

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу

Надица Р. Стојановић

Коефицијент реституције

завршни рад

Крагујевац, 2013.

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Друмски саобраћај

Предмет: Механика саобраћајне незгоде

Број индекса: 107/2010

Надица Р. Стојановић

Коефицијент реституције

завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Др Александра Јанковић, ред. проф. - ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да

- у уводу треба да истакне значај одрђивања коефицијента реституције,
- објасни појам и значење коефицијента реституције,
- прикаже дефиниције коефицијента реституције, као и начин њиховог одређивања,
- прикаже принцип одређивања коефицијента реституције приликом судара два возила, као и удара возила у баријеру,
- изведе адекватне закључке на основу претходних теоријских разматрања.

Препоручена литература:

[1] Brach R. M.: Mechanical impact dynamics, Rigid body collision, New York, 2007.

Крагујевац, 2013.

ментор:

Др Александра Јанковић, ред. проф.

Резиме

У овом раду, дискутовано је о класичним моделима удара базирани на Њутновим законима кретања. Испитали смо идеју о коефицијенту реституције кроз три различите дефиниције. Прва дефиниција коефицијента реституције представља кинематски модел. То је Њутнова формула. Даље можемо видети кинетички модел коефицијента реституције, који је постављен од стране Poisson 1800-те године. На крају испитали смо енергетску дефиницију коју је формулисао Stronge. На самом крају можемо видети начин одређивања коефицијента реституције приликом судара између два возила, као и удара возила у баријеру.

Кључне речи: Коефицијент реституције, импулс, судар.

Summary

In this paper, we have discussed classical impact models based upon Newton's Laws of Motion. We have examined the idea of coefficient of restitution in three different definitions. The first definition of coefficient of restitution is the kinematic model. This is Newton's formulation. Next, we looked at the kinetic model of coefficient of restitution, as postulated by Poisson in the 1800's. Lastly, we examined an energetic definition of impulse as formulated by Stronge. At the end we can see the way how to find coefficient of restitution in the collision between two cars and between car and barrier.

Keywords: Coefficient of restitution, impulse, collision.

Садржај

1 Увод	5
2 Коефицијент реституције	8
2.1 Појам коефицијента реституције	8
2.1.1 Кинематска дефиниција коефицијента реституције	9
2.1.2 Кинетичка дефиниција коефицијента реституције	10
2.1.3 Енергетска дефиниција коефицијента реституције	14
2.2 Одређивање коефицијента реституције приликом судара два возила	20
2.3 Одређивање коефицијента реституције приликом удара возила у баријеру	28
3 Закључак	31
Литература	33

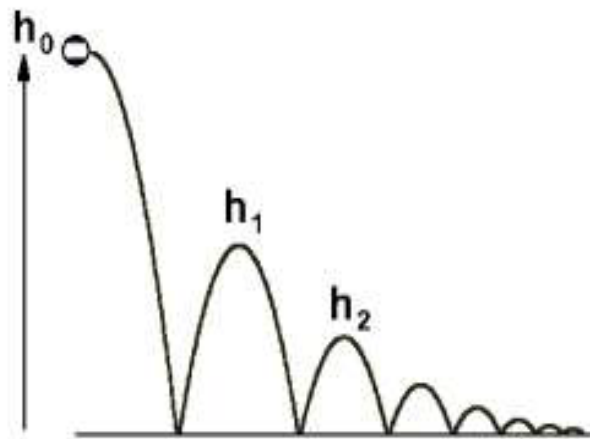
1 Увод

Коефицијент реституције k представља меру еластичности удара и/или судара два тела. Вредности овог коефицијента могу се кретати у границама од $0 \div 1$. Важно је напоменути да када је његова вредност једнака броју један ($k=1$) судар је потпуно еластичан, док је за вредност нула ($k=0$) потпуно пластичан. Сам коефицијент представља однос између брзина пре и брзина после судара, као што приказује формула (1):

$$k = \frac{\text{брзина}_{\text{после судара}}}{\text{брзина}_{\text{пре судара}}} \quad (1)$$

Удар представља кретање неког објекта, у односу на објекат који мирује и у току бесконачног малог временског интервала они су у контакту и настаје промена брзине. Док судар у ствари представља покретне објекте, који у бесконачно малом интервалу су у контакту и мењају своје брзине.

Укратко речено овај коефицијент описује однос између брзина којима ће тела наставити да се крећу након судара, и оних брзина којима су тела прилазила једна другом пре судара. Сама разлика између брзина може се утврдити колико се енергије изгуби током судара. Важно је напоменути да се приликом цртања брзина после судара, цртају нормално на тангентну линију судара. Да би се боље описао начин колико је енергије изгубљено, најбоље је посматрати слику 1.



Слика 1: Илустрација одређивања изгубљене енергије [2]

Посматрајући слику видимо куглицу масе m која се пушта да пада са висине h_0 . Може се рећи да је почетна брзина куглице v_0 и да том брзином удара о тло, кинетичка енергија по дефиницији износи:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot h_0 \quad (2)$$

одавде се долази до релације да је:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot h_0$$

$$\frac{1}{2} \cdot v_0^2 = g \cdot h_0 \quad / \cdot 2$$

$$v_0^2 = 2 \cdot g \cdot h_0$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} \quad (3)$$

Узимајући у обзир да је већ речено да коефицијент реституције представља однос између брзине после и брзине пре судара, такође користећи релацију (1) добија се следеће:

$$k = \frac{v_1}{v_0} \quad (4)$$

што даље следи да је:

$$v_1 = k \cdot v_0 = k \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} \quad (5)$$

стим да треба напоменути да брзина v_1 представља брзину после удара.

Посматрајући релацију (3) може се на основу ње написати да је:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \quad (6)$$

применом релацију (4), добиће се следеће:

$$k = \frac{v_1}{v_0}$$

$$k = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}}$$

$$k = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h_1}{2 \cdot g \cdot h_0}}$$

