

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Мастер академске студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Лаке конструкције

Број индекса: 383/2012

Александар П. Стокић

Носачи оптерећени на ометену торзију

мастер рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Проф. др Весна Марјановић - ментор
2. _____
3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру завршног рада кандидат треба да прикаже :

- Појам слободне и ограничене торзије
- Основне претпоставке при прорачуну и компоненте померања тачака
- Секторске карактеристике попречног пресека
- Силе и напони у попречном пресеку носача и појам бимоента
- Метода почетних параметра
- Опште решење диференцијалних једначина помоћу методе почетних параметра
- Пример прорачуна носача оптерећеног на ометену торзију
- Закључак

Препоручена литература:

[1] Буђевац Д., Марковић З. и др., Металне конструкције, Грађевинска књига, Београд 2007, Грађевинска књига, Београд, 1986.

[2] Бабин Н., Бркљач Н., Шостаков Р., Металне конструкције, ФТН издаваштво, Нови Сад 2006

[3] Милосављевић М., Радојковић М. И Кузмановић Б., Основи челичних конструкција

[4] Петковић З., Острић Д., Металне конструкције у машиноградњи, Институт за механизацију Машинског факултета у Београду, Београд, 1996

[5] Николић Р., Марјановић В., Металне конструкције – Приручник за прорачуне, Машински факултет, Крагујевац, 1998.

Крагујевац, 2014.

Ментор:

Проф. др Весна Марјановић

Резиме

У раду су приказани танкозидни носачи оптерећени на ометену торзију. Посебна пажња посвећена је секторским карактеристикама попречног пресека, као и у одређивању сила и напона у попречном пресеку носача. На крају је дат пример прорачуна носача оптерећеног на спречену торзију, као и детаљна анализа резултата.

Кључне речи

Ометена торзија, танкозидни носач, попречни пресек

The paper presents the thin-walled girders burdened the handicapped torsion. Special attention is given to the sectoral characteristics of the cross section as well as in determining the forces and stresses in cross-section. Finally, an example of budget carriers loaded in torsion is prevented, as well as detailed analysis of the results.

Key words

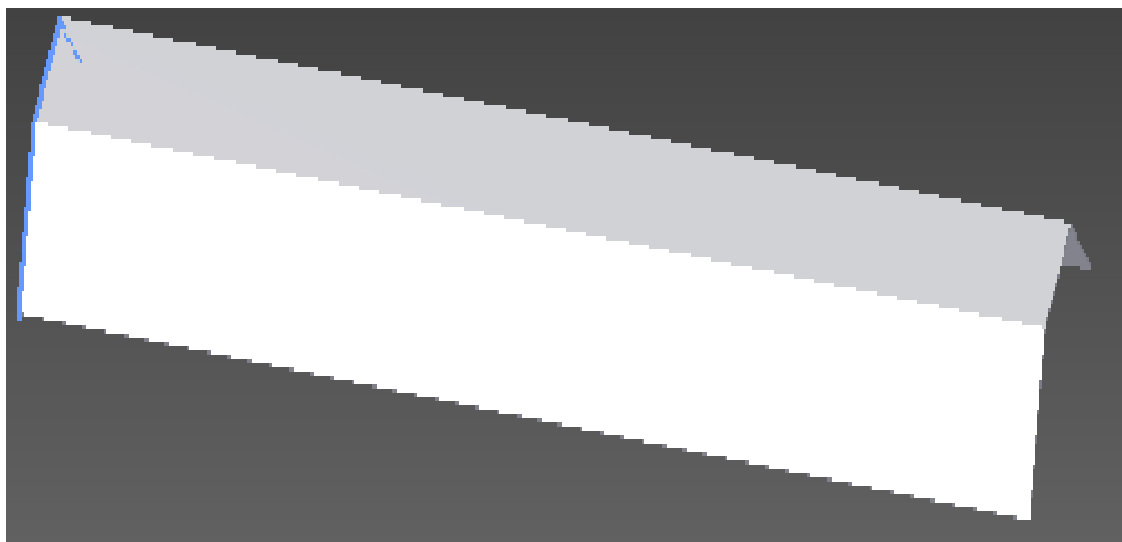
Hampered by torsion, thin-walled carrier, cross-section

Садржај:

1. Увод	5
2. Појам слободне и ограничене торзије.....	7
2.1 Разлике између слободног и ограниченог увијања	9
3. Основне претпоставке при прорачуну и компоненте померања тачака.....	12
3.1 Компоненте померања	13
4. Секторске карактеристике попречног пресека	14
4.1 Секторска координата	14
4.2 Веза између секторске координате и правоуглих координата	15
4.3 Веза између секторских координата формираних за паралелне координатне системе....	15
4.4 Центар смицања	17
4.5 Секторске карактеристике	18
5. Сила и напони у попречном пресеку носача и појам бимоментa	19
5.1 Сила и напони у попречном пресеку носача	19
5.1 Бимомент	22
5.2 Спољашњи бимомент	24
6. Метода почетних параметра	27
6.1 Затегнут штап	29
6.2 Euler-ови случајеви извијања штапа	29
7. Опште решење диференцијалних једначина помоћу методе почетних параметра.....	34
8. Пример прорачуна носача оптерећеног на ометену торзију.....	37
8.1 Одређивање напона и деформација помоћу програма <i>Inventor</i>	49
8.2 Упоредивање резултата	50
8.3 Анализа резултата	55
9. Закључак.....	56
Литература:.....	57

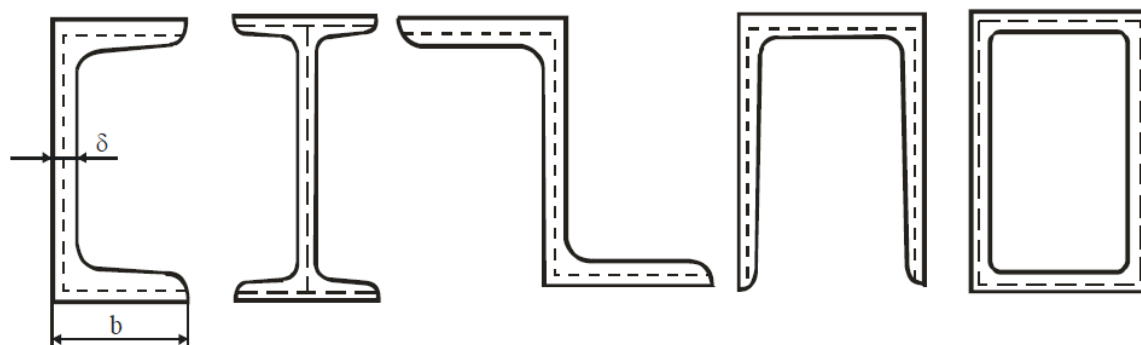
1. Увод

Танкозидни носачи се често користе приликом конструисања. Њихова основна карактеристика јесте да имају малу сопствену тежину а прилично велику крутост. С друге стране, веома су осетљиви на губитак стабилности. Наиме, услед великих напона притиска, често се дешава губитак првобитне форме равнотеже, те долази до нове равнотежне форме која зависи од дужине носача, облика попречног пресека, дебљине зидова, граничних услова и типа оптерећења. Према важећим прописима, неопходно је провера ових носача на губитак локалне и глобалне стабилности. Прописани алгоритми прорачуна су засновани на приближним обрасцима који могу више или мање одступати од тачних вредности критичних оптерећења. Класична теорија танкозидних носача може описати само понашање носача код којих су доминантни глобални модови, тј. код којих је попречни пресек крут у својој равни. С обзиром на сложеност проблема, решење у затвореном облику постоји тек за неколико једноставних случајева. Увид у понашање носача деформабилног попречног пресека додатно компликује теорију. За решавање ових случајева морају се применити нумеричке методе. Тренутно најпопуларнији поступак за нумерички прорачун конструкција јесте метода коначних елемената. Истовремено, показује се да је за неке класе конструкција згодно развити специјалне нумеричке процедуре које могу бити ефикасније од методе коначних елемената[1].



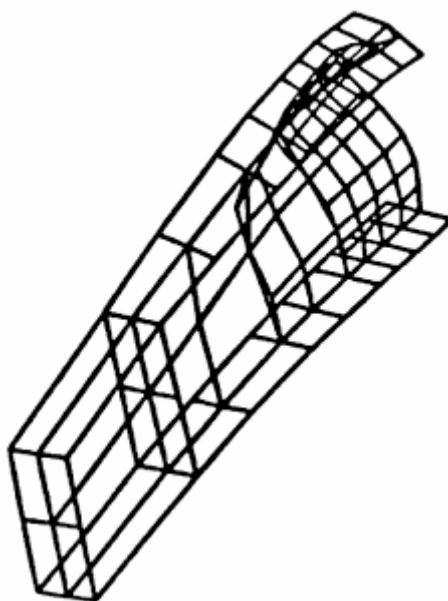
Слика 1. Танкозидни носач

Под танкозидним носачем подразумева се такво тело чије су све три димензије величине различитих редова, то јест дужина је много већа од ширине попречног пресека, а ширина попречног пресека је много већа од дебљине зида (слика 2).



Слика 2. Разни профили танкозидних носача

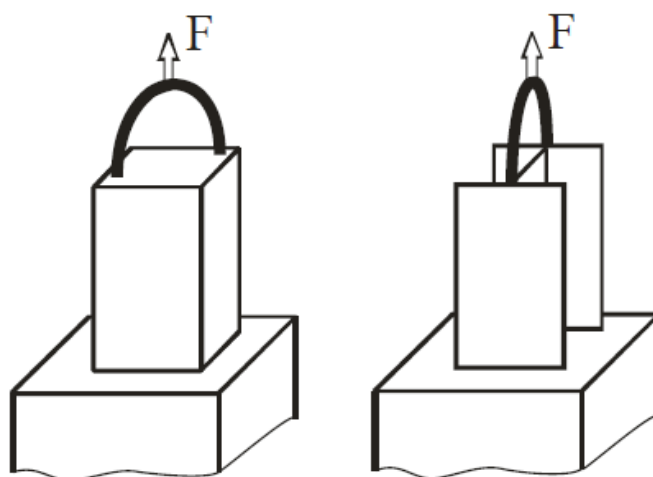
Утицај ограниченог увијања се може наћи у многим конструкцијама (слика 3). Њене последице су нарочито изражене у случају танкозидних профила, у зависности од врсте оптерећења и од начина његовог дејства. Понашање танкозидних греда и штапова је специфично и због тога је њихова оптимизација посебан проблем. У току процеса пројектовања конструкције, осим захтеваних димензија које се морају обезбедити за поједине делове конструкције да би она носила задато оптерећење, веома је важно одредити оптималне величине димензија попречног пресека.



Слика 3. Ограничено увијање носача

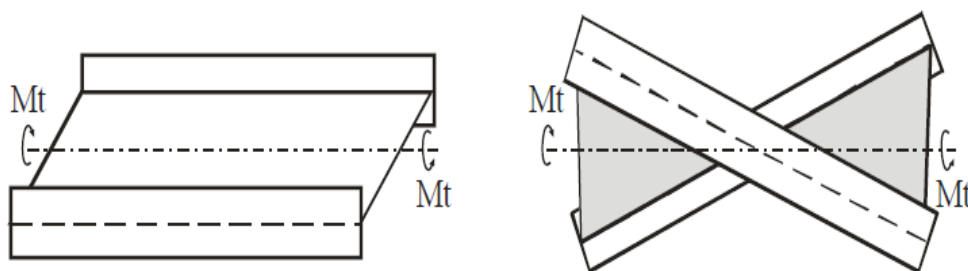
2. Појам слободне и ограничене торзије

По теорији Сен-Венана сви обрасци за напоне и деформације се односе на место далеко (довољно далеко) од зоне поремећаја – места дејства оптерећења, ослонца и слично. Код танкозидног штапа важе обрасци дуж целог штапа[4].



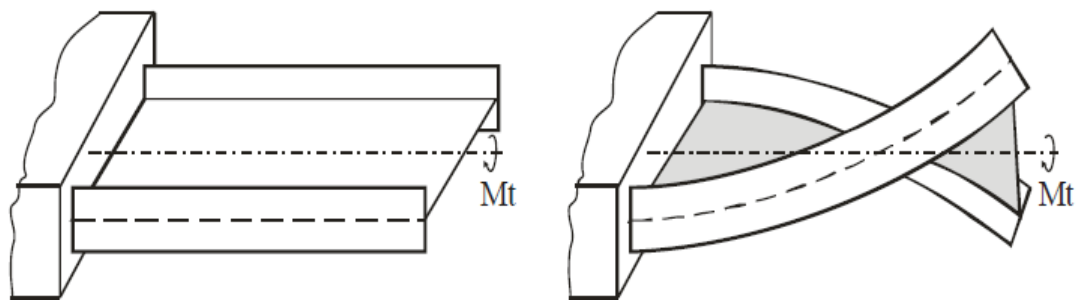
Слика 4. Оптерећење дуж штапа

Код слободне (Sen-Venanova) торзије постоји депланација (излажење из једне равни). Елементи штапа нису изложени савијању, само увијању ($\tau \neq 0, \sigma = 0$). Увијање је слободно, па стопе профила остају праве (слика 5).



Слика 5. Увијање носача

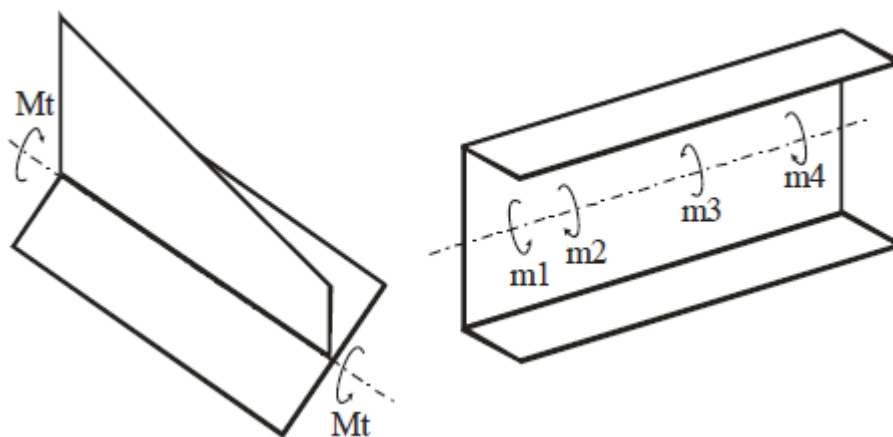
Ограничена торзија – случај када је један крај штапа укљештен. (Зове се још спречена или ометена торзија). Осим увијања елементи штапа изложени су и савијању ($\tau \neq 0, \sigma \neq 0$) (слика 6).



Слика 6. Случај када је носач оптерећен на увијање и савијање

Ограничена торзија може да се јави код профила променљивог попречног пресека оптерећеног истим моментима, или код профила константног пресека оптерећеног различитим моментима. Јављају се нормални напони $\sigma \neq 0$.

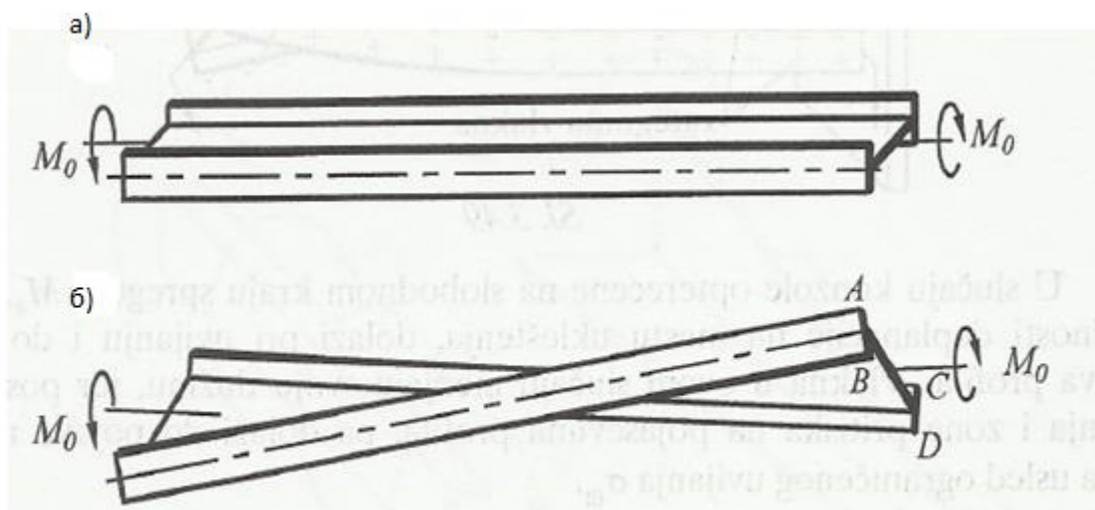
Торзиони момент се мења дуж осе штапа (слика 7). Углови увијања различитих пресека су различити. Како су померања попречног пресека пропорционална углу увијања то значи да померања појединих пресека дуж осе штапа нису иста. Због тога настају нормални напони.



Слика 7. Торзиони момент

2.1 Разлике између слободног и ограниченог увијања

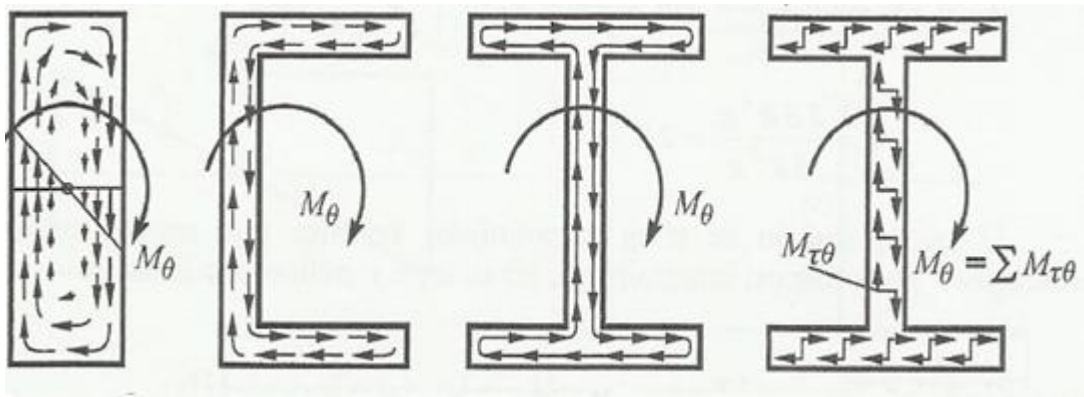
Код слободног увијања неког танкозидог штапа отвореног профила, долази само до "упредања" елемената пресека, чија влакна не мењају своју дужину. На (Слици 8.а) приказано је слободно увијање профила код кога се појасеви међусобно заокрећу за неки угао око осе увијања, али остају прави. При томе се и ивице појасева профила АВ и CD (Слика. 8.б) међусобно заокрећу, тако да претходно раван попречни пресек штапа, престаје то да буде, односно долази до његовог витоперења које се назива депланација.



