

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Мастер академске студије

Модул: Примењена механика и аутоматско управљање

Предмет: Механика композитних материјала

Број индекса: 406/2014

Стеван З. Миловановић

**Еластично понашање ортотропних
композитних материјала**

Мастер рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Др Гордана Богдановић,

ванредни професор - ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог мастер рада кандидат треба да:

У оквиру дефинисане теме потребно је да проучи литературу која се односи на композитне материјале, са посебним освртом на еластично понашање композитних материјала. Посебан акценат треба ставити на ортотропне еластичне материјале и начине формирања крутости ових материјала. Такође је значано да се проучи и ваносно понашање композитних материјала. Очекује се да се кандидат у раду бави и раванским напонским стањем ових материјала, са евентуалном применом на конкретан пример.

Препоручена литература:

- [1] J.M.Berthelot, *Mechanics of composite materials and structures*, Vallouise 2015
- [2] Ивица Смојвер, *Механика композитних материјала*, Универзитет у Загребу 2007.
- [3] Момчило Стевановић, *Влакнима ојачани полимерни композити*, Партенон, Београд, 2002.

Крагујевац, 27.08.2019.

Ментор:
Др Гордана Богдановић, ванредни професор

Резиме

Композитни материјали спадају у вишефазне материјале, који имају значајно боље физичке особине од конституената и које се значајно међусобно разликују. У оквиру рада на самом почетку су приказане основне карактеристике, класификација и саставни елементи композитних материјала. Предмет овог рада су ортотропни композитни материјали, у оквиру којих је обрађен и случај трансферзалног изотопа (једнодирекционог материјала). Ламинати могу да се састоје од ортотропних слојева, па су укратко дате и основне карактеристике ламината. Такође је познато да су ортотропни слојеви анизотропни, па су приказане класе материјалне симетрије и изведене матрице крутости и попустљивости, како би се описало еластично понашање ових материјала. Поред анализе еластичног понашања у случају када се правци влакана поклапају са координатним системом слоја, описано је и ваносно понашање материјала, у оквиру којег је приказано раванско напонско стање, изведена редукована матрица крутости и на примеру објашњено раванско напонско стање слоја.

Кључне речи: композитни материјали, ортотропни слојеви, матрица крутости и попустљивости, ваносно понашање, редукована матрица крутости.

Abstract

Composite materials are polyphase materials that have significantly better physical properties than components and that are significantly different from one another. The basic characteristics, classification and constituent elements of composite materials are presented at the begin of this paper. The subject of this paper is orthotropic composite materials, which also deal with the case of transversal isotope (unidirectional material). Laminates can consist of orthotropic layers, so the basic characteristics of laminates are briefly given. The orthotropic layers are also known to be anisotropic, so the classes of material symmetry and defined stiffness and compliance matrices are presented to describe the elastic behavior of these materials. In addition to the analysis of the elastic behaviour in the case where the fiber directions coincide with the coordinate system of the layer, an off-axis behavior of the material is described, which shows the state of plane stress, the reduced stiffness matrix, and the plane stress state of the layer is explained in the example.

Keywords: composite materials, orthotropic layers, stiffness and compliance matrix, off axis behavior, reduced stiffness matrix.

Садржај

Увод	1
1 Основни елементи композитних материјала	2
1.1 Дефиниција и карактеристике композита	2
1.2 Класификација композита.....	2
1.3 Одређивање особина композитног материјала	4
2 Саставни елементи композитних материјала	6
2.1 Влакна	6
2.1.1 Природна влакна	6
2.1.2 Стаклена влакна	7
2.1.3 Полиестерска влакна	8
2.1.4 Арамидна влакна.....	8
2.1.5 Угљенична влакна (Карбон)	8
2.1.6 Метална влакна	9
2.2 Матрица	10
2.2.1 Метални композити	10
2.2.2 Керамички композити	10
2.2.3 Полимерни композити.....	11
3 Структура композитних материјала.....	15
3.1 Ламинати.....	15
3.1.1 Означавање ламината	15
3.1.2 Подела ламината	17
4 Стање напона.....	20
4.1 Трансформације базних вектора.....	20
4.2 Тензор напона.....	22
4.3 Особине тензора напона.....	23
4.3.1 Физичко тумачење компоненти напона	23
4.3.2 Нормална и тангентна компонента вектора напона	24
4.3.3 Главни напони	25
4.3.4 Промена координатног система	25
4.4 Типична стања напона.....	27
4.4.1 Једноосно затезање или сабијање.....	27
4.4.2 Стање смицања.....	27
4.4.3 Равно стање напона.....	30

5 Еластично понашање анизотропних материјала	31
5.1 Тензор крутости и попустљивости.....	31
5.2 Промена координатног система	32
5.3 Врсте материјалне симетрије.....	33
5.4 Моноклинички материјали	34
6 Еластично понашање ортотропних композитних материјала	36
6.1 Конститутивне релације.....	36
6.2 Материјалне константе.....	37
6.2.1 Одређивање материјалних константи.....	37
6.2.2 Тестови једноосних затезања.....	38
6.2.3 Смицајни тестови.....	40
6.2.4 Матрица попустљивости изражена преко инжењерских константи	41
6.3 Трансферзално изотропни материјали.....	41
7 Ваносно понашање композитних материјала	44
7.1 Еластично понашање ваносних слојева.....	44
7.1.1 Матрица крутости и попустљивости	44
7.1.2 Матрице крутости и попустљивости као функције угла	48
7.1.3 Ефекат спрезања.....	49
7.2 Константе еластичности.....	51
7.2.1 Ваносни затезни тестови	51
7.2.2 Смицајни тестови.....	53
7.2.3 Варијације еластичних модула код једнодирекционих композита.....	55
7.3 Раванско напонско стање	57
7.3.1 Еластичне једначине код раванског стања	57
7.3.2 Редукована матрица крутости за правце влакана	59
7.3.3 Релације између ваносних и редукованих константи крутости за правце влакана	61
7.3.4 Анализа раванског напонског стања на примеру	62
7.4 Експериментално одређивање инжењерских константи	64
7.4.1 Лонгитудинални тест затезања.....	65
7.4.2 Трансферзални тест затезања	65
7.4.3 Ваносни тест затезања.....	66
Закључак	67
Литература	68

Увод

Због механичких и физичких недостатака које имају традиционални материјали, као и легуре, керамички материјали и полимери, кроз развој науке и инжењерства развијала се и потреба за новим материјалима, који би имали комбинацију пожељних својстава претходно наведених материјала. Као савремени пример могу да се наведу компоненте авионских конструкција, где се од материјала захтева мала густина, велика чврстоћа и велика крутост. Таква својства имају **композитни материјали (композити)**, који представљају комбинацију два или више материјала са различитим својствима у микро и/или макроскопској размери.

Композитни материјали се данас увелико користе у грађевинарству, бродоградњи и авиоиндустрији, а највећи број композита се развија и производи са циљем да се побољшају механичке особине, као што су крутост, чврстоћа, жилавост или високотемпературне карактеристике. Због своје мале густине и тежине у односу на велику механичку чврстоћу, као и мањих трошкова одржавања, ови материјали добијају све већу употребу у инжењерској пракси.

У овом мастер раду описано је еластично понашање композитних материјала, где је посебан фокус стављен на ортотропне композитне материјале, као и на њихово ваносно понашање.

У првом поглављу дати су дефиниција, основне карактеристике и класификација композитних материјала. У оквиру овог поглавља кратко је описано одређивање особина композитних материјала преко правила мешања, уз осврт на запремински и масени удео.

Друго поглавље описује саставне елементе композитних материјала – матрицу и ојачања – у овом случају влакна. Основне карактеристике влакана и матрице су приказане кроз поделе које су извршене према врсти материјала који могу сачињавати влакна и матрице.

У трећем поглављу приказана је структура композитних материјала као ламината уз посебан осврт на начин формирања, особине и класификацију.

Четврто поглавље дефинише тензор напона и његове особине, као и типична стања напона која се срећу у инжењерским проблемима.

Пето поглавље дефинише конститутивне еластичне релације анизотропних материјала, тензор крутости и врсте материјалне симетрије.

У шестом поглављу дате су конститутивне релације ортотропних композитних материјала, као и дефинисање матрице крутости преко еластичних константи и њихово добијање. Посебан акценат је стављен и на једнодирекционе (трансферзално-изотопне) композите.

У седмом поглављу приказано је ваносно понашање композитних материјала, добијање матрице крутости и попустљивости, као и добијање еластичних константи. Посебан осврт дат је на раванско напонско стање, као и на дефинисање редукване матрице крутости. На крају дат је пример у виду слоја ламината чија су влакна заокренута за 30 степени у односу на референтни систем ламината и дефинисање његовог напонског стања.

1 Основни елементи композитних материјала

1.1 Дефиниција и карактеристике композита

Иако је најчешћа асоцијација за композит комбинација два или више материјала, у ову врсту материјала не спадају легуре или керамика (иако су вишефазни материјали). У композитне материјале спадају искључиво они материјали чије се особине конституената значајно разликују. Дакле, материјали који се комбинују се бирају тако да добијени композитни материјал поседује боље физичке особине од конституената појединачно.

Општеприхваћена дефиниција композита је она која под композитни материјал сврстава вишефазне материјале, чије фазе поседују физичке особине које се међусобно значајно разликују, па композитни материјал има својства која су различита од својстава конституената.[1]

Композитни материјали се састоје од два основна конституента - континуалне фазе, коју другачије називамо матрицом и дисконтинуалне фазе, која се другачије назива ојачање. Особине композита зависе од својстава матрице и ојачања:

- величине и распореда (расподеле) конституената
- запреминског и масеног удела конституената,
- облика конституената,
- природе и јачине везе међу конституентима.

Дисконтинуална фаза је носиви елемент композита и она је крућа, тврђа и јача од континуалне, па се у литератури другачије назива ојачање (овај израз ће бити коришћен у даљем тексту). У литератури се ојачање шематски приказује као сфера - уколико су ојачање честице или цилиндар - уколико су ојачање влакна.

Континуална фаза (у даљем тексту матрица) повезује ојачања, преноси оптерећење на ојачање, даје облик композиту и штити од спољашњих утицаја.

1.2 Класификација композита

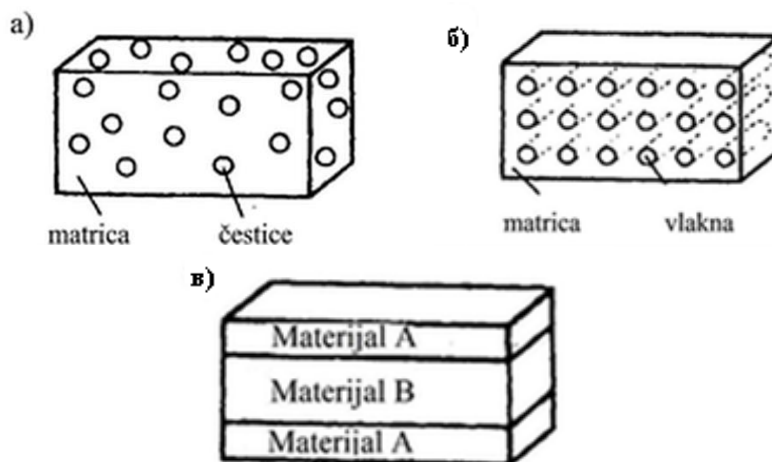
Општеприхваћена класификација композита је према механизму ојачавања, према којој се композити сврставају у две категорије: [1]

Ојачани честицама (честични композити) који се користе када је потребно побољшати крутост и отпорност на хабање материјала. Састоје се од веће количине честица које су различитог геометријског облика, али су приближно истих димензија у свим правцима. Величина честица има утицај на својства композитних материјала. За успешно ојачавање честице би требало да буду малих димензија, мањих од 1 μm у пречнику и равномерно распоређене унутар матрице. Садржај честица - концентрација такође има велики утицај на својства, док је нормална концентрација између 30% и 40% запреминског учешћа. Композити ојачани честицама могу бити:

- са насумичном оријентацијом,
- преференцијалном оријентацијом.

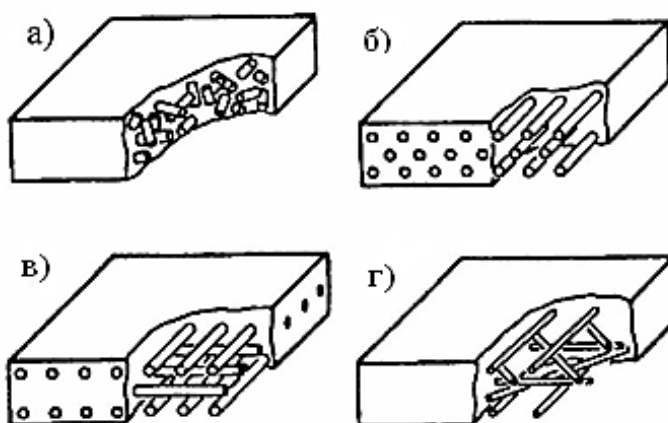
Влакнима ојачани композити су материјали код којих се за различите дужине, оријентације и концентрације влакана добијају другачије особине и механичке карактеристике. Због те чињенице влакнима ојачани композити имају велику примену и представљају најзначајнију групу композита. Они се могу поделити на следеће групе:

- а) једнослојни и вишеслојни композити исте оријентације у свим слојевима:
 - са континуалним влакнима,
 - са дисконтинуалним влакнима,
- б) вишеслојно угаоно укрштени композити:
 - ламинати,
 - хибриди.



Слика 1.1: *Врсте композита:*

а) ојачани честицама б) ојачани влакнима в) ламинати



Слика 1.2: *Расподела влакана: а) кратка, произвољно оријентисана;*

б) дуга, у једном правцу; в) дуга, у два међусобно нормална правца;

г) дуга, испреплетена, произвољно оријентисана

Композит ојачан честицама је бетон, који представља мешавину цемента и шљунка, тј. песка. Стаклопластика је композит ојачан влакнима, јер је сачињена од стаклених влакана убачених у матрицу од полимера. Шпер плоча је ламинатни композит који се састоји од унакрсно лепљених фурнира дрвета.

Оријентација ојачања утиче на изотропију композитног материјала. Композити ојачани влакнима су по правилу анизотропни, док су ламинатни композити увек анизотропни. Дакле, композитни материјали су углавном анизотропни - са различитим врстама анизотропије.

1.3 Одређивање особина композитног материјала

Као један од најзначајнијих фактора који утичу на особине композитног материјала издваја се запремински однос између матрице и влакана.

Ако се узме да комплетну запремину једног композита сачињавају запремина влакана и матрице, где се v , m и f односе на композит, матрицу и влакно :

$$v_c = v_m + v_f . \quad (1.1)$$

Запремински удео матрице у композиту се изражава као:

$$V_m = \frac{v_m}{v_c}. \quad (1.2)$$

Запремински удео влакана у композиту се изражава као:

$$V_f = \frac{v_f}{v_c}. \quad (1.3)$$

Из претходне две релације (1.2 и 1.3) може да се изведе релација да је:

$$V_m = 1 - V_f. \quad (1.4)$$

Аналогно релацијама везаним за запремину, могуће је извести и релације за масени удео:

$$m_c = m_m + m_f, \quad (1.5)$$

$$M_m = \frac{m_m}{m_c}, \quad (1.6)$$

$$M_f = \frac{m_f}{m_c}, \quad (1.7)$$

$$M_m = 1 - M_f. \quad (1.8)$$

Особине композита могу бити дате сумом производа особина конституената и њихове запреминске фракције – такозваним **правилем мешања**. Особине композита представљају суму свих особина конституената (P_i) помножених са садржајем конституената (λ_i). [1]

$$P_c = \sum \lambda_i P_i. \quad (1.9)$$

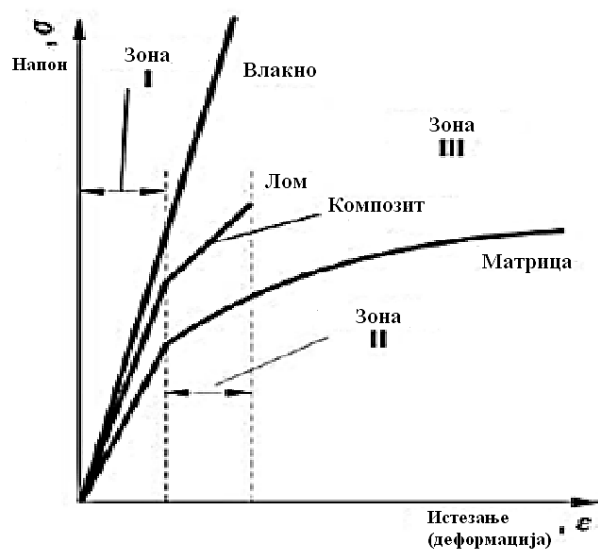
Законом мешања увек је могуће одредити густину композита ојачаних влакнима: [11]

$$\rho_c = V_m \rho_m + V_f \rho_f. \quad (1.10)$$

Ако оптерећење делује паралелно с континуираним једносмерним влакнима, законом мешања може се тачно предвидети модул еластичности композита, где су E_c , E_m и E_f модул еластичности композита, модул еластичности матрице и модул еластичности влакна. [11]

$$E_c = V_m E_m + V_f E_f. \quad (1.11)$$

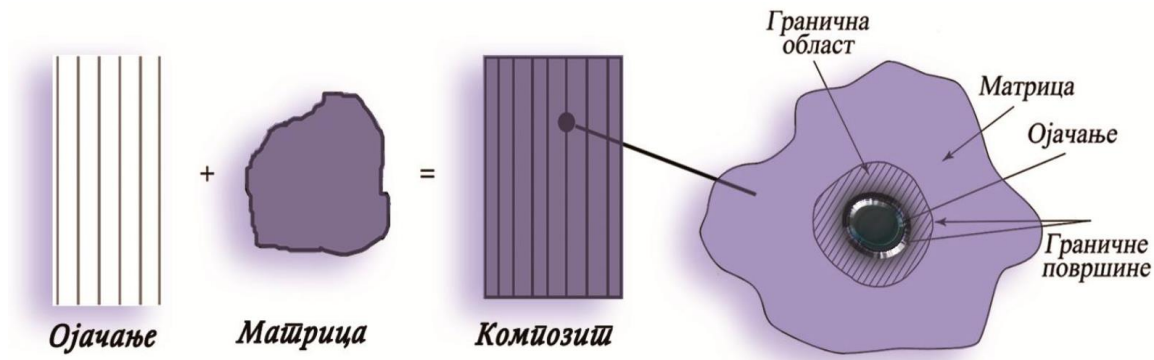
При високим напрезањима започиње деформисање матрице, па веза између напрезања и истезања више није линеарна – слика 1.3. Дакле линеарно понашање важи само у зони 1, зона 2 је зона еласто-пластичних деформација, а зона 3 описује стање материјала након лома. [11]



Слика 1.3: График напон-деформација влакнима ојачаног композитног материјала

2 Саставни елементи композитних материјала

Како су у фокусу овог рада влакнима ојачани композитни материјали, као основну структуру композита посматрају се влакна и матрица, као и њихове међусобне зависности, запремински и масени удео, као и релације које дефинишу односе матрица-ојачање. Као што је већ наведено појединачне особине и међусобна интеракција конституената, расподела и запреминско/масени удео дефинишу особине композитног материјала.



Слика 2.1: Шематски приказ композитног материјала

2.1 Влакна

Као ојачање у композиту се користе влакна израђена од различитих материјала, а у обзир долазе многе врсте материјала које су хемијски компатибилне матрици. Издвајају се следеће групе материјала за израду ојачања:

2.1.1 Природна влакна

Природна влакна могу бити биљног порекла (лишће, воће, влакна дрва, траве, сламе итд.) и животињског порекла (вуна, длака, свила). Композити сачињени од природних влакана називају се **биокомпозити**.

