинском функцијом ω која одговара електричном потенцијалу и интеграл по запремини Ω_p . Тежинска функција ω је произвољна, осим под условом да $\omega = 0$ на G_p . На овај начин добијамо:

$$- w^2 \int_{\Omega_p} r_p v_i u_i dW = \int_{\Omega_p} v_i T_{ij,j} dW \quad (13)$$

$$\int_{\Omega_p} w D_{i,i} dW = 0 \quad (14)$$

Према **Green-овој** формули, а користећи чињеницу да је тежинска функција нула v_i на G_u заједно са граничним условом (8), десни део једначине (13) може да се трансформише на следећи начин :

$$\int_{\Omega_p} v_i T_{ij,j} dW = \int_{G_p} v_i T_{ij} n_j dG - \int_{\Omega_p} S_{i,j}(v) T_{ij} dW \quad (15)$$

$$= \int_{G_r} v_i \bar{t}_i dG - \int_{W_p} S_{ij}(v) T_{ij} dW \quad (16)$$

Где је $S_{ij}(v) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ такође према **Green-овој** формули.

На исти начин, коришћењем граничног услова $\omega = 0$ на G_f , као и да је $E_i(\omega) = -\omega_{,i}$, добијамо:

$$\int_{W_p} w D_{i,i} dW = \int_{G_p} w D_i n_i dG - \int_{W_p} w_{,i} D_i dW \quad (17)$$

$$= - \int_{G_q} w \bar{s} dG + \int_{W_p} E_i(w) D_i dW \quad (18)$$

Гранични услови дати у изразу (7) и (10) се примењују после постављања једначина коначних елемената.

Користећи горе наведене трансформације и конститутивне једначине за пиезоелектрични медијум дате у изразима (5) - (6), једначине (13) - (14) могу се поново написати као:

$$- w^2 \int_{W_p} r_p v_i u_i dW - \int_{G_r} v_i \bar{t}_i dG + \int_{W_p} S_{ij}(v) c_{ijkl}^E S_{kl}(u) dW - \int_{W_p} S_{ij}(v) e_{kij} E_k(f) dW = 0 \quad (19)$$

$$- \int_{G_q} w \bar{s} dG + \int_{W_p} E_i(w) e_{ikl} S_{kl}(u) dW + \int_{W_p} E_i(w) e_{ik}^S E_k(f) dW = 0 \quad (20)$$

Из практичних разлога (за боље искоришћење меморије) користи се симетрија S_{ij}, C_{ijkl}^E и e_{kij} , т.е. $S_{ij} = S_{ji}, C_{ijkl}^E = C_{jikl}^E, C_{ijkl}^E = C_{ijlk}^E$ и $e_{kij} = e_{kji}$. [3]

Нека је:

$ij \rightarrow p, p = 1 \dots 6$, и где $(i,j) = (1,1) \rightarrow p = 1, (i,j) = (2,2) \rightarrow p = 2, (i,j) = (3,3) \rightarrow p = 3, (i,j) = (2,3) \rightarrow p = 4, (i,j) = (3,2) \rightarrow p = 4, (i,j) = (1,3) \rightarrow p = 5, (i,j) = (3,1) \rightarrow p = 5, (i,j) = (1,2) \rightarrow p = 6$, и $(i,j) = (2,1) \rightarrow p = 6$. Тада тензор напона може бити поново написан као вектор напона $\{S\}^2$ са шест компоненти, тензор еластичне крутости може бити поново написан као матрица $6 \times 6 [C^E]$, и тензор пиезоелектричних константи може се написати као матрица $3 \times 6 [e]$. На пример, вектор напона може бити написан као:

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{13} \\ 2S_{12} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Увођењем матричне нотације, једначине (19) - (20) могу да се напишу у облику:

$$\begin{aligned} & - \int_{W_p} w^2 r_p \{v\}^T \{u\} dW - \int_{G_r} \{v\}^T \{\bar{t}\} dG + \\ & \int_{W_p} \{S(v)\}^T [c^E] \{S(u)\} dW - \int_{W_p} \{S(v)\}^T [e]^T \{E(f)\} dW = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$- \int_{G_q} w \bar{S} dG + \int_{W_p} \{E(w)\}^T [e] \{S(u)\} dW + \int_{W_p} \{E(w)\}^T [e^S] \{E(f)\} dW = 0 \quad (23)$$

Цилиндрични координатни систем

У прорачунима аксијално симетричних структура, пожељно је да се користи цилиндрични координатни систем где се може искористити симетрија проблема. Вектор напона у овом координатном систему, са координатама (r, θ, z) може да се напише у облику:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{rr} \\ S_{\theta\theta} \\ S_{zz} \\ 2S_{\theta z} \\ 2S_{rz} \\ 2S_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{Bmatrix} = [L_u] \{u\}, \quad (24)$$

Вектор електричног поља у цилиндричном координатном систему има облик:

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_r \\ E_q \\ E_z \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} f = - \{L_f\} f \quad (25)$$

Аксијално симетричан цилиндрични координатни систем

Симетрија у аксијално симетричним структурама значи да је промена свих величина са углом једнака нули:

$$\frac{\partial}{\partial q} = 0 \quad (26)$$

Поред тога, аксијално симетричне торзионе (циркуларне) осцилације су занемарљиве када је:

$$u_q = 0 \quad (27)$$

То значи, да су потребне само две координате да се опише проблем у аксијално симетричном случају, r и z . Овај тип проблема се често односи на дводимензионални аксијално симетрични проблем. На основу израза (26) - (27) и (24) - (25) добија се:

$$s_{qz} = 0 \quad (28)$$

$$s_{rq} = 0 \quad (29)$$

$$E_q = 0 \quad (30)$$

Само четири од шест компоненти напона и две од три компоненте електричног поља треба да буду анализирани. На овај начин добијају се следећи изрази за вектор напона и вектор електричног поља:

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} s_{rr} \\ s_{qq} \\ s_{zz} \\ 2s_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = [L_u] \{u\} \quad (31)$$

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} E_r \\ E_z \end{Bmatrix} = - \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} f = - \{L_f\} f \quad (32)$$

Диференцијални матрични оператори $[L_u]$ и $\{L_\phi\}$ дакле имају следеће облике у овом случају,

$$[L_u] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\{L_f\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (34)$$