Слика 8. а) слободно увијање б) међусобно заокрећање

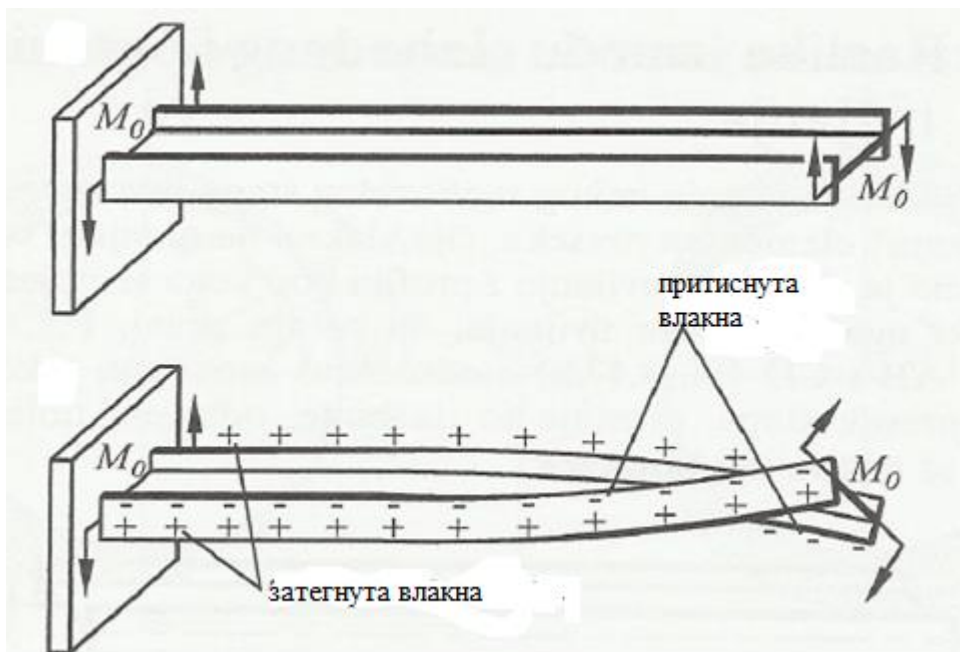
Због тога што је депланација слободна (неометана), расподела тангенсијалних напона у свим попречним пресецима дуж штапа је једнака, а њихов ток по танкозидој контури се поклапа са мембранском аналогијом (Слика 9). Пошто се дужина влакана између попречних пресека дуж штапа не мења, биће дилатација $\varepsilon_z = 0$, тако да нема појаве нормалних напона. Ово су карактеристике слободног или чистог увијања.

Када због услова ослањања или облика оптерећења штапа, дође до ограничавања слободне депланације при увијању, појавиће се поред увијања и савијање. Овакав случај увијања назива се ометено или ограничено увијање.



Слика 9. Контура танкозидног носача

Карактеристични примери код којих се јавља ограничено увијање (увијање са савијањем), приказани су на (Слика 10 и Слика. 11).

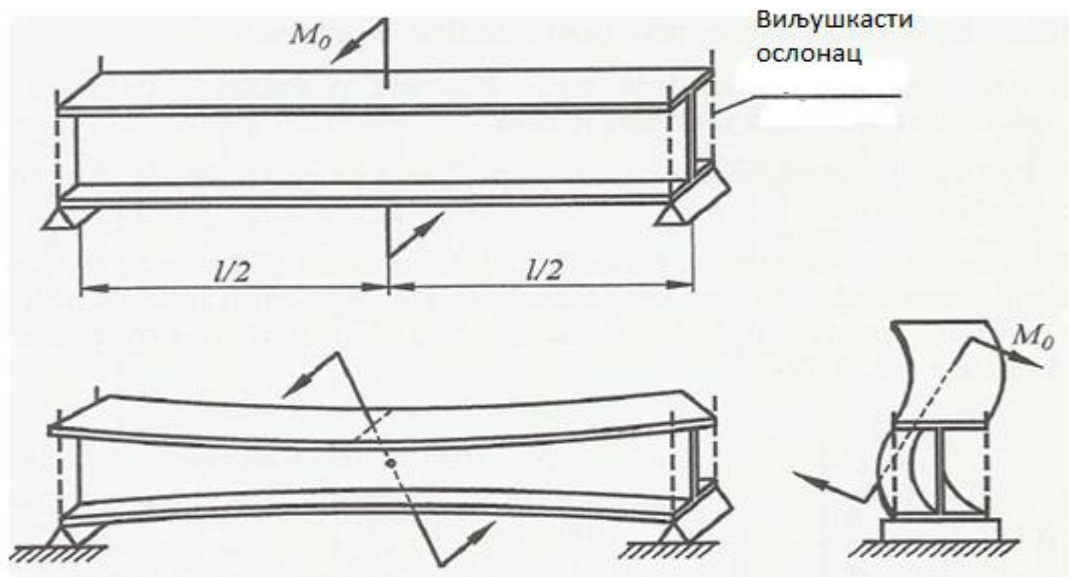


Слика 10. Ограничено увијање

У случају конзоле оптерећене на слободном крају спрегом M_0 , због немогућности депланације на месту уклештења, долази при увијању и до савијања појасева профила. Влакна у овом случају мењају своју дужину, јер постоје зоне затезања и зоне притиска на појасевима профила, па долази до појаве нормалних напона услед ограниченог увијања σ_ω .

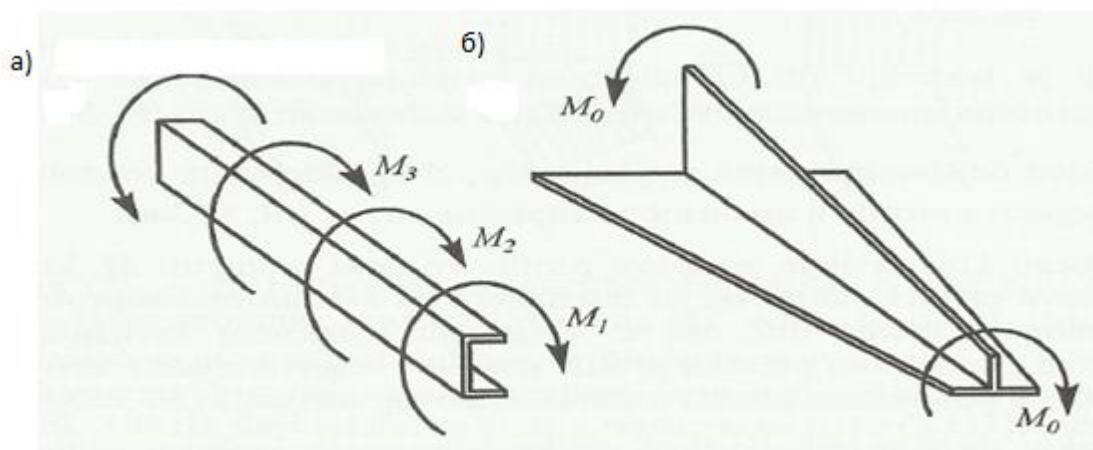
Пошто се савијање мења дуж распона, постоји промена нормалних напона услед ограниченог увијања σ_ω коју уравнотежавају одговарајући тангенцијални напони τ_ω . Ово је потпуна аналогија везе између нормалних и тангенцијалних напона при класичном савијању носача силама.

Ограничено увијање се јавља и у случају када је момент увијања (један или више) унесен између тзв. "виљушкатастих" ослонаца штапа. Ослонци штапа "виљушкастог" типа су конструктивно тако изведени да онемогућавају окретање крајева слободно ослоњеног штапа око подужне осе z , али не спречавају депланације крајњих пресека.



Слика 11. Ограничено увијање носача

Дакле, ограничено увијање се јавља у свим случајевима када је депланација дуж штапа неједнака. На (Слика 12.а) услед дејства неколико момената долази до различитих углова увијања сегмената између момената, тако да је депланација дуж штапа променљива. Исто тако, праменом крутости штапа услед подужне промене геометрије попречног пресека (Слика. 12.б), долази до различите депланације дуж штапа.

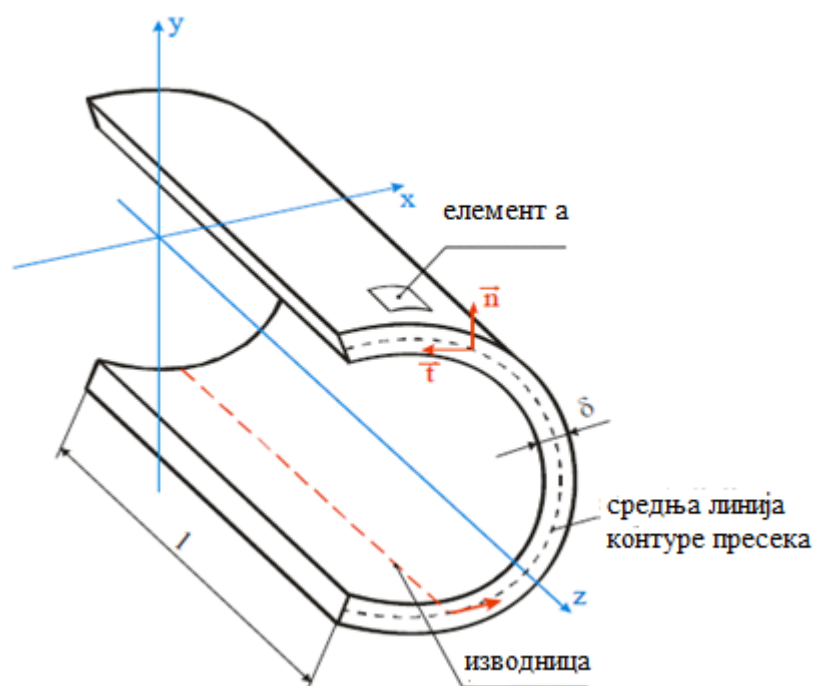


Слика 12. Дејства неколико момената

$$M_0 = M_1 + M_2 + M_3 \quad (1.1)$$

3. Основне претпоставке при прорачуну и компоненте померања тачака

Посматра се штап отвореног профила, произвољног пресека (слика 13). Штап се посматра у координатном систему x, y, z . У било којој тачки конуре могу да се повуку тангента $\vec{t}$ и нормала $\vec{n}$ на контуру. Уочи се карактеристична изводница. Дефинише се s као променљива по средњој линији, док је l дужина штапа[2].

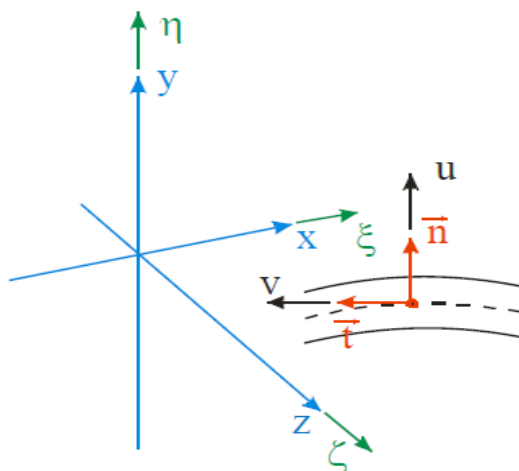


Слика 13. Штап отвореног профила

- Прва претпоставка: попречни пресек је недеформабилан.
- Друга претпоставка: клизање у средњој површини се занемарује ($\gamma=0$).
- Средња површ настаје кретањем контуре дуж осе z

Уколико би пресек мењао облик ова теорија не би важила – то онда спада у теорију љуски. Да се попречни пресек не мења обезбеђује се разним попречним укрућењима – дијафрагмама – користи се у авионској индустрији код авионских крила. Друга претпоставка важи само за случај слободне торзије.

3.1 Компоненте померања



Слика 14. Померања дуж оса

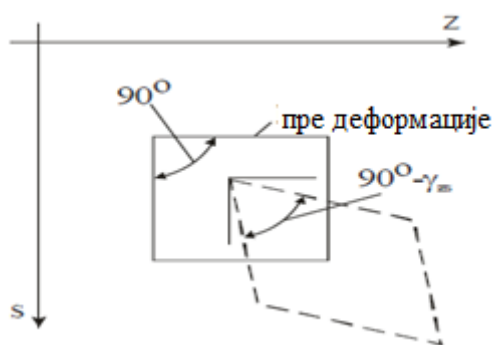
- У правцу нормале $\vec{n}$ померање је $\underline{u}$.
- У правцу тангенте $\vec{t}$ померање је $\underline{v}$.
- У правцу осе z померање је $\underline{w}$.

У правцу главних оса инерције:

- у правцу осе x померање је ξ .
- у правцу осе y померање је η .

Посматра се елемент а (слика 15) са спољашње контуре цеви.

γ_{zs} = клизање.



Слика 15. Клизање

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} \quad (1.2)$$

Ако је $w_0(z)$ = интеграциона функција, померање је:

$$w(z, s) = - \int_0^s \frac{\partial v}{\partial z} ds + w_0(z) \quad (1.3)$$

4. Секторске карактеристике попречног пресека

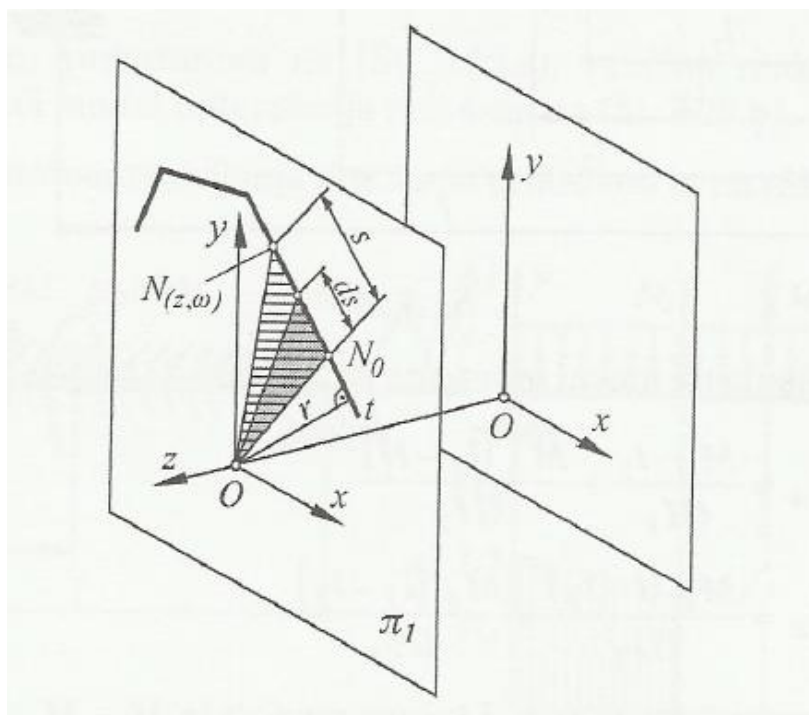
4.1 Секторска координата

Уобичајено је да се положај неке тачке у простору одређује помоћу Декартових правоуглих координата. Међутим, описивање геометријских стања може да буде прикладније коришћењем других специфичних координатних система, којим се то стање најједноставније описује. Као што је промена нормалних напона услед класичног савијања неког носача, дуж контуре попречног пресека, директно пропорционална Декартовој координати положаја сваке тачке контуре у односу на тежиште пресека, тако је код увијања танких профила, услед појаве депланације, карактер ове геометријске промене по контури попречног пресека адекватно описан са секторском координатом.

Величина секторске координате дефинисана је изразом:

$$\omega = \int_0^s r ds \quad (1.4)$$

Нумеричка вредност секторске координате једнака је двострукој шрафираној површини сектора од неке почетне тачке N_0 (од које се почиње мерење текуће координате контуре "s"), до посматране тачке N (Слика 16).



Слика 16. Секторске координате

r - је нормално растојање од тангенте контуре "t" у тачки контуре сагласно координати "s", до пола O . Секторска координата се наноси у правцу управном на тангенту. Она је позитивна ако расте у смеру супротном од казаљке на сату, а негативна ако расте у смеру казаљке на сату. То значи да је вредност секторске координате позитивна ако оријентисани елемент ds има смер обртања око пола у смеру супротном кретању казаљке на сату.

4.2 Веза између секторске координате и правоуглих координата

Нормално растојање од тангенте контуре у тачки N одређене са координатом "s" до тачке (пола) O (Слика 16), износи:

$$r = x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad (1.5)$$

Како су:

$$\cos \alpha = -\frac{dx}{ds} ; \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds} \quad (1.6)$$

$$r = x \frac{dx}{ds} - y \frac{dy}{ds} \quad (1.7)$$

Заменом (1.7) у (1.4), добија се потребна релација:

$$\omega = \int_0^S r ds = \int_0^S \left(x \frac{dx}{ds} - y \frac{dy}{ds} \right) ds = \int_0^S (x dy - y dx) \quad (1.8)$$

4.3 Веза између секторских координата формираних за паралелне координатне системе

С обзиром на даља излагања, потребно је успоставити везу између секторских координата формираних за два пола (O_1 и O_2), који су постављени у глобалном координатном систему xOy , односно за конфигурацију приказану на (слика 17).

$$\omega_2 = \int_0^s r_2 ds = \int_0^s (x_1 dy - y_1 dx) = \int_0^s (x_1 dy - y_1 dx) - \int_0^s a dy + \int_0^s b dx \quad (2.1)$$

јер је код паралелних координатних система $dx_2 = dx_1 = dx$, $dy_2 = dy_1 = dy$ па је коначно:

$$\omega_2 = \omega_1 - a(y - y_0) + b(x - x_0) \quad (2.2)$$

где је ω_1 - секторска координата тачке N у односу на првобитни пол O_1 , изражена преко линијских координата.

4.4 Центар смицања

Тражи се тачка у пресеку која задовољава услове:

$$S_{\omega p} = 0 \quad (2.3)$$

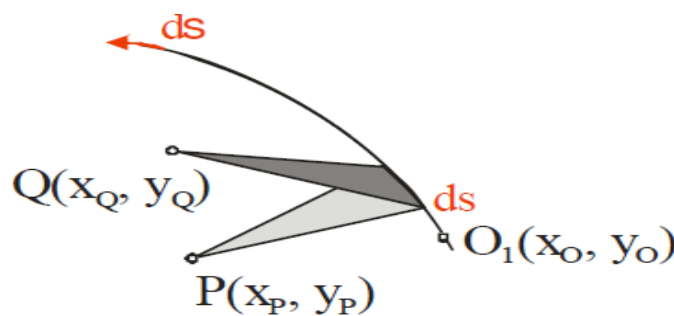
$$I_{y\omega p} = 0 \quad (2.4)$$

$$I_{x\omega p} = 0 \quad (2.5)$$

Услов (2.3) зависи од избора нулте тачке O , од које се рачуна координата. Услови (2.4) и (2.5) зависе од избора пола. Пол који испуњава услове (2.4) и (2.5) зове се центар смицања. Центар смицања је тачка за коју су секторски центрифугални моменти једнаки нули.

$$I_{y\omega D} = I_{x\omega D} = 0; D(x_D, y_D) \quad (2.6)$$

Треба наћи центар смицања $D(x_D, y_D)$ ако се зна секторска координата за неки пол $Q(x_Q, y_Q)$. Ђолази се од изведеног израза за секторске координате за два различита пола при истој нултој тачки слика 18.