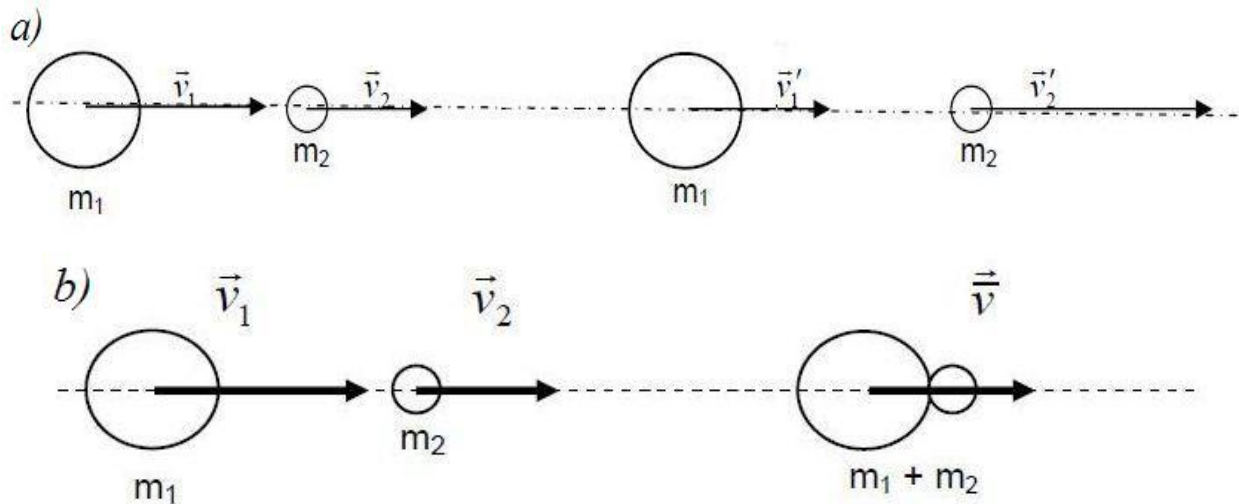
$$k = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} \quad (7)$$

Претходним релацијама укратко је приказано да постоји веза између енергије и коефицијента реституције.

2 Коефицијент реституције

2.1 Појам коефицијента реституције

Током судара два тела, брзине које ће се појавити након судара зависе од брзина пре, као и од природе судара [1]. Под природом мисли се да ли је судар идеално пластичан, идеално еластичан или нешто између тога. Приликом идеално еластичног судара, брзине након судара одвајају тела и оне су једнаке брзинама пре судара. У случају идеално пластичног судара тела се не раздвајају и настављају да се крећу заједно, али брзине су мање од брзина пре судара због изгубљене енергије приликом судара. Све претходно наведено може се приказати и сликовито, као што је приказано на слици 2.



Слика 2: Судар два тела:

a) еластичан судар

b) пластичан судар

Као што је већ речено коефицијент реституције се креће у границама између нуле и један, стим да је јединица за идеално еластичан судар, док нула означава идеално пластичан судар. У реалности овај коефицијент никада неће бити једнак ни једној од ове две вредности, већ ће увек бити негде између њих. Његова величина најчешће зависи од природе материјала од кога су тела направљена. Такође зависи и од ударних брзина, облика и величина сударајућих тела, тачке, односно места на телу где се судар дешава, па и од температуре

тела. Интересатни примери величина за коефицијент реституције дати су за следеће материјале:

- $k = \frac{5}{9}$ - при удару челика у челик
- $k = \frac{15}{16}$ - при удару стакла о стакло
- $k = \frac{1}{2}$ - при удару дрвета о дрво

Занимљиво је видети да се у формули (1) испред разломка налази знак минус. Треба напоменути да је коефицијент реституције иначе увек позитиван број, међутим поменути знак минус се поставља из тог разлога што су брзине пре и после судара супротних смерова, па самим тим и супротних знакова.

Неке од основних дефиниција коефицијента реституције су [3]:

- Кинематска дефиниција коефицијента реституције
- Кинетичка дефиниција коефицијента реституције
- Енергетска дефиниција коефицијента реституције

У даљем тексту све три дефиниције биће објашњене, као везе и разлике између њих.

2.1.1 Кинематска дефиниција коефицијента реституције

Прву дефиницију коефицијента реституције дао је Issac Newton и то формулом која гласи:

$$k = \frac{V_2' - V_1'}{V_1 - V_2} \quad (8)$$

где су:

v_1 - брзина кретања тела један пре судара

v_2 - брзина кретања тела два пре судара

v_1' - брзина кретања тела један после судара

v_2' - брзина кретања тела два после судара

стим да се по Њутну сматрају да су ове брзине нормалне на ударну раван.

У случају да је судар линијски брзине су једнаке вредности вектора брзине. Међутим, уколико се судар дешав под неким углом тада брзине из релације (8) морају бити пројектоване под одговарајућим углом, односно представљају компоненте вектора брзине. Већину ствари које је Њутн написао биле су тачне, мада грешка је била у томе што је предпостављао да коефицијент реституције зависи само од материјала.

2.1.2 Кинетичка дефиниција коефицијента реституције

Ране 1800-те Poisson је дао кинетичку дефиницију коефицијента реституције. Ова дефиниција говори да коефицијент реституције представља однос вредности одскочног импулса и вредности деформационог импулса. Стим да се узима у обзир да оба импулса нормална на раван контакта. Формула коју описује кинетичка дефиниција гласи:

$$k = \frac{(F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}}}{(F \cdot \Delta t)_{\text{деформационо}}} \quad (9)$$

У релацији (9) производ силе и времена представља импулс. Он се још може рачунати као и:

$$I = F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \quad (10)$$

стим да сила и брзина представљају векторе, тако да је логично закључити да импулс има правац, смер и интезитет. Δv представља промену брзине која се рачуна по следећој формули:

$$\Delta v = v' - v \quad (11)$$

У одређеном тренутку судара, тачније при максималној деформацији, у тачки контакта јавља се непозната брзина која се може обележити са v_c . Ова брзина се може сматрати да је једнака нули уколико возило удара у баријеру.

Међутим ова брзина се у релацији (11) не користи, а разлог томе може се видети из релације (12):

$$\Delta v = v' - v_c + v_c - v \quad (12)$$

Уколико се релација (12) врати у релацију (10) добија се:

$$I = F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v = (m \cdot v' - m \cdot v_c) + (m \cdot v_c - m \cdot v) \quad (13)$$

То јест:

$$(F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}} = m \cdot v' - m \cdot v_c \quad (14)$$

$$(F \cdot \Delta t)_{\text{деформационо}} = m \cdot v_c - m \cdot v \quad (15)$$

узимајући у обзир да је први сабирак одскочни импулс, а други деформациони импулс у релацији (13), па се даље добија:

$$I = F \cdot \Delta t = (F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}} + (F \cdot \Delta t)_{\text{деформационо}} \quad (16)$$

Из свега овог произилази да је резултујући импулс једнак збиру деформационог и одскочног импулса.