У дводимензионалном акијално симетричном случају неки редови и колоне морају бити уклоњени из матрица констаната, јер 4. и 6. компонента вектора напона и деформације и 2. компонента вектора електричног поља и померања се бришу из претходних израза. На тај начин $[C^E]$ постаје матрица реда 4x4 (ред и колона 4 и 6 су уклоњени), $[e]$ матрица реда 2x4 (колоне 4 и 6 и врста 2 су уклоњени) и $[E^S]$ матрица 2x2 (ред и колона 2 су уклоњени). За материјале узете у обзир у овом раду, где је облик конститутивне матрице исти као и за шестоугаони кристал у симетрији класе 6mm, сталне матрице могу се написати као:

$$[C^E] = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 \\ C_{12}^E & C_{11}^E & C_{13}^E & 0 \\ C_{13}^E & C_{13}^E & C_{33}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$[e^S] = \begin{bmatrix} e_{11}^S & 0 \\ 0 & e_{33}^S \end{bmatrix} \quad (37)$$

За аксијално симетрични цилиндрични координатни систем, једначине (22) - (23) могу бити поново написане као :

$$\begin{aligned}
 & - w^2 \int_{W_p} r_p \{v\}^T \{u\} dW - \int_{G_T} \{v\}^T \{\bar{t}\} dG + \\
 & \int_{W_p} \left([L_u] \{v\} \right)^T [c^E] [L_u] \{u\} dW + \int_{W_p} \left([L_u] \{v\} \right)^T [e]^T [L_r] f dW = 0
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$- \int_{G_q} w \bar{s} dG - \int_{W_p} \left(\{L_r\} w \right)^T [e] [L_u] \{u\} dW + \int_{W_p} \left(\{L_r\} w \right)^T [e]^S [L_r] f dW = 0 \tag{39}$$

3.2. Подела домена на чворове и елементе

У анализи методом коначних елемената, посматрани део структуре се апроксимира коначним бројем мањих запремина – коначних елемената. У сваком елементу тачке које се називају чворови, су места на којима се одређују вредности непознатих величина (померања и електрични потенцијал). Веза између непознатих величина у чворовима елемента и непознатих величина у произвољној тачки унутар елемента је дата интерполационом функцијом (основном функцијом, функцијом облика). Ове интерполационе функције су обично полиномне. Избор облика елемента, интерполационих функција, поделе елемената и нумерација чворова ће утицати на тачност решења.

- **Облик елемената:** Област анализе - домен мора да буде попуњен коначним елементима. За аксијално симетричне проблеме моделира се само половина гз-равни а проблем може због тога да се третира као **2D** проблем. За правоугаоне **2D** области правоугаони елементи су бољи.
- **Подела елемената:** Мора бити извршена тако да рачун даје довољно тачна решења. Ово се обично постиже коришћењем одређеног броја елемената по таласној дужини.
- **Нумерација чворова:** Облик једначине коначних елемената зависи од нумерације чворова. Нумерација чворова треба да буде изабрана на начин којим се смањују висине стубаца матрица посматрано у односу на главну дијагоналу.
- **Интерполационе функције:** Тачност решења је условљена редом интерполације и у општем случају тачност се повећава са повећањем реда интерполационих функција.

Запремина Ω_p се дели на M_p подзапремина коначних елемената $\Omega_p^{(m)}$, $m = 1 \dots M_p$ (слика 3). Свака променљива A дефинисана у елементу бр. m ће бити написана као $A^{(m)}$ у наставку.

Посматрајмо први члан једначине (38). Интеграл по запремини Ω_p се трансформише у суму по M_p елемената запремине $\Omega_p^{(m)}$. Тако добијамо:

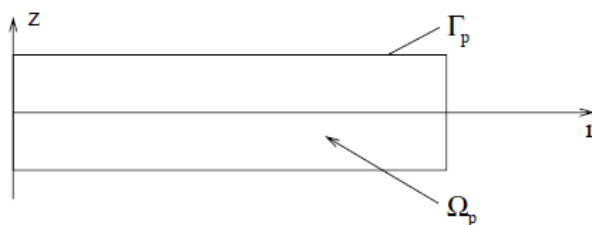
$$\int_{\Omega_p} r_p^{(m)} \{v\}^T \{u\} dW = \sum_{m=1}^{M_p} \left\{ \int_{\Omega_p^{(m)}} r_p^{(m)} \{v^{(m)}\}^T \{u^{(m)}\} dW \right\} \quad (40)$$

Слична трансформација је такође примењена и у другим члановима у једначинама (38) - (39).

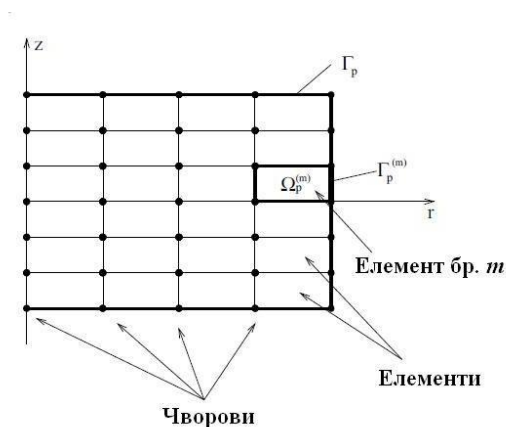
Предпоставља се да је померање у сваком елементу функција померања у n чворовима елемента, где интерполациона функција N_i води рачуна о мапирању померања чворних тачака у померања произвољне тачке у елементу. Интерполационе функције су основне за Galerkin-ову шему. Према томе, померање у произвољној тачки (r,z) у елементу број m може бити изражено као:

$$u_r^{(m)}(r,z) = \sum_{i=1}^n N_i(r,z) \hat{u}_{r,i}^{(m)} \quad (41)$$

а) Пиезоелектрични диск



б) Коначни елементи модела диска



Слика 3: Пример поделе структуре (пиезоелектричног диска) на чворове и елементе.

На слици 3(a) је приказан диск, који има запремину Ω_p и површину Γ_p . На слици 3(b) је приказан пример поделе диска на елементе и чворове, где сваки елемент због једноставности правоугаоног облика има четири чвора на својим теменима. Елемент број m има запремину $\Omega_p^{(m)}$ и површину $\Gamma_p^{(m)}$.

То је довољно да се моделира диск у rz -равни због симетрије проблема.

$$u_z^{(m)}(r, z) = \sum_{i=1}^n N_i(r, z) \hat{u}_{z,i}^{(m)} \quad (42)$$

где $u_r^{(m)}(r, z)$ је r -компонента померања у координатама (r, z) у елементу број m , $u_z^{(m)}(r, z)$ је z -компонента померања у координатама (r, z) у елементу број m , $N_i(r, z)$ су интерполационе функције изражене у координатама (r, z) , $\bar{u}_{r,i}^{(m)}$ је радијално померање чвора број i у елементу број m , $\hat{u}_{r,i}^{(m)}$ је аксијално померање чвора број i у елементу број m .