Слика 18. Два различита пола при истој нултој тачки

$$\omega_D(O_1, s) = \omega_Q(O_1, s) + (y_D - y_Q)x - (x_D - x_Q)y + C \quad (2.7)$$

Замени се једначина (2.7) у услове (2.4) и (2.5) за $I_{y\omega p} = 0$ и $I_{x\omega p} = 0$.

јер су x и y
тежишне осе

$$I_{y\omega D} = \int_A y\omega_D dA = \int_A y\omega_Q dA + \cancel{(y_D - y_Q)} \int_A xy dA - (x_D - x_Q) \int_A y^2 dA + C$$

$$I_{x\omega D} = \int_A x\omega_D dA = \int_A x\omega_Q dA + (y_D - y_Q) \int_A x^2 dA - (x_D - x_Q) \int_A xy dA + C$$

Па једначине (2.4) и (2.5) коначно гласе:

$$I_{y\omega D} = I_{y\omega Q} - (x_D - x_Q) \cdot I_x = 0 \quad (2.8)$$

$$I_{x\omega D} = I_{x\omega Q} + (y_D - y_Q) \cdot I_y = 0 \quad (2.9)$$

Коначно:

$$x_D = x_Q + \frac{I_{y\omega Q}}{I_x}; \quad y_D = y_Q - \frac{I_{x\omega Q}}{I_y} \quad (3.0)$$

Једначином (3.0) дефинисамо су координате центра смицања изражене преко координата произвољног пола Q .

4.5 Секторске карактеристике

Секторски статички момент

$$S_{\omega p} = \int_A \omega_p dA \quad (3.1)$$

У случају константне дебљине зида δ пресека биће:

$$S_{\omega p} = \delta \int_A \omega_p ds \quad (3.2)$$

Секторски центрифугални момент за осу x :

$$I_{x\omega D} = \int_A x\omega_p dA \quad (3.3)$$

Секторски центрифугални момент за осу y :

$$I_{y\omega D} = \int_A y\omega_p dA \quad (3.4)$$

Секторски момент инерције :

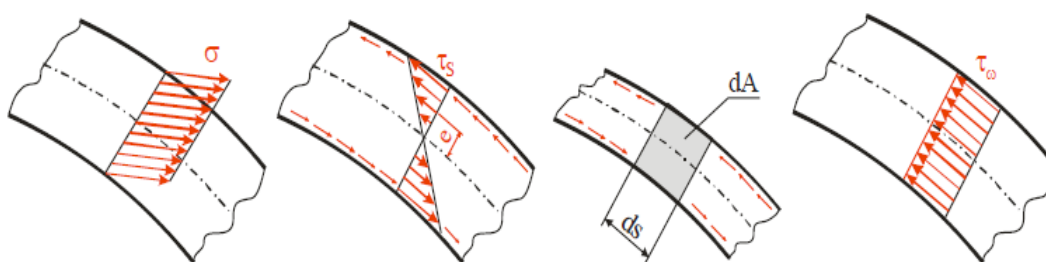
$$I_{\omega p} = \int_A \omega_p^2 dA \quad (3.5)$$

5. Сила и напони у попречном пресеку носача и појам бимомента

5.1 Сила и напони у попречном пресеку носача

Напони

Прва претпоставка: Нормални напон је непроменљив по дебљини зида $\sigma_z = \sigma$. претпоставке у односу на распоред нормалних и смичних напона.



Слика 19. Нормални напони

Ток смицајног напона, где су: τ_s – напон услед слободне торзије и τ_ω – напон услед ометене торзије.

Друга претпоставка:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_s + \vec{\tau}_\omega \quad (3.6)$$

Смицајни напон се састоји од две компоненте:

- $\tau_s = \frac{M_s}{I_t} \delta$ - ово је уствари максимална вредност.
- $\tau_s(e) = 2 \frac{M_s}{I_t} e$ – на месту e .

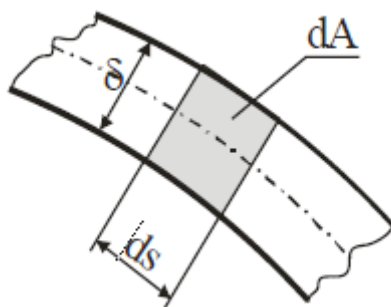
Где је I_t – торзиони момент инерције, који се дефинише следећим изразом.

$$I_t = \frac{\eta}{3} \sum_{i=1}^n \delta_1^3 S_i \quad (3.7)$$

где је η – поправни коефицијент који узима у обзир да место сучељавања не може да се раздвоји у правоугаоник.

Силе

N – нормална сила (резултанта свих сила које су резултат нормалних напона)
 Q – трансверзална сила.



Слика 20. Силе

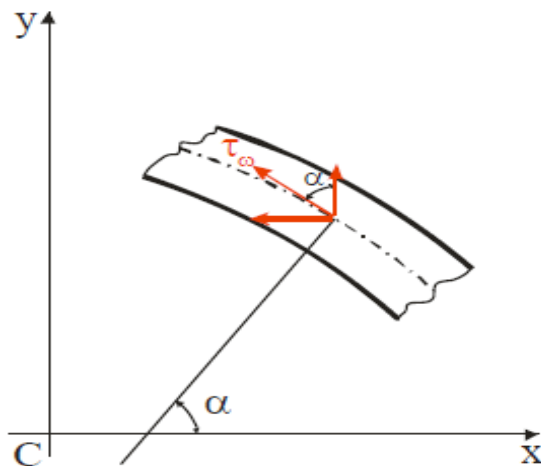
$$dA = \delta ds \quad (3.8)$$

$$N = \int_A \sigma dA = \int_s \sigma \delta ds \quad (3.9)$$

$$M_x = \int_A \sigma_y dA = \int_s \sigma_y \delta ds \quad (4.0)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x dA = \int_s \sigma_x \delta ds \quad (4.1)$$

Смицајни напони од слободне торзије свODE се на торзиони момент, а напони τ_ω могу да се сведу на трансверзалну силу.



Слика 21. Трансверзална сила

$$Q_x = \int_A \tau_\omega \sin \alpha dA \quad (4.2)$$

$$dA = \delta ds$$

$$ds \sin \alpha = -dx$$

$$Q_x = \int_s \tau_\omega \delta dx \quad (4.3)$$

$$Q_y = \int_A \tau_\omega \cos \alpha dA \quad (4.4)$$

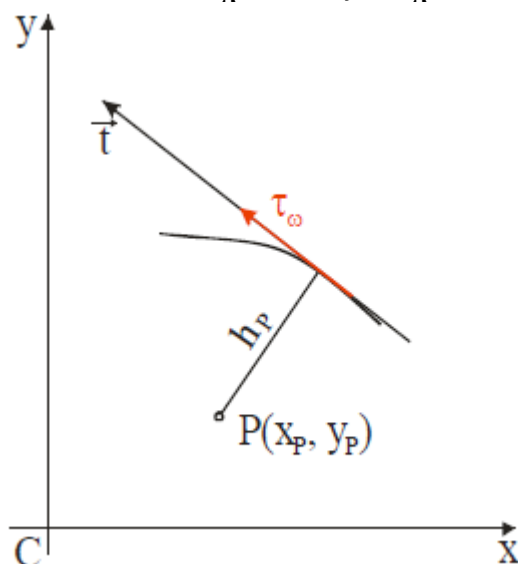
$$dA = \delta ds$$

$$ds \cos \alpha = dy$$

$$Q_y = \int_s \tau_\omega \delta dy \quad (4.5)$$

Q_x, Q_y – силе по јединици дужине
 $\tau_\omega \delta = q$ – ток смицајног напона

$$Q_x = \int_A q dx, Q_y = \int_A q dy, \quad (4.6)$$



Слика 22. Смицајни напон

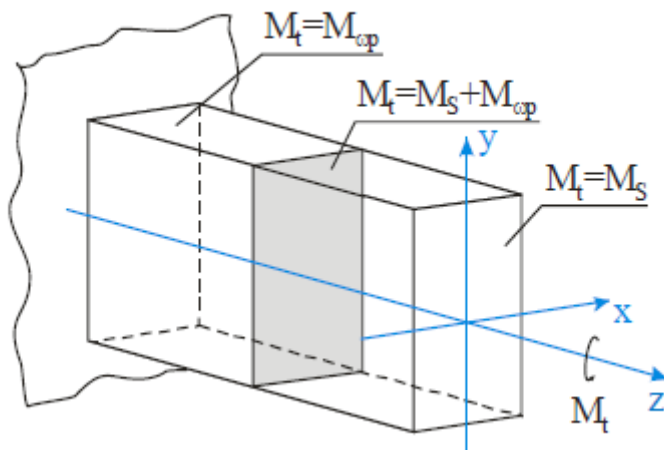
Момент око осе z је торзиони момент. Посматра се момент не око тежишне осе z (кроз C) већ око осе паралелне оси z која пролази кроз тачку u , момент M_p .

$$M_t = M_{zp} = M_p = M_s + \int_A \tau_\omega h_p dA = M_s + \int_s \tau_\omega h_p \delta ds = M_s + \int_s q d\omega_p = M_s + M_{\omega_p} \quad (4.7)$$

Торзиони момент има компоненту од слободне торзије M_s и компоненту од ограничене торзије M_{ω_p} (Слика 23).

$$M_{\omega p} = \int_s q d\omega_p = \int_s \tau_{\omega} \delta d\omega_p = \int_s \tau_{\omega} h_p \delta ds = \int_A \tau_{\omega} h_p dA \quad (4.8)$$

$$M_t = M_{z p} = M_s + M_{\omega p} \quad (4.9)$$



Слика 23. Торзиони момент

5.1 Бимомент

Појава нормалних напона услед увијања σ_{ω} и њихово уравнотежавање са неким спољашњим утицајем који их изазива, је аналогија са класичном теоријом савијања. Овде се само уводи појам момента другог реда, тј. момента од момента или бимомент-а, који је дефинисан производом момената M на растојању њиховог рамена " h ", односно:

$$B = M \cdot h \quad (5.0)$$

Дакле, ова нова генералисана сила (момент), је утицај који изазива неравномерну депланацију пресека дуж штапа и еквивалентан је унутрашње статички уравнотеженом систему сила у посматраном пресеку.

На основу услова равнотеже не могу се одредити величине M_{θ} , M_{ω} и B (јер још увек није позната законитост расподеле σ_{ω}), осим што се преко једначине (3.1) успоставила веза између момената увијања. Према томе, систем је статички неодређен и треба га допунити потребним једначинама да би се могао решити, формираних на основу еластичних деформација система.

Ако се посматра увијање танкозидог штапа са произвољном отвореном контуром на основу друге хипотезе Власова, контура не губи своју почетну форму, тј. задржава сталност своје пројекције на раван π (Слика 24). При томе, долази до депланације (померање " w " тачака контуре у правцу осе z), као и окретања целог пресека око осе

кроз центар увијања O_2 за угао увијања φ . Код ограниченог увијања, угао увијања φ је неједнако променљив дуж штапа, за разлику од чистог увијања, када је он једнолико променљив дуж штапа.

Угао клизања γ , у општем случају представља промену правог угла између страница AB и AD елементарног делића контуре ABCD односно.

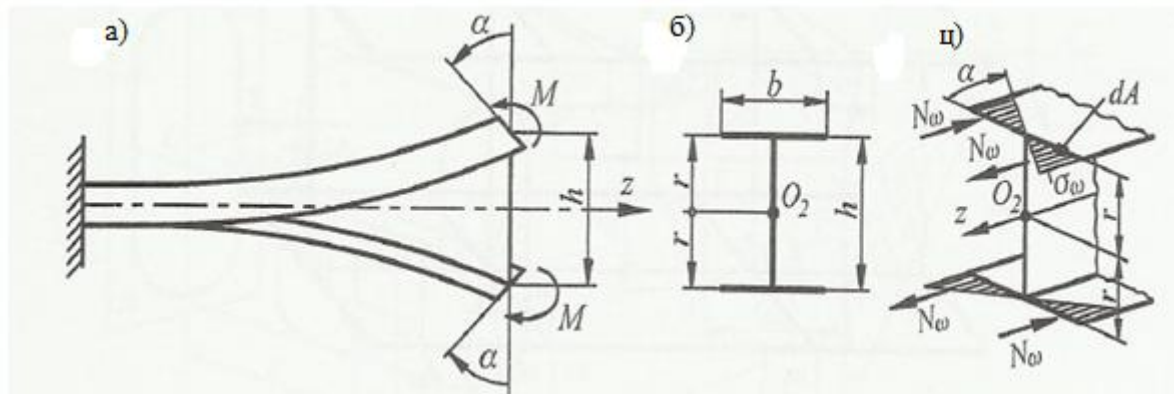
$$\gamma = \alpha + \beta \quad (5.1)$$

Доказ да је θ генералисано померање бимоента $\mathbf{B} = M\mathbf{h}$, добија се на основу рада спољних сила које изазивају кривљење појасева профила, односно:

$$A_s = 2M|\alpha| = 2Mr\theta = Mh\theta = B\theta \quad (5.2)$$

Елементарна унутрашња сила (Слици 24.ц) износи:

$$dN_\omega = \sigma_\omega dA \quad (5.3)$$



Слика 24 . Унутрашња сила

Одговарајуће померање, елементарној унутрашњој сили, је издужење влакна при депланацији пресека :

$$|w| = \theta\omega \quad (5.4)$$

Веза бимоента са унутрашњим напонима, добија се из једнакости радова спољних и унутрашњих генералисаних сила при јединичном генералисаном померању, дакле при $\theta=1$, тј.:

$$B \cdot 1 = \int_A \sigma_\omega dA \cdot 1 \cdot \omega \quad (5.5)$$

$$B = - \int_A E_\omega \frac{d\theta}{dz} \omega dA = -E \int_A \omega^2 dA \quad (5.6)$$

$$B = -EI_{\omega} \frac{d\theta}{dz} \quad (5.7)$$

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA \quad (5.8)$$

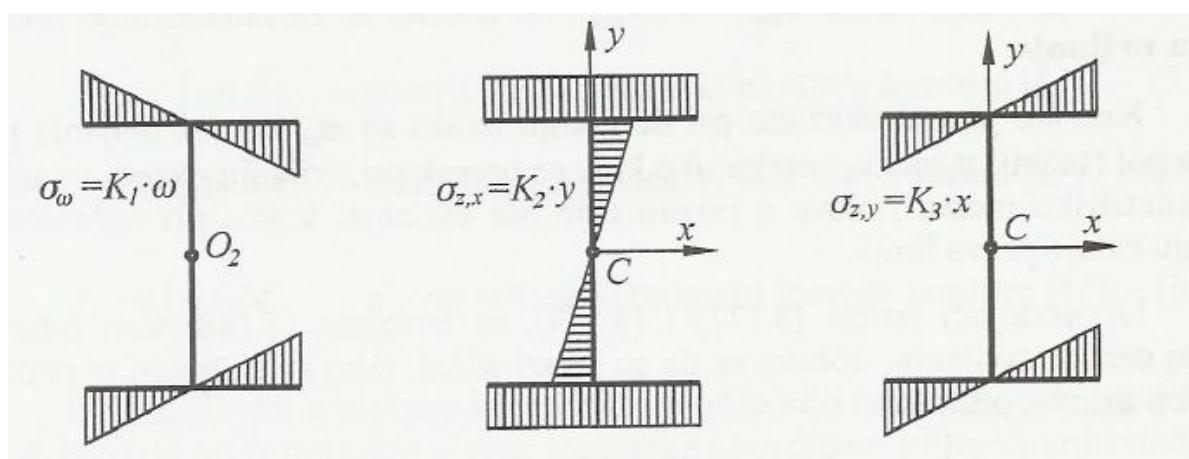
Ако се израз (5.8) замени у израз (5.5), добија се израз за израчунавање нормалних напона услед ограниченог увијања у облику:

$$\sigma_{\omega} = \frac{B}{I_{\omega}} \cdot \omega = K_1 \omega \quad (5.9)$$

По својој форми, израз (5.9) је аналоган изразима за израчунавање нормалних напона од класичног савијања:

$$\sigma_{z,x} = \frac{M_x}{I_x} y = K_2 y; \quad \sigma_{z,y} = \frac{M_y}{I_y} x = K_3 x \quad (6.0)$$

Према томе, промена нормалних напона по контури пропорционална је одговарајућим координатама тачака контуре: (ω , x , y (слика 25)).



Слика 25. Промена нормалних напона

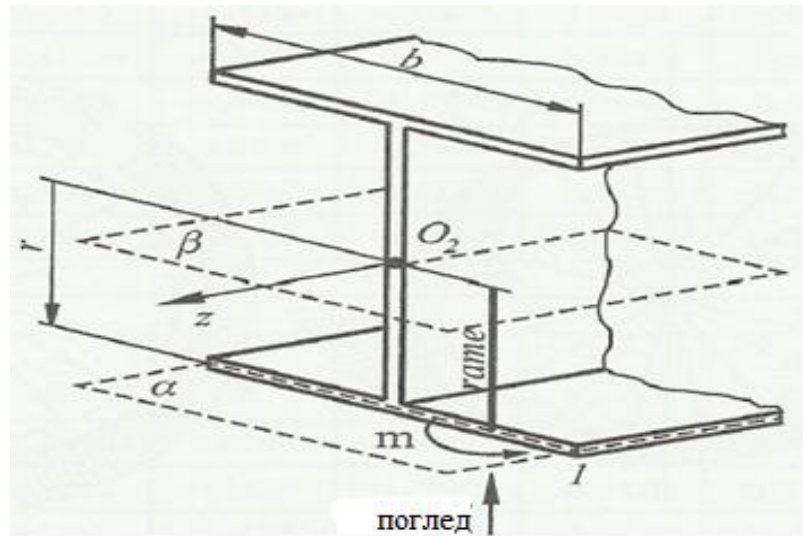
Коефицијенти пропорционалности су константе у пресеку "z" дуж носача и износе:

$$K_1 = \frac{B(z)}{I_{\omega}}; \quad K_2 = \frac{M_x(z)}{I_x}; \quad K_3 = \frac{M_y(z)}{I_y} \quad (6.1)$$

5.2 Спољашњи бимомент

Ако на слободном крају танкозидог штапа делује концентрисани момент, који лежи у равни дела контуре која не пролази кроз центар увијања, онда се јавља спољашњи бимомент. Он представља производ момента m и рамена r између две замишљене паралелне равни, које су провучене кроз раван дејства момента m (раван α) и кроз центар увијања O_2 - (раван β), (Слика 26). Спољашњи бимомент представља

одговарајући контурни услов за одређивање константи у општем решењу диференцијалне једначине угла увијања по јединици дужине θ .



