

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу

Данијела М. Ђорђевић

**Прорачун носача отвореног нестандардног
танкозидног попречног пресека
оптерећеног неуниформном торзијом**

Мастер рад

Крагујевац, 2018.

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Мастер студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Лаке конструкције

Број индекса: 402/2015

Данијела М. Ђорђевић

**Прорачун носача отвореног нестандардног
танкозидног попречног пресека
оптерећеног неуниформном торзијом**

Мастер рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. др Весна Марјановић, ванр. проф. - ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог мастер рада кандидат треба да:

1. Уради анализу прорачуна сложено оптерећених штапова са посебним освртом на танкозидне попречне пресеке изложене неуниформној торзији.
2. Објасни како се одређују унутрашње силе, напони које оне изазивају и деформације танкозидних носача које настају при сложеном напрезању и посебно при неуниформној торзији.
3. Уради пример прорачуна једног танкозидног носача отвореног поречног пресека оптерећеног комбинованом торзијом.
4. Прикаже пример прорачуна урађен помоћу неког од савремених софтвера и упореди добијене резултате.

Препоручена литература:

- [1] Марковић Ж., Гранична стања челичних конструкција према Еврокоду, Академска мисао, Београд, 2014.
- [2] Тимошенко С., Теорија еластичне стабилности, Научна књига, Београд, 1952.
- [3] Николић Р., Вељковић Ј., Марјановић В., Металне конструкције – збирка решених задатака, Факултет инжењерских наука, Крагујевац, 2013.

Крагујевац, јун, 2018. год.

Ментор:
др Весна Марјановић, ванр. професор

Садржај:

1. Увод.....	1
1.1. Хладно обликовани елементи и лимови.....	1
1.1.1. Челици са превлакама	2
1.1.2. Хладно ваљање	3
1.1.3. Пресовање	4
1.2. Област примене	5
2. Торзија.....	9
2.1. Униформна торзија.....	10
2.2. Неуниформна торзија.....	14
2.3. Комбинована торзија.....	16
2.4. Прорачун торзије према Еврокоду 3	19
3. Пример прорачуна једног штапа танкозидног отвореног попречног пресека.....	20
3.1. Моменти инерције и секторске карактеристике попречног пресека.....	20
3.2. Спречена торзија.....	29
4. Пример прорачуна урађен у програмском софтверу Autodesk Robot Structural Analysis	35
4.1. Дијаграми добијени у програмском софтверу Autodesk Robot Structural Analysis	37
5. Анализа добијених резултата	48
Закључак.....	49
Литература	50

Abstract

The aim of this work is to give a glance to the complex problem of determining the stress and deformation that occur in . a thin-walled rods of an open cross-section loaded on a combined torsion. In addition to analyzing the classical method of estimate, the work also includes a review of the contemporary estimate according to the recommendations given by the Eurocode standard. Finally, a classic analytical calculation was provided, then the results obtained by the modern software package AUTODESK ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS for the same example, as well as the analysis and comparison of the results obtained.

Key words: stress, deformation, rod, torsion, estimate ...

Резиме

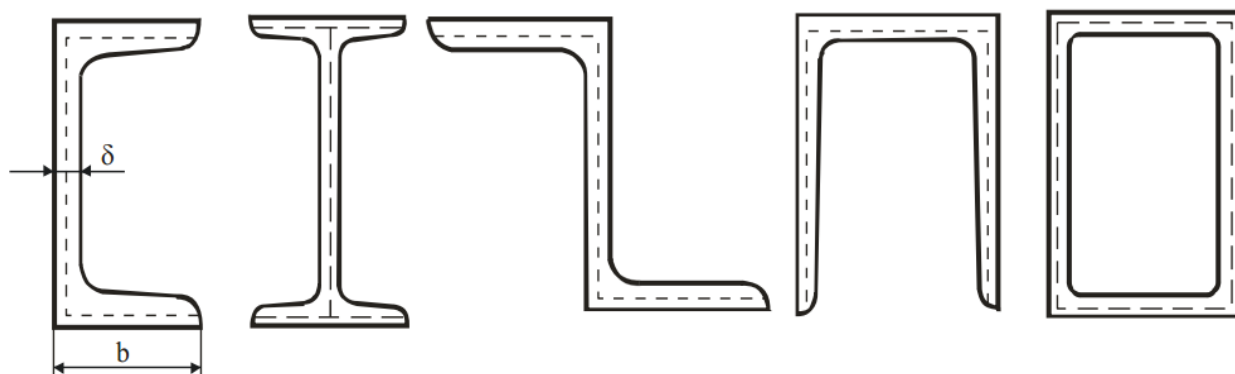
Циљ овог рада је да се да један поглед на сложени проблем одређевиња напона и деформација који се јављају код танкозидних штапова отвореног попречног пресека оптерећених на комбиновану торзију. Поред анализе класичног начина прорачуна рад садржи и осврт на савремени прорачун према препорукама које даје Еврокод стандард. На крају је дат класичан аналитички прорачун, затим резултати који су добијени помоћу савременог софтверског пакета AUTODESK ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS за исти пример, као и анализа и поређење добијених резултата.

Кључне речи: напон, деформација, штап, торзија, прорачун...

1. Увод

Под **лаким конструкцијама** подразумевају се конструкције са танким зидовима. Под **танкозидним штапом** подразумева се такво тело чије су све три димензије величине различитих редова, то јест дужина је много већа од ширине попречног пресека, а ширина попречног пресека је много већа од дебљине зида, као што је приказано на слици 1.0. Испрекидана линија (средња) означава **контуру** попречног пресека. [1]

$$l \gg b(s) \gg \delta, \quad \frac{\delta}{b} = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \dots$$



Слика 1.0 – Танкозидни штапови [1]

1.1. Хладно обликовани елементи и лимови

Под хладнообликованим профилима (ХОП) подразумевају се конструктивни елементи произведени хладним обликовањем челичних лимова и трака, ваљањем или пресовањем. Уобичајене дебљине челичних лимова и трака које се користе за производњу хладно обликованих производа крећу се од 0,4 mm до 6,0 mm.

Употреба хладно обликованих производа у зградарству датира још од 1850. године (САД и Велика Британија). Шира примена тек по завршетку другог светског рата. 1946. године први прописи из ове области: "Одредбе за пројектовање хладнообликованих челичних конструкција" Амерички Институт за челик и гвожђе (АИСИ); Истраживања на Корнел Универзитету под руководством професора Џорџа Винтера.

Предности конструкција од хладнообликаних профила:

- мала тежина, па самим тим и мањи утрошак челичног материјала по квадратном метру објекта у поређењу са вруће ваљаним профилима (15-40%, а за неке елементе и преко 50%),
- широк дијапазон облика и димензија производа,
- већа прецизност димензија - мање производне толеранције,
- квалитет површина хладнообликаних производа је бољи од врућеваљаних профила - олакшано наношење и повећана трајност АКЗ,
- механичке карактеристике основног материјала (граница развлачења и чврстоћа на затезање), се повећавају хладним обликовањем,
- лако се производе "гнездасти" пресеци погодни за компактно паковање, манипулацију и транспорт,
- адекватним избором облика пресека могу се постићи значајни естетски и конструктивни ефекти,

Недостаци:

- виша јединична цена у односу на вруће ваљане профиле,
- мања отпорност у односу на грубе поступке при транспорту и монтажи,
- израженија опасност од дејства корозије, у смислу да исти корозиони ефекат више слаби танкозидни пресек хладно обликованог профила него дебелозидни пресек врућеваљаних профила,
- релативно теже спајање.

Хладнообликовани производи добијају се углавном од нискоугљеничних и легираних челика, са границом развлачења од 250 до 630 N/mm². Материјал мора да има довољну дуктилност, због знатних попречних савијања са малим полупречницима (обично $r = t$) без појаве прелина уз омогућену пластификацију. Показано је да је дуктилност задовољавајућа када је $f_u/f_y > 1,08$ и $\delta_5 > 10\%$. Општи конструкциони челици задовољавају ове услове.

1.1.1. Челици са превлакама

Хладнообликовани профили могу да се производе и од лимова пресвучених другим металима (цинк, алуминијум), пластичним масама или лаковима (заштита од корозије још у току производње). Пластифицирани лимови не могу да се заварују. Поцинковани лимови такође не треба да се заварују, јер се губи АКЗ у зони шава, а заваривање је отежано због скупљања наслага цинка.

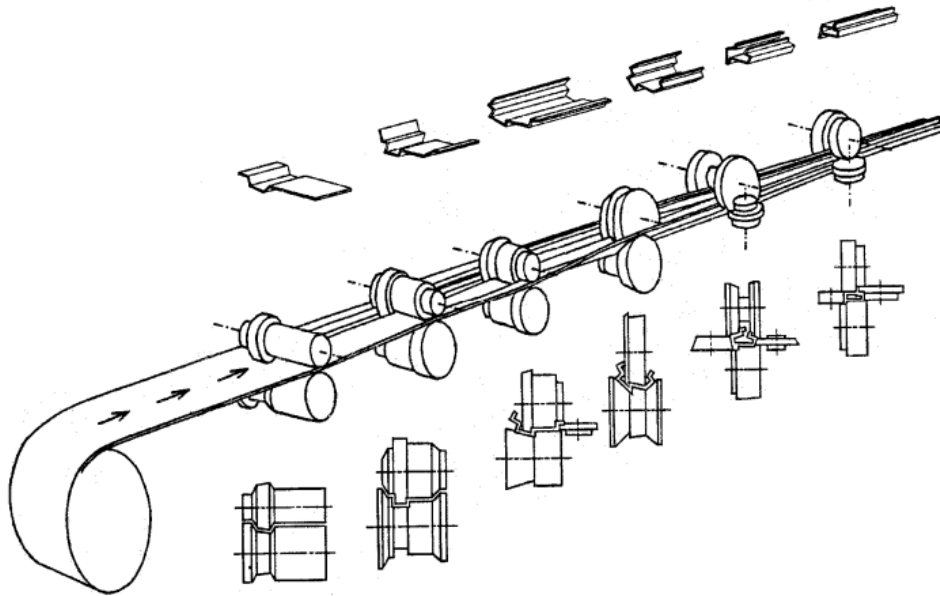
Хладно обликовани профили и лимови се добијају од равних трака њиховим постепеним савијањем у хладном стању. Дебљина зидова свих делова попречног пресека (нпр. ножица и ребра) је иста, односно константна.