Предности биокомпозита су:

- обновљиви извори,
- лака доступност,
- ниска цена и мали удео утрешка енергије током производње,
- мала густина (специфична тежина) осигурава високу специјалну чврстоћу и крутоост у поређењу са стакленим влакнима,
- сигурније за руковање и производњу у односу на синтетичка влакна,
- мала електрична проводљивост,
- добра звучна изолација,
- не настаје CO_2 (биљке стварају једино угљеничне спојеве приликом сагоревања или компостирања).

Недостаци биокомпозита су:

- тешко распршљиви у матрици,
- природна влакна су хигроскопна - упијају влагу, што има за последицу стварање пора,
- слабљење веза, а самим тим су лошија механичка својства композита,
- влакна се почињу разграђивати у опсегу од 90 до 200 °C, па су температура обраде и избор материјала матрице ограничени,
- осетљиви су на труљење/деградације из окружења (микроорганизми, гљивице, итд),
- димензије влакана и механичка својства варирају од биљке до биљке.

2.1.2 Сталена влакна

Композити са стакленим влакнима имају повишену затезну чврстоћу и модул еластичности, постојаност при повишеним температурама и корозији, димензијску стабилност и добра електрична својства. Сталена влакна могу бити различитих врста и својстава, која су последица различитих хемијских састава. Користе се за мање захтевне конструкције. Цена производње ових влакана је врло ниска, па се скупља угљенична влакна, где је год то могуће, замењују стакленим. Сталена влакна се различитим поступцима најчешће производе од силицијума (силицијум диоксида SiO_2) и по правилу имају слабија механичка својства од угљеничних. Могу се знатно разликовати по својствима, те се стога означавају као: [12]

- **А стакла**, која су прва коришћена и произвођена, данас се ретко користе,
- **Це стакла** се користе за побољшање отпорности на киселине и базе, али су скупља и имају лошију чврстоћу,
- **Е стакла** су најчешће коришћена за ојачање композита од свих стаклених влакана, јер се најлакше извлаче, имају добру чврстоћу и побољшане су отпорности на влагу и блаже хемикалије,
- **С стакла** повећавају чврстоћу и модул еластичности. Користе се код механички оптерећенијих конструкција, где су потребни висока специфична крутост и чврстоћа.

Од осталих врста стаклених влакана издвајају се још М и Д стакло, а основне карактеристике наведених врста стаклених влакана дате су у табели 1: [11]

Врста стакленог влакна	Главна особина
Е стакло (electrical)	Мала електрична проводљивост
С стакло (strenght)	Велика чврстоћа
Ц стакло (chemical)	Велика хемијска отпорност
М стакло (modulus)	Висока крутост
А стакло (alkali)	Високо базно стакло
Д стакло (dielectric)	Мала диелектрична константа

Табела 1. Сталена влакна и њихове основне карактеристике



Слика 2.2: *Стаклена влакна*

2.1.3 Полиестерска влакна

Полиестерска влакна су најзаступљенија вештачка влакна, која могу бити од поли(етилентерефталата) - **ПЕТ**, поли(бутилен-терефталата) - **ПБТ** и поли(1,4-диметиленциклохексил-терефталата) **ПЦДТ**. Највеће значење имају ПЕТ - влакна синтетизована од гликола и терефталне киселине. Полиестерска влакна се производе у многобројним верзијама, различитих морфолошких карактеристика и финоћа, у широком распону физичких, хемијских и механичких својстава. Прилагођена су различитим наменама – од финијих микровлакна и влакана сличних свили, власастих влакана сличних памуку и вуни, до техничких влакана велике чврстоће и посебних својстава. Због те чињенице подручје примене име је врло широко – од одеће и кућног текстила до разноврсних производа техничког и медицинског текстила. Најчешће су у мешавини с памуком, вуном, вискозом и др. природним или вештачким влакнима, а понекад се користе и сама, било у филаментном или власастом облику.

2.1.4 Арамидна влакна

Арамидна влакна су органска влакна на бази ароматских полиамида (арамида) позната и по називима **Кевлар** или **Тварон**. Предност арамидних влакана је мала густина ($1,44\text{g/cm}^3$ – мања од најчешће коришћених - стаклених и угљеничних) и затезна чврстоћа знатно већа од челика као и од других инжењерских полимерних материјала. Због велике деформације кидања арамидна влакна су дуктилна и композити који су ојачани њима имају велику жилавост и отпорност на удар. Због велике отпорности на удар кевлар се користи као материјал за антибалистичку заштиту и можемо га пронаћи у панцир кошуљама и шлемовима.

Најпознатији производи на бази арамидних влакана су Кевлар 29 и Кевлар 4, које производи фирма Ду Понт (САД). Кевлар 29 се користи као ојачање за каблове за вучу, док Кевлар 49 има већи модул еластичности и користи се као висококвалитетно ојачање за конструкционе композите. [1]

2.1.5 Угљенична влакна (Карбон)

Карбонска или угљенична влакна важе за најраспрострањенија и најпримењенија ојачања. Одликује их дводимензионална структура. Већина угљеничних влакана која се данас користе су направљена из полиакрилонитрил (ПАН) влакана или из различитих смола процесом карбонизације, при чему се поступци производње могу значајно разликовати.

ПАН поступком производе се влакна са уделом С до 50%, док се влакна из смоле одликују уделом С до 80%. Што се тиче механичких карактеристика, угљенична влакна имају велики модул еластичности, високе су чврстоће и задовољавајућег модула еластичности. Влакна добијена из смоле генерално имају већи модул еластичности, али и мању затезну чврстоћу у односу на ПАН влакна.

Карбонска влакна која садрже најмање 90% угљеника, су врло фина, већином кружног пресека, пречника 5 до 10 μm и својствене црне боје. Добијају се из других већ обликованих органских влакана. Претежно су то полиакрилонитрилна влакна велике чврстоће, а у мањој мери целулозна вискозна влакна или смоласти остатак пиролизе нафте (тзв. мезофазна смола). Процес добијања спроводи се термичком обрадом у неколико фаза (предобрада и карбонизација). У њему се под строго дефинисаним условима и процесним параметрима из почетног материјала поступно уклањају сви хемијски елементи осим угљеника. Код производње графитних влакана у завршној обради се циклична структура угљеника графитирањем обликује у графитну.

Својства карбонских влакана:

За карбонска влакна карактеристични су велика чврстоћа (3000 до 5000 N/mm^2), велики модул еластичности (код графитних влакана 200 000 до 450 000 N/mm^2), велика крутост, одлична отпорност на топлоту уз стабилност димензија, веома слаба запаљивост, хемијска инертност, некорозивност, отпорност на киселине, базе и органске растворе, добра топлотна и електрична проводљивост, немагнетичност, врло мала апсорпција рендгенских зрака, неупијање влаге и изврсна биокомпатибилност.

Примена карбонских влакана је врло широка па је самим тим тешко и приближно набројати сва подручја примене. Нека од подручја примене су у авиоиндустрији, војни и цивилни авиони, хеликоптери, мотори, пропелери, антене, свемирске летелице, у поморској индустрији за јахте и подморнице, у аутомобилској индустрији, у аутобусима, трамвајима, возовима, роботским рукама, за турбине, у текстилној индустрији, хемијској те нуклеарној индустрији, у медицини, болничкој опреми и денталној медицини, спортска опрема као нпр. бицикли, скије и штапови, палице за хокеј и голф, у тенису, бадминтону, пецању, чак и у музичкој индустрији у изради звучника, рефлектора, жичаних инструмената као и за намештај од карбонских влакана.

Један од најпримењенијих композита ове врсте су **полимерни композити ојачани угљеничним влакнима**. Ови композитни материјали су често скупии за производњу, али се уобичајено користе кад год је потребан висок однос издржљивости према тежини као и чврстина. Користи се у авиоиндустрији, аутомобилској и грађевинској индустрији, производњи спортске опреме, и све више других потрошачких и техничких примена.

2.1.6 Метална влакна

Метална влакна (жица или жичано плетиво) су неповезане траке малих димензија, направљена од једне врсте челика са посебним карактеристикама. Расуто армирање бетона са челичним влакнима значајно побољшава његове механичке особине.

Најчешћи метод коришћења металних влакана у грађевинској индустрији је конструктивно армирање обичног бетона. Ова врста армирања представља брзо растући сегмент у цементној индустрији, са инжењерима, архитектама и извођачима радова који

све више прибегавају употреби металних влакана како би се обезбедио успех у пројектима са применама у бетонској конструкцији / изградњи.

У великим изградњама, као што су зграде са више спратова, аутопутеви, мостови, писте авиона, подови, метална влакна се користе пре свега ради:

- Повећања отпорности при савијању или смицању
- Повећања отпорности на високим температурама и смањења деформисања од скупљања, након сушења бетона.

2.2 Матрица

Као што је већ и споменуто, матрица представља континуалну фазу композитног материјала, која повезује дисконтинуалну фазу и преноси оптерећење на ојачање. Композити се могу поделити према врсти материјала који сачињавају матрицу, према којој се композити деле на металне, керамичке и полимерне.

Особине матрице најчешће одређују и особине композита. Приликом излагања композита хемијским или другим утицајима околине, матрица је она која је прва изложена промени механичких карактеристика.

Врло важно физичко својство матрице је температура преласка у круто стање (eng. glass transition temperature – GTT) која дефинише тачку прелаза из вискозног у круто стање матрице. Ова температура веома дефинише и коначне особине матрице. Наиме, при условима температуре веће од GTT, својства матрице се значајно се умањују. Влага у композиту (понајвише матрици) знатно снижава GTT. Технологија израде композита знатно утиче на његове особине, јер се мора осигурати добра веза влакана и матрице, као и минималан удео шупљина или пукотина у композиту. [11]

2.2.1 Метални композити

Метални композити (ММС – Metal Matrix Composites), код којих је најчешће матрица легура, ређе чисти метал, док ојачање могу бити угљенични, метални или керамички додаци. Основни проблем код производње металних композита је некомпатибилност металне матрице и влакана због хемијских реакција које се јављају међу њима. Због тога је избор материјала за ојачање сужен. Када је упитању ојачање на бази влакана, код металних матрица најбоље су се показала влакна силицијум-карбида, алуминијум-оксида, угљеника, бора и борових влакана пресвучених силицијум-карбидом (Borsic).

Одликују их врло висока чврстоћа и крутост, висока топлотна и електрична проводљивост, добра отпорност на трошење, мала пластичност и врло добра механичка својства на повишеним температурама. За разлику од полимерних композита они су незапаливи и минимално осетљиви на органске течне флуиде (горива или раствараче). Ограничења код ових материјала су компликована производња, врло висока цена и лоша могућност рециклаже.[12]

2.2.2 Керамички композити

(СМС – Ceramic Matrix Composites), одликују их способност да задрже механичке особине на екстремно високим температурама, велика тврдоћа и мала маса. Ове особине поседују

и керамички материјали међутим јако су крти, па је то главни разлог због којег су настали керамички композити. Матрице се могу поделити у две основне групе: [12]

а) Оксидна керамика - има нешто бољу топлотну и хемијску стабилност, а чине је Al_2O_3 , SiO_2 , Ва, Li и Са - алуминосиликати.

б) Неоксидна керамика - поседује боља механичка својства а чине је: SiO , Si_3N_4 , ВС итд...

За ојачање керамичке матрице употребљавају се дисконтинуирана и континуирана ојачања. Од дисконтинуираних ојачања користе се честице и вискери, најчешће од материјала као што су: цирконијум-оксид, алуминијум-моксид, када се ради о честицама, односно силицијум-карбид и силицијум-нитид када су у питању вискери. Ова ојачања имају ниже механичке особине, али њиховом употребом композитни материјали се могу производити неким од поступака производње монолитне керамике, што појефтињује процес производње па самим тим и цену композитног материјала. Осим дисконтинуираних влакана користе се и континуирана влакна која композиту придодају боља механичка својства. Поступак производње таквог композита знатно сложенији, па самим тим и скупљи. Влакна се израђују од материјала као што су: алуминијум-оксид, угљеник и силицијум-карбид који се најчешће примењује за ојачање керамике због високе чврстоће и топлотне стабилности..

2.2.3 Полимерни композити

Полимерни композити (РМС – Polymer Matrix Composites), су најраширенија врста композита. Заступљени су у разним гранама индустријске производње (аутомобилској индустрији, бродоградњи, грађевинарству, електротехници и електроници, војној индустрији) где врло успешно замењују класичне конструкцијске материјале. Ови композити могу истовремено постићи: високу чврстоћу, високу крутост и малу масу, а такође једна од одлика полимерних композита је димензијска стабилност при екстремним радним условима.

Полимери су супстанце које се састоје од макромолекула па се још могу називати и макромолекуларним спојевима. Од органских спојева у природи то су каучук, природне смоле, целулоза, лигнин, полисахариди, скроб, беланчевине и нуклеинске киселине.

Према настанку полимери се могу поделити на природне или синтетске (вештачке), а по хемијском саставу деле се на органске и анорганске. Природни полимерни материјали могу се поделити на модификоване и немодификоване. Најважнији немодификовани природни полимерни материјал је целулоза, а у немодификоване убрајамо још и свилу, вуну и памук, Модификовани природни материјал може бити целулоза, а значајна је и гума са основом природног каучука

Полимери се могу поделити у три велике групе: [9]

- 1) Дуромери,
- 2) Еластомери
- 3) Пластомери.

Као материјали матрице највише се користе дуromoмери и пластомери. Осим поменуте три групе полимера, у последње време издваја се и још једна група тзв. **еластопластомери**,

који су карактеристични по томе да имају могућност прераде као пластомери, са израженим својством еластичности какву имају еластомери.

Дуромери при загревању стварају иреверзибилне хемијске везе међу полимерним ланцима који су међусобно снажно умрежени. При поновном загревању, они не мењају стање, већ остају крути све док се под деловањем високе температуре потпуно не разграде. Ово указује и на велики проблем при њиховој примени, да их није могуће рециклирати омекшавањем матрице, већ их само механички уситнити чиме се добијају ситне грануле које у себи садрже и влакна и матрицу.

За разлику од њих, **пластомери** имају особину да при хлађењу очвршћавају, али при поновном загревању омекшају, па их је могуће поновно обликовати. Ово омогућује поправљање делова који су израђени од ових композита, као и њихово делимично рециклирање. Код пластомера је могућа одређена кристална структура, док су дуромери искључиво аморфни. Кристална структура је узрокована усмереношћу ланаца. Они делови полимера који су кристални имају већу густину, али и боља механичка својства и отпорност утицајима раствора.

Дуромери су полимери који се најчешће користе у производњи композита због релативно ниске цене, ниских производних температура и ниске вискозности при производњи.

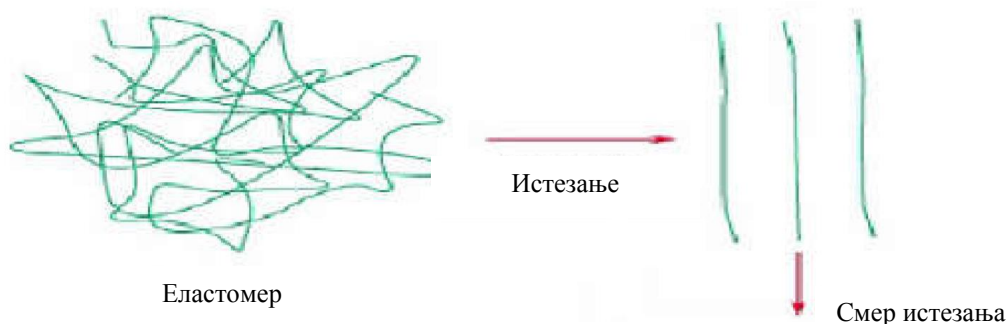
Композити високих механичких својстава који се користе у ваздухопловним конструкцијама најчешће садрже врсту дуромера - **епоксидне смоле** због лаког коришћења, ниске цене, због својих изврских механичких особина, добре хемијске постојаности, те задржавања добрих механичких особина и димензија при повишеној температури и влази. Такође добро реагују (остварују добру адхезију) с већином влакана. Будући да при производњи пролазе кроз период врло ниске вискозности, то им омогућава врло широке технике производње.

Епоксиди су најчешће двокомпонентни, при чему се у процесу производње додаје очвршћивач који постаје саставни део структуре матрице. Након мешања епоксида и очвршћивача, под деловањем топлоте долази до укрупњавања које траје неколико сати. Коначна својства епоксидне матрице показују изразиту крхкост, што доводи до знатне осетљивости обзиром на појаву пукотина. Да би се побољшала ова својства, као и отпорност на влагу и топлотну стабилност, данас се епоксидима додају **еластомери**, као и други типови полимера.

Друга врста дуромера која се све више користи због отпорности повишеним температурама јесу **адитивни полиимиди**. Међу њима је најпознатији бизмалеимиди (БМИ) који поседују добре производне карактеристике, међутим главни недостатак им је повишена кртост, која се може смањити додавањем одговарајућих спојева (нпр. полисулфон, полиетеримид и др). Друге врсте ових спојева јесу ПМР-15 полиимиди са ГТТ од готово 300 °С. Цианати су такође дуромери који су погодни за примену на високим температурама који имају ГТТ око 290°С. Одликују их добре карактеристике при примени на високим температурама и условима високе влажности (нешто слабија од епоксидне смоле) и висока тврдоћа. Врло су често кориштени и незасићени полиестери, најчешће у комбинацији са стакленим влакнима. Представници ових полимера су винил естери који су врло популарни због своје цене, отпорности на влагу, брзе и једноставне израде композита.

Еластомери су материјали са способношћу великих еластичних деформација. Осим добре способности еластичности, гуме поседују низ других особина. Еластомери могу поднети велика истезања и то чак више од сто процената при собној температури, а након растерећења враћају се у почетни положај.

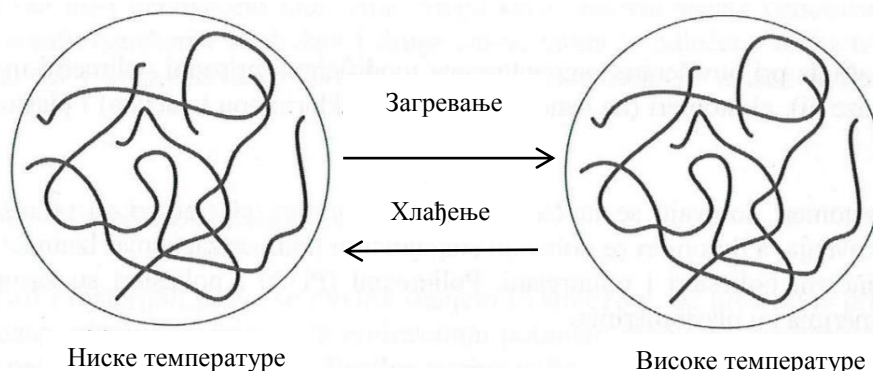
Грађени су од дугих, линеарних, макромолекуларних ланаца који су међусобно повезани и слабо умрежени вулканизацијом. Тиме се спречава њихово пластично обликовање, али остаје сачувана покретљивост делова ланаца, што им даје изразита еластична својства. У неоптерећеном стању имају дефинисани облик у који се готово потпуно враћају и након снажног деловања спољне силе и јаког изобличења. Вулканизацијом, тј. загревањем с прикладним, посебно сумпорним спојевима, уз примесе различитих додатака и пунилаца (чађ, оксиди силицијума, алуминијума, титана и цинка), еластомери се превode у гуму и многобројне гумене производе велике затезне чврстоће и еластичности. [9]



Слика 2.3: Шематски приказ истезања гуме [9]

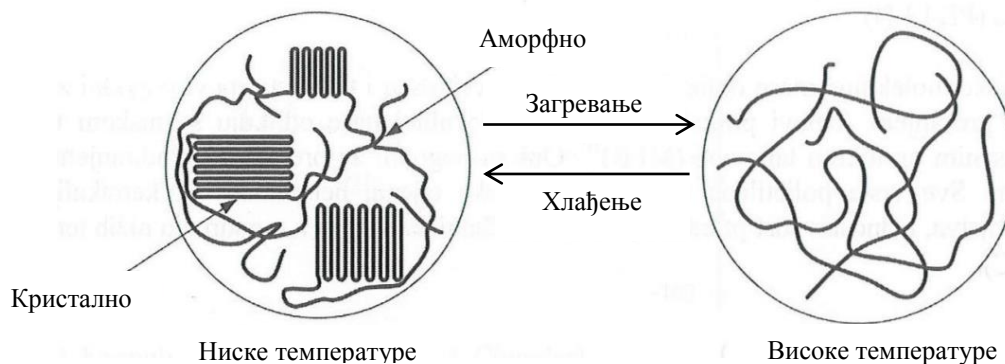
Пластомери су најшире класификовани као аморфни и кристални, иако сви пластомери имају кристалну структуру у мањој или већој мери. Кристални еластомери показују знатно бољу отпорност утицајима горива, хидрауличних флуида и др. у односу на аморфне.