Слика 26. Контурни услов

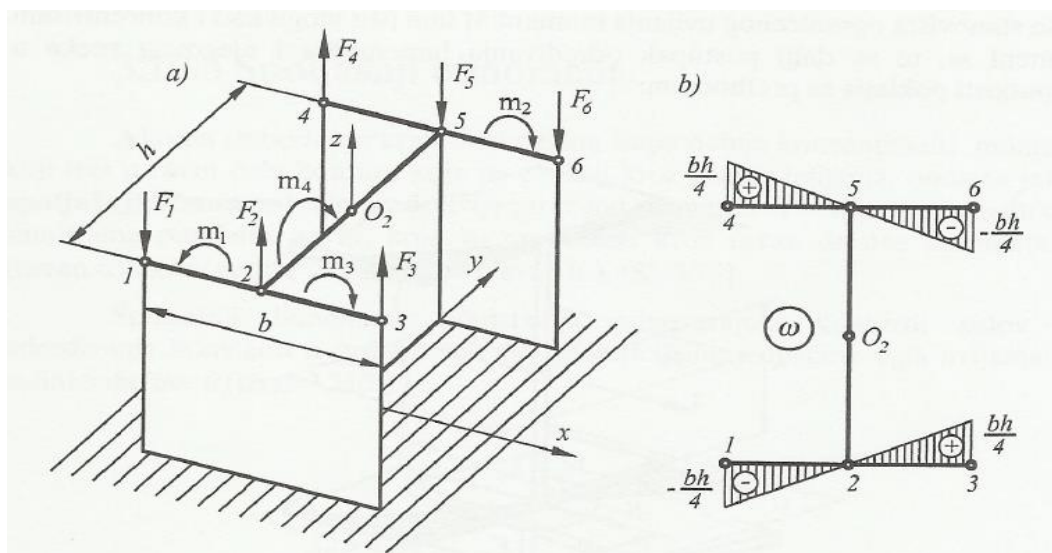
Знак бимоента одређује се посматрањем смера момента m са спољне стране низ раме бимоента r , према равни кроз центар увијања β . Позитивни смер момента је супротан кретању сатне казаљке. Приказани смер бимоента на (слика 27) је негативан, односно:

$$B_s = -m \cdot r \quad (6.2)$$

Пошто је секторска координата у тачки "1" позитивна, с обзиром да је позитиван смер обиласка контуре такође супротан кретању сатне казаљке, напон σ_ω у тачки "1" има знак „-“ а то значи да је влакно у тој тачки притиснуто.

$$\sigma_{\omega 1} = \frac{B_s}{I_\omega} \omega_1 = -\frac{m \cdot r}{I_\omega} \left(+\frac{rb}{2} \right) = -\frac{m \cdot r}{I_\omega} \cdot \frac{rb}{2} \quad (6.3)$$

Уколико уместо концентрисаног момента делује аксијална сила у тачки контуре, која није секторска нулта тачка ($\omega \neq 0$) (Слика 27), онда се редукцијом силе на најближу нулту тачку секторске координате добија момент $M = F \cdot e$ и аксијална сила F . Са становишта ограниченог увијања момент M има исту улогу као и концентрисани момент m , те се даљи поступак одређивања бимоента и његовог знака у потпуности поклапа са претходним:



Слика 28. Оптерећење носача

6. Метода почетних параметра

У хомогеном решењу диференцијалне једначине правог штапа по теорији другог реда константног попречног пресека и оптерећеног константном аксијалном силом притиска:

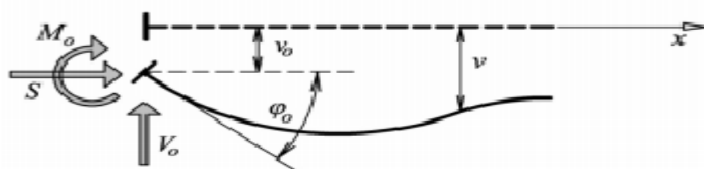
$$v_h(x) = C_1 + C_2 kx + C_3 \sin kx + C_4 \cos kx \quad (6.7)$$

појављују се четири интеграционе константе C_1, C_2, C_3, C_4 , које се могу одредити из контурних услова. Ове интеграционе константе у општем случају немају физичко значење што није практично у инжењерским прорачунима[3] .

Применом методе почетних параметара интеграционе константе које немају физичко значење замењују се интеграционим константама које имају физичко значење, и то:

- v_0 -угиб на почетку штапа
- φ_0 -обртање на почетку штапа
- M_0 -моменат на почетку штапа
- V_0 -вертикална сила на почетку штапа

Ове величине, новоуведене интеграционе константе, називају се почетни параметри Слика 29.



Слика 29. Почетни параметри

На основу услова на почетку штапа, могу се успоставити везе између почетних и новоуведених интеграционих константи:

$$C_1 = v_0 - \frac{M_0}{S}; \quad C_2 = -\frac{V_0}{Sk}; \quad C_3 = \frac{\varphi_0}{k} + \frac{V_0}{Sk}; \quad C_4 = \frac{M_0}{S} \quad (6.8)$$

Користећи добијене везе, изрази за угиб, нагиб, моменат и вертикалну силу штапа у произвољном пресеку у функцији почетних параметара, за случај притиснутог штапа гласе:

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 \frac{\sin kx}{k} - M_0 \frac{1 - \cos kx}{k^2 EI} - V_0 \frac{kx - \sin kx}{k^3 EI} + v_p \quad (6.9)$$

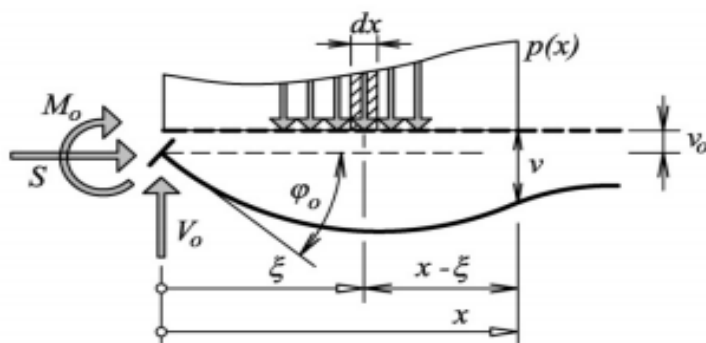
$$\varphi(x) = \varphi_0 \cos kx - M_0 \frac{\sin kx}{kEI} - V_0 \frac{1 - \cos kx}{k^2 EI} + v'_p \quad (7.0)$$

$$M(x) = \varphi_0 EIk \sin kx + M_0 \cos kx + V_0 \frac{\sin kx}{k} - EIv''_p \quad (7.1)$$

$$V(x) = V_0 - \int_0^x p(\xi) d\xi \quad (7.2)$$

За случај попречног оптерећења штапа дуж осе штапа партикуларни интеграл (слика 30) се одређује из интеграла:

$$v_p(x) = \int_0^x \frac{k(x-\xi) - \sin k(k-\xi)}{kS} p(\xi) d\xi \quad (7.3)$$



Слика 30. Партикуларни интеграл

У специјалном случају када је $p(\xi) = p = \text{const}$:

$$v_p = \frac{p}{k^2 S} \left(\cos kx - 1 + \frac{k^2 x^2}{2} \right) \text{ (za sve } S > 0 \text{)} \quad (7.4)$$

6.1 Затегнут штап

Ако се искористе везе између тригонометријске функције имагинарног аргумента и хиперболичке функције реалног аргумента:

$$\cosh kx = \cos ikx ; \sinh kx = -i \sin ikx \quad (7.5)$$

Односно за затегнут штап:

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 \frac{\sinh kx}{k} + M_0 \frac{1 - \cosh kx}{k^2 EI} + V_0 \frac{kx - \sinh kx}{k^3 EI} + v_p \quad (7.6)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 \cosh kx - M_0 \frac{\sinh kx}{kEI} + V_0 \frac{1 - \cosh kx}{k^2 EI} + v'_p \quad (7.7)$$

$$M(x) = \varphi_0 EI k \sinh kx + M_0 \cosh kx + V_0 \frac{\sinh kx}{k} - EI v''_p \quad (7.8)$$

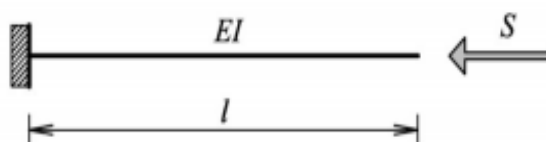
$$V(x) = V_0 - \int_0^x p(\xi) d\xi \quad (7.9)$$

$$v_p = \frac{p}{k^2 S} \left(\cosh kx - 1 - \frac{k^2 x^2}{2} \right) \text{ (za sve } S < 0) \quad (8.0)$$

6.2 Euler-ovi случајеви извијања штапа

Критично оптерећење дефинисано је раније као најмања вредност оптерећења при којем хомогени задатак линеаризоване теорије другог реда има бар и једно решење различито од тривијалног. Применом добијених решења из методе почетних параметара, уз услов нетривијалног решења одређује се критично оптерећење, за различите случајеve ослањања штапа.

Први Eulerov случај – укљештен штап



Слика 31. Први Eulerov случај

Гранични услови за штап на Слици 31 су:

$$\text{za } x = 0 : v(0) = v_0 = 0 ; \varphi(0) = \varphi_0 = 0$$

$$\text{za } x = l : M(l) = 0$$

Из услова равнотеже штапа следи да је $(0) = V_0 = 0$. Израз за момент савијања у произвољном пресеку према једначини гласи:

$$M(x) = M_0 \cos kx \quad (8.1)$$

Ако се изузме тривијални случај $M_0 = 0$, и искористи услов $M(l) = 0$, добија се једначина:

$$M(l) = M_0 \cos kl = 0 \quad (8.2)$$

Ова једначина је задовољена само ако је $\cos kl = 0$, односно ако је:

$$k = (2n - 1) \frac{\pi}{2l}; \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (8.3)$$

Како је критична сила $S = k^2 EI$, следи да је:

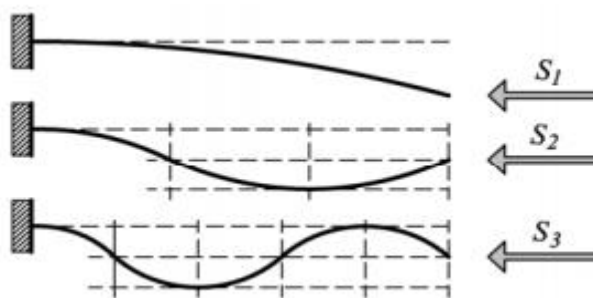
$$S_n = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}; \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (8.4)$$

За $n = 1$ добија се прва критична сила, за $n = 2$ друга критична сила, итд.

$$S_1 = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$

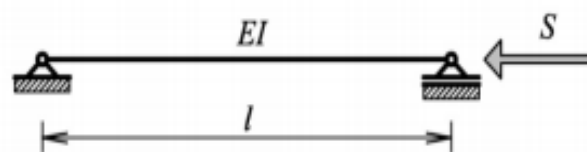
$$S_2 = 9 \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$

$$S_3 = 25 \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \quad (8.5)$$



Слика 32. Облици извијања за прве три критичне силе

Други Eulerov случај – слободно ослоњен штап



Слика 33. Други Еулер-ов случај извијања штапа

Гранични услови за штап на Слици 33 су:

$$\text{за } x = 0 : v(0) = v_0 = 0 ; M(0) = M_0 = 0$$

$$\text{за } x = l : M(l) = 0 ; v(l) = 0$$

Из услова равнотеже штапа добија се $V(0) = V_0 = 0$. Слично као у претходном случају, занемарујући тривијално решење $\varphi_0 = 0$, услов да је угиб на крају $x = l$ једнак нули, према једначини:

$$v(l) = \varphi_0 \frac{\sin kl}{k} = 0 \quad (8.6)$$

Испуњен је услов ако је $kl = 0$, односно ако је:

$$k = \frac{n\pi}{l}; \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (8.7)$$

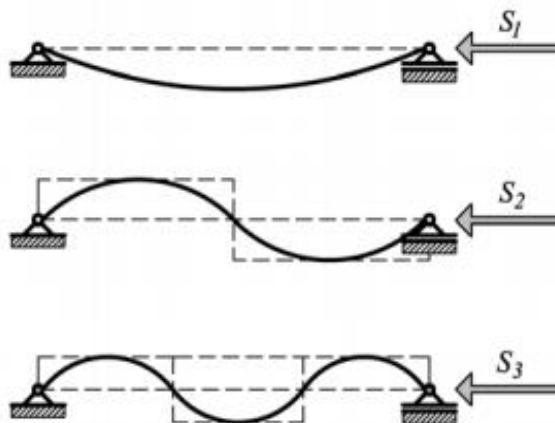
па је критична сила:

$$S_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$S_1 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

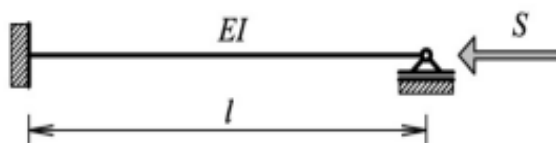
$$S_2 = 4 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$S_3 = 9 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (8.8)$$



Слика 34. Облици извијања за прве три критичне силе

Трећи Euler-ов случај укљештен, слободно ослоњен штап



Слика 35.. Трећи Еулер-ов случај извијања штапа

Гранични услови за штап на Слици 5 су:

$$\text{за } x = 0 : v(0) = v_0 = 0 ; \varphi(0) = \varphi_0 = 0$$

$$\text{за } x = l : M(l) = 0 ; v(l) = 0$$

Из граничних услова $v(l) = 0$ и $M(l) = 0$ према једначинама методе почетних параметара добија се хомоген систем једначина:

$$v(l) = -M_0 \frac{1 - \cos kl}{S} - V_0 \frac{kl - \sin kl}{kS} = 0 \quad (8.9)$$

$$M(l) = M_0 \cos kl + V_0 \frac{\sin kl}{k} = 0 \quad (9.0)$$

Услов нетривијалног решења је дет $\begin{vmatrix} \frac{\cos kl}{S} & \frac{\sin kl - kl}{kS} \\ \cos kl & \frac{\sin kl}{k} \end{vmatrix} = 0$ па је карактеристична једначина стабилности:

$$kl \cos kl = \sin kl, \text{ односно } kl = \tan kl \quad (9.1)$$

чије је решење :

$$k_1 l = 4.4934$$

$$k_n l \approx (2n + 1) \frac{\pi}{2}; \quad n = 2, 3, 4 \quad (9.2)$$

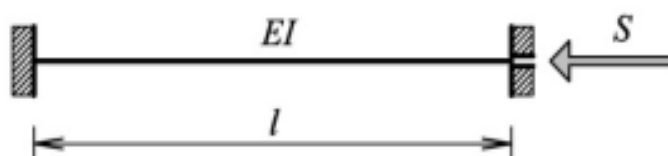
$$S_1 = 4.4934^2 \frac{EI}{l^2}$$

$$S_2 = \frac{25}{4} \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (9.3)$$



Слика 36. Облик извијања за прву критичну силу

Четврти Euler-ов случај – обострано укљештен штап



Слика 37. Четврти Еулер-ов случај извијања штапа

Гранични услови за штап на Слици 37 су:

$$za\ x = 0 : v(0) = v_0 = 0 ; \varphi(0) = \varphi_0 = 0$$

$$za\ x = l : \varphi(l) = 0; v(l) = 0$$

слови према једначинама (8.9) и (9.0) дају хомоген систем једначина:

$$v(l) = -M_0 \frac{1-\cos kl}{s} - V_0 \frac{kl-\sin kl}{ks} = 0 \quad (9.4)$$

$$M(l) = -M_0 \frac{k \sin kl}{s} - V_0 \frac{1-\sin kl}{s} = 0 \quad (9.5)$$

7. Опште решење диференцијалних једначина помоћу методе почетних параметра

У методи почетних параметара интеграционе константе C_1, C_2, C_3, C_4 које фигуршу у општем решењу хомогене једначине, одређују се на основу граничних услова, односно пресечних сила и померања на крају носача[5].

$$\varphi_z = \varphi_h + \varphi_p = C_1 chkz + C_2 shkz + C_3 z + C_4 + \varphi_p \quad (9.6)$$

Где је:

$$chkz = \frac{e^{kz} + e^{-kz}}{2}; shkz = \frac{e^{kz} - e^{-kz}}{2}; (chkz)' = kshz; (shkz)' = kchz$$

$$\varphi'(z) = C_1 kshkz + C_2 kchz + C_3 + \varphi'_p$$

$$\varphi''(z) = C_1 k^2 chkz + C_2 k^2 shkz + \varphi''_p$$

$$\varphi'''(z) = C_1 k^3 shkz + C_2 k^3 hzk''' + \varphi'''_p$$

$$\varphi^{IV}(z) = C_1 k^4 chkz + C_2 k^4 shkz + \varphi^{IV}_p \quad (9.7)$$

Бимомент је:

$$B = -EI_{\Omega}\varphi'' = -EI_{\Omega}(C_1k^2ch kz + C_2k^2sh kz + \varphi_p'') \quad (9.8)$$

Укупни момент:

$$M_t = GI_t\varphi' - E_1I_{\Omega}\varphi''' \quad (9.9)$$

Константе C_1, C_2, C_3, C_4 се одређује преко методе почетних параметра.

Греда је оптерећена само почетним параметрима:

$$z = 0; (z = 0 \rightarrow ch kz = 1; sh kz = 0)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi' \rightarrow C_1 + C_4 + \varphi_{p0} = \varphi_0 \\ \varphi' &= \varphi_0' \rightarrow C_2k + C_3 + \varphi_{p0}' = \varphi_0' \end{aligned} \quad (10)$$

$$B = B_0 \rightarrow -EI_{\Omega}(C_1k^2 + \varphi_{p0}'') = B_0 \quad (10.1)$$

$$M = M_0 \rightarrow GI_t(C_2k + C_3 + \varphi_{p0}') - E_1I_{\Omega}(C_2k^3 + \varphi_{p0}''') = M_0 \quad (10.2)$$

Где је:

$$\varphi_{p0} = (\varphi_p)_{z=0}; \varphi_{p0}' = (\varphi_p')_{z=0}; \varphi_{p0}'' = (\varphi_p'')_{z=0}; \varphi_{p0}''' = (\varphi_p''')_{z=0}$$

Греда оптерећена само почетним факторима значи без спољашњег оптерећења, а то значи да су сва $\varphi_p = 0$, као и сви њихови изводи.