Углавном се користе два типа производње:

- хладно ваљање и
- пресовање.

1.1.2. Хладно ваљање

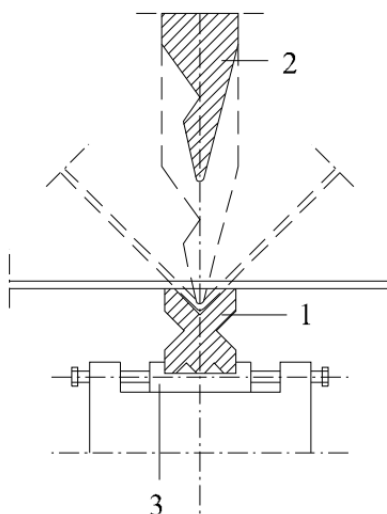
Број парова ваљака се креће од 6 (слика 1.1) за једноставне пресеке до 15 за сложене. Брзина ваљања креће се у опсегу од 6 – 92 m/min, а уобичајено износи 23 – 46 m/min. По завршетку операције обликовања пресек се одсеца на захтевану дужину аутоматским сечењем, без заустављања рада машине. Уобичајена дужина је 6 и 12 m. У савременим фабрикама компјутерски вођене машине аутоматски секу на захтевану дужину и истовремено буше рупе. Овај поступак је погодан за масовну производњу хладнообликованих профила и лимова – велике количине (серије).



Слика 1.1 – Шематски приказ хладног ваљања [1]

1.1.3. Пресовање

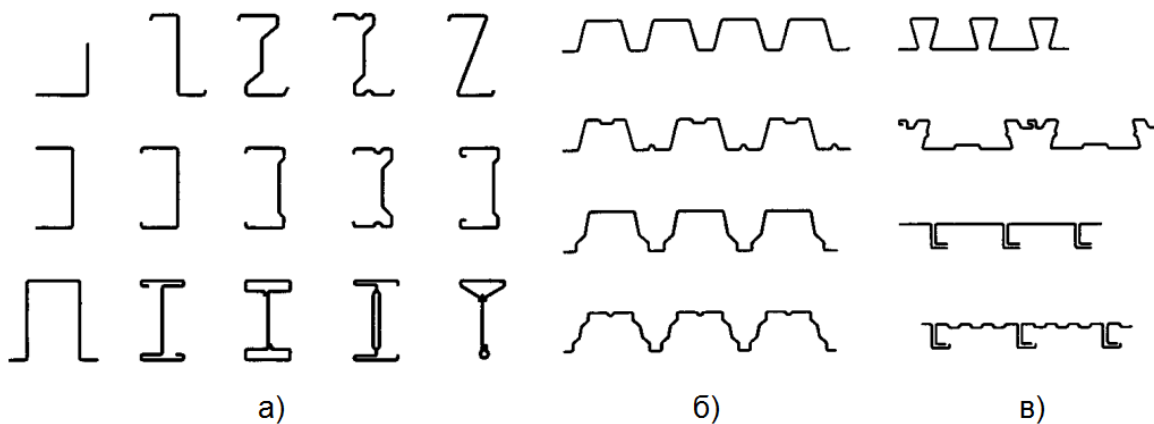
Овај поступак погодан је за мање дужине, мање серије, једноставније облике, веће ширине профила. Могу се добити и профили променљиве геометрије. Шематски приказ дат је на слици 1.2. [1]



Слика 1.2 – Шематски приказ пресовања: 1 – жљеб – доњи део пресе; 2 – чекић – доњи део пресе; 3 – матрица за подешавање [1]

Врсте хладнообликованих профила:

- хладнообликовани профили - линијски елементи отвореног или затвореног попречног пресека (слика 1.3.а);
- хладнообликовани лимови (слика 1.3.б) и касете (слика 1.3.в).

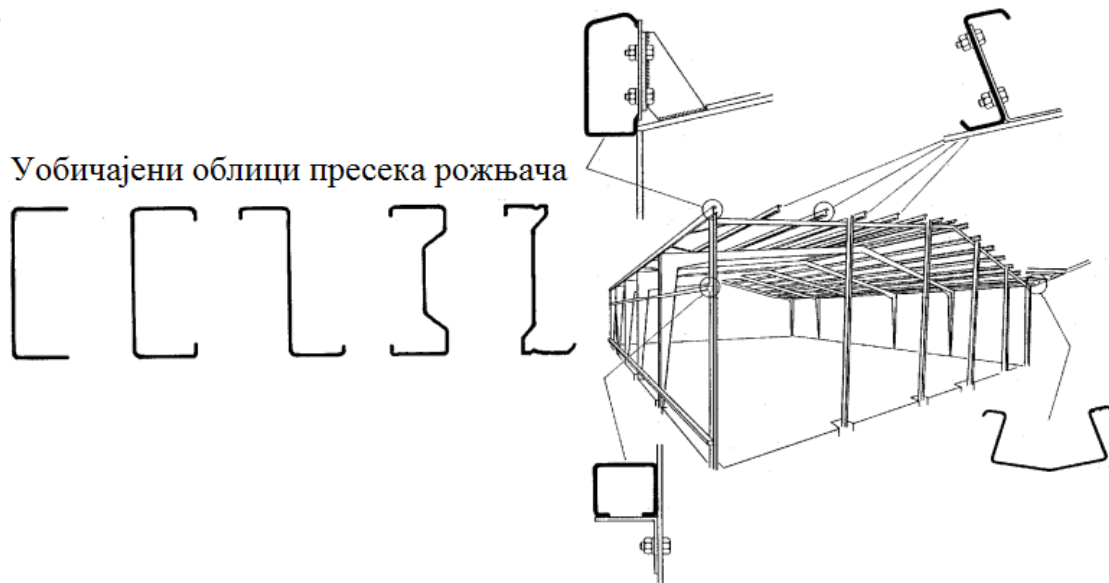


Слика 1.3 – Врсте хладнообликованих профила: а) – линијски елементи отвореног или затвореног попречног пресека; б) – хладнообликовани лимови и в) – касете. [1]

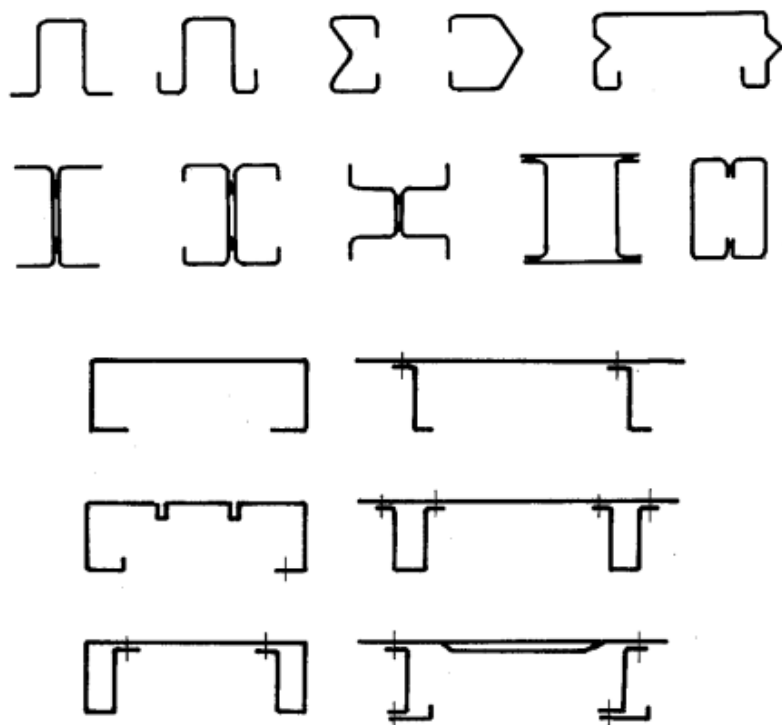
1.2. Област примене

Област примене хладнообликованих профила у грађевинарству:

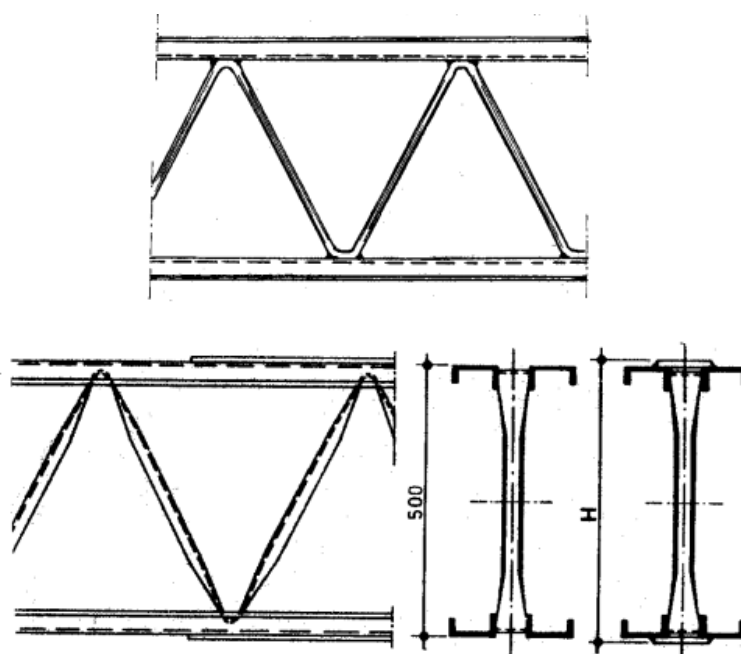
- зградарство (рожњаче (слика 1.4), фасадне ригле, подни носачи, решеткасти носачи (слика 1.6), типски главни носачи, стакленици (слика 1.11), високорегална складишта (слика 1.8), фасадне и кровне облоге итд.),
- мостоградња (олучаста и трапезаста укрућења ортотропних плоча, ивични носачи, одбојници, граничници итд.),
- хидротехничке конструкције (укрућења табластих устава, талпе).