У векторском облику ово може бити написано као:

$$\{u^{(m)}(r, z)\} = [N_u^{(m)}(r, z)] \{\hat{u}^{(m)}\} \quad (43)$$

где $\{\hat{u}^{(m)}\}$ је вектор померања у чворовима елемента број m ,

$$\{\hat{u}^{(m)}\}^T = [\hat{u}_{r,1}^{(m)} \hat{u}_{z,1}^{(m)} \dots \hat{u}_{r,n}^{(m)} \hat{u}_{z,n}^{(m)}] \quad (44)$$

и $[N_u^{(m)}]$ где је интерполациона матрица за померање за елемент број m дефинисана,

$$[N_u^{(m)}(r, z)] = \begin{bmatrix} N_1(r, z) & 0 & N_2(r, z) & 0 & \dots & N_n(r, z) & 0 \\ 0 & N_1(r, z) & 0 & N_2(r, z) & \dots & 0 & N_n(r, z) \end{bmatrix} \quad (45)$$

Такође је корисно написати померање у произвољној тачки у елементу као и функцију померања у чворним тачкама пиезоелектричне структуре, $\{\hat{u}\}$. Однос између локалног $\{\hat{u}^{(m)}\}$ и глобалног $\{\hat{u}\}$ вектора чворних померања представља матрицу трансформације $[G_u^{(m)}]$:

$$\{\hat{u}^{(m)}\} = [G_u^{(m)}] \{\hat{u}\} \quad (46)$$

где је:

$$\{\hat{u}\}^T = [\hat{u}_{r,1} \hat{u}_{z,1} \dots \hat{u}_{r,N_p} \hat{u}_{z,N_p}] \quad (47)$$

и где је N_p број чворова у Ω_p . Матрице трансформација обезбеђују мапирање локалних чворних вектора у своје глобалне парове.

Уобичајено је да се користите исте интерполационе функције N_i за тежинске функције. Овакав приступ доводи до:

$$\{v^{(m)}\} = [N_u^{(m)}] \{c_v^{(m)}\} \quad (48)$$

где је $c_v^{(m)}$ вектор произвољних коефицијената који одговара елементу број m и где

$$\{c_v^{(m)}\}^T = [c_{v,1}^{(m)} c_{v,2}^{(m)} \dots c_{v,2n}^{(m)}] \quad (49)$$

Такође $\{c_v^{(m)}\} = [G_u^{(m)}] \{C_v\}$, где је $\{C_v\}$, вектор произвољног коефицијената који одговара целокупној структури. Треба имати на уму да су тежинске функције $\{u\}$ дефинисане да имају вредност нула на површини Γ_u . Овим је обезбеђено постављање компоненти вектора $\{v^{(m)}\}$ на нулу након што су једначине коначних елемената постављене, у складу са процедуром описаном у литератури [4]. То доводи до брисања редова који одговарају померању чворова на површини Γ_u из система једначина коначних елемената. Гранични услов за померање дат у изразу (7) је такође примењен након што су једначине коначних елемената постављене директним убацивањем задатих вредности померања у вектору $\{\hat{u}\}$ [4].

Увођењем интерполационих функција и чворних померања, једначина (40) може да се трансформише у:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M_p} \left\{ \int_{W_p^{(m)}} r_p^{(m)} \{v^{(m)}\}^T \{u^{(m)}\} dW \right\} &= \sum_{m=1}^{M_p} \left\{ \{c_v^{(m)}\}^T \left[\int_{W_p^{(m)}} r_p^{(m)} [N_u^{(m)}]^T [N_u^{(m)}] dW \right] \{\hat{u}^{(m)}\} \right\} \\ \{c_v\}^T \sum_{m=1}^{M_p} \left\{ [G_u^{(m)}]^T \left[\int_{W_p^{(m)}} r_p^{(m)} [N_u^{(m)}]^T [N_u^{(m)}] dW \right] [G_u^{(m)}] \right\} \{\hat{u}\} & \\ = \{c_v\}^T [M_{uu}] \{\hat{u}\} & \end{aligned} \quad (50)$$

где је глобална матрица маса $[M_{uu}]$ дефинисана у облику:

$$[M_{uu}] = \sum_{m=1}^{M_p} [G_u^{(m)}]^T [M_{uu}^{(m)}] [G_u^{(m)}] \quad (51)$$

и $[M_{uu}]$, је локална маса матрице за елемент број m , дефинисана као:

$$\begin{bmatrix} M_{uu}^{(m)} \end{bmatrix} = \int_{W_p^{(m)}} r_p^{(m)} \begin{bmatrix} N_u^{(m)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_u^{(m)} \end{bmatrix} dW \quad (52)$$

Односи између вредности електричног потенцијала, површинског трења и површине наелектрисања у произвољној тачки и одговарајућих чворних вредности, су дефинисани коришћењем одговарајућих интерполационих функција:

$$\left\{ f^{(m)} \right\} = \begin{bmatrix} N_f^{(m)} \end{bmatrix} \left\{ \hat{f}^{(m)} \right\} = \begin{bmatrix} N_f^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_f^{(m)} \end{bmatrix} \left\{ \hat{f} \right\}, \quad (53)$$

$$\left\{ \bar{t}^{(m)} \right\} = \begin{bmatrix} N_t^{(m)} \end{bmatrix} \left\{ \hat{t}^{(m)} \right\} = \begin{bmatrix} N_t^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_t^{(m)} \end{bmatrix} \left\{ \hat{t} \right\}, \quad (54)$$

$$\left\{ s^{(m)} \right\} = \begin{bmatrix} N_s^{(m)} \end{bmatrix} \left\{ \hat{s}^{(m)} \right\} = \begin{bmatrix} N_s^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_s^{(m)} \end{bmatrix} \left\{ \hat{s} \right\}, \quad (55)$$

где су:

$\begin{bmatrix} N_{\emptyset}^{(m)} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} N_t^{(m)} \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} N_{\sigma}^{(m)} \end{bmatrix}$ интерполационе матрице за електрични потенцијал, површинско трење и површинско наелектрисање за елемент број m ,

$\left\{ \hat{\phi}^{(m)} \right\}$, $\left\{ \hat{t}^{(m)} \right\}$, и $\left\{ \hat{\sigma}^{(m)} \right\}$ су вектори чворних вредности за електрични потенцијал, површинско трење и површинско наелектрисање у елементу број m ,

$\left\{ \hat{\phi} \right\}$, $\left\{ \hat{t} \right\}$ и $\left\{ \hat{\sigma} \right\}$ су вектори чворних вредности електричног потенцијала, површинског трења и површинског наелектрисања у свим структурама,

$\begin{bmatrix} G_{\emptyset}^{(m)} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} G_t^{(m)} \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} G_{\sigma}^{(m)} \end{bmatrix}$ су матрице трансформације за трансформацију од локалних до глобалних координата.