Из једначине (10.1) се добијају константе:

$$C_1 + C_4 = \varphi_0 \quad (10.3)$$

$$C_2k + C_3 = \varphi_0' \quad (10.4)$$

$$-E_1I_{\Omega}C_1k^2 = B_0 \quad (10.5)$$

Из једанчине (10.4) следи да је:

$$C_1 = -\frac{B_0}{GI_t} \quad (10.6)$$

Из једанчине (10.3) и једанчине (10.6) следи:

$$C_4 = \varphi_0 + \frac{B_0}{GI_t} \quad (10.7)$$

Из једанчине (10.4) и једанчине (10.4) следи :

$$C_2 = -\frac{\varphi_0'}{k} - \frac{M_0}{GI_t} \quad (10.8)$$

Из једначине (10.8) и једначине (10.4) следи :

$$C_3 = \frac{M_0}{GI_t} \quad (10.9)$$

Опште решење диференцијалних једначина гласи:

$$\varphi_{(z)} = \varphi_h + \varphi_p = C_1 ch kz + C_2 sh kz + C_3 z + C_4 + \varphi_p \quad (11)$$

Заменом константи у једначини (11) добијају се :

$$\varphi_z = \varphi_0 + \frac{\varphi'_0}{k} sh kz + \frac{B_0}{GI_t} (1 - ch kz) + \frac{M_0}{GI_t} \left(z - \frac{1}{k} sh kz \right) + \varphi_p \quad (11.1)$$

$$\varphi_{(z)}' = \bar{\varphi}_0' - \frac{\bar{B}_0 k}{\sigma I_t} sh kz + \frac{\bar{M}_0}{\sigma I_t} (1 - ch kz) + \varphi_p' \quad (11.2)$$

$$B_{(z)} = -E_1 I_{\Omega} \varphi'' = -\bar{\varphi}_0' \frac{\sigma I_t}{k} sh kz + \bar{B}_0 ch kz + \frac{\bar{M}_0}{k} sh kz + \varphi_p'' \quad (11.3)$$

$$M_{s(z)} = \sigma I_t \bar{\varphi}' = \sigma I_t \bar{\varphi}_0' ch kz - \bar{B}_0 k sh kz + \bar{M}_0 (1 - ch kz) + \sigma I_t \varphi_p' \quad (11.4)$$

$$M_{\Omega(z)} = -E_1 \sigma I_t \varphi''' = -\bar{\varphi}_0' \sigma I_t ch kz + \bar{B}_0 k sh kz + \bar{M}_0 ch kz - E_1 I_{\Omega} \varphi_p''' \quad (11.5)$$

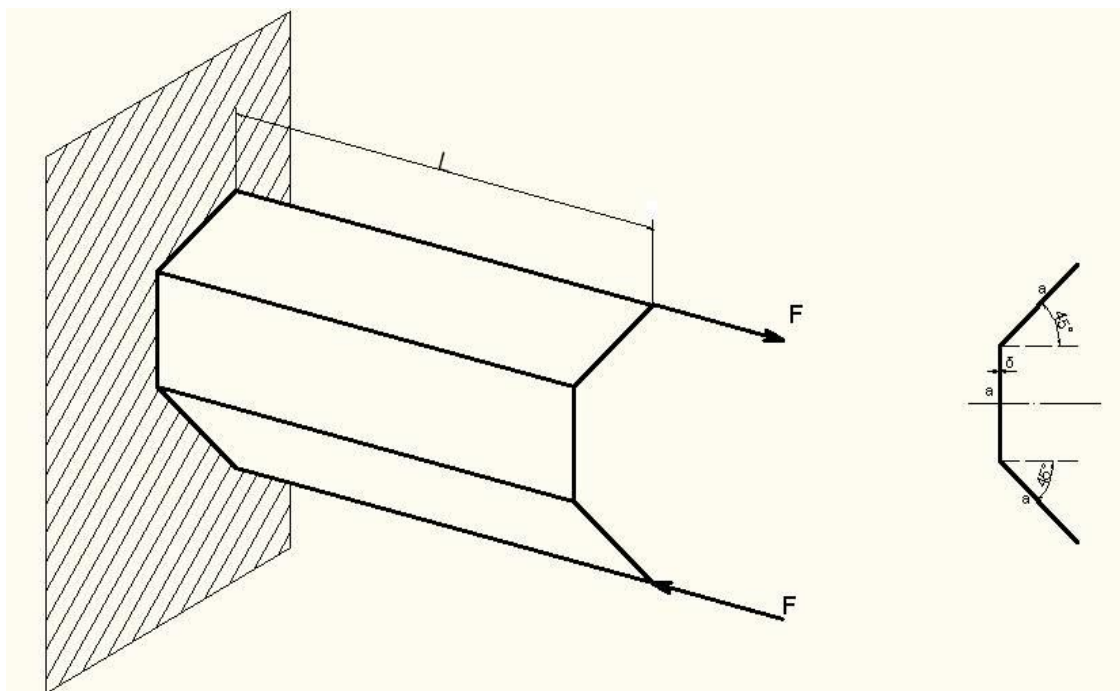
$$M_p = GI_t \varphi_p' - E_1 I_{\Omega} \varphi_p''' \rightarrow M_z = M_0 + M_p \quad (11.6)$$

Гранични услови-услови ослањања:

- Ослонац (покретни-непокретни) $\varphi = 0; B = 0$
- Прислоњен крај $\varphi' = 0; M = 0$ - нема депланације али је могуће окретање
- Укљештење $\varphi = 0, \varphi' = 0$
- Слободан крај $B = 0, M = 0$

8. Пример прорачуна носача оптерећеног на ометену торзију

Танкозидни штап датог попречног пресека оптерећен је како је на слици приказано. Одредити изразе за B , M_Ω , M_s и нацртати дијаграме ових величина по дужини штапа. Нацртати дијаграм нормалног напона у попречном пресеку и израчунати максималне вредности нормалног и смицајног напона[5].



Слика 38. Поставка задатка

$$l = 1\text{m}; a = 10\text{cm}; \delta = 0,2\text{cm}; F = 5\text{kN}; E = 2 \cdot 10^5\text{MPa}; G = 0,8 \cdot 10^5\text{MPa}$$

1.Површина и координате тежишта

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = 3a\delta = 6\text{cm}^2$$

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 x_{c1} + A_2 x_{c2} + A_3 x_{c3}}{A}$$

$$x_{c1} = 0; x_{c2} = x_{c3} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$x_c = \frac{2 \frac{a\sqrt{2}}{4} a\delta}{3a\delta} = \frac{a\sqrt{2}}{6} = 0,236a$$

$$x_c = 0,236a = 2,36\text{cm} ; y_c = 0$$

2. Момент инерције

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$$

$$I_{x1} = \frac{\delta a^3}{12} = \frac{0,2 \cdot 10^3}{12} = 16,66\text{cm}^4$$

$$I_{x2} = I_{x2} + y_c^2 A_2 ; \varphi = 45^\circ$$

$$I_{x2} = \frac{1}{2}(I_{\xi 2} + I_{\eta 2}) + \frac{1}{2}(I_{\xi 2} - I_{\eta 2}) \cos 2\varphi - I_{\xi 2 \eta 2} \sin 2\varphi \quad \text{Слика 39. Координате тежишта}$$

$$I_{x2} = \frac{1}{2}(I_{\xi 2} + I_{\eta 2}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a\delta^3}{12} + \frac{a^3\delta}{12}\right) = \frac{a\delta^3 + a^3\delta}{24}$$

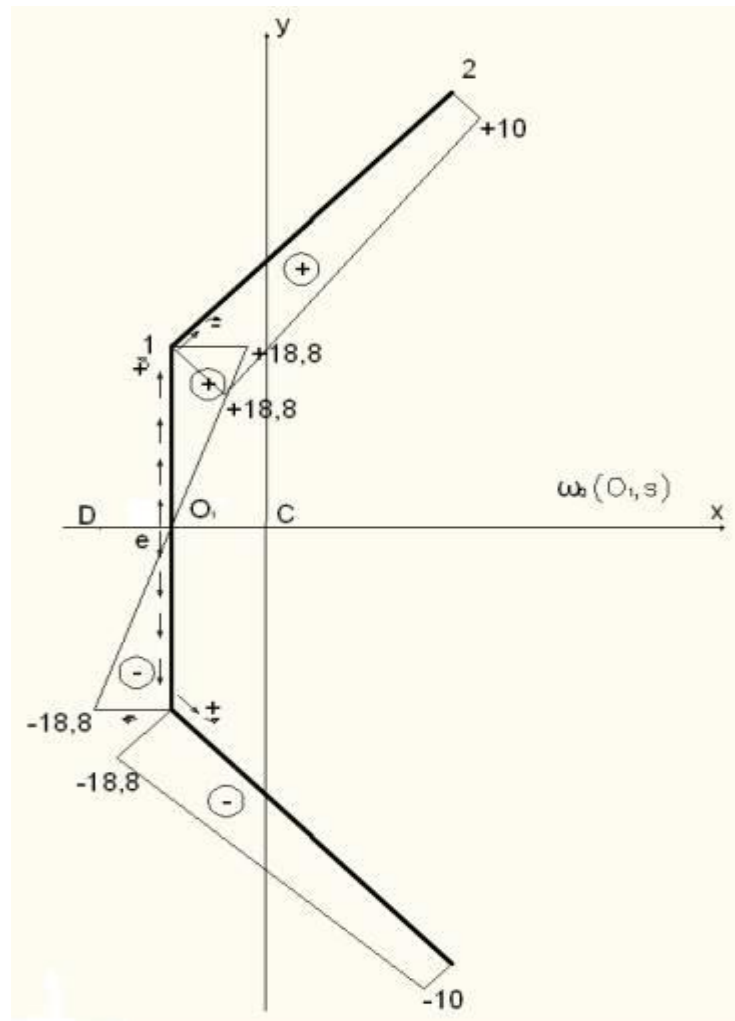
$$y_{c2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{(\sqrt{2} + 2)a}{4} = 0,854a$$

$$I_{x2} = \frac{a\delta^3 + a^3\delta}{24} + (0,854a)^2 a\delta = I_{x3}$$

$$I_{x2} = I_{x3} = \frac{10 \cdot 0,2^3 + 10^3 \cdot 0,2}{24} + (0,854 \cdot 10)^2 \cdot 10 \cdot 0,2 = 8,3366 + 145,8632 = 154,1998\text{cm}^4$$

$$I_x = 16,6666 + 2 \cdot 154,1998 = 325,0662$$

$$I_x = 325\text{cm}^4$$



$$I_y = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}$$

$$I_{y1} = \frac{a\delta^3}{12} = 0,0066cm^4 ;$$

$$I_{y1} = I_{y1} + x_c^2 \cdot A_1 = 0,0066 + (2,36)^2 \cdot 10 \cdot 0,2 = 11,1458cm^4$$

$$I_{y2} = I_{y2} + (x'_{c2})^2 A_2$$

$$I_{y2} = \frac{1}{2}(I_{\xi 2} + I_{\eta 2}) - \frac{1}{2}(I_{\xi 2} - I_{\eta 2}) \cos 2\varphi - I_{\xi 2\eta 2} \sin 2\varphi$$

$$I_{x2} = \frac{1}{2}(I_{\xi 2} + I_{\eta 2}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a\delta^3}{12} + \frac{a^3\delta}{12}\right) = \frac{a\delta^3 + a^3\delta}{24} = 8,3366cm^4 = I_{y3}$$

$$I_{y2} = \frac{a\delta^3 + a^3\delta}{24} + (0,118a)^2 a\delta = 8,3366 + 2,7848 = 11,1214cm^4 = I_{y3}$$

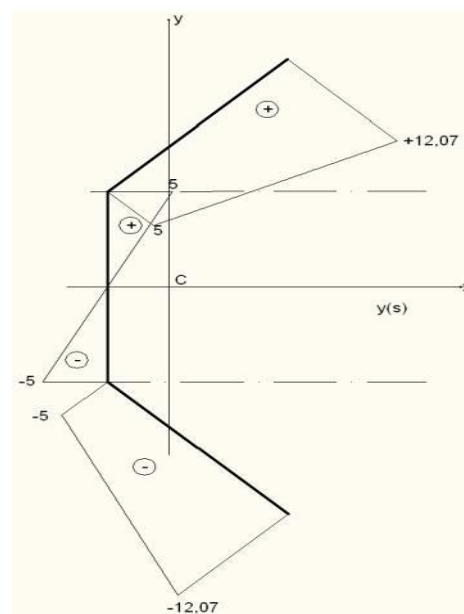
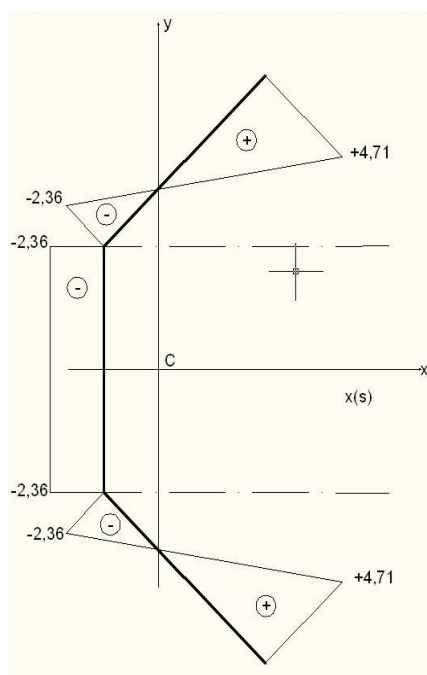
$$x'_{c2} = x_{c2} - x_c = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{a\sqrt{2}}{12} = 0,118a = 1,18cm$$

$$I_y = 11,1458 + 2 \cdot 11,1214 = 33,3886$$

$$I_y = 33,4cm^4$$

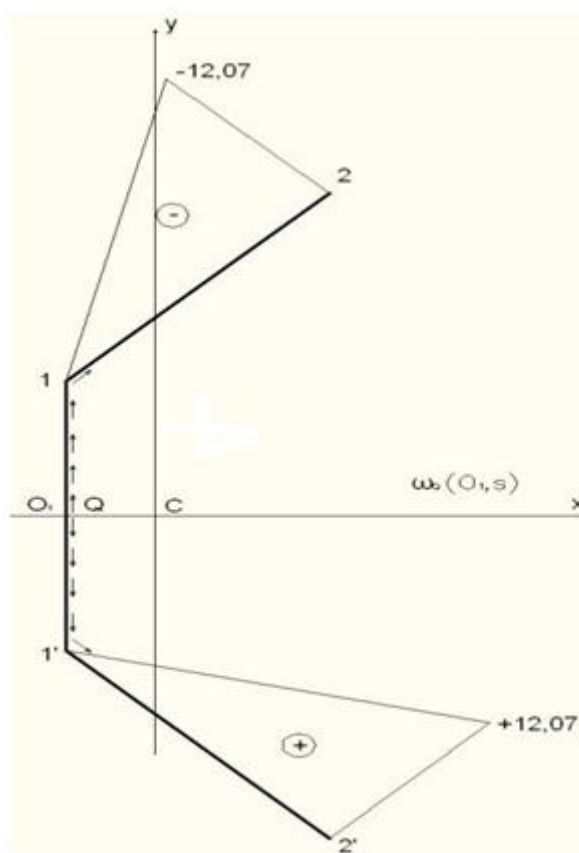
$$I_1 = I_x = 325cm^4 \quad I_2 = I_y = 33,4cm^4$$

3. Дијаграм промене координата



Слика 40. Дијаграм промене координата

4. Дијаграм секторске координате



Слика 41. Секторска координата

$$\omega_Q(\mathbf{O}_1, s) = \int_s h ds$$

$$h = 0; \quad s = \frac{a}{2}; \quad \omega_1 = 0$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} ; s = a$$

$h = 12,07 ; s = 10$

$$\omega_2 = 120,7$$

$$Q\{-0, 236a; 0\}$$

$$hQ\{, -2, 36; 0\}$$

5. Центрифугални момент

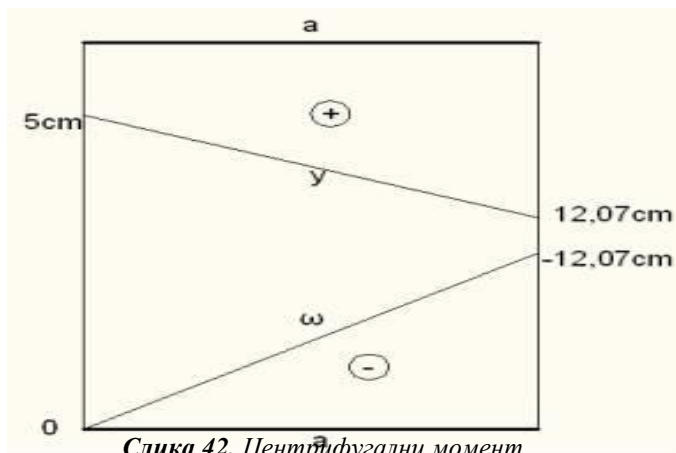
$$I_{x\omega_Q} = \int_A x \cdot \omega \cdot dA = 0 \quad x = \text{osa simetrije}$$

$$I_{y\omega_Q} = \int_A y \cdot \omega \cdot dA = \delta \int_s y \cdot \omega \cdot ds$$

$$\eta_a = 5 \text{ cm} ; \eta_b = 12,7 \text{ cm} ; \bar{\eta}_a = 0 ; \bar{\eta}_b = -120,7 \text{ cm}^2$$

$$I_{ab} = \frac{A_{ab}}{6} (\eta_a + 2\eta_b) = -\frac{\delta \cdot a}{6} (5 + 2 \cdot 12,7) \cdot 120,7 = -1223,0933 \text{ cm}^5$$