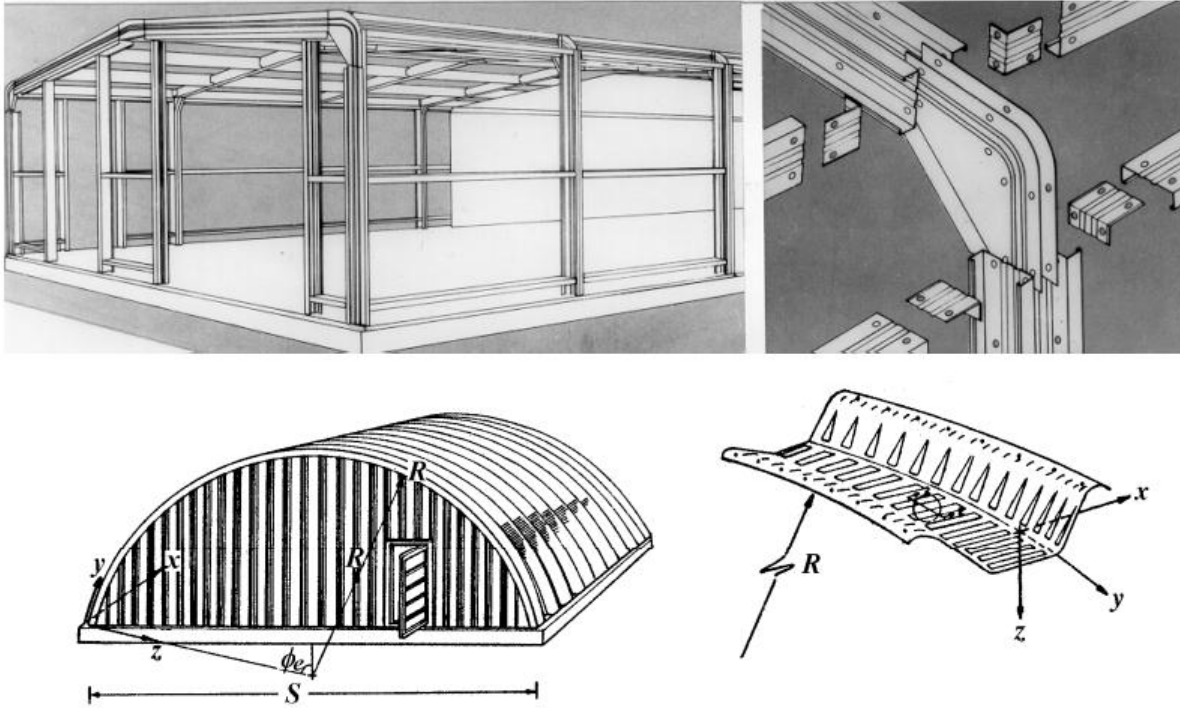
Слика 1.4 – Хладнообликовани профили – рожњаче [1]



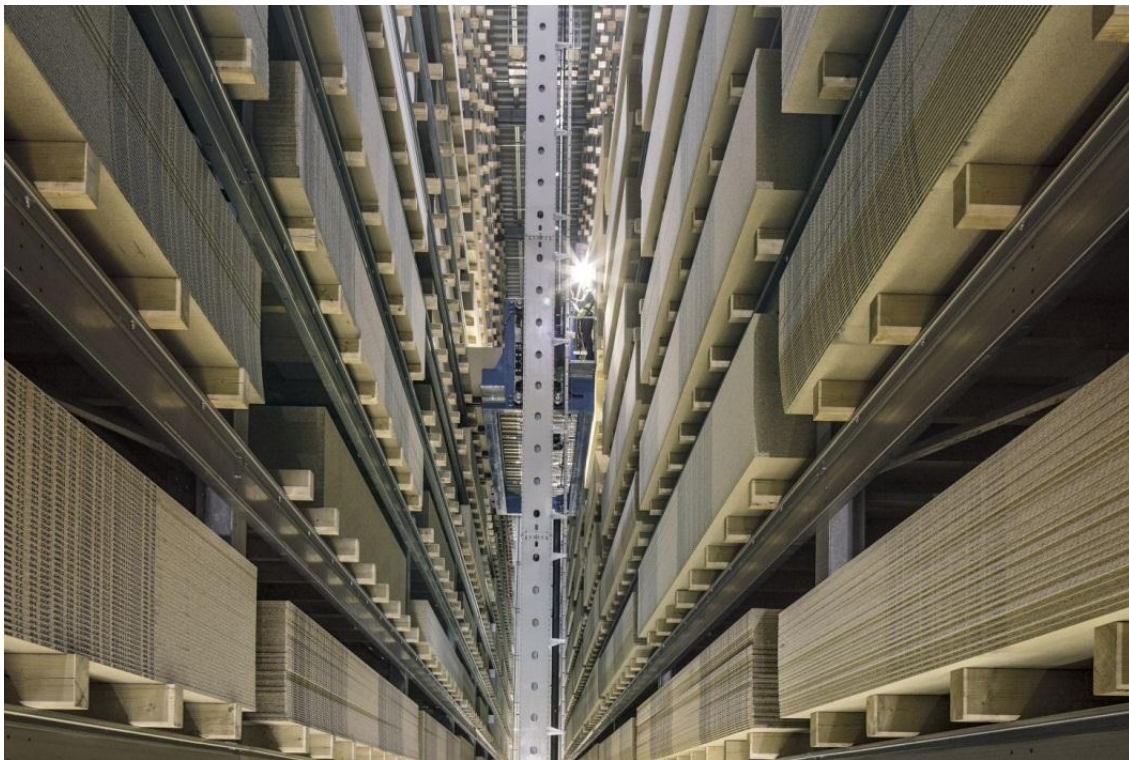
Слика 1.5 – Лаке међуспратне конструкције [1]



Слика 1.6 – Решеткасти носачи [1]



Слика 1.7 – Типске индустријске хале [1]



Слика 1.8 – Високорегална складишта [8]



Слика 1.9 – *Силоси* [9]



Слика 1.10 – *Стубови далековада* [10]



Слика 1.11 – Стакленици [11]

Специфичности хладнообликованих профила:

- Промена својстава материјала у попречном пресеку на местима повијања;
- Сви проблеми стабилности (извијање, бочно-торзионоизвијање) су још израженији него код класичних челичних конструкција;
- Везе се конструишу и прорачунавају на посебан начин! Користе се и специфична спојна средства и поступци заваривања. [1]

2. Торзија

Торзија се у челичним конструкцијама углавном не јавља као самостално напрезање, већ у комбинацији са другим оптерећењима, а најчешће савијањем, на пример као последица ексцентричног оптерећења код мостовских носача или кранских стаза. Поред тога, познавање феномена торзије је битно и са становишта анализе одређених стабилитетних проблема, карактеристичних за челичне конструкције, као што су торзионо извијање притиснутих елемената и бочно торзионо извијање носача. Носивост елемента оптерећеног торзијом се, у општем случају, може разложити на два суштински различита напрезања:

- Униформну или Сен Венанову торзију (T_t) и
- Неуниформну или ограничену торзију (T_w)

Најчешће се истовремено јављају и један и други вид напрезања, па се у том случају може рећи да се се ради о комбинованој торзији. Који од ових видова напрезања ће бити доминантан зависи пре свега од облика попречног пресека, услова ослањања и начина деловања спољашњег оптерећења. [2]

2.1. Униформна торзија

Униформна торзија се јавља у случају константних торзионих утицаја код елемената код којих није спречено подужно кривљење попречног пресека на крајевима. У случају униформне торзије промена ротације (увијања) $\varphi(x)$ попречног пресека око подужне осе x је константа дуж елемента, као и деформација подужног кривљења (слика 2.0). Диференцијална једначина којом се дефинише проблем униформне торзије у еластичној области, уз уобичајене претпоставке да су деформације мале у односу на димензије елемента, да је материјал идеално еластичан, да важи Хуков закон ($\tau = \gamma \cdot G$) и да попречни пресеци задржавају свој облик, може да се напише у следећем облику:

$$T_t(x) = G \cdot I_t \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (2.1)$$

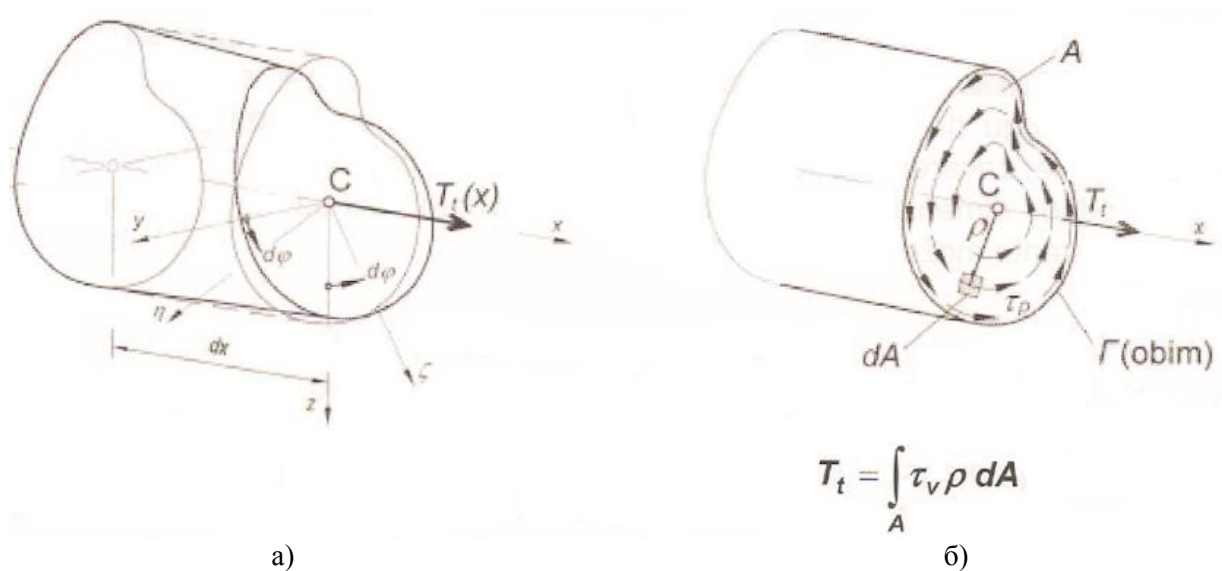
где је:

$T_t(x)$ - Сен Венанов момент торзије око подужне x осе,

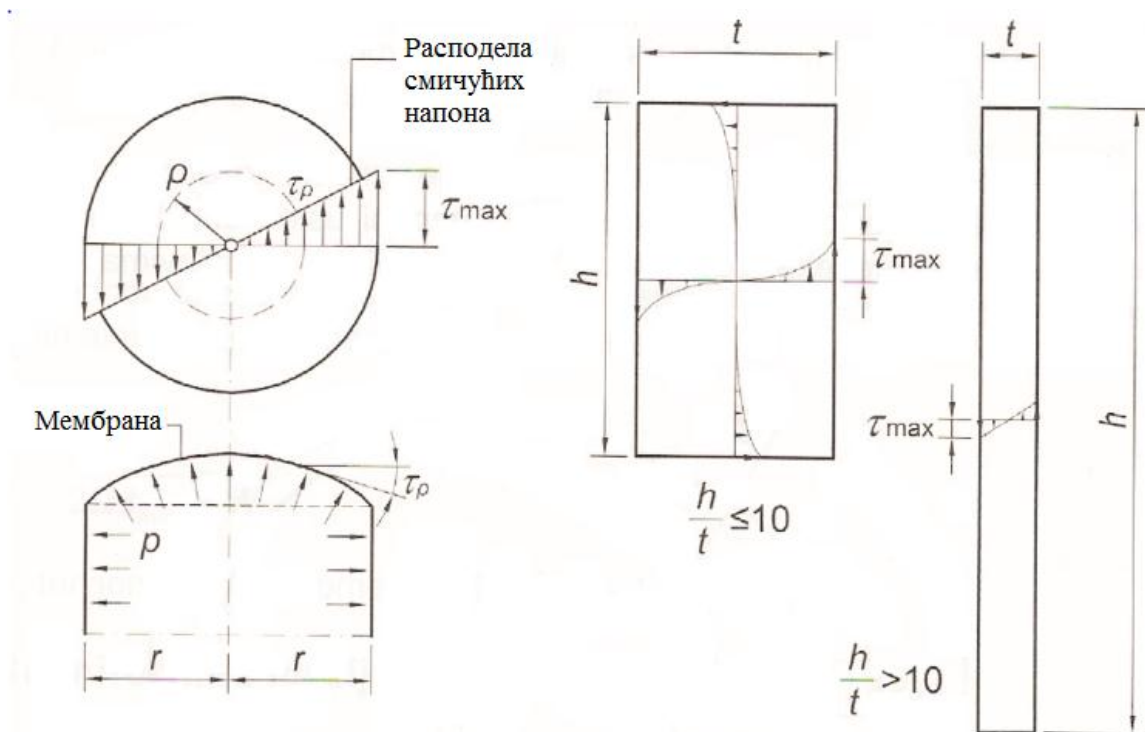
G - модул клизања (константа материјала која је за челик једнака $81000 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$),

I_t - торзиона константа или торциони момент инерције попречног пресека.

Производ $G \cdot I_t$ представља торзиону крутост за униформну торзију и, имајући у виду да је G константа материјала, зависи искључиво од торзионе константе. У случају униформне торзије, спољашњим торзионим утицајима се супротстављају само смичући напони τ_v чија расподела зависи од облика попречног пресека (слика 2.0.б). Код пуних пресека кружног и правоугаоног облика распоред ових смичућих (тангенцијалних) напона може да се одреди на основу мембранске аналогије (слика 2.1). Максималне вредности смичући напони достижу на спољашњим ивицама (контурама) попречног пресека, док је у центру смицања (C) њихова вредност једнака нули. На слици 2.1 приказани су дијаграми смичућих напона, а у табели 2.0 приказани су изрази за одређивање торзионе константе I_t као и максималног смичућег напона за пуне кружне и правоугаоне попречне пресеке. Код правоугаоних пресека вредности смичућих напона и торзионе константе зависе од односа ширина/висина (h/t), и одређују се помоћу коефицијената α и β (видети слику 2.1). За издужене правоугаоне пресеке код којих је однос висина/ширина већи од 10, вредности ових коефицијената су приближно једнаке једној трећини.



Слика 2.0 – Униформна (Сен Венанова) торзија код пуних попречних пресека
 а) Ротација услед момента торзије; б) Ток смичућих напона [2]



Слика 2.1 – Смичући напони [2]

Табела 2.0 - Торзионе константе за пуне попречне пресеке [2]

Облик пресека				$\tau_{t,\max}$		W_t		I_t	
Кружни пресеци				$\frac{T_t}{W_t} = \frac{2T_t}{\pi \cdot r^3}$		$\frac{\pi}{2} \cdot r^3$		$\frac{\pi}{2} \cdot r^4$	
Правоугаони пресеци $h/t \leq 10$				$\frac{T_t}{W_t} = \frac{T_t}{\alpha \cdot h \cdot t^2}$		$\alpha \cdot h \cdot t^2$		$\beta \cdot h \cdot t^3$	
Правоугаони пресеци $h/t > 10$				$\frac{T_t}{W_t} = \frac{3T_t}{h \cdot t^2}$		$\frac{h \cdot t^2}{3}$		$\approx \frac{1}{3} \cdot h \cdot t^3$	
h/t	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0
α	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313
β	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313

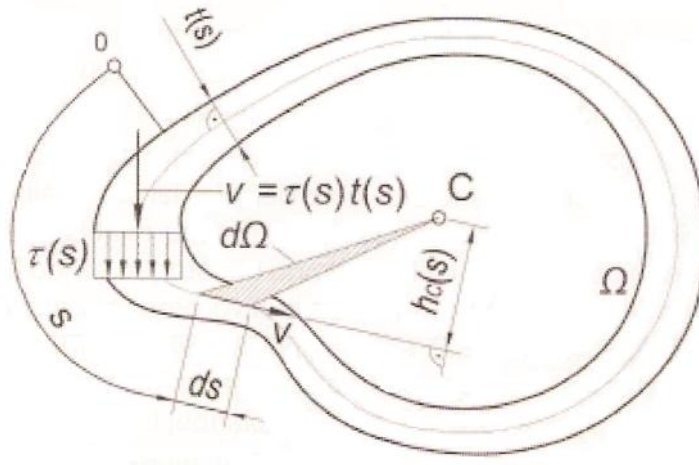
За елементе челичних конструкција се по правилу не користе пуни пресеци. Међутим, изрази за прорачун торзионе константе и максималног смичућег напона, уз одређену модификацију, могу да се користе и за отворене врућеваљане или заварене I, H или U пресеке. Наиме, заварени пресеци су састављени од више правоугаоних делова (ножице и ребро) чији однос димензија (ширина/дебљина) је углавном већи од 10, па у том случају торзиона константа може да се одреди као:

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum b_i \cdot t_i^3 \quad (2.2)$$

где су b_i и t_i ширина (висина) и дебљина пресека, респективно. Сумирање се врши по свим деловима попречног пресека. Претходни израз може да се користи као конзервативна апроксимација и за врућеваљане профиле. Међутим, због утицаја заобљења између ножица и ребра, стварна торзиона крутост ових профила је битно већа, па је за препоруку да се при прорачуну користе њене вредности из одговарајућих таблица за стандардне врућеваљане профиле. Максималан смичући напон код отворених попречних пресека треба да се одреди на основу израза:

$$\tau_{\max} = \frac{T_t}{I_t} \cdot t_{\max} = \frac{T_t}{W_t} \quad (2.3)$$

где је $t_{\max}$ дебљина најдебљег дела пресека, а са W_t је означен торзиони отпорни момент, по аналогији са савијањем. Максимални смичући напони услед униформне торзије код отворених попречних пресека се, према томе, јављају у деловима пресека са максималном дебљином.



Слика 2.2 – Униформна торзија код затворених попречних пресека [2]

Понашање затворених попречних пресека, као што су шупљи конструкциони профили кружног или правоугаоног попречног пресека или заварени сандучасти пресеци, при униформној торзији је сасвим другачије. За разлику од отворених профила, смичући напони услед униформне торзије су код затворених профила константни по дебљини зида. Ток смицања који се дефинише као производ смичућег напона и дебљине зида. Ток смицања који се дефинише као производ смичућег напона и дебљине зида затвореног (шупљег) профила ($q = \tau_v(s) \cdot t(s)$) је такође константан у сваком пресеку дуж затворене средишње линије која спаја средине дебљина зидова (видети слику 2.2). Затворени попречни пресеци имају знатно већу торзиону крутост и носивост на униформну торзију. Торзиона константа се, у случају затворених профила, одређује према Бредовом обрасцу, који у општем случају гласи:

$$I_t = \frac{4\Omega^2}{\oint_{\Gamma} ds / t(s)} \quad (2.4)$$

где је Ω површина попречног пресека оивиченог средишњом линијом затвореног профила, а $t(s)$ функција промене дебљине зида шупљег профила дуж средње линије s (видети слику 2.2). У случају челичних конструкција затворени сандучасти пресеци су обично састављени од равних лимова константних дебљина, па интеграл из претходног израза може да се замени сумом. Тада је:

$$I_t = \frac{4\Omega^2}{\sum_{i=1}^n b_i / t_i} \quad (2.5)$$

где су b_i и t_i ширине и дебљине лимова који сачињавају затворен (сандучаст пресек). Напон смицања се одређује према следећем изразу:

$$\tau_t(s) = \frac{T_t}{2\Omega \cdot t(s)} \quad (2.6)$$

Из претходног израза се уочава да напон смицања има максималну вредност на месту минималне дебљине зида затвореног пресека, која може да се одреди на следећи начин:

$$\tau_{t,\max} = \frac{T_t}{2\Omega \cdot t_{\min}} = \frac{T_t}{W_t} \quad (2.7)$$

где је W_t торзиони отпорни момент ($W_t = 2\Omega \cdot t_{\min}$).