У физици деформациони импулс је већи од резултујућег, међутим одскочни импулс (реституционо импулс) је супротан по правцу од деформационог тако да је релација (14) могућа. Иако се помиње раван судара, током стварног судара положај те равни се мења. Међутим њен положај је најбоље одредити на основу импулса, јер како смо већ рекли импулс је нормалан на ударну раван. Како је већ примећено да је раније у изразима коришћена брзина v_c , а која се до сада предпостављала да је непозната требало би је одредити. Ово је могуће урадити применом трећег Њутновог закона који говори да се приликом судара два тела јављају импулси истог правца и интензитета, а супротног смера. Самим тим закључује се, да су вредности ових импулса једнаке, стим да је једна позитивна, а друга негативна вредност што се може даље уочити:

$$I_1 = -I_2 \quad (17)$$

односно

$$F_1 \cdot \Delta t = -F_2 \cdot \Delta t \quad (18)$$

На основу овога можемо применити трећи Њутнов закон на обе фазе судара, то јест фазу компресије и фазу реституције:

$$\left(F_1 \cdot \Delta t \right)_{\text{одскочно}} = - \left(F_2 \cdot \Delta t \right)_{\text{одскочно}} \quad (19)$$

$$\left(F_1 \cdot \Delta t \right)_{\text{деформацио}} = - \left(F_2 \cdot \Delta t \right)_{\text{деформацио}} \quad (20)$$

Ако импулсе из претходних релација изразимо преко масе и брзине за фазу реституције се добија следеће:

$$m_1 \cdot v_1' - m_1 \cdot v_{1c} = - (m_2 \cdot v_2' - m_2 \cdot v_{2c}) \quad (21)$$

и за фазу деформације истим принципом се добија:

$$m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_{1c} = - (m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_{2c}) \quad (22)$$

Из претходне две релације види се да брзина v_c и за једно и за друго тело могу разликовати. То се најбоље може објаснити решавањем претходне две релације у фази реституције и деформације. Односно добија се да ова брзина за прво тело у фази реституције износи:

$$v_{1c} = \frac{m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' - m_2 \cdot v_{2c}}{m_1} \quad (23)$$

и за фазу деформације следи:

$$v_{1c} = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_{2c}}{m_1} \quad (24)$$

Изједначавањем релација (23) и (24) и сређивањем добија се следеће:

$$\frac{m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' - m_2 \cdot v_{2c}}{m_1} = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_{2c}}{m_1}$$

$$m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' - \cancel{m_2 \cdot v_{2c}} = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - \cancel{m_2 \cdot v_{2c}}$$

$$m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \quad (25)$$

Када се ради о дводимизалном, односно раванском судару кинетичку дефиницију карактерише судар само дуж једне линије, односно линија судара. Наравно у стварном судару два возила карактерише то што се судар дешава не

само по једној линији, већ по неком одређеном облику. Међутим у поменутом случају посматрају се једноставнији пример где се све дешава у равни тако да и сила и брзине могу имати по две компоненте и то по нормали и тангенти, односно:

$$F = (F_n, F_t) \quad (26)$$

$$v = (v_n, v_t) \quad (27)$$

стим да индекси n и t означавају по којој се оси налазе неке од ових компонената.

Као што је већ речено све пређашње компоненте при одређивању коефицијента реституције се гледају у правцу нормале. Тако да ако се релације (14) и (15) убацују у релацију (9), под претпоставком да су брзине по нормали, добија се следеће:

$$k = \frac{m \cdot v'_n - m \cdot v_{nc}}{m \cdot v_{nc} - m \cdot v_n} \quad (28)$$

а ради лакшег рачуна:

$$k = \frac{v'_1 - v_c}{v_c - v_1} \quad (28')$$

Како би се лакше одредила брзину v_{1c} и v_{2c} које карактеришу у релацијама (23) и (24), изједначиће се са v_c , и применом релације (23) добиће се следеће:

$$v_c = \frac{m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 - m_2 \cdot v_c}{m_1} \quad / \cdot m_1$$

$$m_1 \cdot v_c = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 - m_2 \cdot v_c \quad / + m_2 \cdot v_c$$

$$m_1 \cdot v_c + m_2 \cdot v_c = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2$$

$$v_c \cdot (m_1 + m_2) = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 \quad / \frac{1}{m_1 + m_2}$$

$$v_c = \frac{m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2}{m_1 + m_2} \quad (29)$$

и у случају деформације из релације (24) добија се следеће:

$$v_c = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_c}{m_1} \quad / \cdot m_1$$

$$m_1 \cdot v_c = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_c \quad / + m_2 \cdot v_c$$

$$m_1 \cdot v_c + m_2 \cdot v_c = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$$

$$v_c \cdot (m_1 + m_2) = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \quad / \frac{1}{m_1 + m_2}$$

$$v_c = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad (30)$$

Ако релације (29) и (30) убаце у израз (28'), добиће се следеће:

$$k = \frac{v_1' - v_c}{v_c - v_1}$$

$$k = \frac{v_1' - \frac{m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'}{m_1 + m_2}}{\frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} - v_1}$$

$$k = \frac{\frac{m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' - m_1 \cdot v_1' - m_2 \cdot v_2'}{m_1 + m_2}}{\frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_1}{m_1 + m_2} - v_1}$$

$$k = \frac{m_2 \cdot v_1' - m_2 \cdot v_2'}{m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_1}$$

$$k = \frac{v_1' - v_2'}{v_2 - v_1} \quad (31)$$

2.1.3 Енергетска дефиниција коефицијента реституције

2000-те године W. J. Stronge промовисао је књигу у којој је коефицијент реституције дефинисао преко радова које изврше нормалне силе током судара. Ово је познато као Стронгова хипотеза и математички је изражена као [6]:

$$k^2 = - \frac{A_{\text{одскочно}}}{A_{\text{деформационо}}} \quad (33)$$

где је:

$$A_{\text{одскочно}} = A_{1\text{одскочно}} + A_{2\text{одскочно}} \quad (34)$$

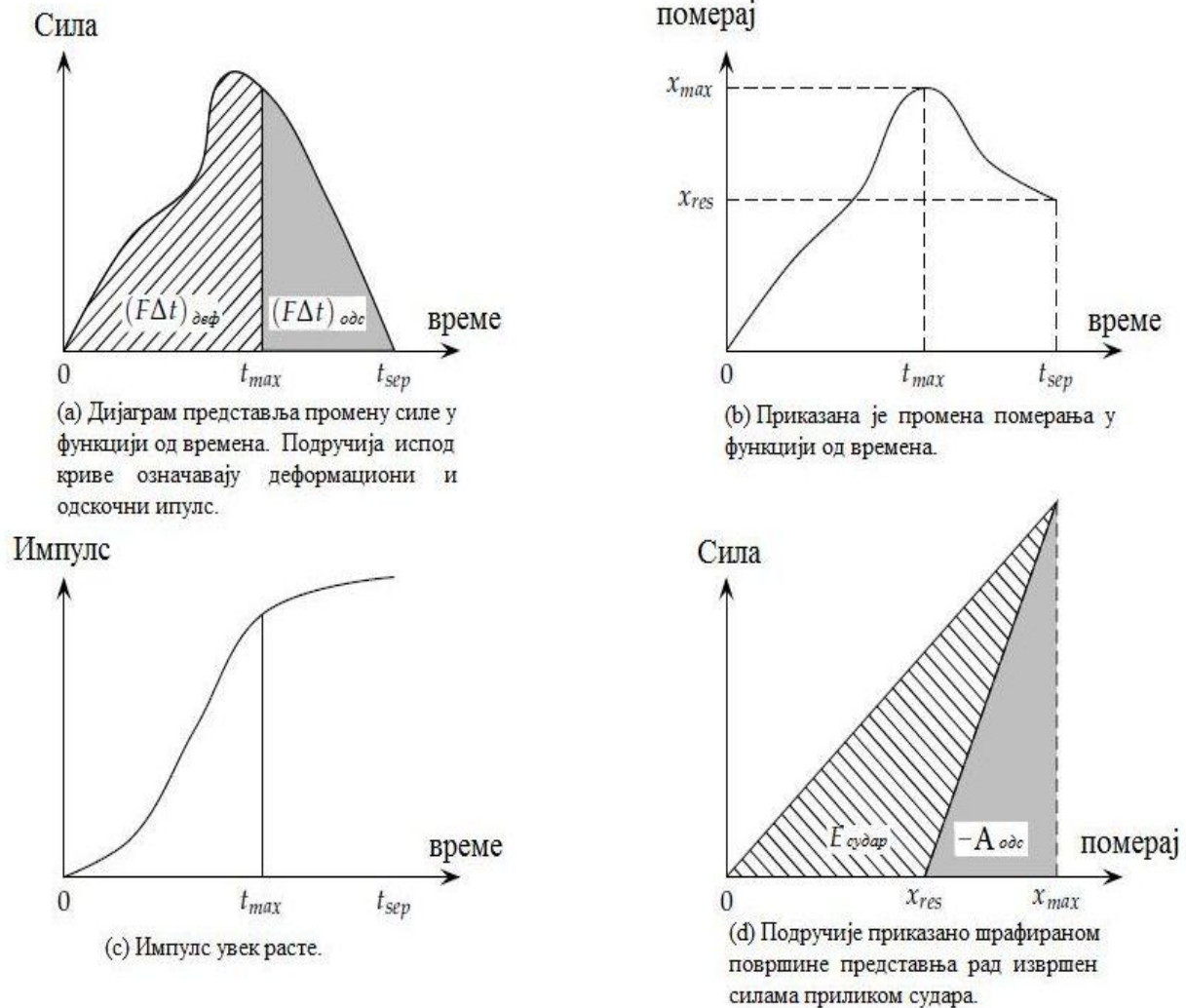
може се приметити да је реституциони рад једнак збиру реституционих радова једног и другог возила. Стим да се подразумева да се оба рада добијају од нормалних сила током реституционе фазе приликом судара.

Слично томе добија се следећи израз:

$$A_{\text{деформационо}} = A_{1\text{деформационо}} + A_{2\text{деформационо}} \quad (35)$$

стим да је овом релацијом показано да је деформациони рад једнак збиру деформационих радова првог и другог возила, приликом фазе деформације у тренутку судара. Према овој дефиницији захтева се да објекти, односно у овом случају возила буду деформабилна тела. У механици, деформабилна тела представљају она тела која мењају свој облик и/или запремину када на њих делује нека спољашња сила. Међутим овај услов не представља неко ограничење, зато што су у стварности сва тела и јесу деформабилна до неке границе.

Енергија која је потребна да се изврши рад помоћу нормалних сила у ударној равни једнака је кинетичкој енергији која се добија преко брзина у ударној равни. Како би се лакше разумела веза између рада, енергије, импулса, брзине, силе и времена најбоље је посматрати слику 3, која показује низ дијаграма на којима се виде зависности ових величина.



Слика 3: Илустрација веза између рада, енергије, импулса, брзине, силе и времена

Рад који је извршен на основу деформационе силе може се одредити формулом:

$$A_{\text{деформационо}} = \int_0^{x_{\max}} F(x) dx \quad (36)$$

који се може графички приказана на слици 3(d). Уколико се искористи модел опруге који има линеарну карактеристику, што значи да је:

$$F(x) = c \cdot x \quad (37)$$

и ако се овај израз искористи у релацији (36), добија се:

$$\begin{aligned}
 A_{\text{деформацио}} &= \int_0^{x_{\max}} c \cdot x dx \\
 A_{\text{деформацио}} &= c \int_0^{x_{\max}} x dx \\
 A_{\text{деформацио}} &= c \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_{\max}} \\
 A_{\text{деформацио}} &= c \cdot \frac{1}{2} \cdot (x_{\max}^2 - 0) \\
 A_{\text{деформацио}} &= c \cdot \frac{1}{2} \cdot x_{\max}^2
 \end{aligned} \tag{38}$$

истим принципом може се одредити и рад који се утроши на фазу реституције, посматрајући слику 3(d), добија се следеће:

$$A_{\text{одскочно}} = \int_{x_{\max}}^{x_{\text{res}}} F(x) dx \tag{39}$$

Но како је $x_{\max}$ веће од x_{res} окрећу се границе интеграла, па је:

$$A_{\text{одскочно}} = - \int_{x_{\text{res}}}^{x_{\max}} F(x) dx \tag{40}$$

Уколико се као и мало пре посматра за опругу где се такође користи релација (37):

$$\begin{aligned}
 A_{\text{одскочно}} &= - \int_{x_{\text{res}}}^{x_{\max}} c \cdot x dx \\
 A_{\text{одскочно}} &= - c \int_{x_{\text{res}}}^{x_{\max}} x \cdot dx \\
 A_{\text{одскочно}} &= - c \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x_{\text{res}}}^{x_{\max}}
 \end{aligned}$$

$$A_{\text{одскочно}} = -c \cdot \frac{1}{2} \cdot (x_{\text{max}}^2 - x_{\text{res}}^2) \quad (41)$$

Релација (41) представља формулу којом се израчунава осенчена површина на слици 3(d). Рад се још може израчунати користећи везе које је увео Poisson:

$$A = \int F \cdot v dt$$

$$A = v \int F dt$$

$$A = v \cdot F \cdot \Delta t \quad (42)$$

Релација (42) показује да је рад једнак производу брзине и импулса. Уколико се искористи релација (42) најпре у релацијама (34) и (35) које се затим убацују у релацију (33), то јест у формулу за израчунавање енергетског коефицијента реституције добиће се следеће:

$$\begin{aligned} A_{\text{одскочно}} &= v_1 \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}} + v_2 \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}} \\ A_{\text{деформационо}} &= v_1 \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{деформационо}} + v_2 \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{деформационо}} \\ k^2 &= - \frac{v_1 \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}} + v_2 \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}}}{v_1 \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{деформационо}} + v_2 \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{деформационо}}} \end{aligned} \quad (43)$$