Локални и глобални чворни вектори наведени претходно су дефинисани као:

$$\left\{ \hat{f}^{(m)} \right\}^T = \begin{bmatrix} \hat{f}_1^{(m)} \hat{f}_2^{(m)} \dots \hat{f}_n^{(m)} \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\left\{ \hat{f} \right\}^T = \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \hat{f}_2 \dots \hat{f}_{N_p} \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\left\{ \hat{t}^{(m)} \right\}^T = \begin{bmatrix} \hat{t}_{r,1}^{(m)} \hat{t}_{z,1}^{(m)} \dots \hat{t}_{n,r}^{(m)} \hat{t}_{n,z}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\left\{ \hat{t} \right\}^T = \begin{bmatrix} \hat{t}_{r,1} \hat{t}_{z,1} \dots \hat{t}_{r,N_p} \hat{t}_{z,N_p} \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\left\{ \hat{s}^{(m)} \right\}^T = \begin{bmatrix} \hat{s}_1^{(m)} \hat{s}_2^{(m)} \dots \hat{s}_n^{(m)} \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\left\{ \hat{s} \right\}^T = \begin{bmatrix} \hat{s}_1 \hat{s}_2 \dots \hat{s}_{N_p} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Уобичајено је да се користите исте интерполационе функције N_i за померања, електрични потенцијал, површинско трење и површинско наелектрисање[5]. Дакле, $[N_\emptyset^{(m)}(r, z)]$ дефинисана је као:

$$[N_f^{(m)}(r, z)] = [N_1(r, z)N_2(r, z)....N_n(r, z)] \quad (62)$$

и

$$[N_s^{(m)}] = [N_f^{(m)}] \quad (63)$$

$$[N_t^{(m)}] = [N_u^{(m)}] \quad (64)$$

Исте интерполационе функције су такође коришћене за тежинске функције ω , што омогућава да се користи матрица трансформације $[G_\emptyset^{(m)}$ за ω]:

$$w^{(m)} = [N_f^{(m)}] \{C_w^{(m)}\} = [N_f^{(m)}] [G_f^{(m)}] \{C_w\} \quad (65)$$

где $\{C_\omega^{(m)}\}$ (а самим тим и $\{C_\omega\}$) су вектори произвољних коефицијената, аналогно случају тежинске функције $\{u\}$. Имајте на уму да су тежинске функције ω дефинисане да буду нула на површини $\Gamma_\emptyset$, и аналогно случају за тежинску функцију $\{u\}$, овај услов је примењен брисањем редова који одговарају електричном потенцијалу чворова на површини $\Gamma_\emptyset$, из једначина коначних елемената.

3.3. Једначине коначних елемената

Приказана процедура примењена на другим члановима у једначинама (38) - (39) даје:

$$\{c_v\}^T \{-w^2[M_{uu}]\}\{\hat{u}\} + [K_{uu}]\{\hat{u}\} + [K_{uf}]\{\hat{f}\} - \{F\} = 0 \quad (66)$$

$$\{c_w\}^T \{-\{Q\} - [K_{fu}]\{\hat{u}\} - [K_{ff}]\{\hat{f}\}\} = 0 \quad (67)$$

где су матрице и вектори у једначинама (66) - (67) дефинисане као:

- Локална матрица крутости:

$$[K_{uu}^{(m)}] = \int_{w\emptyset^{(m)}} [B_u^{(m)}]^T [C^{E(m)}] [B_u^{(m)}] dW \quad (68)$$

са

$$\begin{bmatrix} B_u^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_u^{(m)} \end{bmatrix} \quad (69)$$

- Локална "пиезоелектрична матрица крутости":

$$\begin{bmatrix} K_{uf}^{(m)} \end{bmatrix} = \int_{\Psi^{(m)}} \begin{bmatrix} B_u^{(m)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \ell^{(m)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_f^{(m)} \end{bmatrix} d\mathcal{W} \quad (70)$$

са

$$\begin{bmatrix} B_f^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_f^{(m)} \end{bmatrix} \quad (71)$$

и где је $\begin{bmatrix} K_{fu}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{uf}^{(m)} \end{bmatrix}^T$.

- Локална "матрица диелектричне крутости":

$$\begin{bmatrix} K_{ff}^{(m)} \end{bmatrix} = - \int_{\Psi^{(m)}} \begin{bmatrix} B_f^{(m)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_f^{(m)} \end{bmatrix} d\mathcal{W} \quad (72)$$

- Локални вектор силе (локални вектор површинског трења):

$$\begin{Bmatrix} F^{(m)} \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma_T^{(m)}} \begin{bmatrix} N_u^{(m)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_t^{(m)} \end{bmatrix} d\mathcal{G} \begin{Bmatrix} \hat{t}^{(m)} \end{Bmatrix} \quad (73)$$

Овде $\Gamma_T^{(m)}$ је део површине Γ_T која је на површини елемента број m . Дакле, $\begin{Bmatrix} F^{(m)} \end{Bmatrix}$ је једнака нули за све елементе који се не налазе на површини Γ_T .

- Локални вектор нелектрисања (локални вектор површинског наелектрисања):

$$\begin{Bmatrix} Q^{(m)} \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma_s^{(m)}} \begin{bmatrix} N_f^{(m)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_s^{(m)} \end{bmatrix} d\mathcal{G} \begin{Bmatrix} \hat{s}^{(m)} \end{Bmatrix} \quad (74)$$

Овде $\Gamma_s^{(m)}$ је део површине Γ_s , која је на површини елемента број m . Дакле, $\begin{Bmatrix} Q^{(m)} \end{Bmatrix}$ је једнако нули за све елементе који се не налазе на површини Γ_s .