2.2. Неуниформна торзија

Код елемената отвореног попречног пресека који су изложени променљивим торзионим утицајима, или код којих су спречене подужне деформације кривљења на бар једном крају, јавља се неуниформна торзија (2.4б). У случају неуниформне торзије промена угла ротације (увијања) $\varphi(x)$ дуж елемента није константна, као ни кривљење попречних пресека. Крутост елемента у овом случају пропорционална је крутости елемента на кривљење која је једнака производу $E \cdot I_w$ где је I_w секторски момент инерције, а веза између момента торзије и ротације (увијања) пресека око подужне осе x може да се напише на следећи начин:

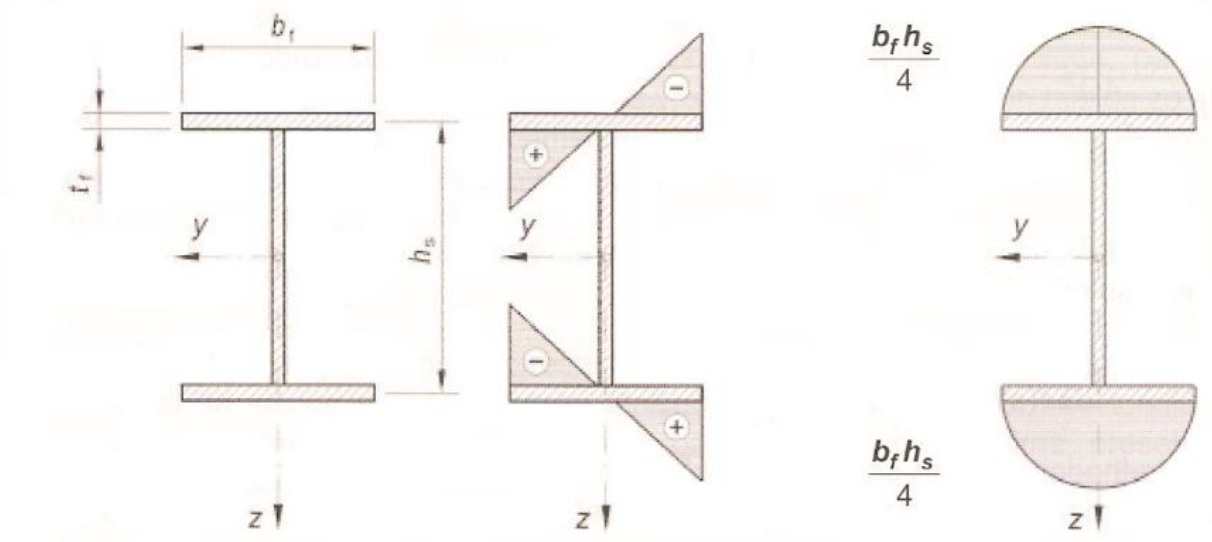
$$T_w(x) = -E \cdot I_w \cdot \frac{d^3 \varphi(x)}{dx^3} \quad (2.8)$$



Слика 2.3 – Униформна и неуниформна торзија [2]

Нормирана секторска координата $\omega(y, z) = -yz$

Секторски статички момент S_w



Секторски момент инерције: $I_w = I_z \frac{h_s^2}{4} \approx \frac{1}{24} t_f b_f^3 h_s^2$

$$S_{w, \max} = \frac{1}{16} t_f h_s b_f^2$$

h_s : растојање између центара смицања појасних ламела ($h_s = h - t_f$)

Слика 2.4 – Нормирана секторска координата и секторски статички момент за I пресек [2]

При неуниформној торзији, у општем случају, се јављају смичући напони τ_w услед момента торзије T_w и нормални напони σ_w услед бимоментa B . Изрази за одређивање смичућег и нормалног напона при ограниченој торзији могу да се напишу по аналогiji са савијањем:

$$\sigma_w(y, z) = \frac{B}{I_w} \cdot \omega(y, z) \quad (2.9)$$

$$\tau_w = \frac{T_w \cdot S_w}{I_w \cdot t_f} \quad (2.10)$$

где је:

t_f дебљина ножице

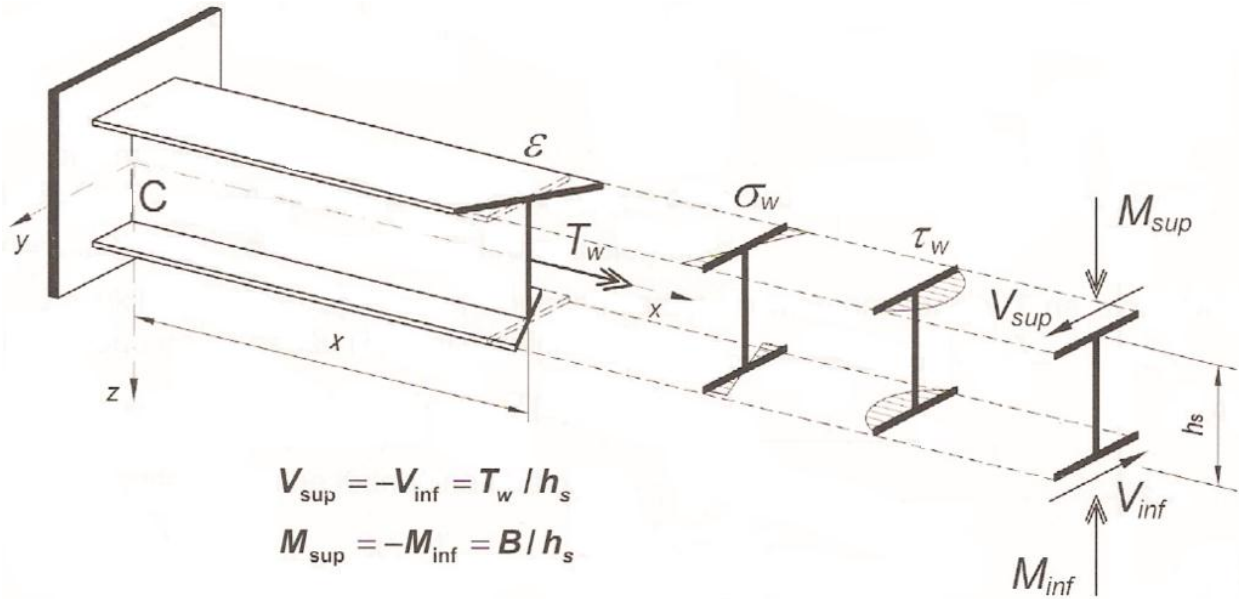
$B = -E \cdot I_w \cdot \frac{d^2 \cdot \varphi(x)}{dx^2}$ бимомент,

$\omega(y, z) = -yz$ нормализована секторска координата,

$I_w = \int_A \omega(y, z)^2 \cdot dA$ секторски момент инерције $[m^6]$,

$$S_w = \int_A \omega(y, z) \cdot dA \quad \text{секторски статички момент} \left[\text{m}^4 \right].$$

Напрезања услед ограничене торзије могу да се илуструју на примеру укљештеног (конзолног) елемента I пресека који је оптерећен торзионим моментом T_w који делује на слободном крају (слика 2.5).



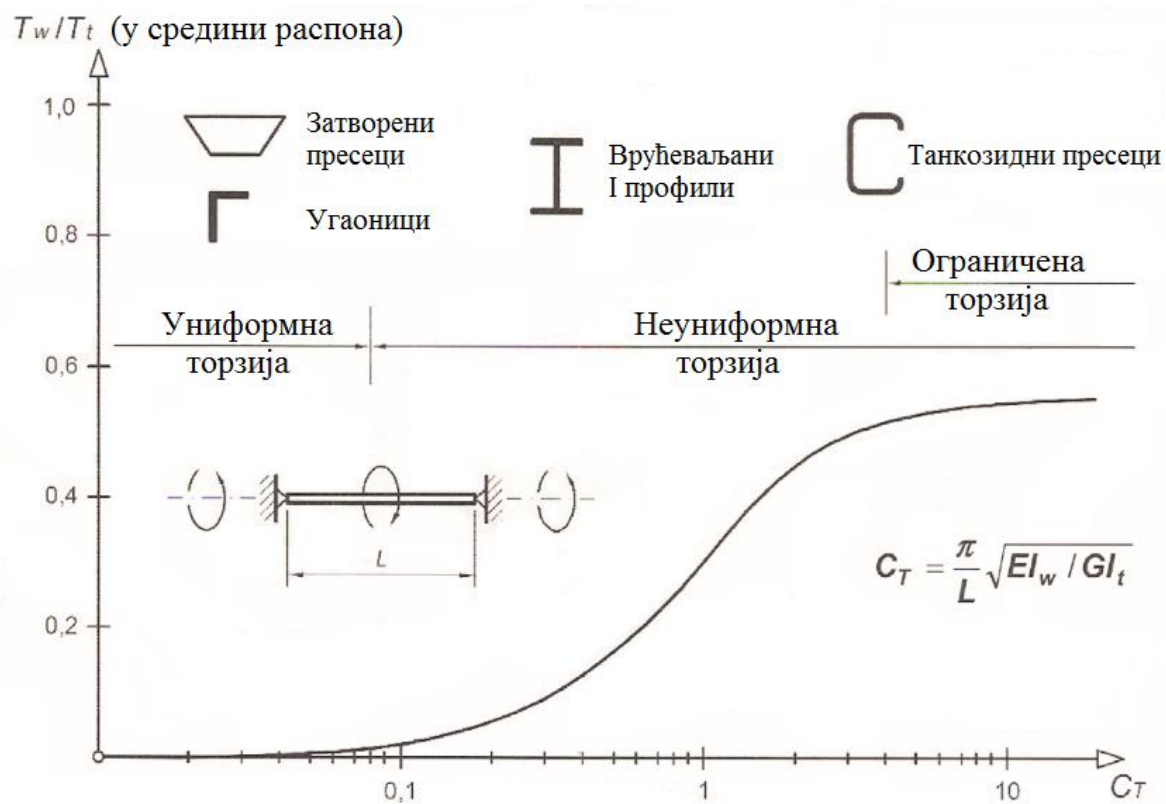
Слика 2.5 – Напони и деформације услед неуниформне (ограничене) торзије код I пресека [2]

Проблем торзионог напрезања у овом случају може да се апроксимира савијањем ножица носача око слабије вертикалне осе ($z - z$) као последица деловања бимоментa B и смицањем ножица услед момента торзије T_w . Момент торзије T_w може да се подели на спрег сила које делују у нивоу ножица V_{sup} и V_{inf} . На сличан начин и бимомент B који је последица спречене деформације на месту укљештења може да се представи као спрег момената савијања који делују на ножице I пресека M_{sup} и M_{inf} . Дакле, ограничена торзија код I - пресека изазива напрезања само у ножицама (видети слику 2.5).