$$I_{y\omega_Q} = -563,5 \text{ cm}^5$$



Слика 42. Центрифугални момент

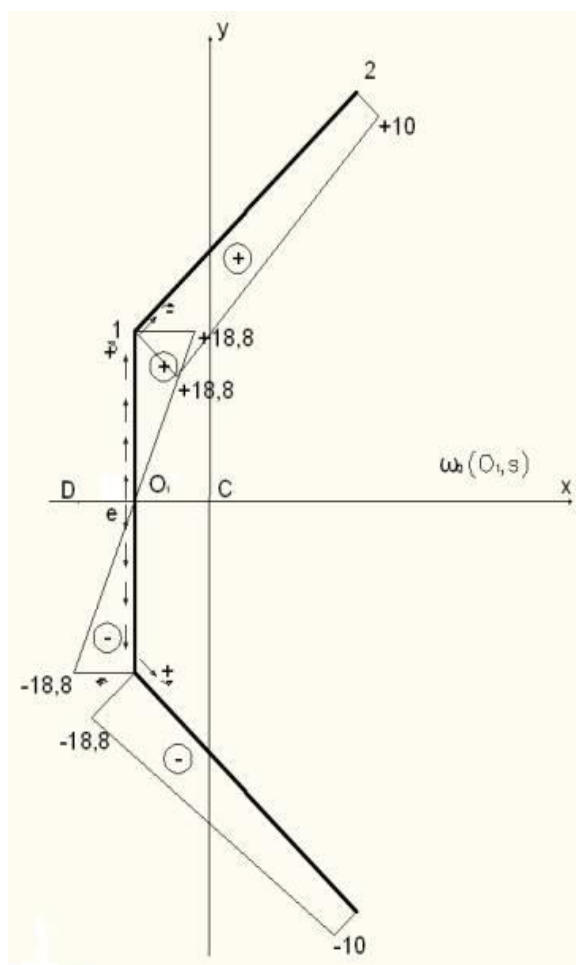
6. Кординате смицања

$$x_D = x_Q + \frac{I_{y\omega_Q}}{I_x} = -2,36 + \frac{-1223}{325} = -2,36 - 1,76 = -4,12 \text{ cm}$$

$$y_D = y_Q - \frac{I_{x\omega_Q}}{I_y} = y_Q - 0 = 0$$

$$D\{-4,12 \text{ cm}, 0\} ; e = 1,76$$

7. Дијаграм секторске координате за центар смицаја



Слика 43. Секторска координата

$$h = 0; s = \frac{a}{2}; \omega_1 = e \cdot \frac{a}{2} = 1,76 \cdot \frac{10}{2} = 8,8$$

$$\omega_2 = \omega_1 - b \cdot c \cdot \sin \theta = 8,8 - 8,8 = 0$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + e^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 3,76^2}$$

$$b = 6,256 \text{ cm}$$

$$d = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 7,07 \text{ cm}$$

$$c = \sqrt{(e + d)^2 + \left(\frac{a}{2} + d\right)^2}$$

$$c = \sqrt{(3,76 + 7,07)^2 + \left(\frac{10}{2} + 7,07\right)^2}$$

$$c = 16,216 \text{ cm}$$

$$\theta = \alpha - \beta; \rightarrow \theta = 4,96^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{\frac{10}{2}}{6,256} = 0,799$$

$$\alpha = 53,06^\circ$$

$$\sin \beta = \frac{d + \frac{a}{2}}{c} = \frac{7,07 + \frac{10}{2}}{16,216} = 0,744$$

$$\beta = 48,10^\circ$$

8. Нормална секторска координата

$$\Omega = \omega_D + \omega_0; \quad \omega_0 = -\frac{S_\omega}{A} \quad ; \quad S_\omega = \int_A \omega dA = \delta \int_s \omega ds \quad ; \quad \omega_0 = 0 \quad ; \quad \Omega = \omega_D$$

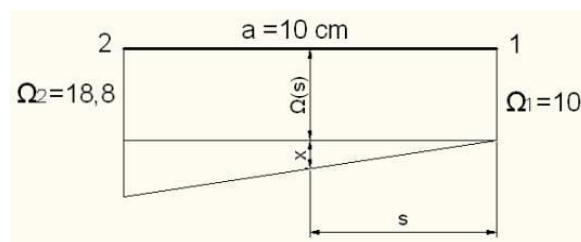
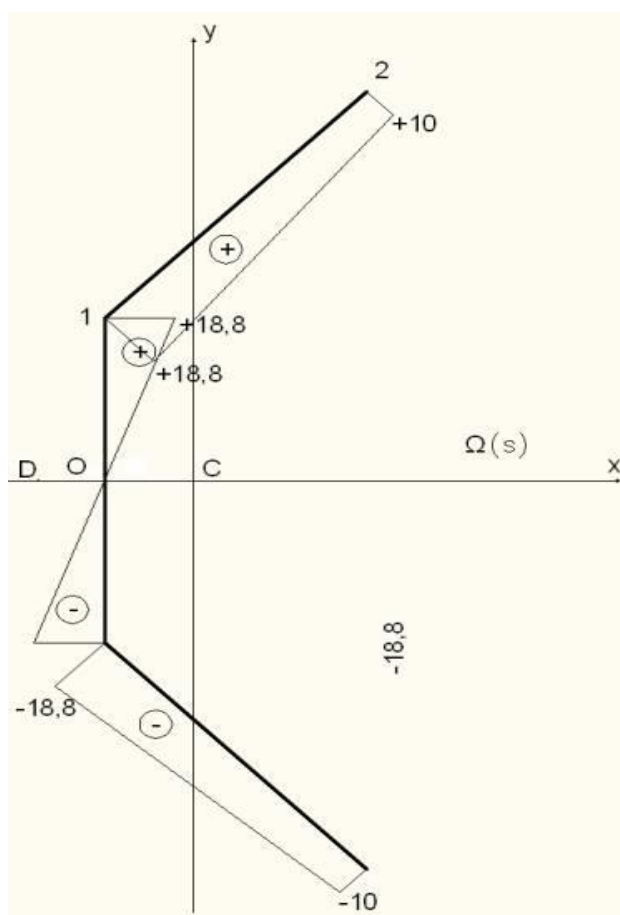
$$\Omega \equiv \omega_D$$

9. Нова нулта точка

$$\omega_0 = \int_{O_1}^O h ds = 0 \rightarrow O_1 \equiv O$$

10. Секторски статички момент

$$S_\Omega = \int_A \Omega dA = \delta \int_s \Omega ds$$

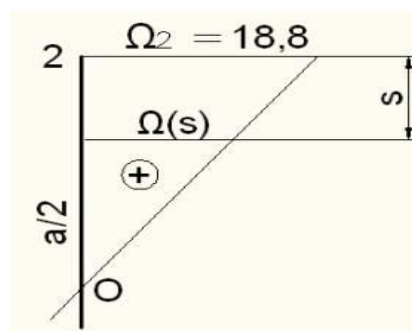


$$\Omega_s = \Omega_1 + x; \quad x: (\Omega_2 - \Omega_1) = s: a$$

$$x = \frac{s}{a} (\Omega_2 - \Omega_1)$$

$$\Omega_s = \Omega_1 + \frac{s}{a} (\Omega_2 - \Omega_1)$$

$$\Omega_s = 10 + \frac{s}{10} (18,8 - 10) = 10 + 0,88s$$



$$\Omega_s: \Omega_2 = \left(\frac{a}{2} - s\right) : \frac{a}{2}$$

$$\Omega_s = \frac{\Omega_2}{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} - s\right) = \Omega_2 \left(1 - \frac{2s}{a}\right)$$

$$\Omega_s = 18,8 \left(1 - \frac{2s}{10}\right) = 18,8 - 3,76s$$

$$\bar{S}_\Omega = \delta \int_s (10 + 0,88s) ds = \delta \left(10s + 0,88 \frac{s^2}{2}\right) \Big|_0^{s_1} = \delta (10s_1 + 0,44 \cdot 10^2)$$

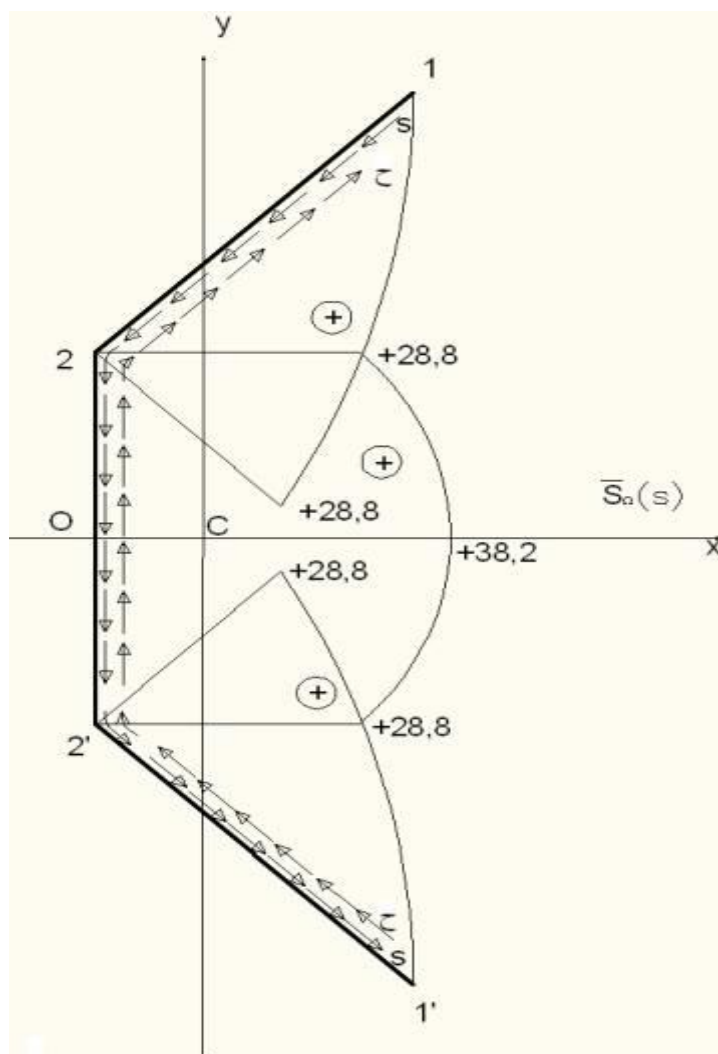
$$s_1 = 0; \bar{S}_{\Omega_1} = 0; s_1 = a = 10 \text{ cm}; \bar{S}_{\Omega_2} = 0,2(10 \cdot 10 + 0,44 \cdot 10^2) = 28,8 \text{ cm}^4$$

$$\bar{S}_{\Omega} = \delta \int_s (18,8 - 3,76s) ds = \delta \left(18,8s - 3,76 \frac{s^2}{2} \right) /_0^{s_2} = \delta (18,8s_2 - 1,88s_2^2)$$

$$s_2 = 0; \bar{S}_{\Omega_2} = 0; \bar{S}_{\Omega_2} = 28,8 \text{ cm}^4; s_2 = \frac{a}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$\bar{S}_{\Omega_0} = 0,2 (18,8 \cdot 5 - 1,88 \cdot 5^2) = 9,4 \text{ cm}^4$$

$$s_2 = a = 10; \bar{S}_{\Omega_2} = 0,2(18,8 \cdot 10 - 1,88 \cdot 10^2) = 0$$



Слика 44. Нормирана секторска координата

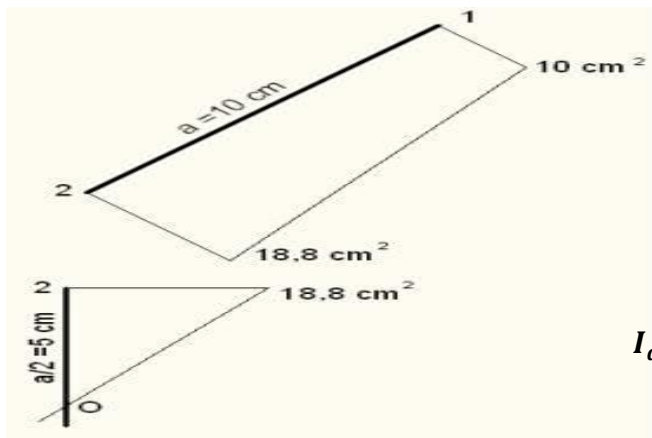
11. Секторски момент инерције

$$I_{\Omega} = \int_A \Omega^2 dA = \delta \int_s \Omega^2 ds$$

$$\eta_a = 10 \text{ cm}^2; \eta_b = 18,8 \text{ cm}^2$$

$$I_{ab} = \frac{A_{ab}}{3} (\eta_a^2 + \eta_a \eta_b + \eta_b^2) = \frac{0,2 \cdot 10}{3} (10^2 + 10 \cdot 18,8 + 18,8^2) = 427,63$$

$$I_{ab} = 427,63 \text{ cm}^6$$



$$\eta_a = 0$$

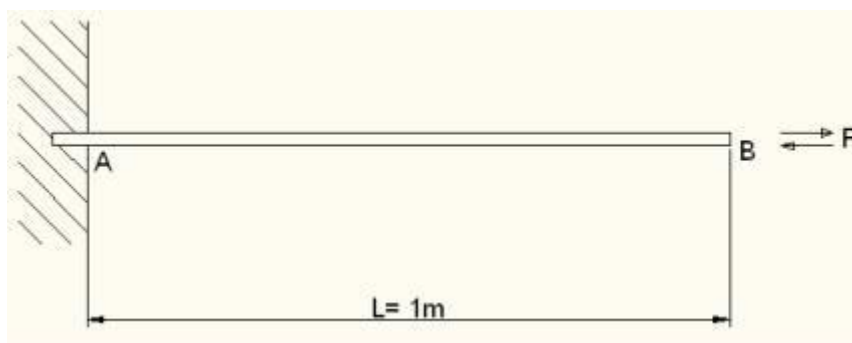
$$\eta_b = 18,8 \text{ cm}^2$$

$$I_{ab} = \frac{A_{ab}}{3} \eta_b^2 = \frac{0,2 \cdot 5}{3} \cdot 18,8^2 = 117,81 \text{ cm}^6$$

$$I_{\Omega} = 2I_{ab}' + 2I_{ab}'' = 2(427,63 + 117,81) = 1090,88$$

$$I_{\Omega} = 1091 \text{ cm}^6$$

12.



$$B^* = 2F \cdot \Omega = 2 \cdot 5 \text{ kN} \cdot 10 \text{ cm}^2 = 10 \text{ Nm}^2$$

$$\varphi_{(z)} = \bar{\varphi}_0 + \frac{\bar{\varphi}_0'}{k} shkz + \frac{\bar{B}_0}{\sigma I_t} (1 - chkz) + \frac{\bar{M}_0}{\sigma I_t} \left(z - \frac{1}{k} shkz \right) + \varphi_p$$

$$\varphi_{(z)}' = \bar{\varphi}_0' - \frac{\bar{B}_0 k}{\sigma I_t} shkz + \frac{\bar{M}_0}{\sigma I_t} (1 - chkz) + \varphi_p'$$

$$\varphi_{(z)}'' = \bar{\varphi}_0' kshkz - \frac{\bar{B}_0 k^2}{\sigma I_t} chkz - \frac{\bar{M}_0 k}{\sigma I_t} shkz + \varphi_p''$$

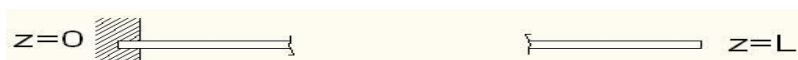
$$\varphi_{(z)}''' = \bar{\varphi}_0' k^2 shkz - \frac{\bar{B}_0 k^3}{\sigma I_t} shkz - \frac{\bar{M}_0 k^2}{\sigma I_t} chkz + \varphi_p'''$$

$$B_{(z)} = -E_1 I_{\Omega} \varphi'' = -\bar{\varphi}_0' \frac{\sigma I_t}{k} shkz + \bar{B}_0 chkz + \frac{\bar{M}_0}{k} shkz + \varphi_p''$$

$$M_{s(z)} = \sigma I_t \bar{\varphi}' = \sigma I_t \bar{\varphi}_0' chkz - \bar{B}_0 kshkz + \bar{M}_0 (1 - chkz) + \sigma I_t \varphi_p'$$

$$M_{\Omega(z)} = -E_1 \sigma I_t \varphi''' = -\bar{\varphi}_0' \sigma I_t chkz + \bar{B}_0 kshkz + \bar{M}_0 chkz - E_1 I_{\Omega} \varphi_p'''$$

$$\mathfrak{M}_D = 0; \varphi_p = 0$$



$$\varphi = 0; \varphi' = 0; M = 0; B = 0; B^* = B$$

$$z = 0 \quad \varphi = 0 \rightarrow \varphi_0 = 0$$

$$z = 0 \quad \varphi' = 0 \rightarrow \varphi_0' = 0$$

$$z = l \quad M = 0 \rightarrow 0 = M_s + M_{\Omega} = M_0 = 0$$

$$z = l \quad B = B^* \rightarrow B^* = B_0 chkl$$

$\varphi_0 = 0$	$\varphi_0' = 0$	$M_0 = 0$	$B_0 = \frac{B^*}{chkl}$
-----------------	------------------	-----------	--------------------------

$$\varphi_{(z)} = \frac{B^*}{\sigma I_t chkl} (1 - chkz)$$

$$\varphi_{(z)}' = -\frac{B^*}{\sigma I_t chkl} shkz$$

$$B_{(z)} = \frac{B^*}{chkl} shkz$$

$$M_{s(z)} = -\frac{B^*}{chkl} shkz; \quad M_{\Omega(z)} = \frac{B^* k}{chkl} shkz$$

$$I_t = \frac{\eta}{3} (a + a + a) \delta^3 = \frac{1}{3} 3a \cdot \delta^3 = a \delta^3 = 10 \cdot 0,2^3 = 0,08 \text{ cm}^4$$

$$E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} = \frac{2 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{1 - 0,3^2} = 2,2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$k^2 = \frac{\sigma I_t}{E_1 I_\Omega} = \frac{0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 0,08 \text{ cm}^4}{2,2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 1091 \text{ cm}^6} = 2,666 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{cm}^2} = 0,266 \frac{1}{\text{m}^2}$$

$$k = 0,516 \frac{1}{\text{m}} ; kl = 0,516 ; shkl = 0,5392047 ; chkl = 1,1361082$$

$$\frac{B^*}{\sigma I_t chkl} = \frac{10 \text{ Nm}^2}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0,08 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \cdot 1,1361082} = 0,1375$$

$$\frac{B^*}{\sigma I_t chkl} = 0,1375 \cdot 0,516 \frac{1}{\text{m}} = 0,07095 \frac{1}{\text{m}}$$

$$\frac{B^*}{chkl} = \frac{10 \text{ Nm}^2}{1,136101082} = 8,8 \text{ Nm}^2$$

$$\frac{B^*}{chkl} = 8,8 \text{ Nm}^2 \cdot 0,516 \frac{1}{\text{m}} = 4,5408 \text{ Nm}$$

$$z = 0 ; kz = 0 ; shkz = 0 ; chkz = 1$$

$$\varphi_A = 0 ; \varphi'_A = 0 ; B_A = \frac{B^*}{chkl} = 8,8 \text{ Nm}^2 ; M_{SA} = 0 ; M_{\Omega A} = 0$$