и где

$$\begin{bmatrix} K_{uu} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{Mp} \begin{bmatrix} G_u^{(m)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{uu}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_u^{(m)} \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
 [K_{uf}] &= \sum_{m=1}^{Mp} [G_u^{(m)}]^T [K_{uf}^{(m)}] [G_f^{(m)}] \\
 [K_{fu}] &= \sum_{m=1}^{Mp} [G_f^{(m)}]^T [K_{fu}^{(m)}] [G_u^{(m)}] \\
 [K_{ff}] &= \sum_{m=1}^{Mp} [G_f^{(m)}]^T [K_{ff}^{(m)}] [G_f^{(m)}] \\
 [F] &= \sum_{m=1}^{Mp} [G_t^{(m)}]^T [F^m] \\
 [Q] &= \sum_{m=1}^{Mp} [G_s^{(m)}]^T [Q^{(m)}]
 \end{aligned}$$

Вектори коефицијената $\{C_u\}$ и $\{C_\omega\}$ су произвољни, и због тога једначине (66) - (67) могу бити поново написане као:

$$-W^2 \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{f} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uf} \\ K_{fu} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{f} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ -Q \end{Bmatrix} \quad (76)$$

Тежинске функције $\{v\}$ су дефинисане да буду нула на површини G_u док су тежинске функције ω дефинисане да буду нула на површина G_f . Дакле, редови који одговарају померању чворова на површини G_u и редови који одговарају електричном потенцијалу чворова на површини G_f у једначини (76) морају бити избрисани. Осим тога, гранични услов за померање дат изразом (7) и за електрични потенцијал дат изразом (10) су примењени директним убацивањем прописаних вредности у векторе $\{\hat{u}\}$ и $\{\hat{\phi}\}$.

4. Примери

У овом делу рада биће приказана два (benchmark) проблема:

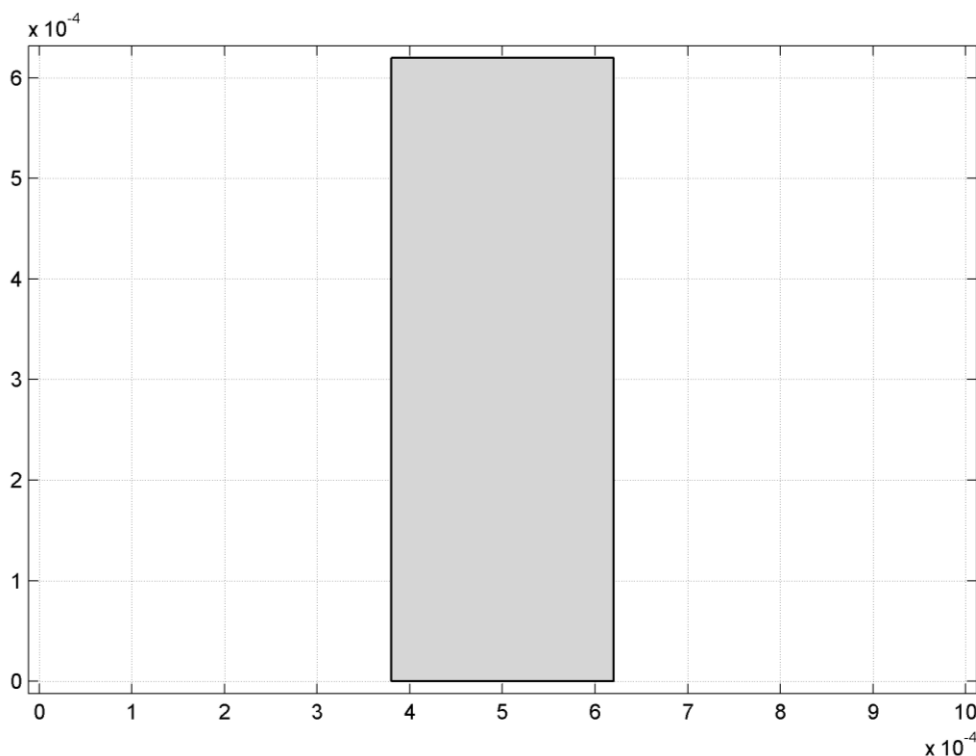
- статички 2Д оносиметрични проблем (радијално поларизована пиезоелектрична цев,
- статички 3Д проблем (вишеслојна греда са пиезокерамиком у делу једног слоја)

Моделирање и прорачун ових примера је извршен у софтверу Comsol Multiphysics (verzija 5.2a).

4.1. Радијално поларизована пиезоелектрична цев

Ово је пример статичке 2Д аксијално симетричне анализе пиезоелектричног актуатора коришћењем Piezoelectric Devices multiphysics окружења у софтверу COMSOL. Моделирана је радијално поларизована пиезоелектрична цев [6]. Област примене радијално поларизованих цеви су, на пример, млазнице за контролу протицања флуида (боје) у инкџет штампачима.

Висина моделираног узорка је 0,62mm, а унутрашњи и спољашњи радијуси су 0,38mm и 0,62mm. Због аксијалне симетричности проблема, моделирана је само једна страна пресека цеви (слика 4).



Слика 4: Геометрија проблема

Посматрају се два случаја која се разликују по задатим граничним условима. Случај 1 представља директни пиезоелектрични ефекат, а случај 2 представља инверзни пиезоелектрични ефекат.

Поларизација материјала (кристала) се поклапа са г-осом глобалног координатног система – радијално поларизованог. Пиезокерамика (у овом случају PZT-5H) је трансверзално изотропан материјал, који су посебна класа ортотропних материјала. Такви материјали имају исте карактеристике у једној равни (изотропно понашање) и другачије карактеристике у равни управној на ову раван.