Аморфни пластомери показују велику испреплетеност полимерних ланаца, а при загревању те се везе раскидају и полимер се понаша као вискозни флуид. Аморфни пластомери су и у одређеној мери осјетљиви на растворе, па су знатно осетљивији на пузање и заморна оштећења него кристални. Пластомери су знатно мање склони упијању влаге и мање су осетљиви на ударна оштећења. Могу се у ограниченој мери поправљати поновним загревањем и заваривати. Ипак, температуре и притисци на којима полимеризују су знатно виши у односу на дуромере.



Слика 2.4. Макромолекуларна структура аморфних пластомера [9]

Кристални пластомери својство кристалности поседују због веће или мање усмерености полимерних ланаца, док комплетну кристалну структуру није могуће постићи. При загревању, кристалне фазе се мешају и матрица постаје аморфни, вискозни флуид. Ови полимери су у ствари полукристални, будући да садрже и кристалну и аморфну фазу. Производни услови битно утичу на степен кристалности - што је већа брзина хлађења кристалност је мања.



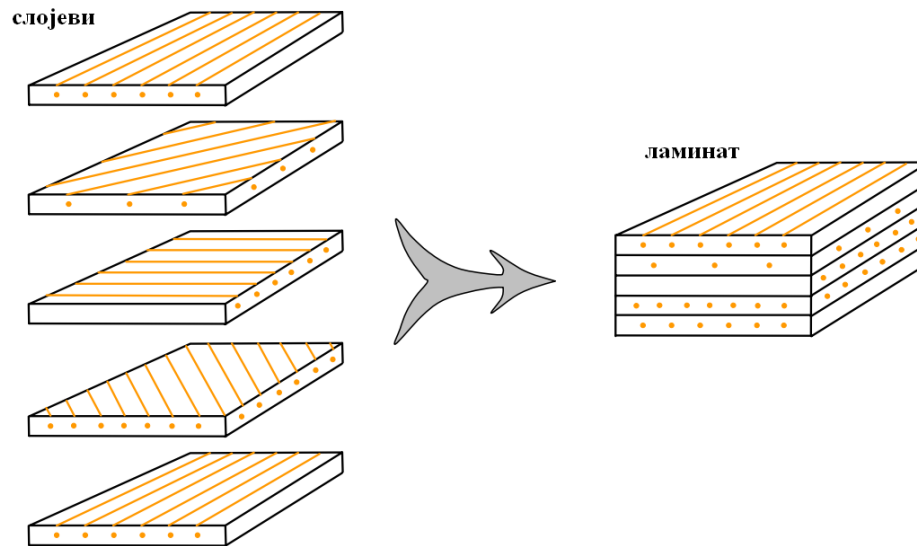
Слика 2.5: Макромолекуларна структура кристалних пластомера [9]

Поликетони су група кристалних пластомера који имају одличну топлотну отпорност. Међу њима се истичу полиетеркетон (ПЕК), полиетеркетонкетон (ПЕКК) те најчешће коришћени полиетеретеркетон (ПЕЕК). ПЕЕК има степен кристалности до 40%, добра механичка својства и отпорност према растворима и киселинама с изузетком концентрисане сумпорне киселине. Основни недостатак је врло висока цена производње. Пластомери могу бити произведени знатно брже, јер повишену температуру није потребно одржавати дуже вријеме. Неки од њих имају знатно вишу GTT, те температуру примене од епоксида или бизмалеимида. Код пластомера је уочљиво течење и знатна деформација при лому, те тиме и знатно већа жилавост. Ипак они испољавају и пузање при повишеним температурама и константном оптерећењу.

3 Структура композитних материјала

3.1 Ламинати

Структура композитних материјала углавном се састоји од узастопних слојева сачињених од матрице и ојачања, у овом случају влакана. Ови слојеви се другачије називају **ламинне** или **ламеле**. Техника којом се композитни материјал формира тако што се "пакују један слој на други" назива се **ламинација**, а такав композитни материјал се назива **ламинат**. На слици 3.1 приказан је пример ламината сачињеног од слојева ојачаних влакнима. [2]



Слика 3.1: Пример конструкције ламината

Влакна која се користе за ојачања слојева могу бити исте или различите оријентације, а ламинати су по правилу анизотропни материјали, због различитих врста симетрије које могу да имају њени слојеви. Најчешће код слојева срећемо следеће врсте симетрије:

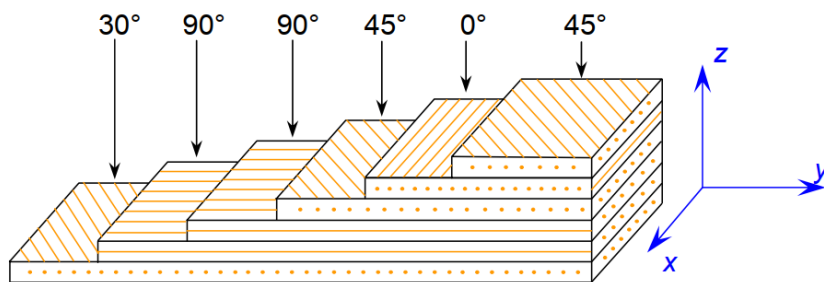
- Изотропни,
- Трансферзално-изотропни,
- Ортотропни,
- Анизотропни са моноклиничким типом симетрије,
- Анизотропни са триклиничким типом симетрије.

3.1.1 Означавање ламината

Ламинати са једнодирекционим влакнима садрже основни ламинат од којих, у теорији, анализа било ког другог ламината може бити изведена. Ови једнодирекциони ламинати су сачињени од паралелних снопова ојачања или једнодирекционих тканина уграђених у матрицу. Неколико једнодирекционих слојева може бити сложено на одређен низ различитих оријентација влакана како би се добиле одређене механичке особине ламината – слика 3.2. [2]

Ламинат

45°
0°
45°
90°
90°
30°



Означавање: $[30/90_2/45/0/45]$

Слика 3.2: Означавање и слагање ламината

Означавање и препознавање ламината може се вршити коришћењем следећих правила означавања:

- Сваки слој је означен оријентацијом угла између влакна и x референтне осе (слика 3.2). [2]
- Узастопни слојеви су одвојени са „/“, ако су слојеви различите оријентације.
- Узастопни слојеви са истом оријентацијом су означени коришћењем нумеричког индекса.
- Слојеви су узастопно слагани идући од једне стране ка другој. Заграде означавају почетак и крај ознаке.

Неки од примера означавања ламината су:

Ламинат	Ознака
0°	$[\pm 45 / \mp 30 / 0]$
30°	
-30°	
-45°	
45°	

Ламинат	Ознака
30°	$[45 / 0 / - 60_2 / 30]$
-60°	
-60°	
0°	
45°	

Ламинат	Ознака
0°	$[45_2 / - 45_2 / 0]$
-45°	
-45°	
45°	
45°	

Ламинат	Ознака
0°	$[\pm \mp \pm 45 / 0]$ или $[45 / - 45_2 / 45_2 / - 45 / 0]$
-45°	
45°	
45°	
-45°	
-45°	
45°	

3.1.2 Подела ламината

За поделу ламината као критеријум се може узети више критеријума, а најчешће срећемо оне поделе на основу карактеристика материјала, оријентације слојева и симетрије у односу на средњу раван.

Подела ламината према начину симетрије у односу на средњу раван - према којој се ламинати деле на:

1. Симетричне,
2. Антисиметричне,
3. Асиметричне.

Симетрични ламинати имају геометријске карактеристике симетричне у односу на средњу раван плоче. Пошто је раван симетрије средња раван, потребно је познавати само половину ламината, како би се познавале његове карактеристике.

Уколико симетричан ламинат има паран број слојева, средњи раван се налази између два средња ламинатна слоја, а уколико је непаран средња раван се поклапа са равни симетрије средњег слоја ламината. Означавање се врши од спољњих слојева, а завршава се на средњим. Индекс S означава симетричност.

$\overline{90^\circ}$		$\overline{90^\circ}$	
$\overline{45^\circ}$		$\overline{45^\circ}$	
$\overline{45^\circ}$		$\overline{45^\circ}$	
$\overline{0^\circ}$	$[90/45_2/0]_S$	$\overline{45^\circ}$	$[90/45_2/\bar{0}]_S$
$\overline{0^\circ}$		$\overline{0^\circ}$	
$\overline{45^\circ}$		$\overline{45^\circ}$	
$\overline{45^\circ}$		$\overline{45^\circ}$	
$\overline{90^\circ}$		$\overline{90^\circ}$	

Антисиметрични ламинати имају једнаке дебљине слојева и материјалне карактеристике испод и изнад средње равни, али су углови оријентације влакана у односу на општи координатни систем изнад и испод средње равни супротног знака.

Асиметрични ламинати имају различите особине испод и изнад средње равни, па је немогуће дефинисати релације између слојева.

Подела ламината према оријентацији слојева, према којој се ламинати деле на:

1. Умрежене,
2. Укрштене,
3. Умрежене и укрштене,
4. Квази изотропне,
5. Уопштене.

Умрежени и укрштени ламинати поседују две ортогоналне равни симетрије, које не морају да се поклапају са равнима усвојеног координатног система. Основна разлика између умрежених и укрштених ламината је та да код умрежених ламината углови праваца симетрије и углови влакана у односу на усвојени координатни систем имају произвољне вредности. Код укрштених ламината ови углови имају исту вредност $\pm 45^\circ$.

Квази-изотропни ламинати имају слојеве који су постављени тако да се ламинат понаша као изотропни слој при раванском оптерећењу .

Уопштени ламинати имају лејере са потпуно различитом оријентацијом влакана и код њих је јако тешко пратити и контролисати макромеханичке особине.

Најчешћа подела која се среће је она на основу материјала компоненти према којој се ламинати деле на:

1. Сендвич ламинате,
2. Пуне ламинате.

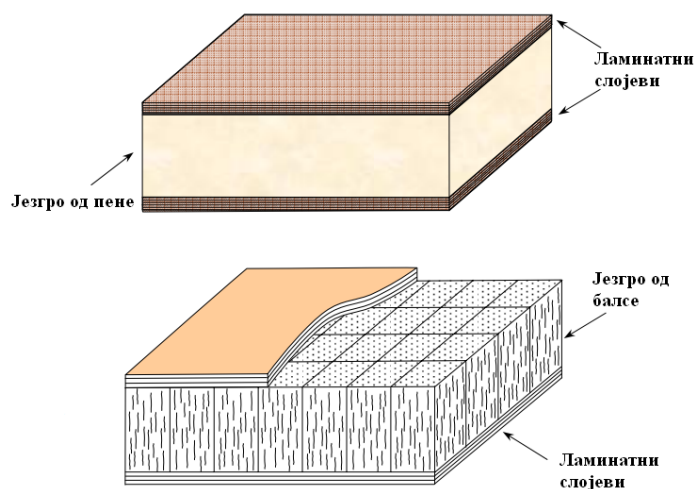
Сендвич ламинати или други назив **сендвич конструкције** су композитни материјали који се састоје од две плоче које чине омотач и језгра које се налази између њих. Омотач је направљен од чвршћег материјала који има добре затезне карактеристике, а језгро сачињава слабији, јефтинији и лакши материјал који има већу дебљину од омотача и има пожељне особине при попречном напрезању. Лакши, јефтинији и слабији материјал језгра између две чвршће плоче омогућава добру савојну крутост и мању тежину комплетне сендвич конструкције, као и мању цену комплетног материјала.

Да би се обезбедило преношење оптерећења између језгра и омотача потребно је обезбедити добре везе између њих. То се остварује наношењем смола на омотач. Омотачи сендвич конструкција се обично ојачавају са стакленим влакнима, карбонским или кевлар влакнима.

На основу материјала који се користи за израду језгра језгра се могу поделити на:

1) Сендвич ламинати са чврстим језгром – слика 3.3:

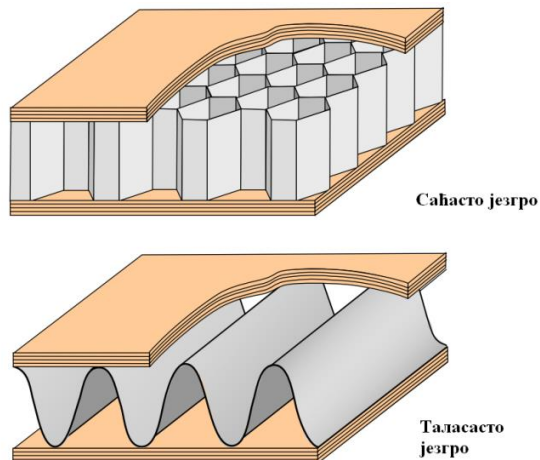
- Од балсе или ћелија дрвета,
- Од разних врста ћелијских пена,
- Од синтактичких пена.



Слика 3.3: Сендвич ламинат са чврстим језгром

2) Сендвич ламинати са шупљим језгром – слика 3.4:

- Легуре лаких метала,
- Крафт папир,
- Полиамидни папир.



Слика 3.4: Сендвич ламинат са шупљим језгром [2]

Пуни ламинати у односу на сендвич конструкције немају језгро и могу се поделити на хомогене и хибридне.

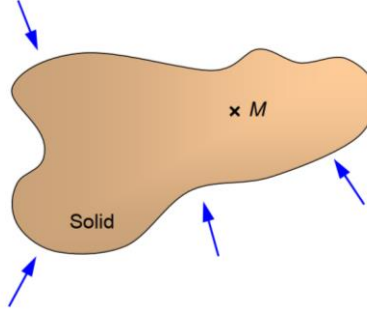
Хомогени ламинати су они ламинати чији су слојеви ојачани влакнима сличних карактеристика, а хибриди су ламинати сачињени од слојева ојачаних влакнима различитих карактеристика.

Хибридни ламинати могу имати различите особине добијене коришћењем стаклених, угљеничних и кевлар влакана за ојачање слојева – где су влакна означена са G, C и K респективно.

0 °	K	[0 _{2C} /(45/90) _{SG} /0 _{2K}]	0 °	G	[0 _G /±45 _C /90 _C] _s
0 °	K		45 °	C	
45 °	G		–45 °	C	
90 °	G		90 °	C	
45 °	G		90 °	C	
0 °	C		–45 °	C	
0 °	C		45 °	C	
			0 °	G	

4 Стање напона

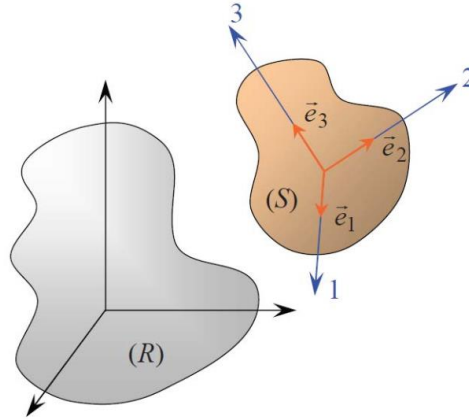
Стање напона за неку произвољну тачку M солида (слика 4.1) на које дејствују механичке силе омогућава опис целокупног механичког понашање које се дешава у тој тачки.



Слика 4.1: Солид на који делују механичке силе

4.1 Трансформације базних вектора

Ако је неки геометријски простор (S) описан базним вектором $(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, који посматрамо у односу на референтни координатни систем (R) (слика 4.2), тај базни вектор је могуће трансформисати коришћењем матрице трансформације $A = [a_{ij}]$ (у литератури се још среће назив матрица ротације). [2]



Слика 4.2: Оријентација геометријског простора (S)

Трансформисани базни систем је могуће представити преко новог базног вектора $(\vec{e}') = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$: [2]

$$\begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Претходна релација (4.1) се може записати и у следећем облику:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3 &= a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Веза између трансформисаног базног система и базног система може се представити и коришћењем инверзне матрице трансформације A^{-1} :

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_3' \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

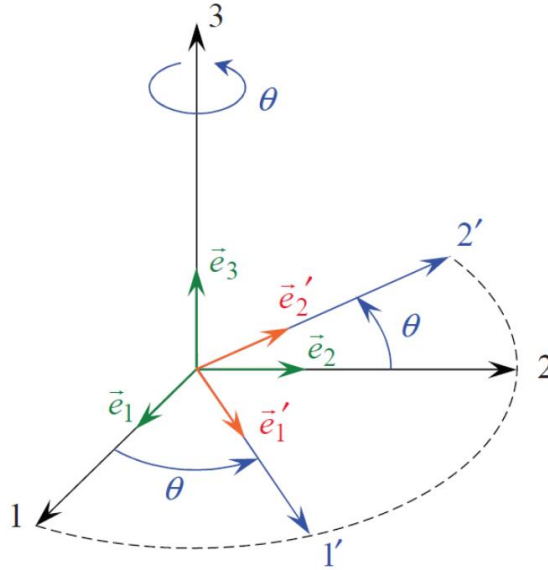
Када имамо случај ортонормалних база, матрица трансформације је симетрична и унитарна, па је инверзна матрица једнака транспонованој матрици. Инверзна једначина се тада своди на:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_3' \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Случај ротације око осе

Када имамо случај ротације базног система за угао θ око правца $\vec{e}_3$ (слика 4.3) релације између базних вектора $(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и $(\vec{e}') = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ су:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1' &= \vec{e}_1 \cos \theta + \vec{e}_2 \sin \theta, \\ \vec{e}_2' &= -\vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta, \\ \vec{e}_3' &= \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (4.5)$$



Слика 4.3: Ротација око правца $\vec{e}_3$

Из релација 4.5 јасно је да је матрица трансформације:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Инверзна матрица трансформације је:

$$A^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

а инверзне релације су:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}_1' \cos \theta - \vec{e}_2' \sin \theta, \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_1' \sin \theta + \vec{e}_2' \cos \theta, \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_3'. \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2 Тензор напона

У свакој тачки континуума стање напона је у потпуности одређено тензором напона $\sigma(M)$, који представља симетричан тензор другог реда и дефинисан је матрицом [2]:

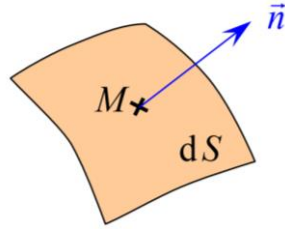
$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

при чему важи да је $\sigma_{21} = \sigma_{12}$, $\sigma_{31} = \sigma_{13}$, $\sigma_{32} = \sigma_{23}$.