Познато је из физике да се брзина може написати као:

$$v = a \cdot \Delta t \quad (44)$$

где је:

a - убрзање

Стим да је опште познато по другом Њутновом закону да је сила једнака производу масе и убрзања, односно:

$$F = m \cdot a \quad (45)$$

из чега следи да је:

$$a = \frac{F}{m} \quad (46)$$

Ако релацију (46) се убаци назад у релацију (44), добија се следеће:

$$v = \frac{F \cdot \Delta t}{m} \quad (47)$$

Када је ово урађено релација (47) враћа се у релацију (43), стим да су брзине приликом реституције супротног знака од брзина приликом компресије па се губи знак минус испред разломка и добија се следеће:

$$k^2 = \frac{\frac{(F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}}}{m_1} \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}} + \frac{(F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}}}{m_2} \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}}}{\frac{(F \cdot \Delta t)_{\text{деформацио}}}{m_1} \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{деформацио}} + \frac{(F \cdot \Delta t)_{\text{деформацио}}}{m_2} \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{деформацио}}}$$

$$k^2 = \frac{\frac{1}{m_1} \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}}^2 + \frac{1}{m_2} \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}}^2}{\frac{1}{m_1} \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{деформацио}}^2 + \frac{1}{m_2} \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{деформацио}}^2}$$

$$k^2 = \frac{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}}^2}{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cdot (F \cdot \Delta t)_{\text{деформацио}}^2}$$

$$k^2 = \frac{(F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}}^2}{(F \cdot \Delta t)_{\text{деформацио}}^2}$$

$$k = \sqrt{\frac{(F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}}^2}{(F \cdot \Delta t)_{\text{деформацио}}^2}}$$

$$k = \frac{(F \cdot \Delta t)_{\text{одскочно}}}{(F \cdot \Delta t)_{\text{деформационо}}} \quad (48)$$

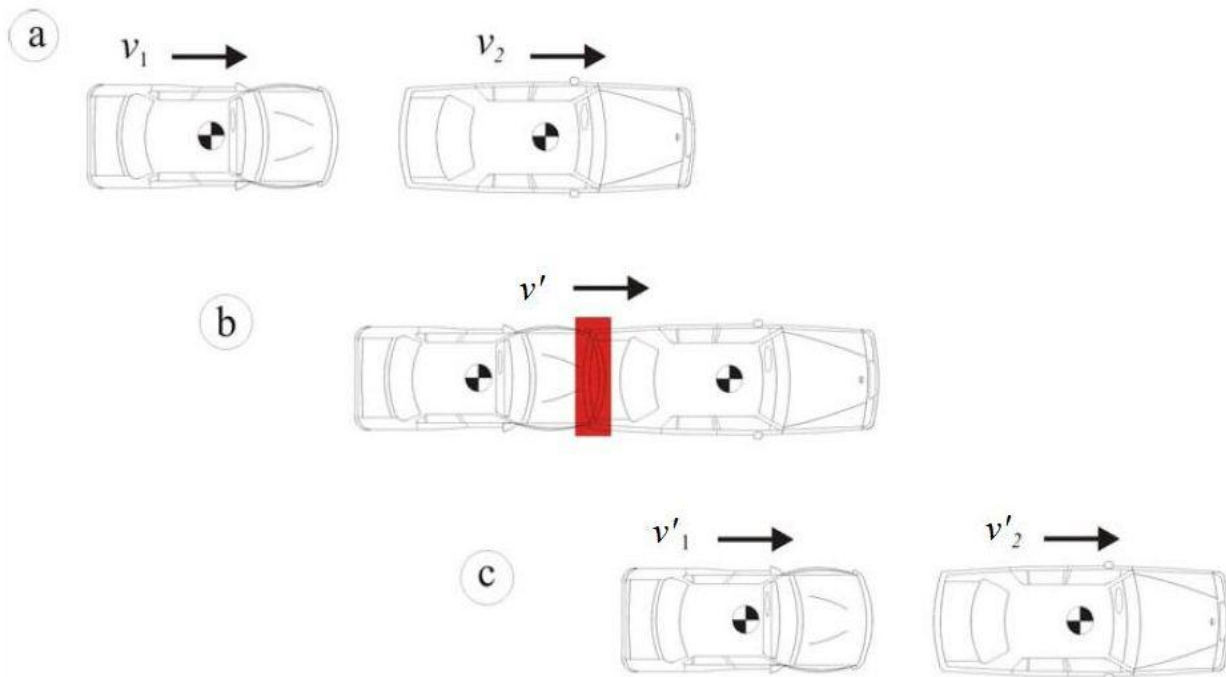
Види се да се релација (48) поклапа са релацијом (9), односно са кинетичким коефицијентом реституције што показује да је извођење добро.

2.2 Одређивање коефицијента реституције

приликом судара два возила

Ради одређивања коефицијента реституције приликом задњг судара два возила, најбоље је посматрати слику 4. Са слике 4, виде се три фазе и то:

- а) Возила пре судара v_1 и v_2 (pre-crash фаза)
- б) Возила у току судара – крај компресије v' (crash фаза)
- с) Возила после судара v'_1 и v'_2 (post-crash фаза)



Слика 4: Задњи судар два возила [4]

Како би судар уопште био могућ мора бити задовољен следећи услов:

$$v_1 > v_2$$

Приликом судара ова два возила јављају се силе које се повинују другом и трећем Њутновом закону. Формуле за ове две силе гласе:

$$m_1 \cdot \frac{dv_1}{dt} = -F \quad (49)$$

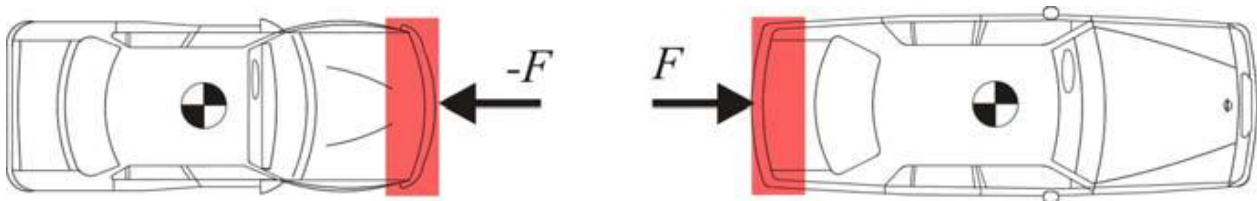
$$m_2 \cdot \frac{dv_2}{dt} = F \quad (50)$$

где су:

m_1 - маса возила 1

m_2 - маса возила 2

F - сила која се јавља у контакту судара ова два возила, што се види на слици 5



Слика 5: Трећи Њутнов закон

Према Poisson-новој хипотези судар се врши у две фазе и то:

- Фаза компресије
- Фаза реституције

Током фазе компресије сила на контакту судара расте и возила се деформишу. Фаза компресије се завршава када нестану долазне брзине, то јест возила имају једнаку брзину v' . Ову фазу карактерише компресиони импулс, који се добија следећом формулом:

$$m_1 \cdot (v' - v_1) = -I_c \quad (51)$$

и

$$m_2 \cdot (v' - v_2) = I_c \quad (52)$$

Компресиони импулс може се рачунати још и по формули:

$$I_c = \int_0^{t_c} F dt \quad (53)$$

t_c - време трајања компресије

Ако се изједначе релације (51) и (52), добиће се израз за брзину на крају компресије, односно брзину која је једнака за оба возила:

$$\begin{aligned} -I_c &= I_c \\ -m_1 \cdot (v' - v_1) &= m_2 \cdot (v' - v_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-m_1 \cdot \dot{v} + m_1 \cdot v_1 &= m_2 \cdot \dot{v} - m_2 \cdot v_2 \\
-m_1 \cdot \dot{v} - m_2 \cdot \dot{v} &= -m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 \quad / \cdot (-1) \\
m_1 \cdot \dot{v} + m_2 \cdot \dot{v} &= m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \\
\dot{v} \cdot (m_1 + m_2) &= m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \quad / \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \\
\dot{v} &= \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad (54)
\end{aligned}$$