Конститутивне релације за овај проблем имају облик:

$$\begin{bmatrix} T_r \\ T_\phi \\ T_z \\ T_{rz} \\ D_r \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{t11} & e_{t13} \\ e_{t21} & e_{t23} \\ e_{t31} & e_{t33} \\ e_{t51} & e_{t53} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_r \\ S_\phi \\ S_z \\ S_{rz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \\ E_z \end{bmatrix} \quad (78)$$

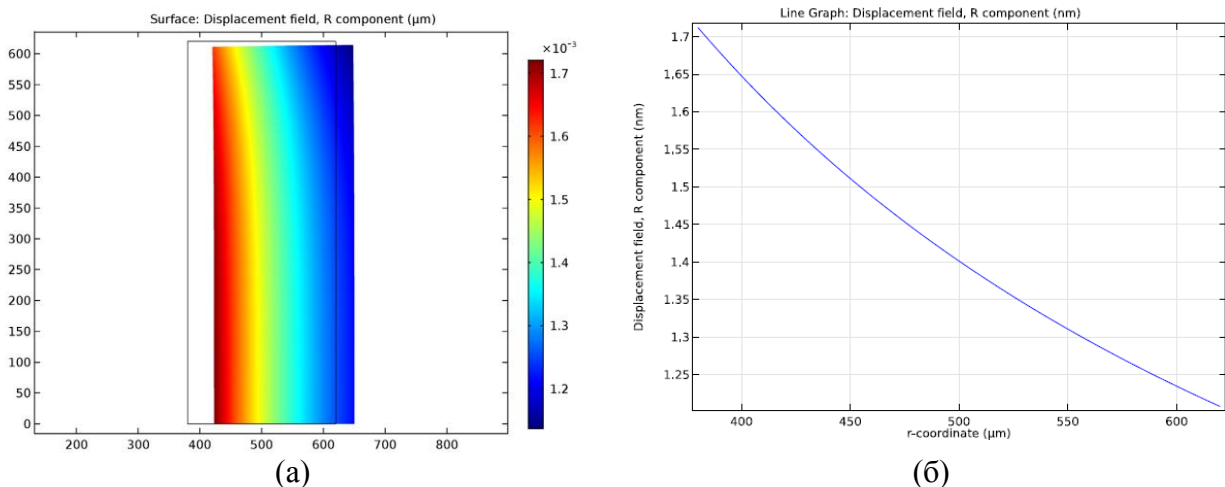
Једначине које описују проблем, у одсуству запреминских наелектрисања и уз занемаривање инерцијалних сила, имају облик (79):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot D_r) - \frac{\partial}{\partial z}(r \cdot D_z) &= 0 \\ -\frac{\partial T_r}{\partial r} - \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} - \left[\frac{T_r - T_\phi}{r} \right] &= 0 \\ -\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} - \frac{\partial T_z}{\partial z} - \frac{T_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (79)$$

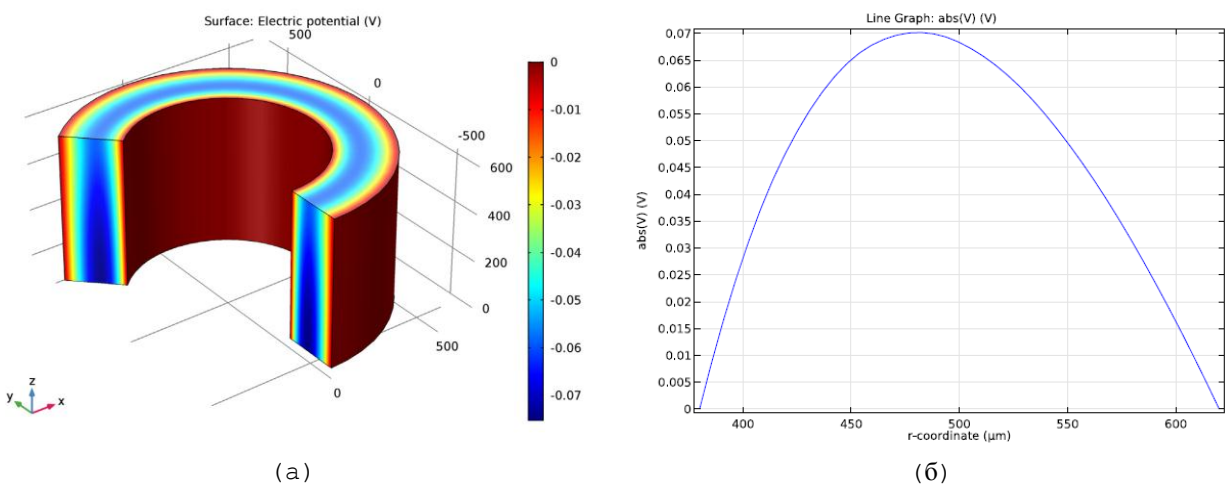
Гранични услови ће бити задати на два начина:

1. Случај: Ограничено је померање доње површи у правцу осе Z. Између унутрашње и спољашње површине цеви влада разлика потенцијала од 1V.
2. Случај: Ограничено је померање доње површи у правцу осе Z. Задат је притисак флуида од 0.1 МПа на унутрашњу површ цеви. Унутрашње и спољашње површине цеви су уземљене.

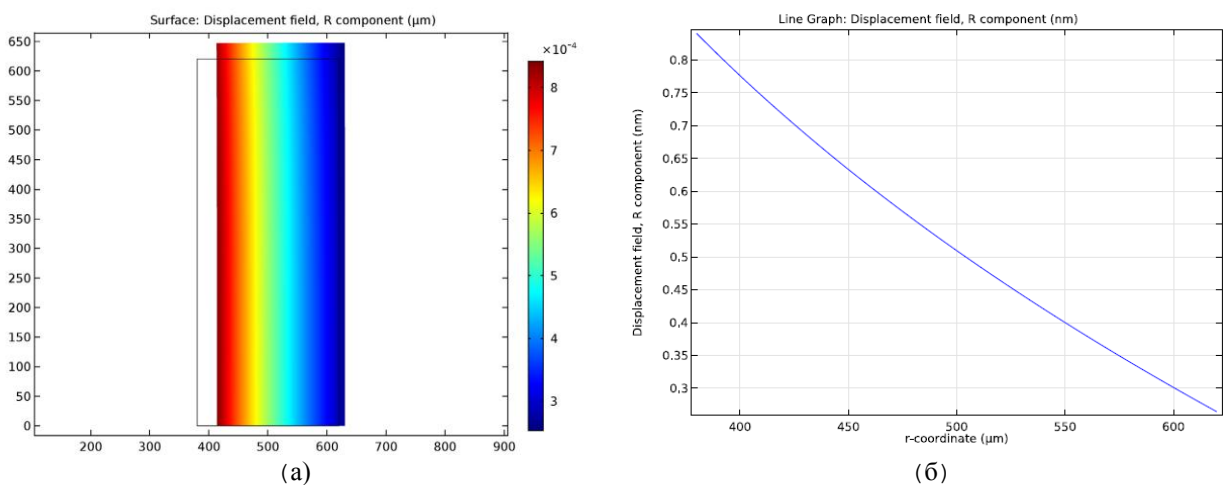
На слици 5 приказано је радијалнио померање услед дејства притиска у случају 1. На слици 6 приказан је одговарајући индуковани електрични потенцијал. Поље потенцијала у радијалном правцу приказани дуж линије реза 300μm изнад основе цеви приказано је на слици 7 и слици 8.