Ако се узме да бесконачно мала површина има оријентацију $\vec{n}$ и да на јединицу површине материјала делује оптерећење (слика 4.4), вектор напона је одређен релацијом:

$$\vec{t}(M, \vec{n}) = \vec{t} = \sigma(M) \vec{n}, \quad (4.10)$$

где је $\vec{t}(M, \vec{n})$ резултанта силе, која се другачије назива вектор напона.



Слика 4.4: Елемент површине у тачки М

Сила која делује на елемент површине $d\vec{S}$ је исте оријентације и може да се изрази као:

$$d\vec{F} = \vec{t} d\vec{S}. \quad (4.11)$$

Израз 4.10 може да се напише у следећем облику:

- Компоненте вектора напона $\vec{t}$ у бази $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$[\vec{t}] = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}.$$

- Компоненте вектора нормале $\vec{n}$ у бази $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$[\vec{n}] = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}.$$

Према томе матрични облик израза је:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

па су компоненте вектора $\vec{t}$:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3, \\ t_2 &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3, \\ t_3 &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Дакле вектор напона је:

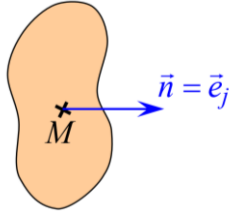
$$\vec{t} = t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2 + t_3\vec{e}_3. \quad (4.14)$$

4.3 Особине тензора напона

4.3.1 Физичко тумачење компоненти напона

Посматра се елемент површине чији се правац нормале поклапа са правцем једне референтне осе (слика 4.5). [2] Тада важи да је:

$$\vec{n} = \vec{e}_j, \quad j = 1, 2, 3.$$



Слика 4.5: Елемент површине са нормалом истог правца као једна референтна оса

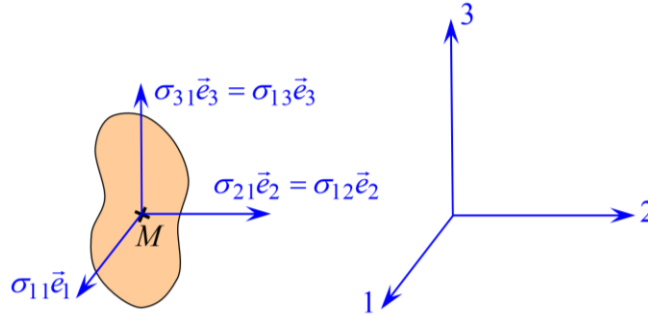
Следи да су компоненте тензора напона:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_1, \\ t_2 &= \sigma_2, \\ t_3 &= \sigma_3, \end{aligned} \quad (4.15)$$

и важи да је $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Величине σ_1 ; σ_2 ; σ_3 су тако компоненте, у правцима $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ вектора напона на површини са правцем нормале $\vec{n} = \vec{e}_j$ ($j = 1, 2, 3$). На пример, уколико је $\vec{n} = \vec{e}_1$, компоненте су σ_{11} ; $\sigma_{21} = \sigma_{12}$; $\sigma_{31} = \sigma_{13}$, а вектор напона је:

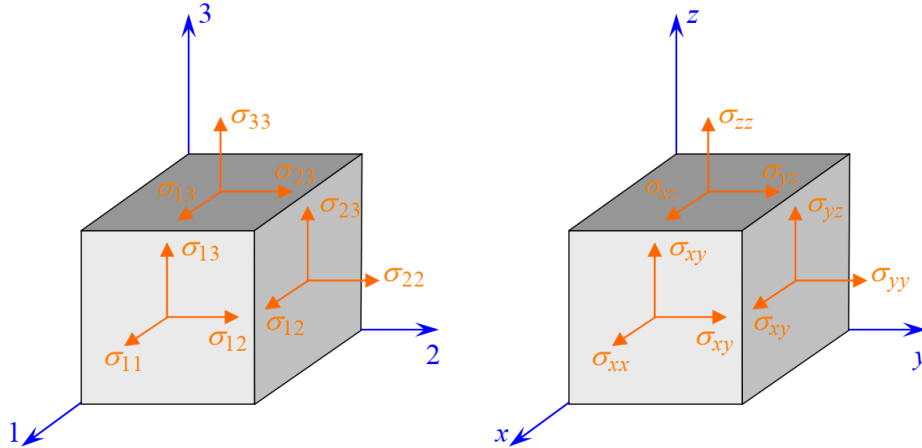
$$\vec{t}(M, \vec{e}_1) = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3. \quad (4.16)$$

Претходни израз се може шематски приказати на слици 4.6.



Слика 4.6: Компоненте напона на површини са правцем нормале $\vec{e}_1$

Најчешће се компоненте вектора напона приказују на коцки са странама паралелним референтним осама. Слика 4.7 приказује два начина означавања, зависно од тога да ли је референтни систем (1, 2, 3) или (x, y, z):



Слика 4.7: Компоненте вектора напона:
у правцима (1,2,3) – слика лево и у правцима (x, y, z) - слика десно

4.3.2 Нормална и тангентна компонента вектора напона

Вектор напона $\vec{t}$ се може разложити на следеће компоненте (слика 4.8):

- Нормални напон $\vec{t}_n$ који делује у правцу $\vec{n}$,
- Тангентни напон $\vec{t}_t$ чији је правац у равни вектора јединичне површине. Тангентни напон се другачије назива и смицајни напон.

Дакле, вектор напона се може записати као:

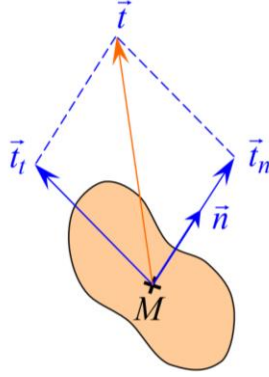
$$\vec{t} = \vec{t}_n + \vec{t}_t. \quad (4.17)$$

Нормална компонента напона се записује као:

$$\vec{t}_n = t_n \vec{n} \text{ где је } t_n = \vec{n} \cdot \vec{t}. \quad (4.18)$$

Уводећи релацију (4.10) нормална компонента напона може да се прикаже као:

$$t_n = \vec{n} \cdot [\sigma(M)\vec{n}]. \quad (4.19)$$



Слика 4.8: Нормална и тангентна компонента вектора напона

Користећи матричну нотацију претходна релација се може дефинисати као:

$$t_n = n^t \sigma(M) n, \quad (4.20)$$

где је n^t транспонована матрица n . Трансформацијом претходног израза добија се да је:

$$t_n = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2\sigma_{12} n_1 n_2 + 2\sigma_{13} n_1 n_3 + 2\sigma_{23} n_2 n_3. \quad (4.21)$$

4.3.3 Главни напони

Тензор напона спада у тензоре другог реда, па због тога постоји најмање једна база која се зове главна база тензора напона, у којој је матрица која представља тензор напона дијагонална и где $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}$ представљају главне напоне:

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{(3)} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

У случају када је површина у тачки M нормална на главни правац $\vec{e}^{(i)}$ тада је:

$$\begin{aligned} t_{ni} &= \sigma^{(i)} \\ t_{ti} &= 0 \quad i=1,2,3 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Дакле, за главни правац смицајни напон износи нула. Главни правци су такви да је $\sigma(M)\vec{n}$ колинеарно са $\vec{n}$.

4.3.4 Промена координатног система

У случају ротације ортонормалних база, релација трансформације може да се изрази у следећем облику [2]:

$$T'_{ij} = a_{ik} T_{kl} a_{jl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (4.24)$$

где a_{ik} и a_{jl} представљају елементе матрице трансформације. Претходна релација (4.24) може се изразити у матричној форми:

$$T' = A T A^T, \quad (4.25)$$

где је T' матрица $[T'_{ij}]$. Инверзна релација у матричном облику је:

$$T = A^T T' A. \quad (4.26)$$

Када је у питању случај ротације око правца $\vec{e}_3$ (слика 4.3), релације између напона σ_{ij} изражених преко базе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и напона σ'_{ij} изражених преко базе $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ изведене су коришћењем релација (4.6), (4.7) и (4.25) и тада је:

$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta, \\ \sigma'_{12} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{12}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ \sigma'_{13} &= \sigma_{13} \cos \theta + \sigma_{23} \sin \theta, \\ \sigma'_{21} &= \sigma'_{12}, \\ \sigma'_{22} &= \sigma_{11} \sin^2 \theta - 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta, \\ \sigma'_{23} &= -\sigma_{13} \sin \theta + \sigma_{23} \cos \theta, \\ \sigma'_{31} &= \sigma'_{13}, \quad \sigma'_{32} = \sigma'_{23}, \quad \sigma'_{33} = \sigma'_{33}.\end{aligned}\tag{4.27}$$

У случају када је почетна база $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ главна база $(\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(3)})$ тензора напона, претходне релације (4.27) се редукују на:

$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= \sigma^{(1)} \cos^2 \theta + \sigma^{(2)} \sin^2 \theta, \\ \sigma'_{12} &= (\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}) \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma'_{13} &= 0, \quad \sigma'_{21} = \sigma'_{12}, \\ \sigma'_{22} &= \sigma^{(1)} \sin^2 \theta + \sigma^{(2)} \cos^2 \theta, \\ \sigma'_{23} &= 0, \quad \sigma'_{31} = 0, \quad \sigma'_{32} = 0, \\ \sigma'_{33} &= \sigma^{(3)}.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Инжењерска матрична нотација

Симетрија тензора напона редукује број компоненти које дефинишу напон на шест. Због тога се у инжењерској пракси користи нотација у којој се девет компоненти тензора замењује за матрицу једне колоне од шест компоненти, тако да је: [2]

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}.\tag{4.29}$$

Овај начин нотације називамо **инжењерска матрична нотација** или **Војтова нотација**. Према Војтовој нотацији важи трансформација индекса:

$$11 \rightarrow 1, \quad 22 \rightarrow 2, \quad 33 \rightarrow 3, \quad 23 \rightarrow 4, \quad 13 \rightarrow 5, \quad 12 \rightarrow 6.\tag{4.30}$$

Увођењем нове нотације релације између напона σ_{ij} изражених преко базе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и напона σ'_{ij} изражених преко базе $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ за ротацију око правца $\vec{e}_3$ могу да се изведу као: [2]

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

где се трансформација напона може записати као:

$$\sigma' = T_\sigma \sigma. \quad (4.32)$$

Из претходна два израза (4.31 и 4.32) је лако закључити да је матрица трансформације напона:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

док је инверзна матрица:

$$\sigma = T_\sigma^{-1} \sigma'. \quad (4.34)$$

Код инверзне матрице T_σ^{-1} потребно је нагласити да се приликом трансформације из T_σ у T_σ^{-1} угао θ мења за $-\theta$, тако да инверзна матрица у овом случају има следећи облик:

$$T_\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

4.4 Типична стања напона

4.4.1 Једноосно затезање или сабијање

Једноосно затезање или сабијање представља стање напона када су два главна напона једнака нули. Тада имамо деловање само једног главног напона. Уколико се узме случај када је $\sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = 0$ тада је у питању једноосно стање напона у правцу $\vec{e}^{(1)}$. Уколико је $\sigma^{(1)} > 0$ у питању је једноосно затезање, а уколико је $\sigma^{(1)} < 0$, тада је стање напона једноосно сабијање. Особине напона су: [2]

- Вектор напона $\vec{t}(M, \vec{n})$ је увек колинеаран са $\vec{e}^{(1)}$,
- Уколико је $\vec{n}$ ортогоналан на $\vec{e}^{(1)}$ онда важи да је $\vec{t}(M, \vec{n}) = 0$.

4.4.2 Стање смицања

У тачки М чисто смицајно стање напона се дешава када је један од главних напона једнак нули, а друга два су супротних знакова.

Уколико је: [2]

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)} &= \tau, \\ \sigma^{(2)} &= -\tau, \\ \sigma^{(3)} &= 0,\end{aligned}\tag{4.36}$$

Тада у матричном облику стање напона може да се запише као:

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\tag{4.37}$$

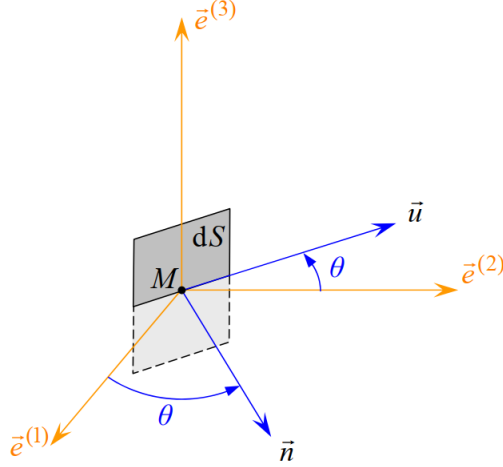
Ако се посматрају напони у главној равни, то су напони који делују на површину елемента са нормалним правцем садржаним у главној равни $(\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)})$ – слика 4.9. Ако је θ угао који нормала $\vec{n}$ заклапа са правцем $\vec{e}^{(1)}$ где су пројекције $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$. Вектор напона у тачки М у правцу $\vec{n}$ дат је изразом:

$$[\vec{t}(M, \vec{n})] = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}.\tag{4.38}$$

Према томе важи да је:

$$\vec{t}(M, \vec{n}) = (\tau \cos \theta, -\tau \sin \theta, 0),\tag{4.39}$$

где су компоненте изражене у главној бази $(\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(3)})$.



Слика 4.9: Елемент површине ортогоналан на главну равн $(\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)})$

Компоненте вектора напона са базним векторима $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{e}^{(3)})$ – слика 4.9, добијених ротацијом θ око правца $\vec{e}^{(3)}$, се могу одредити следећим изразом:

$$[\vec{t}(M, \vec{n})] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \cos \theta \\ -\tau \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ -2\tau \sin \theta \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}.\tag{4.40}$$

Дакле, компоненте вектора напона у бази $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{e}^{(3)})$ су:

$$\vec{t}(M, \vec{n}) = (\tau \cos 2\theta, -\tau \sin 2\theta, 0), \quad (4.41)$$

- Нормална компонента: $t_n = \tau \cos 2\theta,$ (4.42)

- Тангентна компонента: $t_t = -\tau \sin 2\theta.$ (4.43)

Да би се анализирале особине смицајног напона у случају када је база $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{e}^{(3)})$, анализира се неколико случаја ротације.

1. Уколико је:

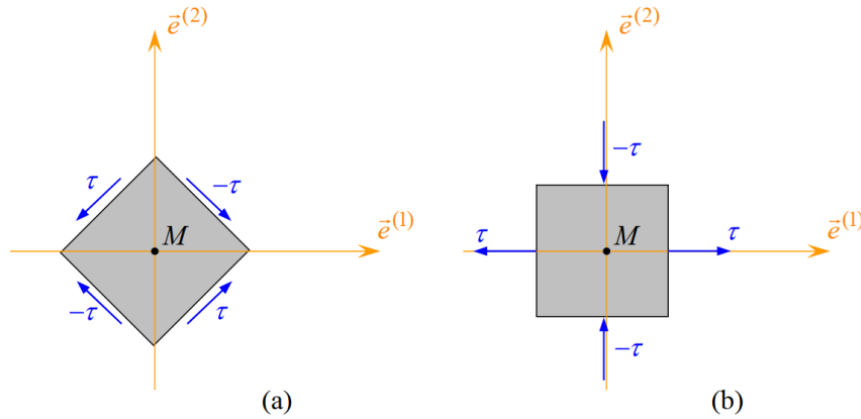
$$\begin{aligned} \theta = \frac{\pi}{4}; \theta = \frac{\pi}{4} + \pi & \begin{cases} t_n = 0 \\ t_t = -\tau \end{cases} \\ \theta = 3\frac{\pi}{4}; \theta = 3\frac{\pi}{4} + \pi & \begin{cases} t_n = 0 \\ t_t = \tau \end{cases} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Резултати су приказани на слици 4.10 (а).

2. Уколико је:

$$\begin{aligned} \theta = 0; \theta = \pi & \begin{cases} t_n = \tau \\ t_t = 0 \end{cases} \\ \theta = \frac{\pi}{2}; \theta = \frac{\pi}{2} + \pi & \begin{cases} t_n = -\tau \\ t_t = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Резултати су приказани на слици 4.10 (б).



Слика 4.10: Стање напона при чистом смицању

Матрица напона у случају чистог смицања при ротацији θ правца $\vec{e}^{(3)}$ (слика 4.10) може да се напише као:

$$\begin{bmatrix} \tau \cos 2\theta & -\tau \sin 2\theta & 0 \\ -\tau \sin 2\theta & -\tau \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

4.4.3 Равно стање напона

Равно стање напона у некој тачки се јавља искључиво онда када је један од главних напона једнак нули.

За приказ равног стања узећемо као пример да је $\sigma^{(3)} = 0$. Тада је матрица напона:

$$\begin{bmatrix} \sigma^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

За базе добијене ротацијом главних база око правца $\vec{e}^{(3)}$ матрица напона је:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

5 Еластично понашање анизотропних материјала

У зависности од тога како се мењају физичке и механичке карактеристике материјала по различитим правцима, сви материјали се могу поделити на изотропне и анизотропне. Изотропни материјали имају исте особине у свим материјалним правцима, док анизотропни материјали имају различите особине у различитим смеровима материјала.

Напон и деформације у материјалу повезани су законима понашања материјала, који описују механичке особине материјала и утврђују се експерименталним путем. Највећи број материјала се понаша линеарно еластично, односно постоји линеарна зависност између деформација и напона у материјалу. Релације које дају везу између напона и деформација представљају конститутивне релације.

5.1 Тензор крутости и попустљивости

Везу између компоненти тензора напона и тензора деформација даје тензор крутости C_{ij} , који се у литератури може наћи и под називом тензор еластичности. Ако се напрезања и деформације запишу у облику вектора, а тензор крутости у матричном облику следи да је: [8]

$$\sigma = C\varepsilon.$$

Напрезања и деформације су тензори другог реда, а еластичност (крутост) тензор четвртог реда, па се претходни израз може записати и као:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (5.1)$$

У најопштијој форми тензор крутости за анизотропне материјале може да се запише као:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{1222} \\ & & C_{3333} & C_{2333} & C_{1333} & C_{1233} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{1223} \\ \text{Симетрично} & & & & C_{1313} & C_{1213} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

У општем случају C_{ijkl} је запис тензора четвртог реда који има $3^4 = 81$ компоненти. Компоненте матрице крутости се називају коефицијенти крутости или материјалне константе. Због симетрије тензора деформације важи да је:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (5.3)$$

Следи да се две константе које стоје уз ε_{kl} и ε_{lk} могу свести на једну константу, чиме се број материјалних константи смањује на 54. Због симетрије тензора напона важи да је:

$$C_{ijkl} = C_{jikl}. \quad (5.4)$$

Симетрија тензора напона смањује број константи за 18, па се број материјалних константи своди на 36. Међутим сам тензор крутости има своју симетрију па се број материјалних константи смањује за 15.

Конечно за дефинисање еластичног понашања материјала број материјалних константи је 21. Овакав материјал се због својих особина назива анизотропним.