2.3. Комбинована торзија

Да ли ће преовлађујући бити утицаји униформне или неуниформне торзије зависи од облика попречног пресека, услова ослањања елементана крајевима и начина деловања торзионог оптерећења. Доминантну улогу има однос торзионе крутости $G \cdot I_w$. Однос ових крутости може да се прикаже и помоћу торзионог параметра C_T . Удео униформне и

неуниформне торзије у укупном торзионом напрезању у зависности од параметра C_T приказан је на слици 2.6. Вредност торзионе константе I_t , а самим тим и торзионе крутости код затворених попречних пресека је изузетно велика у односу на крутост пресека на кривљење (параметар C_T је веома мали), па је код таквих попречних пресека доминантна униформна торзија. Слично је и са L и T пресецима који имају занемарљиво малу крутост на кривљење $E \cdot I_w$. Са друге стране, када торзиони параметар C_T има веома велике вредности, односно када је торзиона крутост знатно мања од крутости на кривљење, доминира неуниформна торзија. То је случај код отворених танкозидних пресека. Између ових крајности налазе се стандардни врућеваљани I и H профили код којих је присутна комбинована торзија.



Слика 2.6 – Доприноси униформне и неуниформне торзије укупном напрезању [2]

У случају комбиноване торзије укупан момент торзије једнак је збиру момената услед униформне и неуниформне торзије, па, имајући у виду изразе (2.1) и (2.8), може да се напише следећа диференцијална једначина:

$$T(x) = T_t(x) + T_w(x) = G \cdot I_t \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} - E \cdot I_w \cdot \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \quad (2.11)$$

Из услова равнотеже дела призматичног штапа дужине dx који је оптерећен линијски расподељеним моментом торзије m_T добија се:

$$\frac{dT(x)}{dx} = -m_T \quad (2.12)$$

одакле следи нехомогена диференцијална једначина четвртог реда за комбиновану торзију:

$$E \cdot I_w \cdot \frac{d^4 \cdot \varphi(x)}{dx^4} - G \cdot I_t \cdot \frac{d^2 \cdot \varphi(x)}{dx^2} = m_T \quad (2.13)$$

У случају укљештеног призматичног елемента I пресека који је оптерећен само моментом торзије на слободном крају ($m_T = 0$) претходна диференцијална једначина постаје хомогена диференцијална једначина константним коефицијентима:

$$E \cdot I_w \cdot \frac{d^4 \cdot \varphi(x)}{dx^4} - G \cdot I_t \cdot \frac{d^2 \cdot \varphi(x)}{dx^2} = 0 \quad (2.14)$$

чије решење се може написати у следећем облику:

$$\varphi(x) = A + B \cdot \frac{x}{L} + C \cosh\left(k \cdot \frac{x}{L}\right) + D \sinh\left(k \cdot \frac{x}{L}\right) \quad (2.15)$$

где је:

L дужина елемента;

A, B, C и D непознати коефицијенти који се одређују на основу граничних услова;

$k = L \cdot \sqrt{\frac{GI_t}{EI_w}}$ однос торзионих крутости елемента.

За укљештен штап оптерећен концентрисаним моментом торзије T на слободном крају могу да се напишу следећи гранични услови:

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi''(0) = 0 \quad \varphi''(L) = 0 \quad T(L) = T \quad (2.16)$$

а решење диференцијалне једначина има облик:

$$\varphi(x) = \frac{TL}{GI_t} \cdot \left(-\frac{1}{k} \tanh k + \frac{x}{L} + \frac{1}{k} \tanh k \cdot \cosh \left(k \cdot \frac{x}{L} \right) - \frac{1}{k} \sinh \left(k \cdot \frac{x}{L} \right) \right) \quad (2.17)$$

На основу овако добијене функције ротације $\varphi(x)$ могу да се одреде и моменти у пресецима који су карактеристични за комбиновану торзију:

$$B(x) = \frac{TL}{k} \cdot \left(\sinh \left(k \cdot \frac{x}{L} \right) - \tanh k \cosh \left(k \cdot \frac{x}{L} \right) \right) \quad (2.18)$$

$$T_w(x) = \frac{dB(x)}{dx} = T \cdot \left(\cosh \left(k \cdot \frac{x}{L} \right) - \tanh k \sinh \left(k \cdot \frac{x}{L} \right) \right) \quad (2.19)$$

$$T_t(x) = T - T_w(x) = T \cdot \left(1 - \cosh \left(k \cdot \frac{x}{L} \right) + \tanh k \sinh \left(k \cdot \frac{x}{L} \right) \right) \quad (2.20)$$

2.4. Прорачун торзије према Еврокоду 3

Код елемената оптерећених торзијом, према Еврокоду 3, у сваком попречном пресеку треба да буде задовољен следећи услов:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd}} \leq 1 \quad (2.21)$$

где је:

T_{Ed} прорачунска вредност укупних торзионих момената који делују на посматрани пресек услед униформне (Сен Венанова) и ограничене торзије ($T_{Ed} = T_{t,Ed} + T_{w,Ed}$),

T_{Rd} прорачунска носивост попречног пресека на торзију.

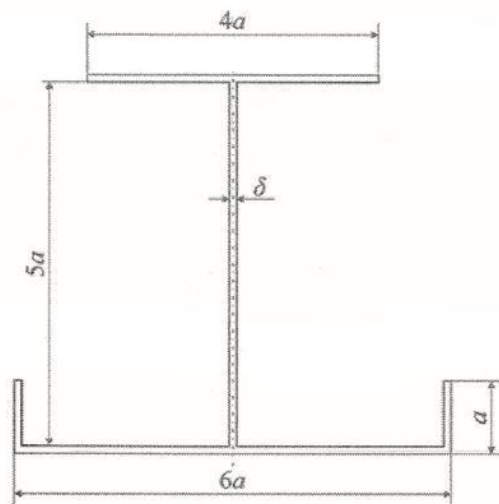
Прорачунска носивост попречног пресека на торзију за случај униформне торзије може се написати као:

$$T_{Rd} = \frac{W_t \cdot f_y / \sqrt{3}}{\gamma_{M0}} = W_t \cdot \tau_y / \gamma_{M0} \quad (2.22)$$

где је W_t торзиони отпорни момент за отворене или затворене шупље попречне пресеке. Овакав приступ не може да се примени у случају комбиноване или ограничене торзије јер се истовремено јављају и нормални напони ($\sigma_{w,Ed}$) услед бимоента (B_{Ed}) смичући напони ($\tau_{w,Ed}$) услед момента неуниформне торзије ($T_{w,Ed}$) и смичући напони ($\tau_{t,Ed}$) услед момента униформне торзије ($T_{t,Ed}$). Дакле имамо случај сложеног напонског стања. У овим случајевима торзиони утицаји треба да се одреде применом еластичне анализе а истовремено дејство више напона може да се прикаже и одреди применом Ван Мизесовог услова пластичности (шеста хипотеза – Хубер – Мизес – Хенкијева). [2] Овај услов се такође примењује код врло честих комбинованих напрезања – најчешћа је комбинација торзије и савијања. [2]

3. Пример прорачуна једног штапа танкозидног отвореног попречног пресека

3.1. Моменти инерције и секторске карактеристике попречног пресека

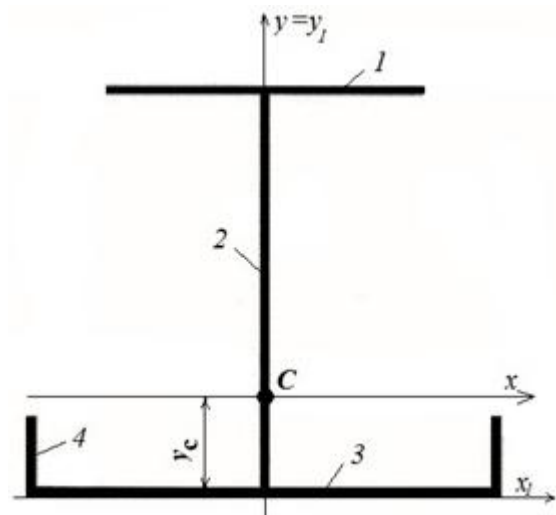


Слика 3.0 – Поставка задатка I део

Подаци: $\delta = 1[\text{cm}] = 10[\text{mm}]; a = 10[\text{cm}] = 100[\text{mm}]$

Решење:

Усваја се почетни координатни систем [3], X_1 , Y_1 , приказан на слици 3.1.



Слика 3.1 – Почетни координатни систем

- Површина:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + 2A_4$$

$$A_1 = 4a \cdot \delta = 40 \cdot 1 = 40 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$A_2 = 5a \cdot \delta = 50 \cdot 1 = 50 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$A_3 = 6a \cdot \delta = 60 \cdot 1 = 60 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$A_4 = a \cdot \delta = 10 \cdot 1 = 10 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + 2A_4 = 40 + 50 + 60 + 2 \cdot 10 = 170 \text{ [cm}^2\text{]}$$

- Тежиште:

$$X_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{c1} + A_2 \cdot x_{c2} + A_3 \cdot x_{c3} + 2A_4 \cdot x_{c4}}{A}$$

$$X_c = 0 \text{ – јер је } y \text{ – оса симетрије}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 \cdot y_{c1} + A_2 \cdot y_{c2} + A_3 \cdot y_{c3} + 2A_4 \cdot y_{c4}}{A}$$

$$y_c = 19,706 \text{ [cm]}$$

- Моменти инерције

$I_x = I_{x1} - y_c^2 \cdot A$ – не мора да се рачуна јер је оса у-оса симетрије – центар смицања је на њој

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} + 2I_y^{(4)}$$

$$I_y = \frac{\delta \cdot (4a)^3}{12} + \frac{5a \cdot \delta^3}{12} + \frac{\delta \cdot (6a)^3}{12} + 2 \cdot \left[\frac{a \cdot \delta^3}{12} + a \cdot \delta \cdot (3a)^2 \right]$$

$$I_y = 41339,17 \text{ [cm}^4\text{]}$$

- Центар смицања

$$x_D = x_Q + \frac{I_{y\omega_Q}}{I_x}, \quad y_D = y_Q - \frac{I_{x\omega_Q}}{I_y}$$