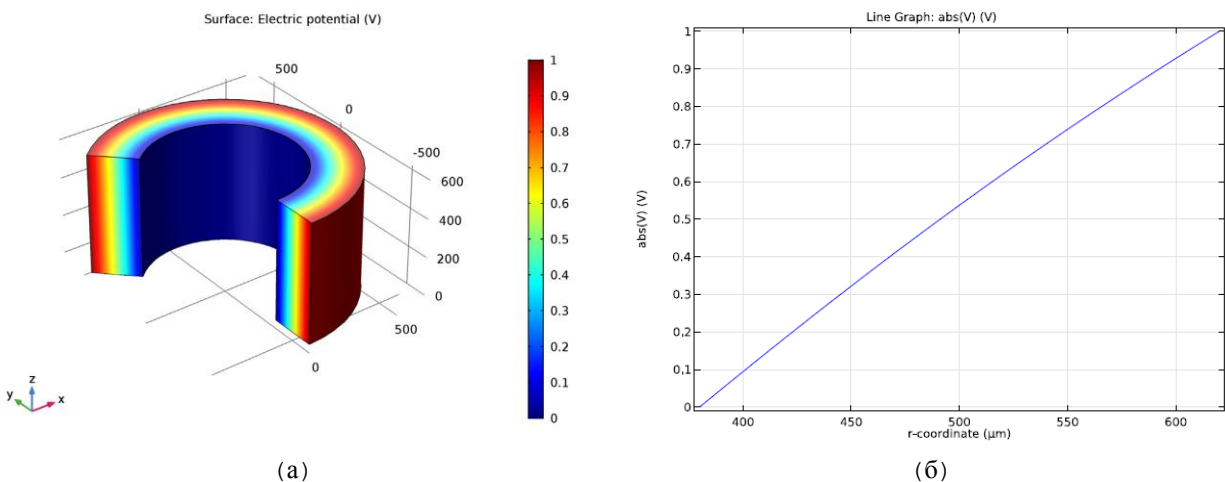
Слика 5: Деформисани облик и радијално померање услед унутрашњег притиска од 0,1 МПа (случај 1 - директни пиезоелектрични ефекат).



Слика 6: Индуковани електрични потенцијал унутар деформисане цеви услед унутрашњег притиска од 0,1 МПа (случај 1- директни пиезоелектрични ефекат).



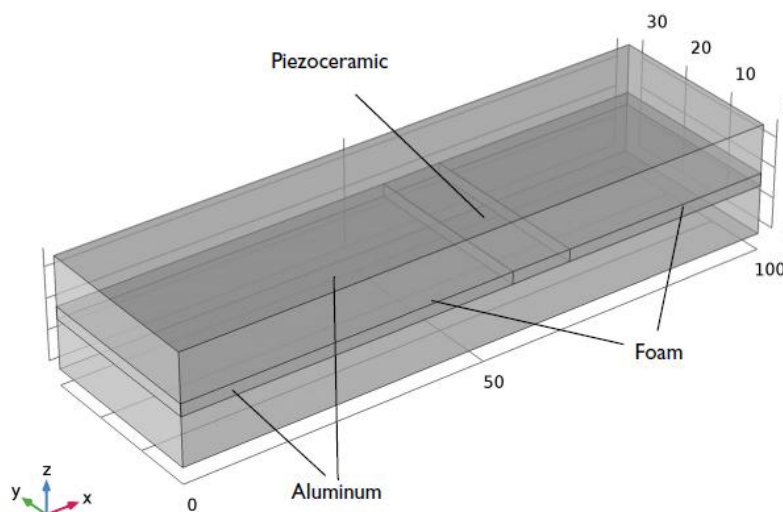
Слика 7: Деформисани облик и радијално померање пиезокерамичке - цеви услед радијалног електричног поља (случај 2 - инверзни пиезоелектрични ефекат).



Слика 8: Поље електричног потенцијала случај 2 - инверзни пиезоелектрични ефекат).

4.2. Вишеслојна греда са пиезокерамиком у делу једног слоја

Ово је пример анализе пиезоелектричног актуатора заснованог на померању укљештене греде, коришћењем интерфејса Piezoelectric Devices multiphysics [7]. Греда је направљена из више слојева, а актуација се остварује померањем слободног краја на рачун савијања греде. Греда се састоји од 2mm дебелог флексибилног пенастог језгра које се налази између два алуминијумска слоја дебљине 8mm. Део крутог језгра замењен је са 10mm дугим пиезокерамичким актуатором који је позициониран између $x = 55\text{mm}$ и $x = 65\text{mm}$. Конзола је оријентисана дуж глобалне x – осе.



Слика 9: Геометрија проблема

У табели 1 дате су карактеристике материјала од који су саграђени слојеви конзоле.

Табела 1 – Карактеристике материјала слојева

Величина	Алуминијум	Пена	Пиезокерамика
Модул еластичности (Е)	750 GPa	35.3 Мра	-
Поасонов коефицијент (ν)	0.35	0.383	-
Густина (ρ)	2700 kg/m ³	32 kg/m ³	7500 kg/m ³

Конститутивне релације за овај проблем имају облик:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & -e_{11} & -e_{21} & -e_{31} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & -e_{12} & -e_{22} & -e_{32} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & -e_{13} & -e_{23} & -e_{33} \\ & & & sym & c_{44} & c_{45} & c_{46} & -e_{14} & -e_{24} & -e_{34} \\ & & & & c_{55} & c_{56} & -e_{15} & -e_{25} & -e_{35} \\ & & & & & c_{66} & -e_{16} & -e_{26} & -e_{36} \\ e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (80)$$