Напон и деформацију је применом Војтове нотације (4.30) могуће записати коришћењем једног индекса, а тензор крутости са два индекса. Напон је сада могуће записати као:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j,$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

У инжењерској пракси је приликом задавања оптерећења потребно одредити деформације, па је стога потребно дефинисати инверзну матрицу крутости, која се другачије назива **матрица попустљивости**. Материјалне константе се изражавају преко коефицијената попустљивости.

$$\varepsilon = S \sigma, \quad (5.7)$$

$$S = C^{-1},$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

5.2 Промена координатног система

Нека је $C = [C_{ij}]$ матрица крутости у бази $(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, а матрица $C' = [C'_{ij}]$ је матрица крутости у бази $(\vec{e}') = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$. Матрице крутости приказују зависност напон-деформација и важи да је:

- База $(\vec{e})$:

$$\sigma = C \varepsilon, \quad (5.9)$$

- База $(\vec{e}')$:

$$\sigma' = C' \varepsilon'. \quad (5.10)$$

Прелазак из једног у други базни систем захтева увођење матрице трансформације, па се напон и деформације могу се записати на следећи начин:

$$\begin{aligned} \sigma' &= T_\sigma \sigma, \\ \varepsilon' &= T_\varepsilon \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Претходне релације (5.11) се другачије могу записати као:

$$\begin{aligned} \sigma &= T_\sigma^{-1} \sigma', \\ \varepsilon &= T_\varepsilon^{-1} \varepsilon'. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Релација за трансформацију напона се може записати на следећи начин:

$$\begin{aligned}\sigma' &= T_\sigma \sigma = T_\sigma C \varepsilon, \\ \sigma' &= T_\sigma C T_\varepsilon^{-1} \varepsilon'.\end{aligned}\quad (5.13)$$

Претходном релацијом (5.13) дефинисан је директан однос трансформисаних напона и деформација, па је могуће дефинисати трансформисану матрицу крутости:

$$C' = T_\sigma C T_\varepsilon^{-1}. \quad (5.14)$$

На исти начин је могуће извести и матрицу попустљивости тако да је:

$$S' = T_\varepsilon S T_\sigma^{-1}. \quad (5.15)$$

Матрица трансформације напона дате су релацијама 4.31 до 4.35, док матрица трансформације деформација има исте коефицијенте као и код напона:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Инверзна матрица трансформације има следећи облик:

$$T_\varepsilon^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

5.3 Врсте материјалне симетрије

Као што је већ познато, сваки анизотропни материјал има еластичну матрицу дефинисану 21 независном материјалном константом. Већина анизотропних материјала има такву структуру која садржи једну или више равни симетрије. Те геометријске симетрије доводе до редуковања броја независних константи које описују еластично понашање материјала. Због те чињенице, код анизотропних материјала постоји неколико различитих подгрупа материјала, од којих се издвајају моноклинички и ортотропни материјали.

Ако се дефинишу два Декартова координатна система (x_1, x_2, x_3) и $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ могуће је дефинисати величину a_{ij} као косинус угла између оси $\bar{x}_i$ и x_j .

$$a_{ij} = \cos(\bar{x}_i, x_j). \quad (5.18)$$

Изрази за трансформацију компоненти тензора другог реда при ротацији из координатног система (x_1, x_2, x_3) у координатни систем $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ се записују као: [8]

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq}, \\ \bar{\varepsilon}_{ij} &= a_{ip} a_{jq} \varepsilon_{pq}.\end{aligned}\quad (5.19)$$

Због чињенице да је тензор крутости тензор четвртог реда, следи да је:

$$\bar{C}_{ijkl} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{ls}C_{pqrs}. \quad (5.20)$$

5.4 Моноклинички материјали

Случај када изотропни материјал поседује једну раван симетрије назива се моноклинички материјал.

Нека је (x_1, x_2) раван симетрије, и нека је x_3 је нормала на ту раван.

$$\bar{x}_1 = x_1, \quad \bar{x}_2 = x_2, \quad \bar{x}_3 = -x_3.$$

Претходни изрази не описују ротацију координатног система, већ описује рефлексију у односу на раван симетрије. У случају еластичне симетрије мора важити да тензор еластичности не мења вредности компоненти: [8]

$$\bar{C}_{ijkl} = C_{ijkl}. \quad (5.21)$$

Општи израз за трансформацију тензора крутости (5.20) је:

$$\bar{C}_{ijkl} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{ls}C_{pqrs}.$$

При овој трансформацији важи да је $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = -1$, док су сви остали $a_{ij} = 0$. Тада матрица трансформације напона може да се напише као:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Трансформација компоненте C_{1113} се своди на:

$$\bar{C}_{1113} = a_{11}a_{11}a_{11}a_{33}C_{1113} = -C_{1113}, \quad (5.23)$$

уз услов да је:

$$\bar{C}_{1113} = -C_{1113}.$$

Претходни слов може бити испуњен једино уколико је $C_{1113} = 0$. Врло лако се може доказати да сви C_{ijkl} који у себи садрже непаран број индекса 3 имају вредност нула.

$$C_{1123} = C_{1113} = C_{2223} = C_{2213} = C_{2333} = C_{1333} = C_{1223} = C_{1213} = 0. \quad (5.24)$$

Од 21 независног коефицијента који карактерише еластично понашање изотропних материјала, код моноклиничких материјала 8 коефицијената су нуле. Матрица крутости моноклиничког материјала је:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & C_{1222} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & C_{1233} \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & C_{2313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2313} & C_{1313} & 0 \\ C_{1112} & C_{1222} & C_{1233} & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Применом инжењерске (Војтове) нотације (4.30) тензор крутости може да се сведе на:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Дакле за дефинисање еластичног понашања моноклиничких материјала потребно је дефинисати 13 независних материјалних константи, а конститутивна релација гласи:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Осим преко коефицијената крутости, конститутивна једначина може се представити и преко коефицијената попустљивости:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

6 Еластично понашање ортотропних композитних материјала

6.1 Конститутивне релације

Уколико у једној тачки постоје три узајамно нормалне равни симетрије, тада се тај материјал назива ортотропним. Ортотропни материјал заправо представља моноклинички материјал са још две међусобно нормалне равни симетрије. Због те чињенице се конститутивна релација изводи на исти начин као и код моноклиничких материјала.

Уколико је (x_1, x_3) раван еластичне симетрије, где је x_2 раван симетрије тада важи да је:[8]

$$\bar{x}_1 = x_1, \quad \bar{x}_2 = -x_2, \quad \bar{x}_3 = x_3. \quad (6.1)$$

При овој трансформацији важи да су чланови матрице трансформације $a_{11} = 1$, $a_{22} = -1$, $a_{33} = 1$, док су сви остали $a_{ij} = 0$. Користећи принцип као код моноклиничког материјала, доказује се да су чланови тензора еластичности који имају непаран број индекса 2 једнаки нули па се добија да је:

$$\bar{C}_{1222} = a_{11}a_{22}a_{22}a_{22}C_{1222} = -C_{1222} = 0. \quad (6.2)$$

Чланови који се овим принципом могу свести на нулу, а који нису узети у обзир код моноклиничког материјала приликом доказивања симетрије (x_1, x_2) су:

$$C_{1112} = C_{1222} = C_{1233} = C_{2313} = 0. \quad (6.3)$$

Број независних константи са 13 (колико има моноклинички материјал) се смањује за 4 и сада је 9. Уколико се постави да је раван симетрије (x_2, x_3) добија се да нема додатних чланова који се могу свести на нулу по принципу из претходне две симетрије. Тиме се доказује да ако материјал има две међусобно нормалне равни симетрије мора да има и трећу. Такав материјал је ортотропан и тензор крутости је:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Применом Војтове нотације (4.30) матрица крутости се своди на следећи облик:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

За дефинисање еластичног понашања ортотропних материјала потребно је дефинисати 9 независних материјалних константи, а конститутивна релација гласи:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Линеарну зависности између деформација и напона дефинише и матрица попустљивости за коју важи:

$$S = C^{-1},$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

6.2 Материјалне константе

6.2.1 Одређивање материјалних константи

Да би се описало еластично понашање ортотропног материјала потребно је девет коефицијената, који се дефинишу преко материјалних константи и које могу бити:

- Коефицијенти крутости $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{22}, C_{23}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66}$,
- Или коефицијенти попустљивости $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{22}, S_{23}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66}$.

Коефицијенти материјалне попустљивости S_{ij} се најчешће одређују експерименталним путем у лабораторији, где се коефицијенти одређују преко инжењерских константи, Јангових модула еластичности, Поасонових коефицијената и модула смицања. Тестови које је потребно одрадити су једноосно затезање или чисто смицање.

Када се одреде сви коефицијенти попустљивости, тада је могуће израчунати и коефицијенте крутости, а релације које су директна веза између њих су изведене преко једначина (6.6) и (6.7): [2]

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{\Delta S}, & C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{\Delta S}, \\ C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{\Delta S}, & C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{\Delta S}, \\ C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{\Delta S}, & C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{\Delta S}, \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}}, & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}}, & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}}, \\ \Delta S &= S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

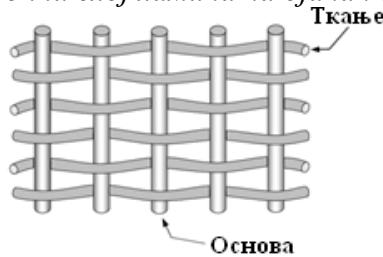
Одређивање материјалних константи ортотропног материјала може да се покаже на примеру слоја ламината који је ојачан фабричком тканином (слика 6.1). Слој има три узајамно нормалне равни симетрије и ако је његово понашање еластично, слој се понаша као ортотропни материјал.

Најчешће су фабричке тканине направљене од једнодирекционих влакана која су испреплетана под углом од 90 степени (Слика 6.2). Влакна у једном правцу представљају основу, а влакна која се налазе под углом од 90 степени у односу на њих су ткање. [2]

Правец L је правец основе, правец T правец ткања, а правец нормалан на раван ткања означен је са T'. Дакле кординатни систем у коме се посматра цео слој (1,2,3) се поклапа са оним који је везан за смер влакана (L, T, T').



Слика 6.1: Ортотропни слој ламината ојачан фабричком тканином



Слика 6.2: Фабричка тканина

6.2.2 Тестови једноосних затезања

Затезање по правцу основе

У случају затезања у основном правцу (правцу L, слика 6.1), сви напони су нула, осим напона σ_1 .

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0. \quad (6.9)$$

Однос напон-деформација се приказује коефицијената попустљивости, а једначина напон-деформација је:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из претходне једначине се добијају следеће релације :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1, \\ \varepsilon_2 &= S_{12}\sigma_1, \\ \varepsilon_3 &= S_{13}\sigma_1, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0.\end{aligned}\tag{6.10}$$

Из претходних релација (6.10) следи да је:

$$\sigma_1 = \frac{1}{S_{11}}\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{S_{12}}{S_{11}}\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 = \frac{S_{13}}{S_{11}}\varepsilon_1.\tag{6.11}$$

Због чињенице да Јангов модул еластичности дефинише однос напон-деформација ($\sigma = E\varepsilon$) из једначине за σ_1 се закључује да је модул еластичности за затезање у основном правцу (правцу 1):

$$E_L = E_1 = \frac{1}{S_{11}}.\tag{6.12}$$

Поасонов коефицијент се одређује као однос попречног смањења и уздужног продужења неког материјала приликом тестирања затезања, тј однос деформације по два правца код једноосног затезања. Пошто су релације за ε_2 и ε_3 приказане као функција деформације у правцу затезања материјала могу се дефинисати Поасоновии коефицијенти:

$$\begin{aligned}\nu_{LT} = \nu_{12} &= -\frac{S_{12}}{S_{11}}, \\ \nu_{LT'} = \nu_{13} &= -\frac{S_{13}}{S_{11}}.\end{aligned}\tag{6.13}$$

Затезање по правцу ткања

У случају затезања у правцу ткања (правац Т), сви напони су нула, осим σ_2 :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_3 = 0, \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{6.14}$$

Из претходне једначине се добијају следеће релације :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= S_{12}\sigma_2, \\ \varepsilon_2 &= S_{22}\sigma_2, \\ \varepsilon_3 &= S_{23}\sigma_2, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0.\end{aligned}\tag{6.15}$$

Као и приликом једноосног затезања у основном правцу на исти начин се могу дефинисати модул еластичности и Поасонови коефицијенти:

$$E_T = E_2 = \frac{1}{S_{22}}, \quad \nu_{TL} = \nu_{21} = -\frac{S_{12}}{S_{22}}, \quad \nu_{TT'} = \nu_{23} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}. \quad (6.16)$$

Затезање по правцу Т'

На идентичан начин као и приликом затезања у правцу 1 и 2 добија се Јангов модул и Поасонови коефицијенти и они су:

$$E_{T'} = E_3 = \frac{1}{S_{33}}, \quad \nu_{T'L} = \nu_{31} = -\frac{S_{13}}{S_{33}}, \quad \nu_{T'T} = -\frac{S_{23}}{S_{33}}. \quad (6.17)$$

Упоредивањем претходних релација (6.17) може се закључити да је однос између Јанговог модула еластичности и његовог одговарајућег Поасоновог коефицијента константан за свако једноосно затезање:

$$\frac{E_1}{\nu_{12}} = \frac{E_2}{\nu_{21}}, \quad \frac{E_1}{\nu_{13}} = \frac{E_3}{\nu_{31}}, \quad \frac{E_2}{\nu_{23}} = \frac{E_3}{\nu_{32}}. \quad (6.18)$$

Овај однос се може дефинисати у општем облику као:

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6.19)$$

6.2.3 Смицајни тестови

Смицање у равни ортотропног слоја има само компоненту напона $\sigma_{12} = \sigma_6$ па се напонско стање дефинише једначином:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Добијају се релације:

$$\begin{aligned} \sigma_6 &= C_{66} \varepsilon_6, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Може се увести модул смицања па је:

$$G_{12} = C_{66} = \frac{1}{S_{66}}. \quad (6.22)$$

Истим принципом могу се дефинисати и друга два модула код попречног смицања:

- У основном правцу:

$$G_{13} = C_{55} = \frac{1}{S_{55}}, \quad (6.23)$$

- У правцу ткања:

$$G_{23} = C_{44} = \frac{1}{S_{44}}. \quad (6.24)$$

6.2.4 Матрица попустљивости изражена преко инжењерских константи

Због чињенице да се коефицијенти попустљивости приказују као функција инжењерских константи, тестови затезања и смицања су послужили да се изведу коефицијенти попустљивости.

Релација (6.7), која описује еластично понашање, које се увођењем инжењерских константи може написати као:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

Дакле еластично понашање ортотропног материјала се може описати са девет међусобно независних инжењерских константи:

- Три Јангова модула: E_1, E_2, E_3 (или $E_L, E_T, E_{T'}$),
- Три Поасонова коефицијента: $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ (или $\nu_{LT}, \nu_{LT'}, \nu_{TT'}$),
- Три модула смицања: G_{12}, G_{13}, G_{23} (или $G_{LT}, G_{LT'}, G_{TT'}$).

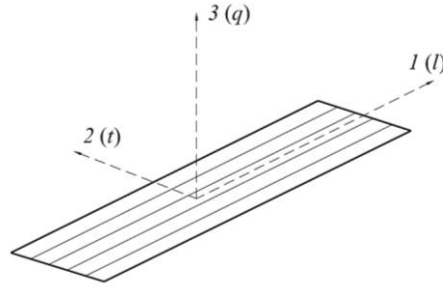
Дефинисањем коефицијената попустљивости, дефинисали смо и коефицијенте крутости. Коришћењем релација (6.8) израчунавају се сви коефицијенти крутости и самим тим дефинисана је и матрица крутости.

6.3 Трансферзално изотропни материјали

Трансферзално изотропни материјали другачије се називају једнодирекциони материјали, а њихово понашање је попут ортотропног материјала са једном осом ротације. Трансферзално изотропни материјал представља посебан случај ортотропног материјала.

Као пример ортотропног материјала узима се један композитни слој приказан на слици 5.3, означен правцима $(1,2,3) = (l, t, q)$ где је правац $1 = l$ правац влакана, $2 = t$ правац у равни слоја нормалан на правац влакана и $3 = q$ је правац који чини десни координатни систем са правцима $(1,2)$. Ако може да се дефинише раван (x_1, x_2) таква да је свака раван нормална на њу раван еластичне симетрије, такав материјал називамо трансферзално изотопан, а та раван се назива раван трансферзалне изотопије.

Ако су дефинисане нове осе $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ у равни нормалној на x_3 , где $\bar{x}_1$ заклапа угао θ са осом x_1 , а $\bar{x}_2$ такође заклапа угао θ са осом x_2 – тада је раван $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ такође раван еластичне симетрије и важи да је:[8]



Слика 6.3: Стандардно инжењерско означавање ортотропног композита

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \cos \theta x_1 + \sin \theta x_2, \\ \bar{x}_2 &= -\sin \theta x_1 + \cos \theta x_2, \\ \bar{x}_3 &= x_3.\end{aligned}\tag{6.26}$$

Када се претходне релације примене на конститутивне релације за ортотропни материјал (6.4), сређивањем изаза се се добија тензор еластичности:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1113} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) \end{bmatrix}.\tag{6.27}$$

Применом Војтове нотације (4.30) матрица крутости се своди на:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}.\tag{6.28}$$

Матрица попустљивости за трансферзално изотропне материјале има следећи облик:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Анализом матрице крутости и попустљивости јасно се види да је за описивање еластичног понашања трансферзално изотопних материјала потребно пет независних еластичних константи - $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{33}, S_{44}$.

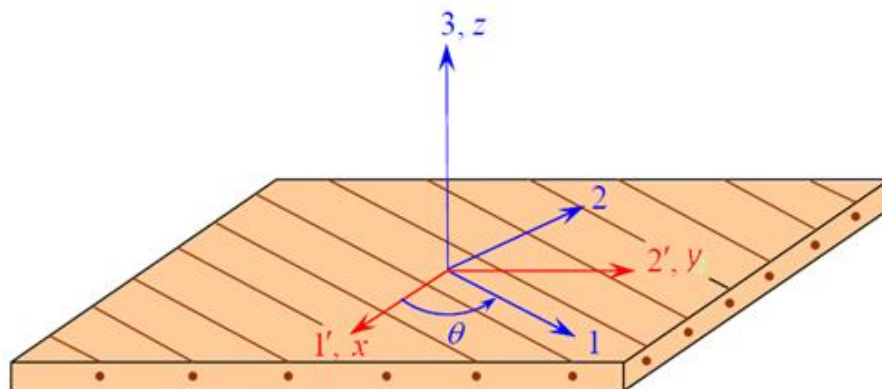
7 Ваносно понашање композитних материјала

7.1 Еластично понашање ваносних слојева

У поглављима 5 и 6 описано је еластично понашање за случај када су правци влакана истог правца као осе координатног система у коме се посматра слој ламината. Правци влакана се другачије називају правци материјала.

У овом поглављу биће описан случај када се правац влакана не поклапа са координатним системом у коме се посматра ламинатни слој, па се зато тај случај назива ваносно понашање композитног материјала.

Као пример на коме се може приказати ваносно понашање композита, узет је слој ојачан фабричком тканином (слика 7.1) са правцима (1,2,3) и који, као у поглављу шест, представља ортотропни композит. Раван (1,2) је раван слоја, а правац 1 се поклапа са правцем влакана. За дефинисање ваносног понашања потребно је дефинисати еластична својства слоја описаног у координатном систему слоја ламината (1',2',3'), чији правац 1' са правцем влакана заклапа угао θ . Овај координатни систем се другачије записује у облику (x,y,z). За координатни систем који је постављен према правцима влакана и важи (1,2,3)=(L,T,T').