Тачка C

$$z = \frac{l}{4} = 0,25 \text{ m} ; shk \frac{l}{4} = 0,129358 ; chk \frac{l}{4} = 1,008332$$

$$\varphi_c = 0,1375(1 - 1,008332) = -0,00114 \text{ rad} = -0,526 \frac{^\circ}{\text{m}}$$

$$B_c = 8,8 \cdot 1,008332 = 8,873 \text{ Nm}^2$$

$$M_{sc} = -4,5408 \cdot 0,129358 = -0,5873888 \text{ Nm} \rightarrow M_{\Omega A} = 0,587 \text{ Nm}$$

Тачка D

$$z = \frac{l}{2} = 0,5 \text{ m} ; shk \frac{l}{2} = 0,2608717 ; chk \frac{l}{2} = 1,033467$$

$$\varphi_D = -0,0046 \text{ rad} = -0,263^\circ$$

$$\varphi'_D = -0,0185 \frac{\text{rad}}{\text{m}} = -1,06 \frac{^\circ}{\text{m}}$$

$$B_D = 9,0945 \text{ Nm}^2$$

$$M_{sD} = -1,185 \text{ Nm} \quad M_{\Omega D} = 1,185 \text{ Nm}$$

Тачка E

$$z = \frac{3}{4} l ; sh \frac{3kl}{4} = 0,3967327 ; ch \frac{3kl}{4} = 1,0758238$$

$$\varphi_E = -0,0104 \text{ rad} = -0,597^\circ$$

$$\varphi'_E = -0,0281 \frac{\text{rad}}{\text{m}} = -1,61 \frac{^\circ}{\text{m}}$$

$$B_E = 9,467 \text{ Nm}^2$$

$$M_{SE} = -1,801 \text{ Nm} \quad ; \quad M_{\Omega E} = 1,801 \text{ Nm}$$

Тачка В

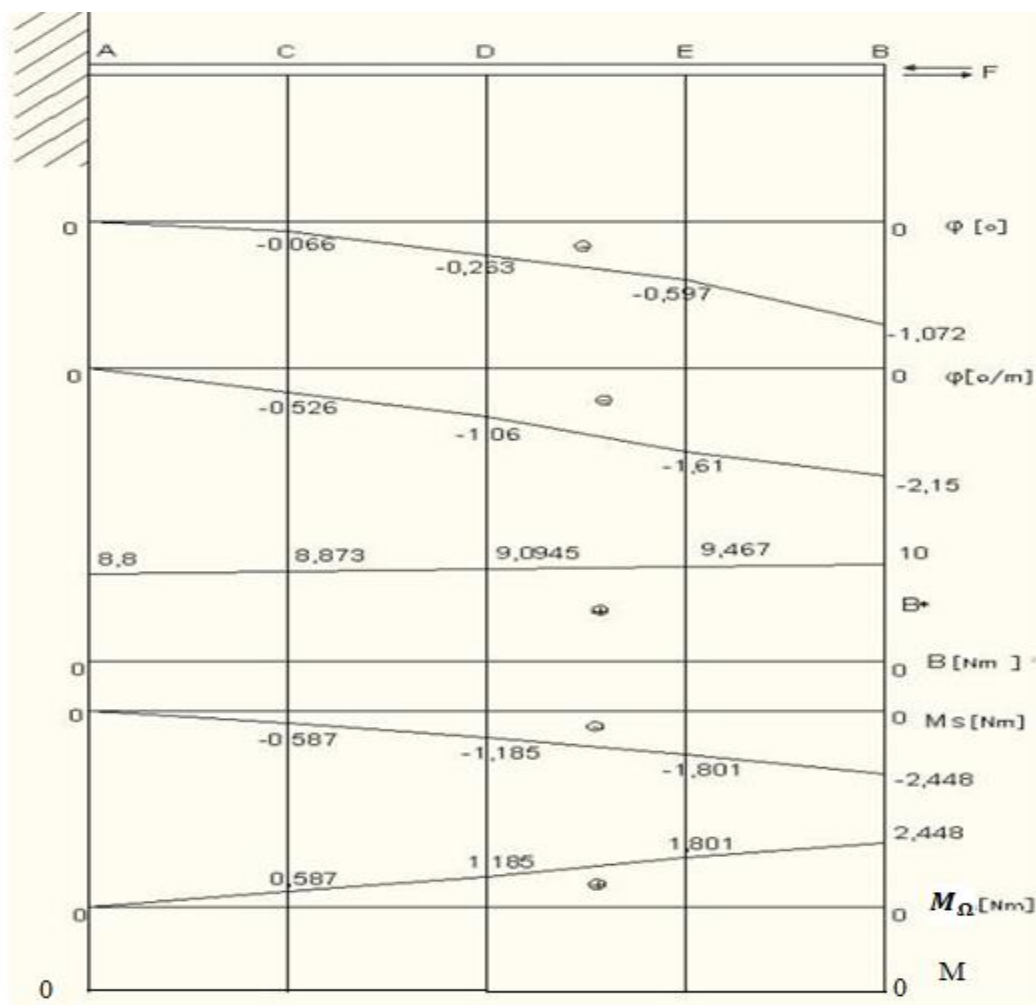
$$z = l = 1 \text{ m} ; shkl = 0,5392047 ; chkl = 1,1361082$$

$$\varphi_B = -0,0187 \text{ rad} = -1,072^\circ$$

$$\varphi'_B = -0,0383 \frac{\text{rad}}{\text{m}} = -2,19 \frac{^\circ}{\text{m}}$$

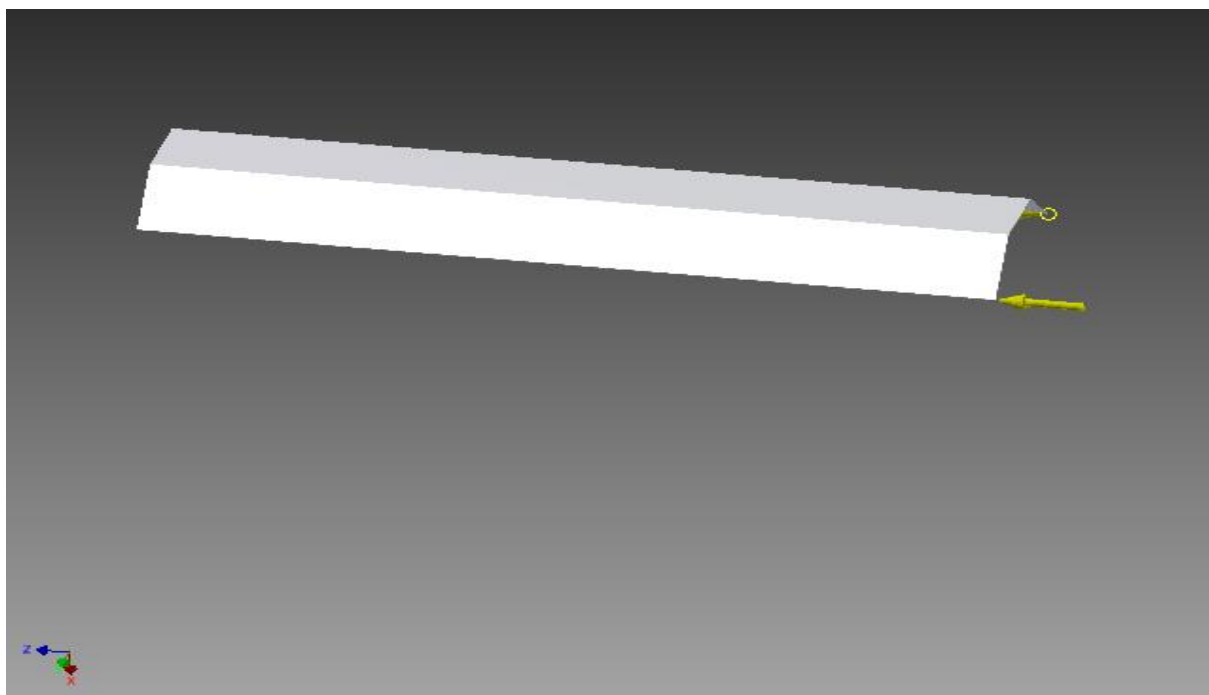
$$B_B = 10 \text{ Nm}^2$$

$$M_{SB} = -2,448 \text{ Nm} \quad ; \quad M_{\Omega B} = 2,448 \text{ Nm}$$

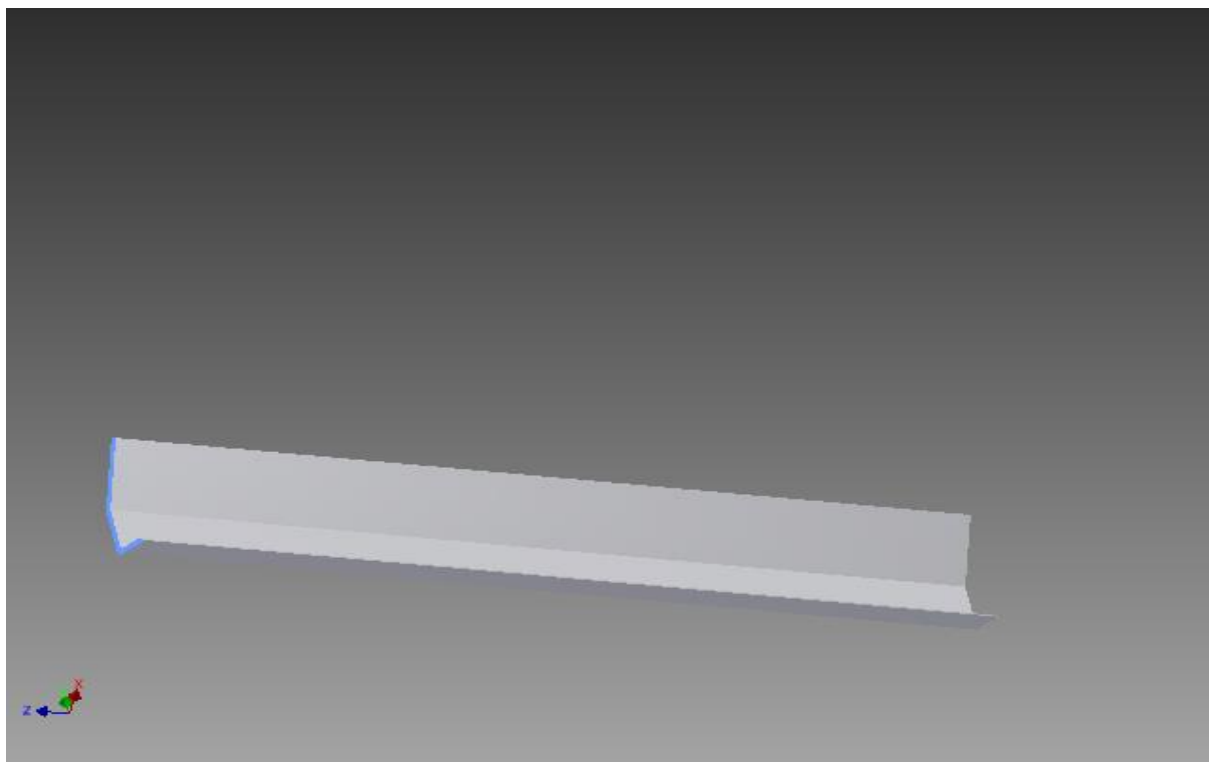


Слика 45. Дијаграм напона

8.1 Одређивање напона и деформација помоћу програма *Inventor*



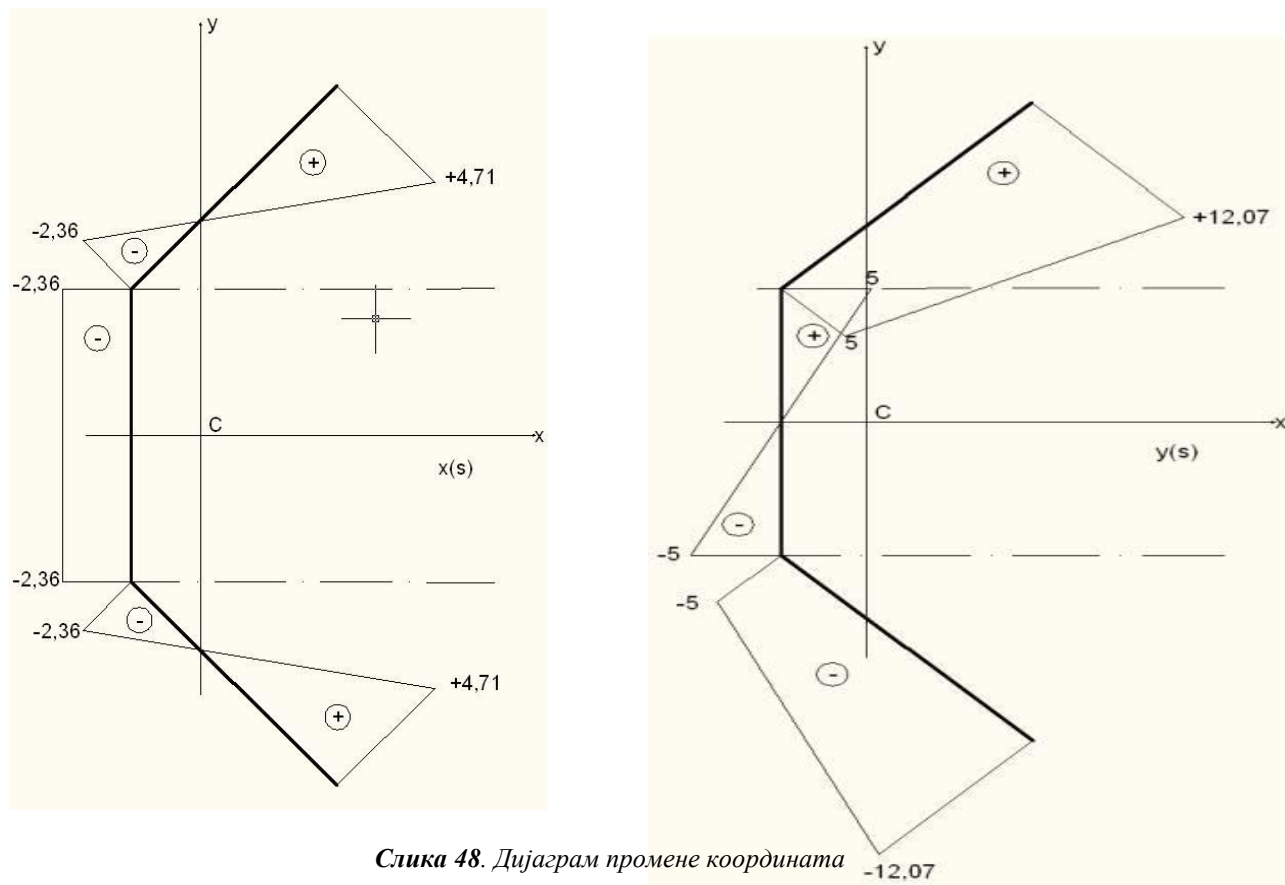
Слика 46. Увођење сила



Слика 47. Фиксирани део

8.2 Упоређивање резултата

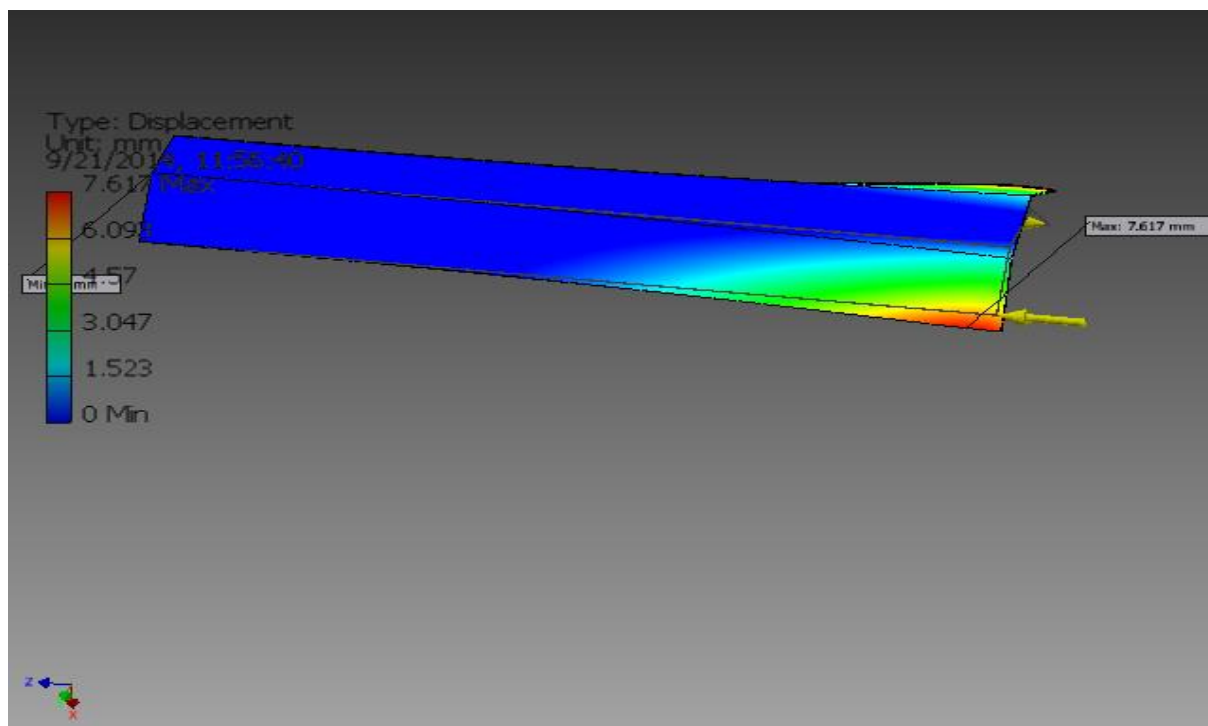
У овом делу задатка упоређимо вредности добијених аналитичким одредјивањем и нумеричким коришћењем програма **INVENTOR**. У првом делу анализе упоређиваћемо промену координата, а у другом напоне.