Ако се релација (54) врати у релацију (52), добиће се:

$$\begin{aligned}
m_2 \cdot \left(\frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} - v_2 \right) &= I_c \\
m_2 \cdot \frac{m_1 \cdot v_1 + \cancel{m_2 \cdot v_2} - m_1 \cdot v_2 - \cancel{m_2 \cdot v_2}}{m_1 + m_2} &= I_c \\
m_2 \cdot \frac{m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_2}{m_1 + m_2} &= I_c \\
\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) &= I_c \quad (55)
\end{aligned}$$

Када је ово завршено може се почети са одређивањем једначина за фазу реституције. Импулси реституције једног и другог тела могу се дибити по следећим формулама:

$$m_1 \cdot (v_1' - v') = -I_r \quad (56)$$

и

$$m_2 \cdot (v_2' - v') = I_r \quad (57)$$

Реституциони импулс се може добити још и по формули:

$$I_r = \int_{t_c}^{t_r} F dt \quad (58)$$

t_r - време реституције

Како би се решио коефицијент реституције може се позвати на Poisson-ову хипотезу која је раније спомињана у кинетичкој дефиницији коефицијента реституције, и која показује да је коефицијент реституције једнак односу одскочног и деформационог импулса, односно реституционог и компресионог, што се краће може записати:

$$k = \frac{I_r}{I_c} \quad (59)$$

а из релације (59) следи да је:

$$I_r = k \cdot I_c \quad (60)$$

а затим се компресиони импулс замени релацијом (55), и добиће се:

$$I_r = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) \quad (61)$$

Како сада постоји релација за компресиони и реституциони импулс, може се добити резултујући импулс као збир ова два:

$$\begin{aligned} I &= I_r + I_c \\ I &= k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) + \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \\ I &= (k+1) \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) \\ I &= (k+1) \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \Delta v \end{aligned} \quad (62)$$

где је:

$\Delta v = (v_1 - v_2)$ - релативна брзина

Када је ово одрађено могу се одредити брзине након судара применом релација (54), (55) и (56) које се убацују у релацију (60), одатле следи да је:

$$\begin{aligned} -m_1 \cdot (v_1' - v_1) &= k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) \\ -m_1 \cdot v_1' + m_1 \cdot v_1 &= k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) \\ -m_1 \cdot v_1' + m_1 \cdot \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} &= k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) \\ -m_1 \cdot v_1' &= k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) - m_1 \cdot \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \\ -v_1' &= k \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) - \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \\ -v_1' &= k \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 - k \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 - \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \\ -v_1' &= k \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 - k \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 - \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 \cdot v_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \\ -v_1' &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \cdot (k+1) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \cdot (k+1) - \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-v_1' &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \cdot (k+1) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \cdot (k+1) - \frac{v_1 \cdot (\cancel{m_1 + m_2})}{\cancel{m_1 + m_2}} \\
-v_1' &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \cdot (k+1) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \cdot (k+1) - v_1 \\
-v_1' &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (k+1) \cdot (v_1 - v_2) - v_1 \quad / \cdot (-1) \\
v_1' &= v_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (k+1) \cdot (v_1 - v_2) \\
v_1' &= v_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (k+1) \cdot \Delta v \tag{63}
\end{aligned}$$

Као у претходном, истим принципом добиће се и за возило 2, применом (54), (55) и (57) које се убацију такође у релацију (60), одатле следи да је:

$$\begin{aligned}
m_2 \cdot (v_2' - v_2) &= k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) \\
m_2 \cdot v_2' - m_2 \cdot v_2 &= k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) \\
m_2 \cdot v_2' - m_2 \cdot \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} &= k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) \\
m_2 \cdot v_2' &= k \cdot \frac{m_1 \cdot \cancel{m_2}}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) + \cancel{m_2} \cdot \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \\
v_2' &= k \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) + \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \\
v_2' &= k \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + k \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 + \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \\
v_2' &= k \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + k \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 + \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 \cdot v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \\
v_2' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \cdot (k+1) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \cdot (k+1) + \frac{m_1 \cdot v_2 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \\
v_2' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \cdot (k+1) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \cdot (k+1) + \frac{v_2 \cdot (\cancel{m_1 + m_2})}{\cancel{m_1 + m_2}} \\
v_2' &= v_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) \cdot (k+1)
\end{aligned}$$

$$v_2' = v_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (k+1) \cdot \Delta v \quad (64)$$

Релације (63) и (64) приказују формуле за одређивање брзина после судара под условом да су познате следеће компоненте:

- Брзине пре судара
- Маса возила
- Коефицијент реституције

Међутим како је суштина овог рада одређивање коефицијента реституције, претпоставља се да је он непознат па га је потребно одредити.

Први начин који се може искористити ради одређивања, јесте посматрање кинетичке енергије приликом судара. Уопштено на самом почетку посматра ће се кинетичка енергија на крају фазе компресије, и може се написати да је:

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v'^2}{2} + \Delta E_m \quad (65)$$

ΔE_m - максимална кинетичка енергија која се изгуби при деформацијама

Ако се у релацији (65) искористи релација (54) добија се следеће:

$$\begin{aligned} \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} &= \frac{(m_1 + m_2)}{2} \cdot \left(\frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + \Delta E_m \\ \Delta E_m &= \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)}{2} \cdot \left(\frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \\ \Delta E_m &= \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \frac{m_1^2 \cdot v_1^2 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1 \cdot m_2 \cdot v_2 + m_2^2 \cdot v_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \\ \Delta E_m &= \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1^2 \cdot v_1^2}{m_1 + m_2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot m_1 \cdot v_1 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2^2 \cdot v_2^2}{m_1 + m_2} \\ \Delta E_m &= \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1^2 \cdot v_1^2}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot v_1^2}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2^2 \cdot v_2^2}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot v_2^2}{m_1 + m_2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1^2 \cdot v_1^2}{m_1 + m_2} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot m_1 \cdot v_1 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2^2 \cdot v_2^2}{m_1 + m_2} \\ \Delta E_m &= \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot v_1^2 + m_1 \cdot m_2 \cdot v_2^2 - 2 \cdot m_1 \cdot v_1 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot (v_1^2 - 2 \cdot v_1 \cdot v_2 + v_2^2)}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2)^2$$

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \Delta v^2 \quad (66)$$

Слично као и до сада, тачније према релацији (65) може се написати израз за кинетичку енергију током судара:

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{m_1 \cdot v_1'^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2'^2}{2} + \Delta E \quad (67)$$

ΔE - укупна изгубљена енергија током судра

Ако се у релацију (67) убаце изрази за брзине после судара, односно релације (63) и (64) добиће се:

$$\Delta E = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} - \frac{m_1 \cdot v_1'^2}{2} - \frac{m_2 \cdot v_2'^2}{2}$$

$$\Delta E = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} - \frac{m_1}{2} \cdot \left(v_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (k + 1) \cdot (v_1 - v_2) \right)^2 +$$

$$+ \frac{m_2}{2} \cdot \left(v_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (k + 1) \cdot (v_1 - v_2) \right)^2$$

$$\Delta E = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} - \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1}{2 \cdot (m_1 + m_2)} \cdot (k + 1) \cdot (v_1 - v_2) -$$

$$- \frac{m_1 \cdot m_2^2}{2 \cdot (m_1 + m_2)^2} \cdot (k + 1)^2 \cdot (v_1 - v_2)^2 - \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} - \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_2}{2 \cdot (m_1 + m_2)} \cdot (k + 1) \cdot (v_1 - v_2) -$$

$$- \frac{m_1^2 \cdot m_2}{2 \cdot (m_1 + m_2)^2} \cdot (k + 1)^2 \cdot (v_1 - v_2)^2$$

$$\Delta E = \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1}{2 \cdot (m_1 + m_2)} \cdot (k + 1) \cdot (v_1 - v_2) - \frac{m_1 \cdot m_2^2}{2 \cdot (m_1 + m_2)^2} \cdot (k + 1)^2 \cdot (v_1 - v_2)^2 -$$

$$- \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_2}{2 \cdot (m_1 + m_2)} \cdot (k + 1) \cdot (v_1 - v_2) - \frac{m_1^2 \cdot m_2}{2 \cdot (m_1 + m_2)^2} \cdot (k + 1)^2 \cdot (v_1 - v_2)^2$$

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left[2 \cdot v_1 \cdot (k+1) \cdot (v_1 - v_2) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (k+1)^2 \cdot (v_1 - v_2)^2 - \right. \\
&\quad \left. - 2 \cdot v_2 \cdot (k+1) \cdot (v_1 - v_2) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (k+1)^2 \cdot (v_1 - v_2)^2 \right] \\
\Delta E &= \frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left[2 \cdot (k+1) \cdot (v_1 - v_2) \cdot (v_1 - v_2) - \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \cdot (k+1)^2 \cdot (v_1 - v_2)^2 \right] \\
\Delta E &= \frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left[2 \cdot (k+1) \cdot (v_1 - v_2)^2 - (k+1)^2 \cdot (v_1 - v_2)^2 \right] \\
\Delta E &= \frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \Delta v^2 \cdot [2 \cdot k + 2 - k^2 - 2k - 1] \\
\Delta E &= \frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \Delta v^2 (1 - k^2) \tag{68}
\end{aligned}$$

Коефицијент реституције може се добити на следећи начин, тако што у једначину (68) убаци релација (66):

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \Delta E_m (1 - k^2) \\
1 - k^2 &= \frac{\Delta E}{\Delta E_m} \\
-k^2 &= \frac{\Delta E}{\Delta E_m} - 1 \quad / \cdot (-1) \\
k^2 &= 1 - \frac{\Delta E}{\Delta E_m} \\
k &= \sqrt{1 - \frac{\Delta E}{\Delta E_m}} \tag{69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k &= \sqrt{\frac{\Delta E_m + \Delta E}{\Delta E_m}} \\
k &= \sqrt{\frac{\Delta E_0}{\Delta E_m}} \tag{70}
\end{aligned}$$

где је:

$\Delta E_0 = \Delta E_m + \Delta E$ - реституциона енергија

2.3 Одређивање коефицијента реституције

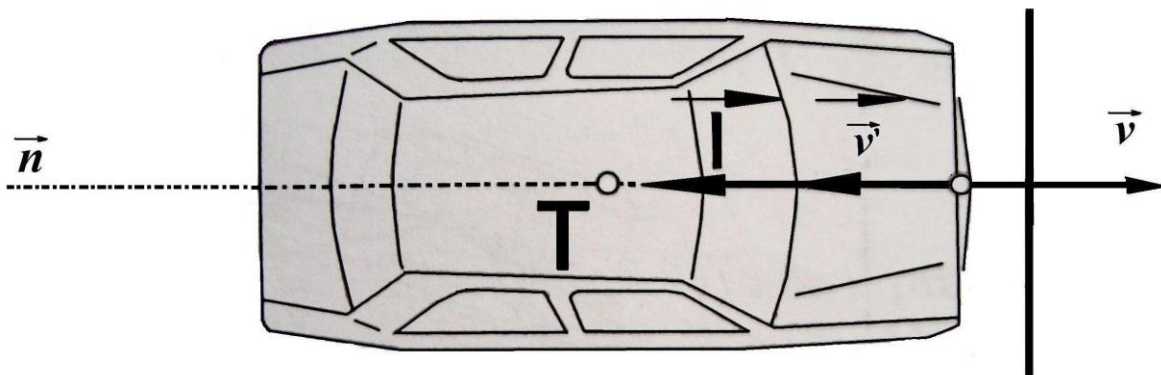
приликом удара возила у баријеру

Баријера представља непомичну и недеформабилну препреку која има масу много већу од масе објекта, у овом случају возила, које у њу удара. Такође, баријера има много веће димензије од возила [5].

Као и до сада када су у питању судар два возила, тако и када је у питању удар возила у баријеру коефицијент реституције се рачуна као однос брзине на крају судара (брзина којом се возило одбија од баријере) и брзине на почетку судара (брзина којом возило удара у баријеру).

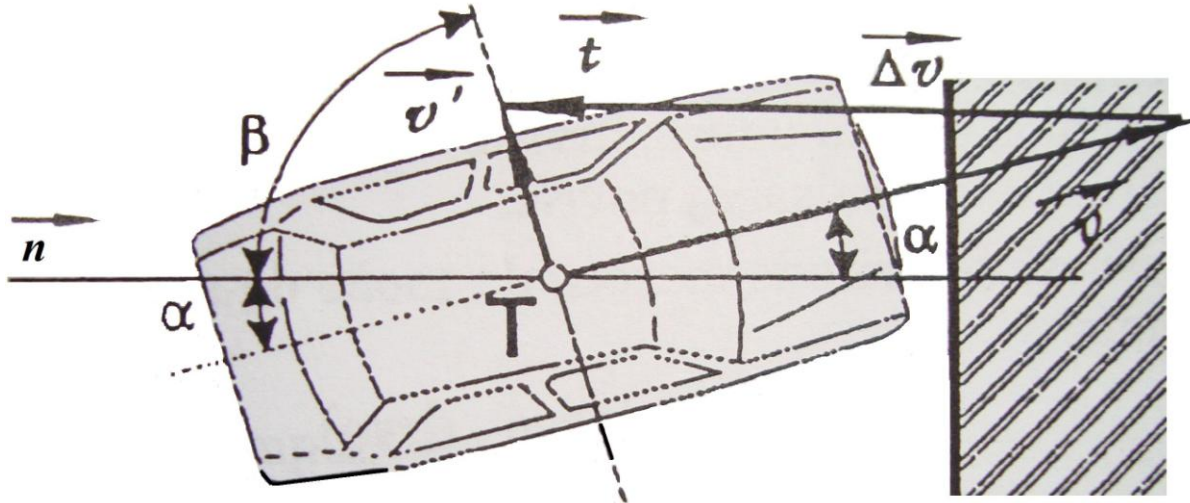
Уколико је у питању прав удар возила у баријеру, као што је приказано на слици 6, коефицијент реституције се рачуна као у релацији (4). Чешће се користи следећи облик поменуте релације:

$$k = -\frac{v'}{v} \quad (71)$$



Слика 6: Прав удар возила у баријеру

Даље се може видети удар возила у баријеру под углом, што је приказано на слици 7. Коефицијент реституције се овде дефинише као однос нормалних компоненти релативних брзина на крају удара и на почетку удара. На слици може се видети да нормала заклапа угао α са долазном брзином, а угао β са одлазном брзином.



Слика 7: Удар возила у баријеру под углом

Компоненте брзина у правцу нормале на почетку и на крају судара су:

$$v_n = v \cdot \cos \alpha \quad (72)$$

$$v'_n = -v' \cdot \cos \beta \quad (73)$$

Уколико би се занемарило трење приликом удара возила у баријеру, онда је:

$$v_t = v'_t \quad (74)$$

односно:

$$v \cdot \sin \alpha = v' \cdot \sin \beta \quad (75)$$

и одавде би се могло изразити v' :

$$v' = v \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (75')$$

$$I_t = 0 \quad (76)$$

$$I = I_n \quad (77)$$

коэффициент реституције је:

$$k = -\frac{v'_n}{v_n} \quad (78)$$

У релацију (78) убаци се (72) и (73):

$$k = -\frac{-\dot{v} \cdot \cos \beta}{v \cdot \cos \alpha}$$

$$k = \frac{\dot{v} \cdot \cos \beta}{v \cdot \cos \alpha}$$

затим се у овај израз убаци релација (75') и то ће даље бити:

$$k = \frac{\cancel{v} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \cos \beta}{\cancel{v} \cdot \cos \alpha}$$

$$k = \frac{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \cos \beta}{\cos \alpha}$$

$$k = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}}$$

$$k = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \quad (79)$$

Уколико се не би занемарило трење, онда би постојао коефицијент реституције и у правцу тангенте и он би се добио на сличан начин као и у правцу наормале, што се може даље видети.

$$k_t = -\frac{\dot{v}_t}{v_t} \quad (80)$$

Закључак

При судару два тела у овом случају возила, видело се да судар може бити потпуно пластичан или потпуно еластичан. Ово су у ствари гранични случајеви, који се јављају само у теорији, али то није случај у пракси. У пракси се углавном јавља трећи случај еласто-пластичан судар. За прва два који се јављају само у теорији коефицијент реституције дефинисан је коначним вредностима које износе 1 – за еластичан судар и 0 – за пластичан судар. Самим тим може се закључити да се у случају еласто-пластичног судара коефицијент реституције креће негде између претходно две наведене вредности.

Као што је било могуће видети коефицијент реституције, иначе увек представља позитивну вредност, иако се у неким формулама за његово израчунавање јавља знак минус као знак испред бројних вредности. Првенствено се мисли на Њутнову формулу за израчунавање коефицијента реституције. У случају ове формуле коефицијент реституције је једнак односу одлазних и долазних брзина, односно брзина којима тела одлазе после судара и брзине којима прилазе пре судара. Поменуте брзине су по природи супротних смерова једне од других, што би довело до негативне вредности приликом њиховог дељења. Превасходно томе поставља се знак минус на самом почетку како би довео до позитивне вредности коефицијента реституције, јер као што је већ речено он се може кретати у вредностима од $0 \div 1$, што значи да ни у ком случају не може бити негативан.

Иначе овај коефицијент представља меру еластичности судара, односно показује да ли ће се тела приликом судара одвојити једно од другог или не. Тако да су дефиниције коефицијента реституције логичне када се у њима поставља однос одређених компоненти. Под тиме се мисли на три дефиниције које су дате и то:

- Кинематска дефиниција коефицијента реституције
- Кинетичка дефиниција коефицијента реституције
- Енергетска дефиниција коефицијента реституције

Сама логичност састоји се у томе што компоненте чији се однос посматра представљају однос компонената под којим се возила одвајају једно од другог, и компонената под којима се возила спајају. Логика и принцип рада је исти, једино се од дефиниције до дефиниције разликује само да ли су у питању:

- Брзина
- Импулс
- Рад

Све до сада односило се на опште израчунавање коефицијента реституције различитим методама, и на самом крају још је показано принцип израчунавања приликом судара два возила, као и приликом удара возила у баријеру.

Коефицијент реституције представља бездимензионалну јединицу, која се прорачунава ради одређивања еластичности судара између два тела. Приликом судара возила коефицијент реституције описује колика количина енергије је утрошена на пластичну, а колика на еластичну деформацију возила.

Литература

- [2] Mr. Horwat's Science Pages, Интернет адреса:
<http://horwat.wicomico.wikispaces.net/file/view/Lab+18+-+Coefficient+of+restitution.pdf>,
приступљено 07.07.2013.
- [3] Jackson Hole Scientific Investigations, Inc., Интернет адреса:
<http://www.jhscientific.com/downloads/CrushAndRestitution.pdf>, приступљено
07.07.2013.
- [4] Cornell University Library, Интернет адреса:
<http://arxiv.org/vc/physics/papers/0601/0601168v1.pdf>, приступљено 08.07.2013.
- [5] Јанковић, А., Симић Д.: Безбедност аутомобила, Крагујевац, 1996.
- [6] W. J. Stronge, Impact Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [7] Brach Raymond M., R. Matthew Brach: Vehicle accident analysis and reconstruction methods, SAE R-311, 2005.
- [8] Cliff W. E., A. Moser: Reconstruction of twenty staged collisions with PC-crash's optimizer, SAE 2001-01-0507.
- [9] Limpert, R.: Motor vehicle accident reconstruction and cause analysis, Fifth Edition Lexis Publishing, 1999.
- [10] McHenry, R., McHenry B.: McHenry accident reconstruction, McHenry Software 2000.
- [11] Папић, З.: Анализа савремених метода и могућности њихове примене за утврђивање сударних брзина код експертиза чеоних судара аутомобила, Магистарски рад, ФТН, Нови Сад, 1998.