Слика 7.1: Координатни систем (1,2,3) постављен према смеру влакана и референтни систем ламината (1',2',3)=(x,y,z)

7.1.1 Матрица крутости и попустљивости

Еластично понашање ортотропног слоја дато је релацијама (6.5) и (6.6). Матрице крутости C' и попустљивости S' су везане за координатни систем (1',2',3), и да би се дефинисале потребно је да се примене једначине трансформације (5.14 и 5.15). Матрице крутости и попустљивости се трансформишу из координатног система (1,2,3) у (1',2',3):

$$C' = T_{\sigma} C T_{\epsilon}^{-1}, \quad (7.1)$$

$$S' = T_{\epsilon} S T_{\sigma}^{-1}. \quad (7.2)$$

Матрице трансформације напона из једног координатног система у други који је заротиран за угао θ дат је релацијама 5.11 до 5.15, док је трансформација деформација дата релацијама 5.16 и 5.17.

Из једначине 7.1 се закључује да је матрица трансформације крутости $T_\sigma T_\varepsilon^{-1}$, док је матрица трансформације попустљивости $T_\varepsilon T_\sigma^{-1}$. Обзиром да је $T_\sigma = T_\varepsilon$ онда следи да су матрице трансформације крутости и попустљивости међусобно једнаке и могу се записати у следећем облику:

$$A_{ij} = T_\sigma T_\varepsilon^{-1} = T_\varepsilon T_\sigma^{-1},$$

$$A_{ij} = C'_{ij} \text{ или } A_{ij} = S'_{ij}$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & A_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & A_{36} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Једначине трансформације константи крутости и попустљивости, које важе у координатном систему (1',2',3), и које су добијене применама релација (7.1) и (7.2) наведене су у табелама 2 и 3:

$$\begin{aligned} C'_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta + C_{22} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ C'_{13} &= C_{12} \cos^2 \theta + C_{23} \sin^2 \theta \\ C'_{14} &= 0, \quad C'_{15} = 0 \\ C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ C'_{22} &= C_{11} \sin^4 \theta + C_{22} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ C'_{23} &= C_{13} \sin^2 \theta + C_{23} \cos^2 \theta \\ C'_{24} &= 0, \quad C'_{25} = 0 \\ C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ C'_{33} &= C_{22}, \quad C'_{34} = 0, \quad C'_{35} = 0 \\ C'_{36} &= (C_{13} - C_{23}) \sin \theta \cos \theta \\ C'_{44} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta \\ C'_{45} &= (C_{55} - C_{44}) \sin \theta \cos \theta, \quad C'_{46} = 0 \\ C'_{55} &= C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta, \quad C'_{56} = 0 \\ C'_{66} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned}$$

Табела 2: Константе крутости код ортотропних композита, правац 1 заклапа угао θ са референтном x осом (слика 7.1)

Дакле, конститутивна релација за ваносно понашање ортотропних композита има следећи облик:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} S'_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ S'_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ S'_{13} &= S_{12} \cos^2 \theta + S_{23} \sin^2 \theta \\ S'_{14} &= 0, \quad S'_{15} = 0 \\ S'_{16} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta \\ S'_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + S_{22} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ S'_{23} &= S_{13} \sin^2 \theta + S_{23} \cos^2 \theta \\ S'_{24} &= 0, \quad S'_{25} = 0 \\ S'_{26} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta \\ S'_{33} &= S_{33}, \quad S'_{34} = 0, \quad S'_{35} = 0 \\ S'_{36} &= 2(S_{13} - S_{23}) \sin \theta \cos \theta \\ S'_{44} &= S_{44} \cos^2 \theta + S_{55} \sin^2 \theta \\ S'_{45} &= (S_{55} - S_{44}) \sin \theta \cos \theta, \quad S'_{46} = 0 \\ S'_{55} &= S_{44} \sin^2 \theta + S_{55} \cos^2 \theta, \quad S'_{56} = 0 \\ S'_{66} &= 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66}] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned}$$

Табела 3: Константе попустљивости за ортотропни ваносни слој

Када конститутивну релацију за ортотропне материјале изразимо преко матрице попустљивости она гласи:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

Уколико слој композита приказан на слици 7.1 посматрамо као једнодирекциони материјал, онда се изрази за трансформацију коефицијената крутости и попустљивости могу на исти начин извести као и код ортотропних материјала. Табеле 4 и 5 приказују релације трансформације код једнодирекционих материјала:

$$\begin{aligned}
C'_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta + C_{22} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
C'_{13} &= C_{12} \cos^2 \theta + C_{23} \sin^2 \theta \\
C'_{14} &= 0, \quad C'_{15} = 0 \\
C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
C'_{22} &= C_{11} \sin^4 \theta + C_{22} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
C'_{23} &= C_{13} \sin^2 \theta + C_{23} \cos^2 \theta \\
C'_{24} &= 0, \quad C'_{25} = 0 \\
C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
C'_{33} &= C_{22}, \quad C'_{34} = 0, \quad C'_{35} = 0 \\
C'_{36} &= (C_{12} - C_{23}) \sin \theta \cos \theta \\
C'_{44} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \cos^2 \theta + C_{66} \sin^2 \theta \\
C'_{45} &= \left[C_{66} - \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \right] \sin \theta \cos \theta, \quad C'_{46} = 0 \\
C'_{55} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \sin^2 \theta + C_{66} \cos^2 \theta, \quad C'_{56} = 0 \\
C'_{66} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
\end{aligned}$$

Табела 4: Трансформација коефицијената крутости код једнодирекционих композита, правац влакана заклапа угао θ са правцем x осе (слика 7.1)

$$\begin{aligned}
S'_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
S'_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
S'_{13} &= S_{12} \cos^2 \theta + S_{23} \sin^2 \theta \\
S'_{14} &= 0, \quad S'_{15} = 0 \\
S'_{16} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta \\
S'_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + S_{22} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
S'_{23} &= S_{12} \sin^2 \theta + S_{23} \cos^2 \theta \\
S'_{24} &= 0, \quad S'_{25} = 0 \\
S'_{26} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta \\
S'_{33} &= S_{22}, \quad S'_{34} = 0, \quad S'_{35} = 0 \\
S'_{36} &= 2(S_{12} - S_{23}) \sin \theta \cos \theta \\
S'_{44} &= 2(S_{22} - S_{23}) \cos^2 \theta + S_{66} \sin^2 \theta \\
S'_{45} &= [S_{66} - 2(S_{22} - S_{23})] \sin \theta \cos \theta, \quad S'_{46} = 0 \\
S'_{55} &= 2(S_{22} - S_{23}) \sin^2 \theta + S_{66} \cos^2 \theta, \quad S'_{56} = 0 \\
S'_{66} &= 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66}] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
\end{aligned}$$

Табела 5: Трансформација коефицијената попустљивости једнодирекционих композита

Упоредивањем константи датим у табелама од 2 до 5 може се закључити да су изрази за једнодирекционе материјале и ортотропне материјале идентични у случају када за C'_{ij} или S'_{ij} важи да је $i, j = 1, 2, 6$. – као што је то приказано на слици 7.2.

Идентичне једначине

Једначине које се разликују

$$\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{16} & C'_{13} & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{26} & C'_{23} & 0 & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{66} & C'_{36} & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{36} & C'_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}.$$

Слика 7.2: Упоредивање матрице крутости ортотропних и једнодирекционих композита

7.1.2 Матрице крутости и попустљивости као функције угла

Константе крутости и попустљивости се могу представити као функције угла θ , где се функције синуса и косинуса угла, којима су дефинисани коефицијенти, трансформишу на следећи начин: [2]

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta), & \cos^3 \theta \sin \theta &= \frac{1}{8}(2 \sin 2\theta + \sin 4\theta) \\ \sin^2 \theta \cos^2 \theta &= \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta), & \cos \theta \sin^3 \theta &= \frac{1}{8}(2 \sin 2\theta - \sin 4\theta) \\ \sin^4 \theta &= \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2\theta - \cos 4\theta), & \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), & \cos^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Коришћењем претходних релација (7.6) и увођењем функција U , коефицијент крутости C'_{11} се може изразити у следећем облику:

$$\begin{aligned} C'_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\ U_1 &= \frac{1}{8}(3C_{11} + 3C_{22} + 2C_{12} + 4C_{66}) \\ U_2 &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}) \\ U_3 &= \frac{1}{8}(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66}) \end{aligned}$$

Претходна извођења се могу применити на сваку константу. Табела 6 приказује све коефицијенте крутости код једнодирекционих композита. Аналогно се могу добити и изрази за константе попустљивости.

$$\begin{aligned}
C'_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\
C'_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta, & C'_{13} &= U_6 + U_7 \cos 2\theta \\
C'_{16} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \\
C'_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\
C'_{23} &= U_6 - U_7 \cos 2\theta \\
C'_{26} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta \\
C'_{33} &= C_{22}, & C'_{36} &= U_7 \sin 2\theta \\
C'_{44} &= U_8 + U_9 \cos 2\theta, & C'_{45} &= U_{10} \sin 2\theta \\
C'_{55} &= U_8 + U_{10} \cos 2\theta, & C'_{66} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta
\end{aligned}$$

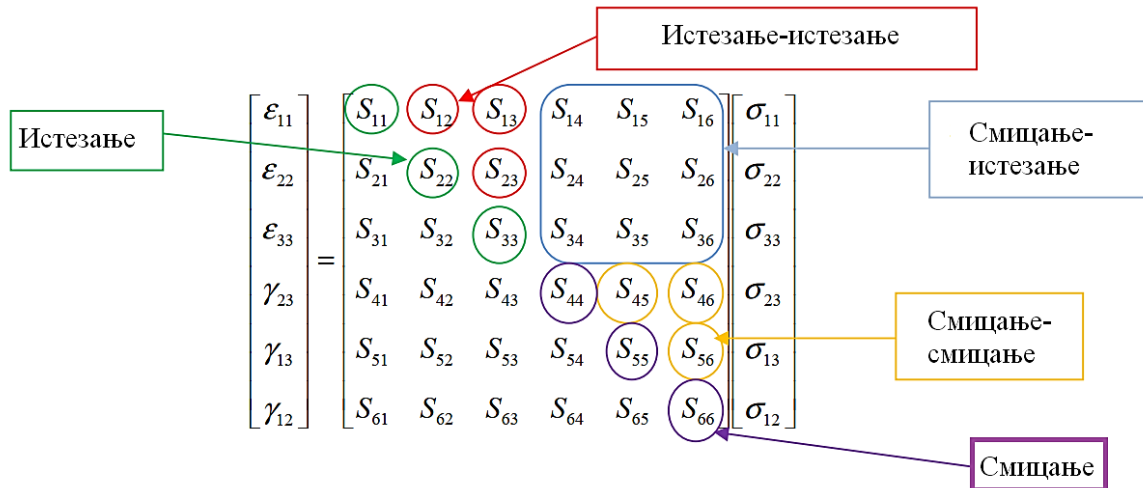
$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{8} (3C_{11} + 3C_{22} + 2C_{12} + 4C_{66}) \\
U_2 &= \frac{1}{2} (C_{11} - C_{22}) \\
U_3 &= \frac{1}{8} (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66}) \\
U_4 &= \frac{1}{8} (C_{11} + C_{22} + 6C_{12} - 4C_{66}) \\
U_5 &= \frac{1}{8} (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} + 4C_{66}) = \frac{1}{2} (U_1 - U_4) \\
U_6 &= \frac{1}{2} (C_{12} + C_{23}) \\
U_7 &= \frac{1}{2} (C_{12} - C_{23}) \\
U_8 &= \frac{1}{4} (C_{22} - C_{23} + 2C_{66}) \\
U_9 &= \frac{1}{4} (C_{22} - C_{23} - 2C_{66}) \\
U_{10} &= \frac{1}{4} (2C_{66} - C_{22} + C_{23})
\end{aligned}$$

Табела 6: Једначине константи крутости једнодирекционих композита као функција угла

7.1.3 Ефекат спрезања

Код анизотропних материјала постоји значајан ефекат спрезања између задатог напона и добијене деформације. Нормалне и смичуће компоненте напона и деформација су неспрегнуте у материјалном координатном систему (координатном систему везаном за правац влакана), што значи да нормално напрезање доводи до појаве нормалних деформација, а смицајно напрезање доводи до смицајних деформација. Међутим у референтном координатном систему долази до ефекта спрезања, што се може приметити у једначинама трансформације коефицијената попустљивости – табеле 2-5.

Може се издвојити неколико типова спрезања у оквиру матрице крутости/попустљивости. На слици 7.3 приказана је конститутивна релација за анизотропне материјале, где су у оквиру матрице попустљивости поред коефицијената који карактеришу смицање и истезање обележени и сви типови спрезања анизотропног материјала.



Слика 7.3: Типови спрезања анизотропног материјала

Вредности еластичних константи могу се добити експерименталним путем, тј специфичним тестовима којим се одређују материјалне константе материјала, које користимо за дефинисање коефицијената попустљивости. Као што је већ познато тестовима је могуће добити вредности Јанговог модула еластичности E , Поасоновог коефицијента ν и модула смицања G . Међутим код спрезања се уводе и коефицијенти спрезања, које је могуће добити аналитичком методом. На слици 7.3 коефицијенти попустљивости су подељени у пет типова:

- Коефицијенти који карактеришу искључиво истезање, који су дефинисани преко одговарајућег Јанговог модула еластичности E – обележени зеленом бојом.
- Коефицијенти који карактеришу два истезања, који су дефинисани преко одговарајућег односа Поасоновог коефицијента ν и Јанговог модула еластичности E – обележени црвеном бојом.
- Коефицијенти који карактеришу истезање и смицање, који су дефинисани преко одговарајућег односа коефицијента спрезања η и модула смицања G – обележени плавом бојом.
- Коефицијенти који карактеришу два смицања, који су дефинисани односом коефицијента спрезања μ и модула смицања G – обележени жутом бојом.
- Коефицијенти који карактеришу искључиво смицање, који су дефинисани преко одговарајућег модула смицања G – обележени љубичастом бојом.

Дакле када се коефицијенти попустљивости изразе преко еластичних константи конститутивна једначина се може записати у следећем облику:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{\eta_{41}}{G_4} & \frac{\eta_{51}}{G_5} & \frac{\eta_{61}}{G_6} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{\eta_{42}}{G_4} & \frac{\eta_{52}}{G_5} & \frac{\eta_{62}}{G_6} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & \frac{\eta_{43}}{G_4} & \frac{\eta_{53}}{G_5} & \frac{\eta_{63}}{G_6} \\ \frac{\eta_{41}}{G_4} & \frac{\eta_{42}}{G_4} & \frac{\eta_{43}}{G_4} & \frac{1}{G_4} & \frac{\mu_{54}}{G_5} & \frac{\mu_{64}}{G_6} \\ \frac{\eta_{51}}{G_5} & \frac{\eta_{52}}{G_5} & \frac{\eta_{53}}{G_5} & \frac{\mu_{54}}{G_5} & \frac{1}{G_5} & \frac{\mu_{65}}{G_6} \\ \frac{\eta_{61}}{G_6} & \frac{\eta_{62}}{G_6} & \frac{\eta_{63}}{G_6} & \frac{\mu_{64}}{G_6} & \frac{\mu_{65}}{G_6} & \frac{1}{G_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

7.2 Константе еластичности

Како би се дефинисали коефицијенти крутости или попустљивости, а самим тим и еластично понашање ваносних слојева, потребно је познавати еластичне константе, које се добијају експерименталним путем, тј тестовима затезања и смицања.

7.2.1 Ваносни затезни тестови

Ваносни затезни тестови укључују затезање по x и y осама координатног система ламината (x, y, z) , где се као резултат добијају одговарајући модули еластичности и Поасонови коефицијенти.

Затезање по x правцу

У случају затезног теста дуж x осе сви напони су нула, осим напона σ_{xx} .

$$\sigma'_1 = \sigma_{xx} \neq 0.$$

Коришћењем еластичне релације са константама попустљивости (7.5) деформације се могу дефинисати као:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= S'_{11} \sigma_{xx}, \\ \varepsilon_{yy} &= S'_{12} \sigma_{xx}, \\ \varepsilon_{zz} &= S'_{13} \sigma_{xx}, \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{xy} = 0, \\ \gamma_{xy} &= S'_{16} \sigma_{xx}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Јангов модул за затезање по x правцу - E_x се рачуна као:

$$E_x = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{1}{S_{11}}. \quad (7.9)$$

Ако се у претходну једначину (7.9) укључи табела 3 или табела 5 добија се:

$$\frac{1}{E_x} = S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (7.10)$$

Када се у претходној релацији (7.10) коефицијенти попустљивости замене за инжењерске константе једнодирекционих или ортотропних композита, измерених у свим правцима материјала, добија се да је:

$$E_L = \frac{1}{S_{11}}, \quad \nu_{LT} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}, \quad E_T = \frac{1}{S_{12}}, \quad G_{LT} = \frac{1}{S_{66}},$$

$$\frac{1}{E_x} = \frac{1}{E_L} \cos^4 \theta + \frac{1}{E_T} \sin^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (7.11)$$

Нормалне деформације ε_{yy} , ε_{zz} у трансферзалним правцима су повезане са нормалном деформацијом у x правцу ε_{xx} преко релација (7.6) па је:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{S_{12}'}{S_{11}'} \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{S_{13}'}{S_{11}'} \varepsilon_{xx}.$$

Претходни изрази омогућују извођење одговарајућег Поасоновог коефицијента ν_{xy} и ν_{xz} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy} &= -\nu_{xy} \varepsilon_{xx}, & \varepsilon_{zz} &= -\nu_{xz} \varepsilon_{xx}, \\ \nu_{xy} &= -\frac{S_{12}'}{S_{11}'}, & \nu_{xz} &= -\frac{S_{13}'}{S_{11}'}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\nu_{xy} = E_x \left[\frac{\nu_{LT}}{E_L} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right], \quad (7.13)$$

$$\nu_{xz} = E_x \left(\frac{\nu_{LT'}}{E_L} \cos^2 \theta + \frac{\nu_{TT'}}{E_T} \sin^2 \theta \right), \quad (7.14)$$

где је $\nu_{LT'} = \nu_{LT}$ за случај када се ради о једнодирекционим композитима.