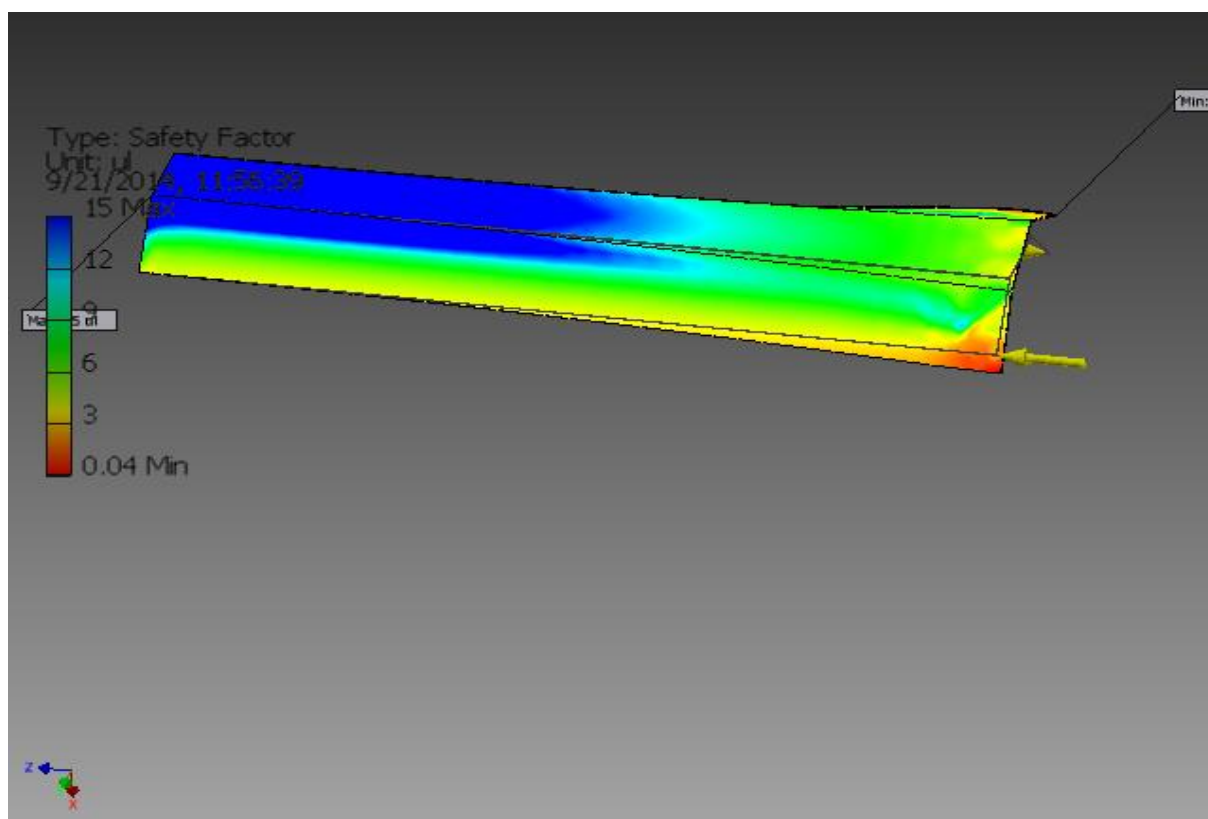
Слика 48. Дијаграм промене координата

Табела 1. Упоређивање резултата промене координата

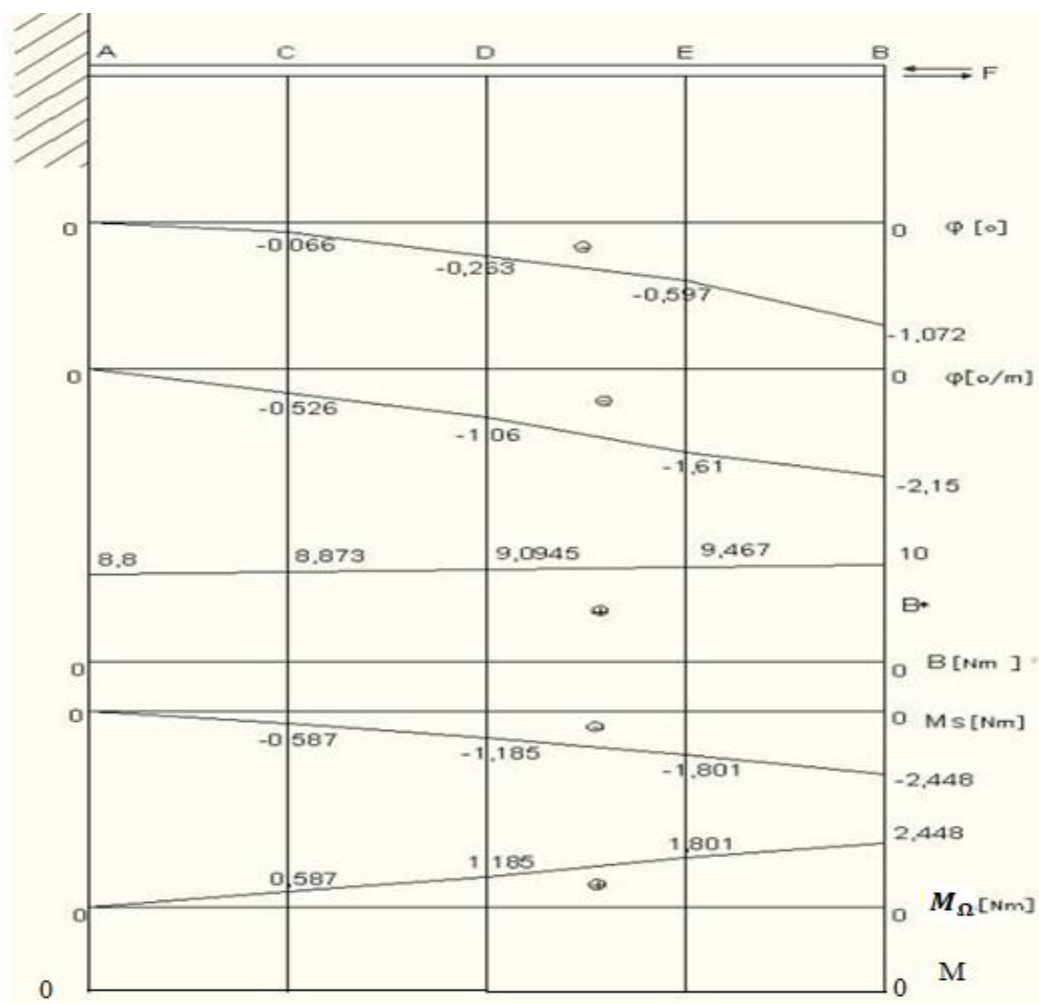
Упоређивање дијаграма промене координата (mm)	X	Y
Нумеричко	4,2	11,47
Аналитичко	4,71	12,07



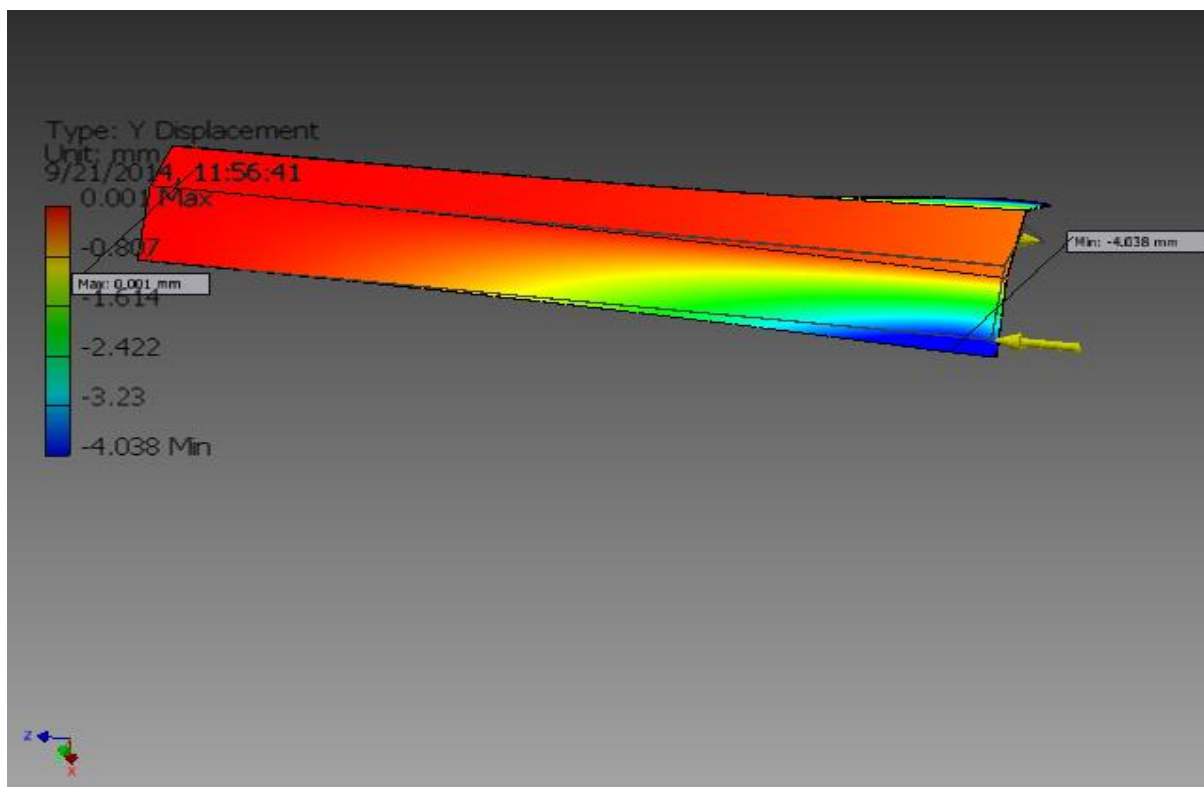
Слика 49. Деформације у правцу X -осе



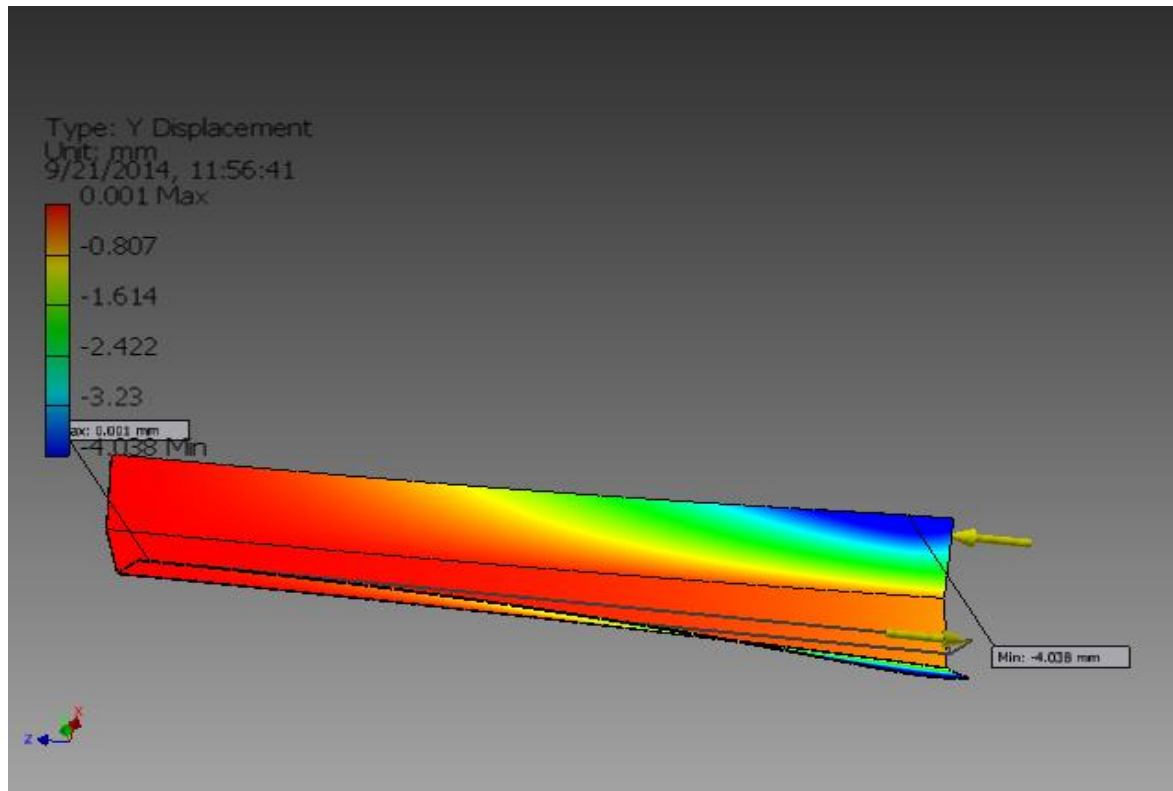
Слика 50. Деформације у правцу Y -осе



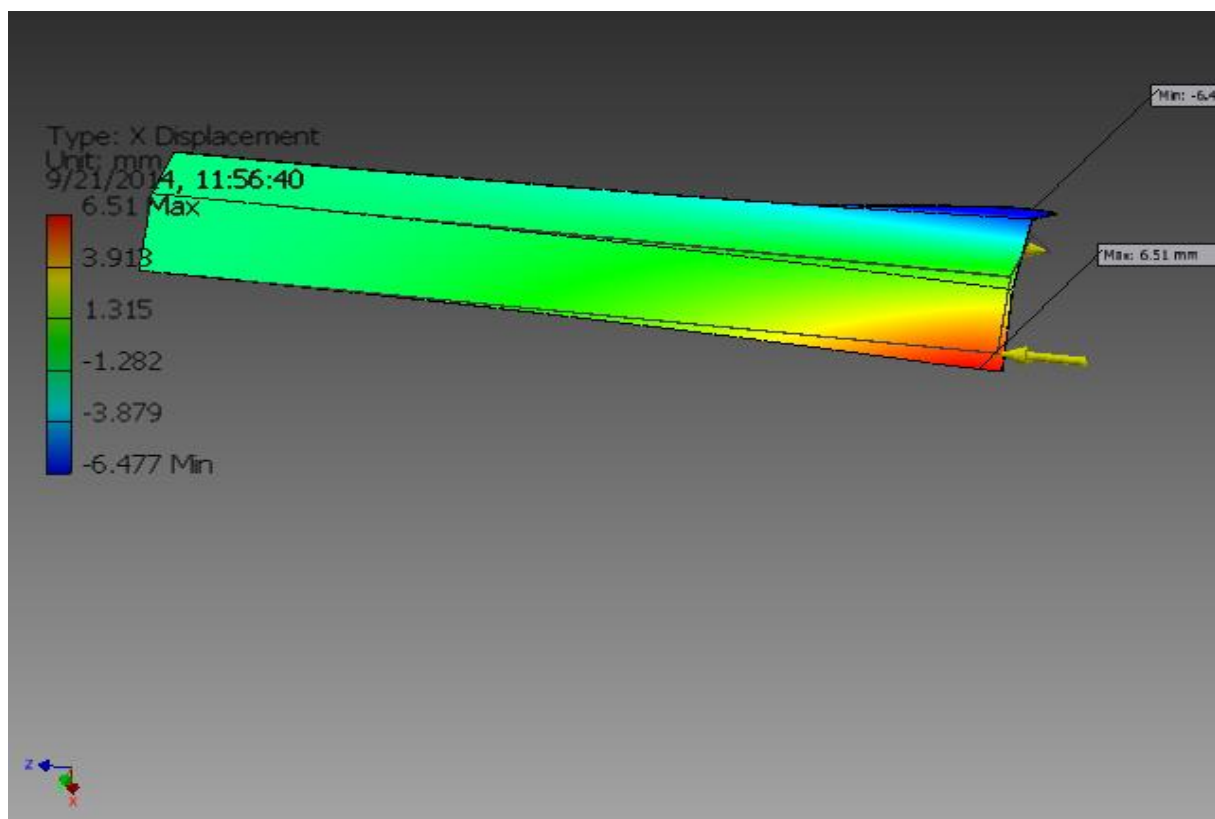
Слика 51. Дијаграм напона



Slika 51. Специфични угао увијања φ'



Slika 52 . Момент слободне торзије. M_s



Slika 53 . Угао увијања φ

Tabela 2 . Uporedjivanje napona

Uporedjivanje napona (Nm ²)	φ	φ'	M_S	M_Ω
Numeričko	-1,282	-2,422	-2,15	2,15
Analitičko	-1,072	-2,15	-2,448	2,448

Tabela3. Uporedjivanje vrednosti normalnog i smicuceg napona

Uporedjivanje vrednosti normalnog i smicuceg napona(Mpa)	σ_{max}	$\tau_{\Omega max}$	σ_{min}	$\tau_{\Omega min}$
Numeričko	22,48	0,63	12,59	0,38
Analitičko	17,23	0,43	9,166	0,32

8.3 Анализа резултата

У инжењерској пракси често се може наићи на проблеме који се не могу довољно успешно анализирати користећи познате програмске системе за нумеричку анализу. Један од таквих проблема је и проблем еластичне стабилности танкозидних профила. Поред тога што нису довољно ефикасни ти програмски системи су скупи. У таквим случајевима могу се креирати мањи програми који се баве анализом искључиво таквих специфичних проблема. Такви програми дају боље, брже и свеобухватније резултате који у потпуности третирају дату проблематику, а пружају могућност инжењерима са релативно скромним програмерским знањем да их кад год је потребно проширују и побољшавају.

Међутим пошто су резултати које смо добили аналитичком методом и коришћењем софтверског програма **INVENTOR** идентични, не можемо са сигурношћу рећи који су резултати бољи, веродостојнији.

9. Закључак

Савремени развој конструкција креће се у правцу примене све лакших и тањих елемената, што је последица употребе материјала веома високих чврстоћа. Прорачун конструкција са танким зидовима, чија је једна димензија мала у односу на остале две, може се спровести применом теорије која се зове Теорија танкозидних носача. Интеракција модова игра важну улогу при одређивању критичних вредности оптерећења танкозидних носача. Класична теорија танкозидних носача може адекватно описати понашање само носача код којих су доминантни глобални модови, савијање и торзија, те тиме и интеракцију тих модова. Метода почетних параметара се показује као погодна за испитивање ових видова губитка стабилности које не може да обухвати класична теорија односно, интеракцију локалних и глобалних модова. Оваква анализа је неопходна код прорачуна танкозидних носача мале глобалне виткости. Код танкозидних носача долази до промене попречног пресека те се јавља витоперење, зато се детаљније прорачунавају напони и деформације.

Понашање танкозидних греда и штапова је специфично и због тога је њихова оптимизација посебан проблем. У току процеса пројектовања конструкције, осим захтеваних димензија које се морају обезбедити за поједине делове конструкције да би она носила задато оптерећење, веома је важно одредити оптималне величине димензија попречног пресека.

Литература:

[1] Буђевац Д., Марковић З. и др., Металне конструкције, Грађевинска књига, Београд 2007, Грађевинска књига, Београд, 1986.

[2] Бабин Н., Бркљач Н., Шостаков Р., Металне конструкције, ФТН издаваштво, Нови Сад 2006

[3] Милосављевић М., Радојковић М. И Кузмановић Б., Основи челичних конструкција

[4] Петковић З., Острић Д., Металне конструкције у машиноградњи, Институт за механизацију Машинског факултета у Београду, Београд, 1996

[5] Николић Р., Марјановић В., Металне конструкције – Приручник за прорачуне, Машински факултет, Крагујевац, 1998.

[6] <https://www.scribd.com/doc/115193277/66/>

[7] <http://budi.inzenjer.org>

[8] Николић Ј., Марјановић В Збирка решених задатака из Металних конструкција, Машински факултет, Крагујевац