- Дијаграм секторске координате $\omega_Q(O_1, s)$

$$\omega_Q(O_1, s) \equiv \omega_Q = h_Q \cdot ds$$

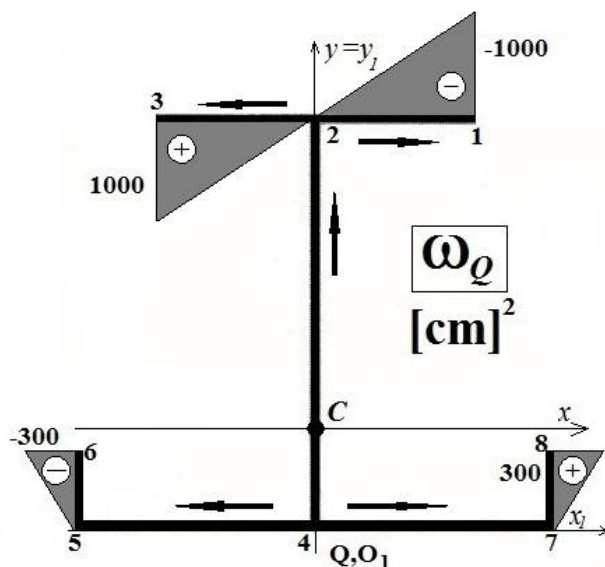
$$\text{u tački (2, 4, 5 i 7):} \quad ds = 0 \Rightarrow \omega_Q^{(2)} = \omega_Q^{(4)} = \omega_Q^{(5)} = \omega_Q^{(7)} = 0$$

$$\text{y тачки (1):} \quad ds = -2a, \quad h_Q = 5a \Rightarrow \omega_Q^{(1)} = h_Q \cdot ds = -5a \cdot 2a = -1000 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{y тачки (3):} \quad ds = 2a, \quad h_Q = 5a \Rightarrow \omega_Q^{(3)} = h_Q \cdot ds = 5a \cdot 2a = 1000 \text{ [cm}^2\text{]}$$

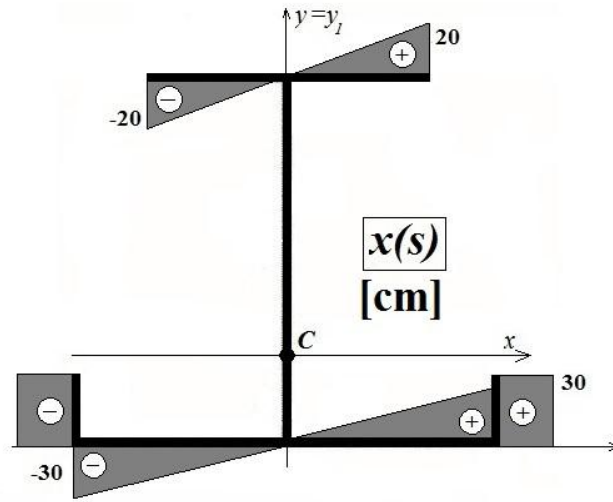
$$\text{y тачки (6):} \quad ds = -a, \quad h_Q = 3a \Rightarrow \omega_Q^{(6)} = h_Q \cdot ds = -3a \cdot a = -300 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{y тачки (8):} \quad ds = a, \quad h_Q = 3a \Rightarrow \omega_Q^{(8)} = h_Q \cdot ds = 3a \cdot a = 300 \text{ [cm}^2\text{]}$$



Слика 3.2 – Дијаграм секторске координате $\omega_Q(O_1, s)$

- Дијаграми промене координате x



Слика 3.3 – Дијаграм промене координате x

- Центрифугални секторски моменти

$$I_{x\omega_Q} = \int_A y \cdot \omega_Q \cdot dA$$

$$I_{y\omega_Q} = \int_A x \cdot \omega_Q \cdot dA$$

Обрасци за премножавање дијаграма налазе се у табели 6.2.[13]

$$I_{x\omega_Q} = 2 \cdot \frac{2a \cdot \delta}{3} \cdot (-2a \cdot 5a) \cdot 2a + 2 \cdot \frac{a \cdot \delta}{2} \cdot 3a^2 \cdot 3a$$

$$I_{x\omega_Q} = -176780,07 [\text{cm}^5]$$

$I_{y\omega_Q} = 0$, – jer se premnožavaju simetrični i antisimetrični dijagrami

- Координате центра смицања

$$x_Q = 0; \quad y_Q = -y_C = -19,706 [\text{cm}]$$

$$x_D = x_Q + \frac{I_{y\omega_Q}}{I_x}$$

$$y_D = y_Q - \frac{I_{x\omega_Q}}{I_y} = -y_C - e_1$$

$$\frac{I_{x\omega_Q}}{I_y} = \frac{-176780,07}{41339,17} = -4,276 [\text{cm}]$$

Zamenom se dobijaju koordinate centra smicanja :

$$x_D = 0$$

$$y_D = y_Q - \frac{I_{x\omega_Q}}{I_y} = -19,706 + 4,276 = -15,430 [\text{cm}]$$

- Дијаграм секторске координате за центар смицања, $\omega_D(O_1, s)$

$$\omega_D(O_1, s) \equiv \omega_D = h_D \cdot ds$$

$$\text{u tački (2 i 4): } ds = 0 \Rightarrow \omega_D^{(2)} = \omega_D^{(4)} = 0$$

$$\text{u tački (1): } ds = -2a, \quad h_D = e_2 = (5a - y_D) \Rightarrow \omega_D^{(1)} = h_D \cdot ds = (5a - y_D) \cdot (-2a) = -914,48 [\text{cm}^2]$$

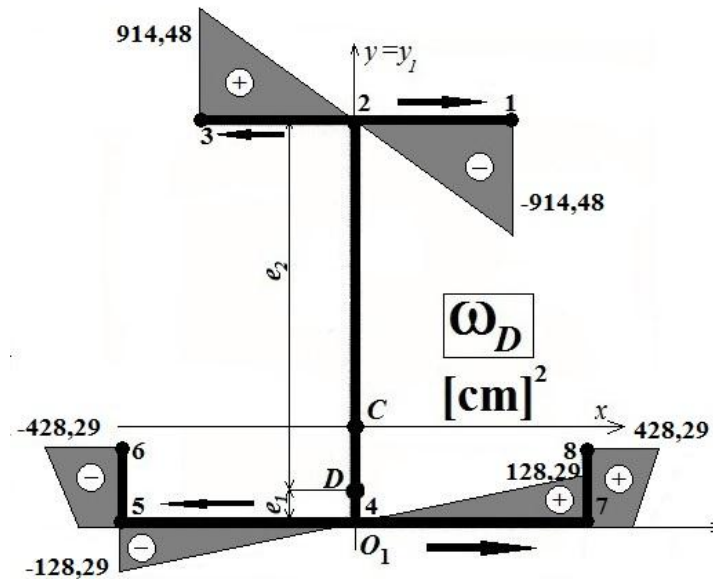
$$\text{u tački (3): } ds = 2a, \quad h_D = e_2 = (5a - y_D) \Rightarrow \omega_D^{(3)} = h_D \cdot ds = (5a - y_D) \cdot 2a = 914,48 [\text{cm}^2]$$

$$\text{u tački (5): } ds = -3a, \quad h_D = e_1 \Rightarrow \omega_D^{(5)} = h_D \cdot ds = -3a \cdot e_1 = -128,29 [\text{cm}^2]$$

$$\text{u tački (6): } ds = -a, \quad h_D = 3a \Rightarrow \omega_D^{(6)} = \omega_D^{(5)} + h_D \cdot ds = -3a \cdot e_1 - 3a^2 = -428,29 [\text{cm}^2]$$

$$\text{u tački (7): } ds = 3a, \quad h_D = e_1 \Rightarrow \omega_D^{(7)} = h_D \cdot ds = 3a \cdot e_1 = 128,29 [\text{cm}^2]$$

$$\text{u tački (8): } ds = a, \quad h_D = 3a \Rightarrow \omega_D^{(8)} = \omega_D^{(7)} + h_D \cdot ds = 3a \cdot e_1 + 3a^2 = 428,29 [\text{cm}^2]$$



Слика 3.4 – Дијаграм секторске координате за центар смицања

- Нова нулта тачка

$$\omega_0 = \int_{O_1}^O h \cdot ds = h_0 \cdot s|_{O_1}^O = h_0 \cdot S_0$$

$$\omega_0 = -\frac{S_\omega}{A}$$

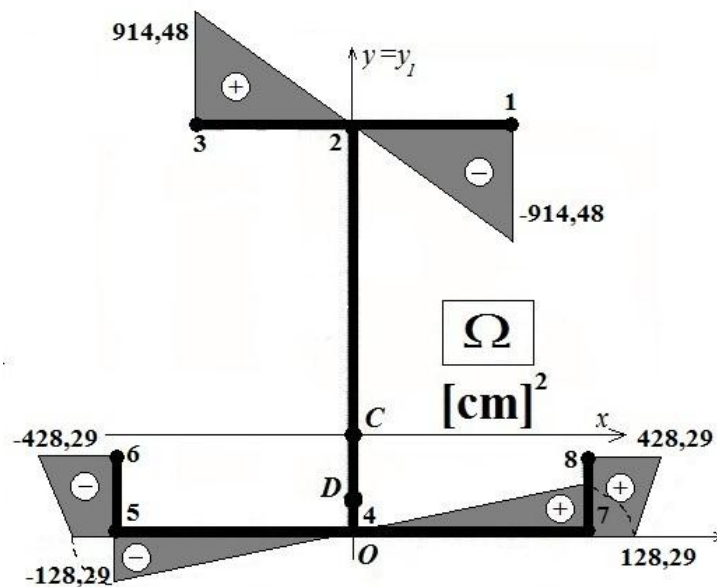
$$S_\omega = \int_A \omega_D \cdot dA$$

$$S_\omega = 0 \Rightarrow \omega_0 = 0$$

$$S_0 = 0, O_1 = 0$$

- Нормирана секторска координата

$$\Omega = \omega_D + \omega_0 \Rightarrow \Omega \equiv \omega_D$$



Слика 3.5 – Дијаграм нормиране секторске координате

- Дијаграм секторског статичког момента $\bar{S}_\Omega$

$$\bar{S}_\Omega = \int_A \Omega \cdot dA = \text{ако је } \delta = \text{const.} = \delta \cdot \int_s \Omega \cdot ds$$