T_i – компоненте вектора напона

D_i – компоненте електричног померања

S_i – компоненте вектора деформације

E_i – компоненте вектора електричног поља

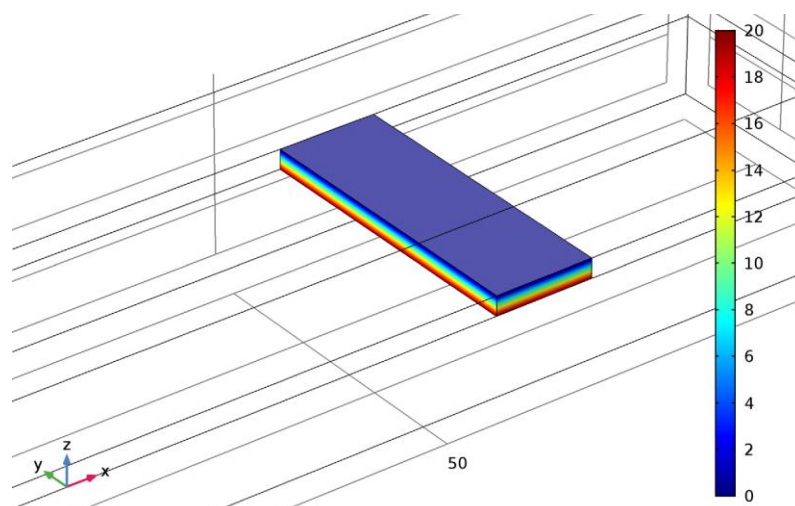
c_{ij} – компоненте матрице еластичности

e_{ij} – компоненте пиезоелектричне матрице

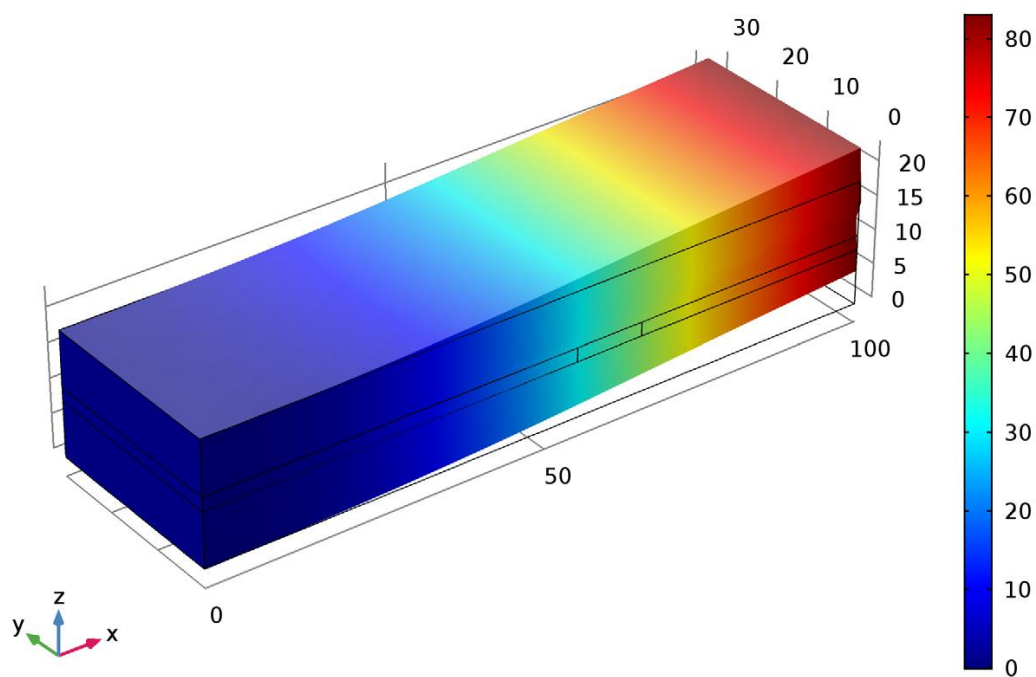
ε_{ij} – копоненте матрице пермитивности

Конзола је укљештена по површи $x=0$. Све остале површи су слободне. Разлика потенцијала од 20V постоји између горње и доње електроде пиезоелектричног материјала (слика 9). Ово доводи до тога да је електрично поље управно на правац осе x и изазива попречни напон смицања.

На слици 10 приказано је поље напона у пиезоелектричном материјалу. На слици 11 приказано је поље померања. Израчунати угиб је 83nm.



Слика 10: Поље напона у пиезоелектричном материјалу



Слика 11: Поље померања, Z компонента [nm]

5. Закључак

Пиезоелектрични ефект (грч. пиезо - гурати) је појава стварања везаних електричних наелектрисања на површини неких чврстих тела приликом њихове механичке деформације, и обрнуто. Пиезоелектрични ефекат открили су 1890. године Jacques i Pierre Curie. Теоријску основу за разумевање пиезоелектричног ефекта поставио је Келвин (1893.), а тензорске једначине које описују (линеарну) везу између деформације и електричног поља код пиезоелектричних кристала дао је Voight 1894. До првих практичних примена пиезоелектричног ефекта дошло је за време 1. светског рата, када су произведени први сонарни уређаји за откривање подморница. Данас је пажња усмерена на нове технолошке примене и откривање нових пиезоелектричних материјала (посебно корисне су се показале пиезоелектричне керамике и синтетички полимери). Овим открићима отворена су врата великом напретку у разумевању физике чврстог стања, а њихове технолошке примене и цивилизацијска важност су велике.

Најзначајнији пиезоелектрични материјали су кварц, Сигнеттова сол и турмалин, а у новије време пиезоелектричне керамике. Без сумње, пиезоелектрична керамика је осигурала стално место у пољу материјалне науке и инжењерства



Слика12: Приказ пиезоелектричног кристала

Литература

- [1] J. Kocbach, P. Lunde, and M. Vestrheim, “FEMP, Finite Element Modeling of Piezoelectric structures. Theory and verification for piezoelectric disks,” Scientific/Technical Report No. 1999-07, Department of Physics, University of Bergen, Norway, 1999.
- [2] P. Challande, “Radiative coupling influence on piezoelectric cavity vibration modes,” *Eur. J. Mech. A/Solids* 8, 119–127 (1989)
- [3] *IEEE Standard on Piezoelectricity - Std. 176 - 1987* (The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., New York, 1988).
- [4] A. J. Davies, *The Finite Element Method. A first approach* (Oxford University Press, Oxford, UK, 1980)
- [5] H. Allikand, T. J. R. Hughes, “Finite element method for piezoelectric vibration”, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 2, 151–157 (1970).
- [6] V. Piefort, *Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures*, Ph.D. thesis, Université Libre de Bruxelles, Belgium, Dept. Mechanical Engineering and Robotics, 2001.
- [7] A. Benjeddou, M.A. Trindade, and R. Ohayon, *A Unified Beam Finite Element Model for Extension and Shear Piezoelectric Actuation Mechanisms*, CNAM (Paris, France), Structural Mechanics and Coupled Systems Laboratory, 1997.
- [8] <https://www.comsol.com/model/piezoelectric-shear-actuated-beam-24>, приступљено 13-12-2016
- [9] <https://www.comsol.com/model/piezoceramic-tube-37>, приступљено 13-12-2016