Релације (7.8) показују да случај затезања по x правцу укључује смицајну деформацију γ_{xy} . Тада је потребно дефинисати коефицијент спрезања $\eta_{xy,x}$ који је аналоган Поасоновом коефицијенту јер повезује две деформације смицајну γ_{xy} и нормалну деформацију ε_{xx} која се јавља у x правцу:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= -\eta_{xy,x} \varepsilon_{xx}, \\ \gamma_{xy} &= S'_{16} \sigma_{xx}, \\ -\eta_{xy,x} \varepsilon_{xx} &= S'_{16} \sigma_{xx}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Следи да је:

$$\eta_{xy,x} = -S'_{16} E_x.$$

Узевши у обзир табелу 3 и табелу 5, коефицијент спрезања се у коначном облику може написати као:

$$\eta_{xy,x} = E_x \left[\left(\frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{2}{E_L} \right) \cos^3 \theta \sin \theta + \left(\frac{2}{E_T} + 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^3 \theta \cos \theta \right]. \quad (7.16)$$

Затезање по у правцу

Тест затезања се може задати и по у-правцу. Међутим овај тест не даје никакву нову информацију у односу на затезање по х-оси. Једина разлика је што се правац затезања помера за угао $\frac{\pi}{2}$. На примеру Јанговог модула за затезање у правцу у (E_y коме одговарају напон и деформација σ_{yy} и ϵ_{yy}) у једначини (7.10) као угао се узима $\theta + \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{1}{E_y} = S'_{22} = \frac{1}{E_L} \sin^4 \theta + \frac{1}{E_T} \cos^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \quad (7.17)$$

$$\gamma_{xy} = -\eta_{xy,y} \epsilon_{yy} = -\eta_{xy,y} \frac{\sigma_{yy}}{E_y}, \quad (7.18)$$

$$\eta_{xy,y} = E_y \left[\left(\frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{2}{E_L} \right) \sin^3 \theta \cos \theta + \left(\frac{2}{E_T} + 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \cos^3 \theta \sin \theta \right] \quad (7.19)$$

7.2.2 Смицајни тестови

Тест смицања у равни слоја

Разматра се случај када се врши тест смицања у равни слоја коме одговара стање напона:

$$\sigma'_6 = \sigma_{xy} \neq 0.$$

Еластична релација се може написати као:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= S'_{16} \sigma_{xy}, \\ \epsilon_{yy} &= S'_{26} \sigma_{xy}, \\ \epsilon_{zz} &= S'_{36} \sigma_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{xz} = 0, \\ \gamma_{xy} &= S'_{66} \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Модул смицања у овом случају је:

$$G_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{1}{S'_{66}}. \quad (7.21)$$

Ако се узму у обзир табеле 3 и 5 претходни израз (7.21) се може написати као:

$$\frac{1}{G_{xy}} = 2 \left(\frac{2}{E_L} + \frac{2}{E_T} + 4 \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{LT}} (\sin^4 \theta \cos^4 \theta). \quad (7.22)$$

Тест смицања у равни слоја укључује нормалне деформације ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} дуж три правца (х, у, z) респективно. Прве две деформације дефинисане су изразима:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= -\eta_{xy,x} \frac{\sigma_{xy}}{E_x} = -\eta_{xy,x} \frac{G_{xy}}{E_x} \gamma_{xy}, \\ \epsilon_{yy} &= -\eta_{xy,y} \frac{\sigma_{xy}}{E_y} = -\eta_{xy,y} \frac{G_{xy}}{E_y} \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Аналогно претходним релацијама, нормална деформација у z правцу ε_{zz} се може написати као:

$$\varepsilon_{zz} = -\eta_{xy,z} \frac{\sigma_{xy}}{E_T} = -\eta_{xy,z} \frac{G_{xy}}{E_T} \gamma_{xy}. \quad (7.24)$$

Коефицијент спрезања је дефинисан следећим изразом:

$$\eta_{xy,z} = -E_T S'_{36} = 2(\nu_{LT} - \nu_{TT'}) \sin \theta \cos \theta. \quad (7.25)$$

Попречни смицајни тест

Када се говори о еластичним модулима који су били дефинисани у претходним тестовима, код једнодирекционих материјала су четири главна модула: E_L, E_L, G_{LT} и ν_{LT} , док се код ортотропних композита јавља пет главних модула: $E_L, E_L, G_{LT}, \nu_{LT}$ и $\nu_{LT'}$. У тачки 7.3 се види да су модули E_L, E_L, G_{LT} и ν_{LT} довољни да опишу дводимензионално понашање композитног слоја. За описивање општијих еластичних проблема потребно је дефинисати еластични модул попречног смицања. Овај тест карактеришу следећи услови:

$$\sigma'_5 = \sigma_{xz} \neq 0 \quad \text{или} \quad \sigma'_4 = \sigma_{yz} \neq 0.$$

У случају овог теста еластичне релације се могу написати у следећем облику:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 0, & \varepsilon_{yy} &= 0, & \varepsilon_{zz} &= 0, \\ \gamma_{yz} &= S'_{45} \sigma_{xz}, \\ \gamma_{xz} &= S'_{55} \sigma_{xz}, \\ \gamma_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Претходне релације показују да у случају попречног смицања постоје само попречне деформације γ_{xz} и γ_{yz} . Модул смицања G_{xz} је:

$$G_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{\gamma_{xz}} = \frac{1}{S'_{55}}. \quad (7.27)$$

У случају ортотропних композита, за дефинисање модула смицања G_{xz} користи се табела 5 па је:

$$\frac{1}{G_{xz}} = \frac{1}{G_{TT'}} \sin^2 \theta + \frac{1}{G_{LT'}} \cos^2 \theta. \quad (7.28)$$

Претходна релација се може применити у случају једнодирекционих композита. У том случају релација (7.28) има следећи облик:

$$\frac{1}{G_{xz}} = \frac{2(1 + \nu_{TT'})}{E_T} \sin^2 \theta + \frac{1}{G_{LT'}} \cos^2 \theta. \quad (7.29)$$

Тест смицања укључује и смицајну деформацију γ_{yz} , преко које се дефинише коефицијент спрезања $\mu_{xz,yz}$:

$$\gamma_{yz} = \mu_{xz,yz} \gamma_{xz} = \mu_{xz,yz} \frac{\sigma_{xz}}{G_{xz}}. \quad (7.30)$$

$$\mu_{xz,yz} = G_{xz} S'_{45} = G_{xz} \left(\frac{1}{G_{LT'}} - \frac{1}{G_{TT'}} \right) \sin \theta \cos \theta. \quad (7.31)$$

У случају где су лонгитудинални $G_{LT'}$ и трансферзални $G_{TT'}$ смицајни модули приближно једнаки, тада је коефицијент спрезања практично нула тако да се коефицијент занемарује.

Претходни коефицијент спрезања у случају једнодирекционих композита може бити написан као:

$$\mu_{xz,yz} = G_{xz} \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2(1 + \nu_{TT'})}{E_T} \right) \sin \theta \cos \theta. \quad (7.32)$$

7.2.3 Варијације еластичних модула код једнодирекционих композита

Како би се боље разумеле варијације еластичних модула, потребно их је графички представити као функцију оријентације влакана тј. угла θ . Посматрају се три врсте једнодирекционих композита [2]:

1. Епоксидни композити са стакластим влакнима (слика 7.4):

$$\begin{aligned} E_L &= 46 \text{ GPa}, & E_T &= 10 \text{ GPa}, & \nu_{LT} &= 0,31, \\ G_{LT} &= 4,7 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= 4 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

2. Епоксидни композити са карбонским влакнима (слика 7.5):

$$\begin{aligned} E_L &= 159 \text{ GPa}, & E_T &= 14 \text{ GPa}, & \nu_{LT} &= 0,32, \\ G_{LT} &= 4,8 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= 4,3 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

3. Епоксидни композити са кевлар влакнима (слика 7.6):

$$\begin{aligned} E_L &= 84 \text{ GPa}, & E_T &= 5,4 \text{ GPa}, & \nu_{LT} &= 0,34, \\ G_{LT} &= 2,1 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= 2,1 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

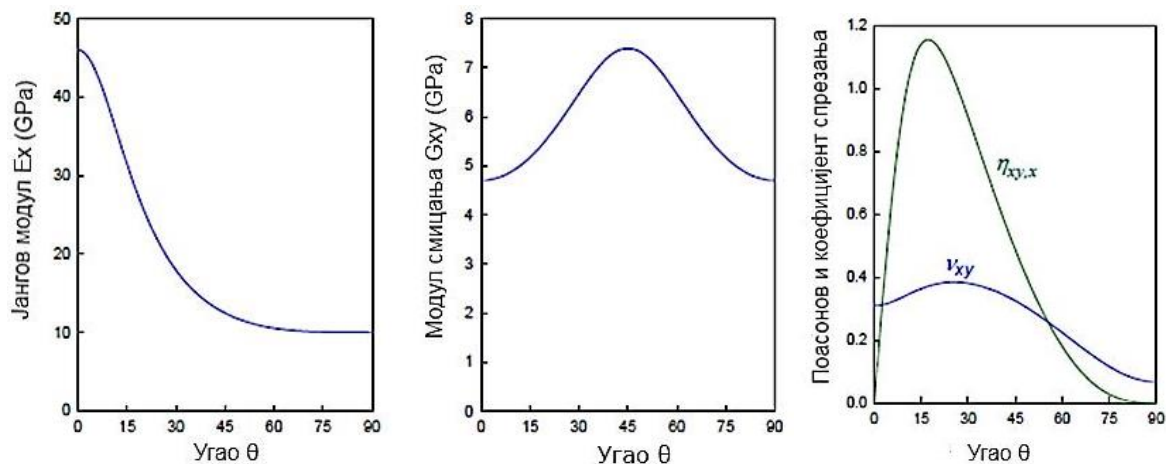
Варијације модула $E_x, G_{xy}, \nu_{xy}, \eta_{xy,x}$ приказане су као функције оријентације влакана на сликама 7.4, 7.5 и 7.6. У случају епоксидних композита са стакластим влакнима, Јангов модул E_x монотонно опада од вредности E_L за $\theta = 0$ до вредности E_T за $\theta = 90^\circ$. Модул смицања G_{xy} расте како расте угао θ и има максималну вредност када је $\theta = 45^\circ$. Када је $45^\circ < \theta < 90^\circ$ модул смицања опада, функција је симетрична у односу на максималну вредност. Поасонов коефицијент ν_{xy} има максималну вредност за вредност угла која се разликује у сва три претходно наведена случаја. Коефицијент спрезања $\eta_{xy,x}$ је нула када је $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 90^\circ$ и достиже максималну вредност за различите врсте композита. Криве такође показују екстремне вредности G_{xy}, ν_{xy} и $\eta_{xy,x}$ које се разликују у зависности од оријентације материјала. Ова особина важи и за Јангов модул E_x (слике 7.4 и 7.5) код композита са карбонским и кевлар влакнима. Екстремне вредности E_x добијају се преко релације (7.11). Максимална вредност E_x је већа од вредности E_L за вредност $\theta \neq 0^\circ$ када је:

$$G_{LT} > \frac{E_L}{2(1 + \nu_{LT})}. \quad (7.36)$$

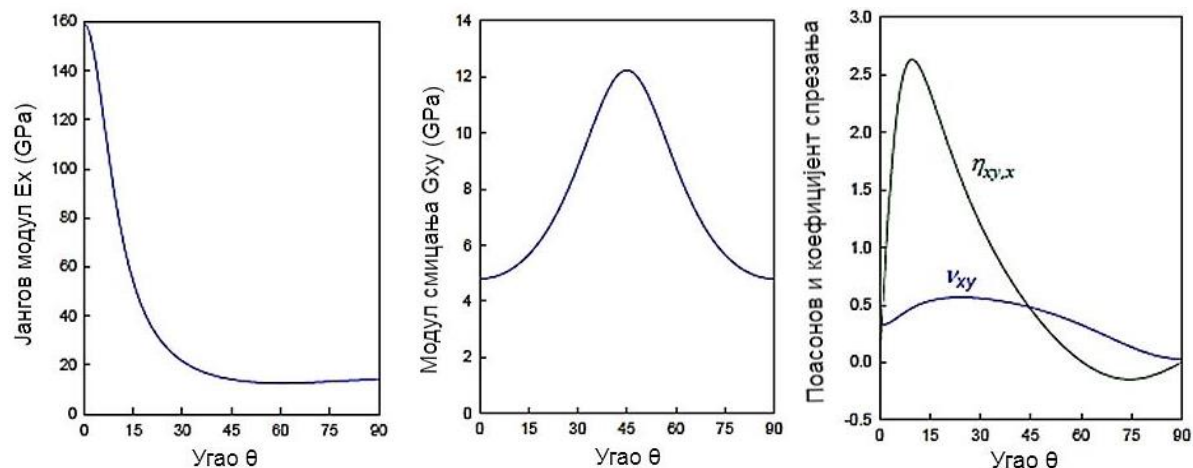
Минимална вредност E_x је мања од E_T за вредност $\theta \neq 90^\circ$ у случају када је:

$$G_{LT} < \frac{E_L}{2 \left(\frac{E_L}{E_T} + \nu_{LT} \right)}. \quad (7.37)$$

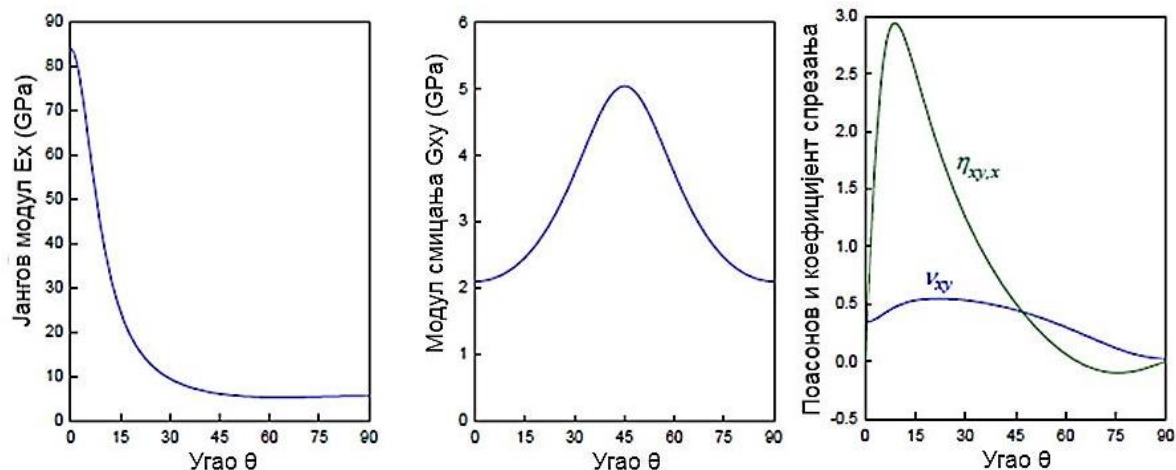
Претходна два услова важе и за друга два случаја, тј. композита са карбонским (7.34) и кевларским (7.35) влакнима.



Слика 7.4: Еластичне константе у случају епоксидног композита са стакластим влакнима



Слика 7.5: Еластичне константе у случају епоксидног композита са карбонским влакнима



Слика 7.6: Еластичне константе у случају епоксидног композита са кевлар влакнима

7.3 Раванско напонско стање

Уколико се механички анализирају греде, љуске, плоче и други геометријски облици који имају једну димензију знатно већу од остале две, онда се претпоставља да се напон јавља само у равни и све компоненте напона које су нормалне на раван се изједначавају са нулом. Ова претпоставка знатно олакшава рачунање напона, али зато може да проузрокује деламинацију, тј. раздвајање ламината по дебљини.

Раванско напонско стање карактерише тензор напона у следећој форми, за сваку тачку М која припада материјалу:

$$\sigma'(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.3.1 Еластичне једначине код раванског стања

Користећи инжењерску тј Војтову нотацију, напони у произвољној тачки М могу се другачије написати у следећој форми:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}.$$

Конститутивна једначина може се написати преко коефицијената попустљивости:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix}, \quad (7.38)$$

где су деформације:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_1 &= S'_{11}\sigma'_1 + S'_{12}\sigma'_2 + S'_{16}\sigma'_6, \\ \varepsilon'_2 &= S'_{12}\sigma'_1 + S'_{22}\sigma'_2 + S'_{26}\sigma'_6, \\ \varepsilon'_3 &= S'_{13}\sigma'_1 + S'_{23}\sigma'_2 + S'_{36}\sigma'_6, \\ \varepsilon'_4 &= 0, \\ \varepsilon'_5 &= 0, \\ \varepsilon'_6 &= S'_{16}\sigma'_1 + S'_{26}\sigma'_2 + S'_{66}\sigma'_6, \end{aligned} \quad (7.39)$$

У претходним једначинама (7.39) јасно се види да постоји деформација по z правцу:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \varepsilon'_3 = S'_{13}\sigma'_1 + S'_{23}\sigma'_2 + S'_{36}\sigma'_{xy}, \\ \varepsilon_{zz} &= S'_{13}\sigma'_{xx} + S'_{23}\sigma'_{yy} + S'_{36}\sigma'_{xy}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Из претходне релације (7.40) закључује се да је нормални напон зависан од коефицијената који се дефинишу преко Поасоновог коефицијента (S'_{13} и S'_{23}) и коефицијента који се дефинише преко коефицијента спрезања (S'_{36}).

Веза између напона и деформација преко коефицијената крутости дата је следећом релацијом:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}, \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= C'_{11}\varepsilon'_1 + C'_{12}\varepsilon'_2 + C'_{13}\varepsilon'_3 + C'_{16}\varepsilon'_6, \\ \sigma'_2 &= C'_{12}\varepsilon'_1 + C'_{22}\varepsilon'_2 + C'_{23}\varepsilon'_3 + C'_{26}\varepsilon'_6, \\ 0 &= C'_{13}\varepsilon'_1 + C'_{23}\varepsilon'_2 + C'_{33}\varepsilon'_3 + C'_{36}\varepsilon'_6, \\ \sigma'_6 &= C'_{16}\varepsilon'_1 + C'_{26}\varepsilon'_2 + C'_{36}\varepsilon'_3 + C'_{66}\varepsilon'_6. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Претходна релација показује да деформације ε'_1 , ε'_2 , ε'_3 и ε'_6 нису међусобно независне.

$$\varepsilon'_3 = -\frac{1}{C'_{33}}(C'_{13}\varepsilon'_1 + C'_{23}\varepsilon'_2 + C'_{36}\varepsilon'_6). \quad (7.43)$$

Преко претходне релације и релације (7.43) се могу изразити напони σ'_1 , σ'_2 и σ'_6 као функција деформација ε'_1 , ε'_2 и ε'_6 . На пример, ако је:

$$\sigma'_1 = \left(C'_{11} - \frac{C'^2_{13}}{C'_{33}}\right)\varepsilon'_1 + \left(C'_{12} - \frac{C'_{13}C'_{23}}{C'_{33}}\right)\varepsilon'_2 + \left(C'_{16} - \frac{C'_{13}C'_{36}}{C'_{33}}\right)\varepsilon'_6.$$

Аналогно претходној једначини могу се написати и једначине за σ'_2 и σ'_6 . Ове три једначине могу се записати и у матричном облику:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}. \quad (7.44)$$

Сада је потребно увести коефицијенте, Q'_{ij} , који се другачије називају **редуковане константе крутости** за раванско стање напона, где је:

$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3}C'_{j3}}{C'_{33}}, \quad i, j = 1, 2, 6, \quad (7.45)$$

$$Q'_{ji} = Q'_{ij}.$$

Претходни израз се може написати у матричном облику, па се коефицијенти у матричном облику називају **редукована матрица крутости**:

$$Q' = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.46)$$

Дакле еластичне једначине у случају раванског напона стања могу се написати у два облика, где важи да је:

$$\sigma'_i \neq 0 \text{ ако је } i = 1, 2, 6,$$

$$\sigma'_i = 0 \text{ ако је } i = 3, 4, 5,$$

$$\varepsilon'_i \neq 0 \text{ ако је } i = 1, 2, 3, 6,$$

$$\varepsilon'_i = 0 \text{ ако је } i = 4, 5.$$

тада је:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix}, \quad (7.47)$$

$$\varepsilon'_3 = S'_{13}\sigma'_1 + S'_{23}\sigma'_2 + S'_{36}\sigma'_6,$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon'_3 = -\frac{1}{C'_{33}}(C'_{13}\varepsilon'_1 + C'_{23}\varepsilon'_2 + C'_{36}\varepsilon'_6).$$

Матрице $[S'_{ij}]$ и $[Q'_{ij}]$ су међусобно инверзне.

7.3.2 Редукована матрица крутости за правце влакана

У правцима влакана ортотропног композита константе крутости имају следећи облик:

$$\begin{aligned} C'_{11} &= C_{11}, & C'_{12} &= C_{12}, & C'_{13} &= C_{13}, \\ C'_{22} &= C_{22}, & C'_{23} &= C_{23}, & C'_{33} &= C_{33}, \\ C'_{66} &= C_{66}, & C'_{16} &= C'_{26} = C'_{36} = 0, \end{aligned}$$

Претходне релације (7.47), као и једначина (7.45) омогућују да се изведе редукована матрица крутости за правце влакана, где је:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, & Q_{12} &= C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}, & Q_{16} &= 0, \\ Q_{22} &= C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}, & Q_{26} &= 0, & Q_{66} &= C_{66}. \end{aligned} \quad (7.48)$$

У случају једнодирекционих композита важи да је:

$$C_{13} = C_{12}, \quad C_{33} = C_{22}.$$

Редукована матрица крутости у правцима влакана се записује као:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.49)$$

Дакле напонско стање композита у правцима материјала је:

$$\begin{cases} \sigma_i \neq 0 \text{ ако је } i = 1,2,6 \\ \sigma_i = 0 \text{ ако је } i = 3,4,5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \varepsilon_i \neq 0 \text{ ако је } i = 1,2,3,6 \\ \varepsilon_i = 0 \text{ ако је } i = 4,5 \end{cases}$$

што се може приказати преко следећих једначина:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2,$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{C_{33}}(C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2).$$

Редуковане константе крутости дефинисане су у релацији (7.48). Матрице $[S_{ij}]$ и $[Q_{ij}]$ су међусобно инверзне, па се закључује да је:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}}. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Претходне релације (7.50) нам омогућују да изразимо редуковане константе крутости као функције инжењерских константи у правцима влакана, па је:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11}, \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22}, \\ Q_{66} &= G_{LT}. \end{aligned} \quad (7.51)$$

7.3.3 Релације између ваносних и редукованих константи крутости за правце влакана

Релације између ваносних редукованих константи крутости и оних очекиваних у правцима влакана садрже само компоненте 1,2 и 6 напона и деформације. Када се у обзир узму опште једначине за ортотропне композите (6.5 и 6.6), једначине за једнодирекционе композите (6.27 и 6.28), једначина напон-деформација за раванско стање напона (7.44) и релације трансформације (табеле 2 и 4) успостављене за општи случај – закључује се да су једначине трансформације (које приказују редуковане константе крутости Q'_{ij} као функцију константи Q_{ij}) идентичне као за константе крутости C_{ij} (табеле 2 и 4), када су сведене на компоненте 1,2 и 6. Ако се узме у обзир слика 7.2 закључује се да су претходно наведене једначине идентичне за једнодирекционе материјале и ортотропне композите.

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\ Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta, \\ Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta). \end{aligned}$$

Табела 7а: Редуковане константе крутости за једнодирекционе или ортотропне материјале ван материјалних праваца

Табеле 2 и 4 су трансформисане у табелу 7б, на исти начин као код табеле 6 - коришћењем једначине 7.6. Табела 7 се дефинише увођењем угла θ :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= V_1 + V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta, \\ Q'_{12} &= V_4 - V_3 \cos 4\theta, \\ Q'_{16} &= \frac{1}{2} V_2 \sin 2\theta + V_3 \sin 4\theta, \\ Q'_{22} &= V_1 - V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta, \\ Q'_{26} &= \frac{1}{2} V_2 \sin 2\theta - V_3 \sin 4\theta, \\ Q'_{66} &= V_5 - V_3 \cos 4\theta, \end{aligned}$$

где су:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), \\ V_2 &= \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}), \\ V_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}), \\ V_4 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}), \\ V_5 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) = \frac{1}{2}(V_1 - V_4). \end{aligned}$$

Табела 7б: Редуковане константе крутости као функције угла

7.3.4 Анализа раванског напонског стања на примеру

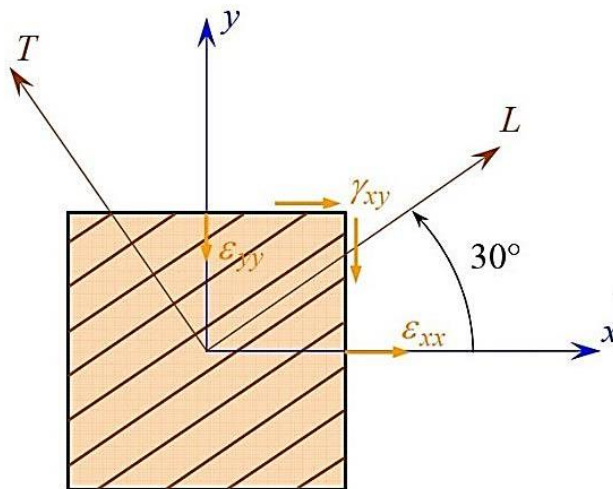
За анализу раванског напонског стања као пример представљен је једнодирекциони слој у равни (x,y), код којег правац влакана са x осом заклапа угао од 30 степени и са следећим деформацијама: [2]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= 1\% = 10^{-2}, \\ \varepsilon_{yy} &= -0,5\% = 5 \times 10^{-3}, \\ \gamma_{xy} &= 2\% = 2 \times 10^{-2}.\end{aligned}$$

Инжењерске константе композитног материјала су:

$$E_L = 40 \text{ GPa}, E_T = 10 \text{ GPa}, \nu_{LT} = 0.32, G_{LT} = 4.5 \text{ GPa}.$$

На основу добијених деформација закључује се да се материјал по x оси еластично издужује за 1%, док по y оси долази до сужења за 0,5%. Због чињенице да су правци материјала под углом у односу на референтни координатни систем, у питању је ваносно понашање материјала, а за одређивања напонског стања користе се изрази за редуковане коефицијенте крутости. Преко редукованих коефицијената крутости дефинише се редукована матрица, а након тога и напони који одговарају постојећим деформацијама $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}$.



Слика 7.7: Слој ојачан влакнима заокренутим 30 степени у односу на референтни систем (x,y,z) у односу на који се посматра слој

1) Одређивање напона $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$

Прво је потребно, користећи познате инжењерске константе E_L, E_T, ν_{LT} и G_{LT} израчунати редуковану матрицу крутости за правце влакана, користећи релације (7.51):

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{40 \text{ GPa}}{1 - 0.32^2 \frac{10 \text{ GPa}}{40 \text{ GPa}}} = 41,051 \text{ GPa},$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} = \frac{10 \text{ GPa}}{40 \text{ GPa}} \cdot 41,051 \text{ GPa} = 10,263 \text{ GPa},$$

$$Q_{12} = \nu_{LT} Q_{22} = 0.32 \cdot 10,263 \text{ GPa} = 3,284 \text{ GPa},$$

$$Q_{66} = G_{LT} = 4,5 \text{ GPa}.$$

Када су израчунати коефицијенти крутости, редукована матрица крутости за правце влакана се дефинише изразом (7.49):

$$Q = \begin{bmatrix} 41,051 & 3,284 & 0 \\ 3,284 & 10,263 & 0 \\ 0 & 0 & 4,5 \end{bmatrix} GPa.$$

Коефицијенти редуковане матрице крутости за осе (x, y) се добијају коришћењем израза из табеле 7а:

$$Q'_{11} = 41,051 \cdot \frac{9}{16} + 10,263 \cdot \frac{1}{16} + 2(3,284 + 2 \cdot 4,5) \frac{3}{4} \frac{1}{4} = 28,339 GPa,$$

$$Q'_{12} = (41,051 + 10,263 - 4 \cdot 4,5) \frac{3}{4} \frac{1}{4} + 3,284 \cdot \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{16} \right) = 8,299 GPa,$$

$$Q'_{16} = (41,051 - 3,284 - 2 \cdot 4,5) \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + (3,284 - 10,263 + 2 \cdot 4,5) \frac{1}{8} \frac{\sqrt{3}}{2} = 9,561 GPa,$$

$$Q'_{22} = 41,051 \cdot \frac{1}{16} + 10,263 \cdot \frac{9}{16} + 2(3,284 + 2 \cdot 4,5) \frac{3}{4} \frac{1}{4} = 12,945 GPa,$$

$$Q'_{26} = (41,051 - 3,284 - 2 \cdot 4,5) \frac{1}{8} \frac{\sqrt{3}}{2} + (3,284 - 10,263 + 2 \cdot 4,5) \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{1}{2} = 3,770 GPa,$$

$$Q'_{66} = [41,051 + 10,263 - 2(3,284 + 4,5)] \frac{1}{4} \frac{3}{4} + 4,5 \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{16} \right) = 9,515 GPa.$$

Након што се израчунају коефицијенти крутости, потребно је написати матрицу крутости (израз 7.46) и написати конститутивну једначину (израз 7.47), преко које се напони лако израчунају:

$$Q' = \begin{bmatrix} 28,339 & 8,299 & 9,561 \\ 8,299 & 12,945 & 3,770 \\ 9,561 & 3,770 & 9,515 \end{bmatrix} GPa,$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q_{12} & Q'_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28,339 & 8,299 & 9,561 \\ 8,299 & 12,945 & 3,770 \\ 9,561 & 3,770 & 9,515 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9} \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 20 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3},$$

$$\sigma_{xx} = 433 MPa,$$

$$\sigma_{yy} = 94 MPa,$$

$$\sigma_{xy} = 267 MPa.$$

2) Одређивање напона по правцима влакана

Како је θ угао влакана са x осом, потребно је трансформисати напон коришћењем израза 4.31, па су три напона која делују у равни по правцима влакана:

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}.$$

У задатом случају једначина је:

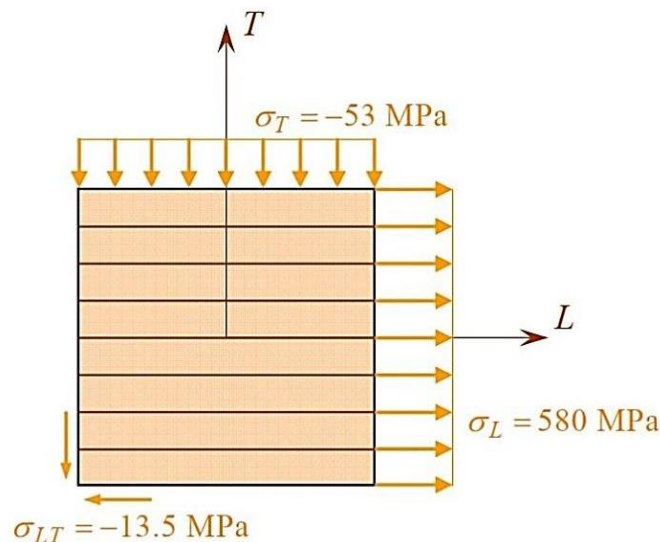
$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 433 \\ 94 \\ 267 \end{bmatrix} \text{ MPa},$$

$$\sigma_L = 580 \text{ MPa},$$

$$\sigma_T = -53 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{LT} = -13,5 \text{ MPa}.$$

Напони који делују по правцима материјала (правцима влакана) могу се графички приказати на следећи начин –слика 7.8:



Слика 7.8: Напони по правцу материјала за задати пример

Сликама 7.7 и 7.8 су у потпуности дефинисани напони који делују у слоју једнодирекционог материјала.

7.4 Експериментално одређивање инжењерских константи

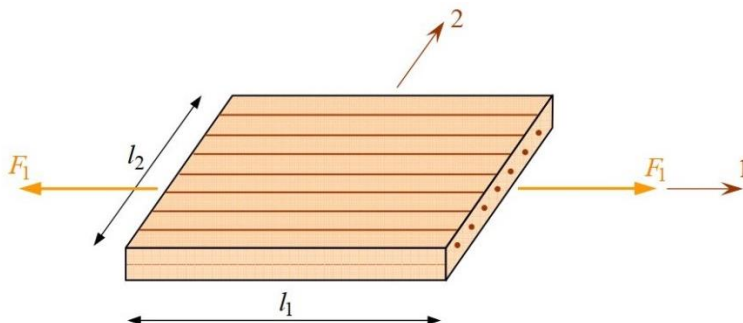
Еластично понашање је у потпуности одређено са:

- 1) Пет коефицијената у случају једнодирекционог
- 2) Девет коефицијената у случају ортотропног композитног материјала

У случају раванског напонског стања еластично понашање у потпуности дефинишу четири коефицијента - $E_L, E_T, \nu_{LT}, G_{LT}$, без обзира да ли је материјал ортотропан или једнодирекциони. Ови коефицијенти се могу одредити затезним тестом или тестовима смицања.

7.4.1 Лонгитудинални тест затезања

Код лонгитудиналног теста затезања (затезање у правцу влакана) сила F_1 је задата у правцу влакана у случају једнодирекционог композита за попречни пресек S_1 за пример приказан на слици 7.9. [2]



Слика 7.9: Лонгитудинални тест затезања

$$\sigma_{11} = \frac{F_1}{S_1}.$$

Тест предвиђа мерење на кидалици, на којој се мере следеће величине:

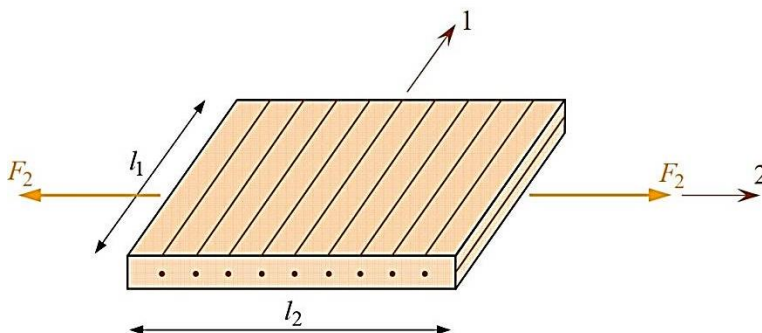
- 1) Сила F_1 ,
- 2) Издужење Δl_1 ,
- 3) Промена дужине Δl_2 .

Са добијеним резултатима мерења могу се извести деформације, модул еластичности и Поасонов коефицијент:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\Delta l_1}{l_1} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta l_2}{l_2}, \\ E_L &= \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \quad \text{и} \quad \nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}. \end{aligned}$$

7.4.2 Трансферзални тест затезања

При затезању у трансферзалном правцу (правцу 2 у равни слоја нормалном на влакна) напон се може добити преко силе F_2 која делује на површину S_2 – слика 7.10. [2]



Слика 7.10: Трансферзални тест затезања

$$\sigma_{22} = \frac{F_2}{S_2},$$

Као у лонгитудиналном тесту добијају се деформације ε_{11} и ε_{22} из којих је могуће дефинисати:

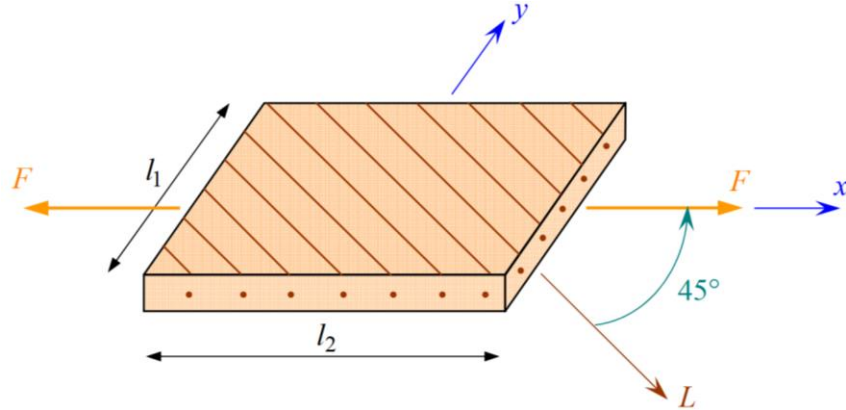
$$E_T = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{22}} \quad \text{и} \quad \nu_{TL} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}},$$

У случају експерименталног одређивања константи у обзир треба узети релацију за константност односа модул еластичности/Поасонов коефицијент за ортотропне композите (6.18). У случају да овај услов није задовољен потребно је:

- 1) Поново преиспитати експеримент и измерити вредности
- 2) Уколико услов константности поново није задовољен, тестирани материјал није могуће описати линеарним релацијама напони-деформације.

7.4.3 Ваносни тест затезања

Код ове ваносних тестова се обично мери смицајни модул G_{LT} . Као пример је узет слој код кога су влакна заокренута за 45 степени у односу на референтан правац (слика 7.10). Сила се задаје по x оси слоја на површину S, где се јавља нормални напон: [2]



Слика 7.10: Ваносни тест

$$\sigma_{45} = \frac{F}{S},$$

$$E_{45} = \frac{\sigma_{45}}{\varepsilon_{45}}.$$

Мерење деформације ε_{45} омогућује израчунавање Јанговог модула еластичности. Користећи релацију 7.11 овај модул еластичности се може написати као:

$$\frac{1}{E_{45}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + \frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right),$$

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{4}{E_{45}} - \frac{1}{E_L} - \frac{1}{E_T} + 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L}.$$

Закључак

У овом раду је на примеру ламинатног слоја ојачаног влакнима описано еластично понашање ортотропних композитних материјала. Због чињенице да су ортотропни материјали анизотропни, дефинисан је тензор крутости који се са 81 редукује на 21 независну константу. Увођењем три ортогоналне равни симетрије 21 константа се редукује на 9 константи, које у потпуности дефинишу еластично понашање ортотропних композитних материјала. Због чињенице да се врло често у инжењерској пракси за задате напоне рачунају деформације, потребно је дефинисати матрицу попустљивости, која представља инверзну матрицу крутости. Дефинисање матрице попустљивости врши се експерименталним путем. Тестовима једноосног затезања или смицања одређују се одговарајући Јангови модули, Поасонови коефицијенти и модули смицања. Дакле, експерименталним путем је могуће добити коефицијенте попустљивости S'_{ij} и самим тим извести матрицу попустљивости или крутости C'_{ij} .

У случају када су правци влакана слоја заротирани у односу на референтни координатни систем у ком се налази ламинатни слој, тада је потребно трансформисати коефицијенте крутости/попустљивости. Трансформације матрица крутости/попустљивости су израчунате помоћу матрица трансформације T_σ и T_ϵ . Матрице трансформације су дефинисане тригонометрисјским функцијама угла, тако да је еластично понашање ортотропних материјала у потпуности дефинисано углом влакана у односу на ламинат и избором материјала. С обзиром да механичке карактеристике композитног слоја зависе од ојачања, механичке карактеристике, а самим тим и еластично понашање зависе од избора влакана које ојачавају композит.

У случају када имамо било које раванско напонско стање ламинантног слоја, еластично понашање карактеришу редуковане константе крутости Q'_{ij} , које одговарају референтном систему ламината.

Литература

- [1] Момчило Стевановић, *Влакнима ојачани полимерни композити*, Партенон, Београд, 2002.
- [2] J.M.Berthelot, *Mechanics of composite materials and structures*, Vallouise 2015
- [3] L.N. Phillips, *Design with Advanced Composite Materials*, The Design Council, London, 1989.
- [4] Powell, P.C., *Engineering with Fibre-Polymer Laminates*, Chapman & Hall, London, 1994
- [5] Весна Лацковић, Вицко Шимић, *Понашање композитних материјала при сложенем оптерећењу* – научни рад, Грађевинар 58-7 – стр. 549-557, Загреб 2006.
- [6] Милица Антић, *Композитни материјали* – научни рад, Заваривање и заварене конструкције, 1/2016, стр. 19- 28, Београд 2016.
- [7] Гордана Богдановић, *Динамичко понашање композитних ламината*, докторска дисертација, Универзитет у Крагујевцу, Крагујевац, 2011.
- [8] Ивица Смојвер, *Механика композитних материјала*, Универзитет у Загребу 2007.
- [9] Ана Фудурић, *Својства и примјена полимерних материјала и њихова опораба у Хрватској*, завршни рад, Универзитет у Карловцу, 2016.
- [10] Игор Грабар, *Нумеричка симулација композитне кобилице*, дипломски рад, Факултет стројарства и бродоградње, Универзитет у Загребу, 2018.
- [11] Томислав Михаљевић, *Механичка својства композита с полимерном матрицом*, завршни рад, Универзитет у Карловцу, 2015.
- [12] Јулијана Лабовић, *Композитни материјали, карактеристике и примена*, мастер рад, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу, 2019.