Координата s_1 увек креће са слободног краја

за део (1-2), слика 3.5: Из сличности троуглова следи:

$$\Omega^{(1)} : 2a = \Omega_{(s)} : (2a - s)$$

$$\Omega^{(1)} = -914,48$$

$$\Omega_{(s)} = \frac{\Omega^{(1)} \cdot (2a - s)}{2a} = \frac{-914,48 \cdot (20 - s)}{20} = -914,48 + 914,48 \cdot \frac{s}{20}$$

$$\Omega_{(s)} = -914,48 + 45,724 \cdot s$$

$$\bar{S}_{\Omega}^{(1-2)} = \delta \cdot \int \Omega_{(s)} \cdot ds = \delta \cdot \int (-914,48 + 45,724 \cdot s) \cdot ds$$

$$\bar{S}_{\Omega}^{(1-2)} = \delta \cdot \left(-914,48 \cdot s \Big|_0^{20} + 45,724 \cdot \frac{s^2}{2} \Big|_0^{20} \right)$$

$$\text{у тачки (1) је } s = 0, \text{ па је: } \bar{S}_{\Omega}^{(1)} = 0$$

$$\text{у тачки (2) је } s = 20, \text{ па је: } \bar{S}_{\Omega}^{(1)} = -9144,8 [\text{cm}^4]$$

за део (3-2), слика 3.5: Из сличности троуглова следи:

$$\Omega^{(3)} : 2a = \Omega_{(s)} : (2a - s)$$

$$\Omega^{(3)} = 914,48$$

$$\Omega_{(s)} = \frac{\Omega^{(3)} \cdot (2a - s)}{2a} = \frac{914,48 \cdot (20 - s)}{20} = 914,48 - 914,48 \cdot \frac{s}{20}$$

$$\Omega_{(s)} = 914,48 - 45,724 \cdot s$$

$$\bar{S}_{\Omega}^{(2-3)} = \delta \cdot \int \Omega_{(s)} \cdot ds = \delta \cdot \int (914,48 - 45,724 \cdot s) \cdot ds$$

$$\bar{S}_{\Omega}^{(2-3)} = \delta \cdot \left(914,48 \cdot s \Big|_0^{20} - 45,724 \cdot \frac{s^2}{2} \Big|_0^{20} \right)$$

$$\text{у тачки (3) је } s = 0, \text{ па је: } \bar{S}_{\Omega}^{(3)} = 0$$

$$\text{у тачки (2) је } s = 20, \text{ па је: } \bar{S}_{\Omega}^{(2)} = 9144,8 [\text{cm}^4]$$

за део (7-8), слика 3.5: Из сличности троуглова следи:

$$\Omega^{(8)} - \Omega^{(7)} : a = \Omega_{(s)} : (a - s) =$$

$$\Omega^{(8)} - \Omega^{(7)} = (428,29 + 128,29) = 556,58 [\text{cm}^2]$$

$$\Omega_{(s)} = \frac{556,58 \cdot (a - s)}{a} = \left(1 - \frac{s}{a}\right) \cdot 556,58 = 556,58 - 55,658 \cdot s$$

$$\bar{S}_{\Omega}^{(7-8)} = \delta \cdot \int \Omega_{(s)} \cdot ds = \delta \cdot \int (556,58 - 55,658 \cdot s) \cdot ds = \delta \cdot \left(556,58 \cdot s \Big|_0^{10} - 55,658 \cdot \frac{s^2}{2} \Big|_0^{10} \right)$$

$$\text{u tački (8) je } s = 0, \text{ pa je: } \bar{S}_{\Omega}^{(8)} = 0$$

$$\text{u tački (7) je } s = 10, \text{ pa je: } \bar{S}_{\Omega}^{(7)} = 2782,9 [\text{cm}^4]$$

за део (7-4), слика 3.5: Из сличности троуглова следи:

$$\Omega^{(7)} : 3a = \Omega_{(s)} : (3a - s)$$

$$\Omega_{(s)} = \frac{\Omega^{(7)} \cdot (3a - s)}{3a} = \left(1 - \frac{s}{3a}\right) \cdot 128,29 = 128,29 - 4,276 \cdot s$$

$$\bar{S}_{\Omega}^{(7-4)} = \delta \cdot \int \Omega_{(s)} \cdot ds = \delta \cdot \int (128,29 - 4,276 \cdot s) \cdot ds = 1 \cdot \left(128,29 \cdot s \Big|_0^{30} - 4,276 \cdot \frac{s^2}{2} \Big|_0^{30} \right)$$

$$\text{u tački (7) je } s = 0, \text{ pa je: } \bar{S}_{\Omega}^{(7)} = 2782,9$$

$$\text{u tački (4) je } s = 30, \text{ pa je: } \bar{S}_{\Omega}^{(4)} = 2782,9 + 1924,3 = 4707,2 [\text{cm}^4]$$

за део (5-6), слика 3.5: Из сличности троуглова следи:

$$\Omega^{(6)} - \Omega^{(5)} : a = \Omega_{(s)} : (a - s)$$

$$\Omega^{(6)} - \Omega^{(5)} = (-428,29 - 128,29) = -556,58 [\text{cm}^2]$$

$$\Omega_{(s)} = \frac{-556,58 \cdot (a - s)}{a} = \left(1 - \frac{s}{a}\right) \cdot -556,58 = -556,58 + 55,658 \cdot s$$

$$\bar{S}_{\Omega}^{(5-6)} = \delta \cdot \int \Omega_{(s)} \cdot ds = \delta \cdot \int (-556,58 + 55,658 \cdot s) \cdot ds = \delta \cdot \left(-556,58 \cdot s \Big|_0^{10} + 55,658 \cdot \frac{s^2}{2} \Big|_0^{10} \right)$$

$$\text{u tački (6) je } s = 0, \text{ pa je: } \bar{S}_{\Omega}^{(6)} = 0$$

$$\text{u tački (5) je } s = 10, \text{ pa je: } \bar{S}_{\Omega}^{(5)} = -2782,9 [\text{cm}^4]$$

за део (5-4), слика 3.5: Из сличности троуглова следи:

$$\Omega^{(5)} : 3a = \Omega_{(s)} : (3a - s)$$

$$\Omega_{(s)} = \frac{\Omega^{(5)} \cdot (3a - s)}{3a} = \left(1 - \frac{s}{3a}\right) \cdot (-128,29)$$

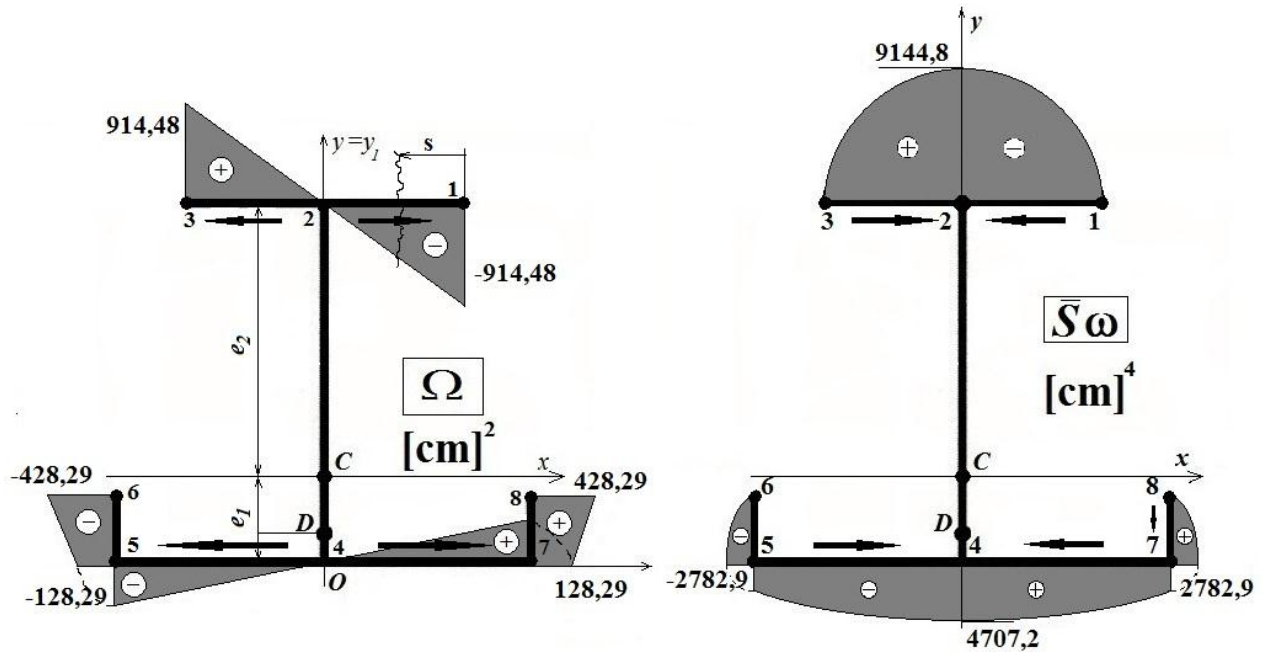
$$\Omega_{(s)} = -128,29 + 4,276 \cdot s$$

$$\bar{S}_{\Omega}^{(5-4)} = \delta \cdot \int \Omega_{(s)} \cdot ds = \delta \cdot \int (-128,29 + 4,276 \cdot s) \cdot ds$$

$$\bar{S}_{\Omega}^{(5-4)} = 1 \cdot \left(-128,29 \cdot s \Big|_0^{30} + 4,276 \cdot \frac{s^2}{2} \Big|_0^{30} \right)$$

$$\text{u tački (5) je } s = 0, \text{ pa je: } \bar{S}_{\Omega}^{(5)} = -2782,9$$

$$\text{u tački (4) je } s = 30, \text{ pa je: } \bar{S}_{\Omega}^{(4)} = -2782,9 - 1924,3 = -4707,2 [\text{cm}^4]$$



Слика 3.6 – а) Дијаграм нормиране секторске координате,
б) Дијаграм секторског статичког момента

- Секторски момент инерције

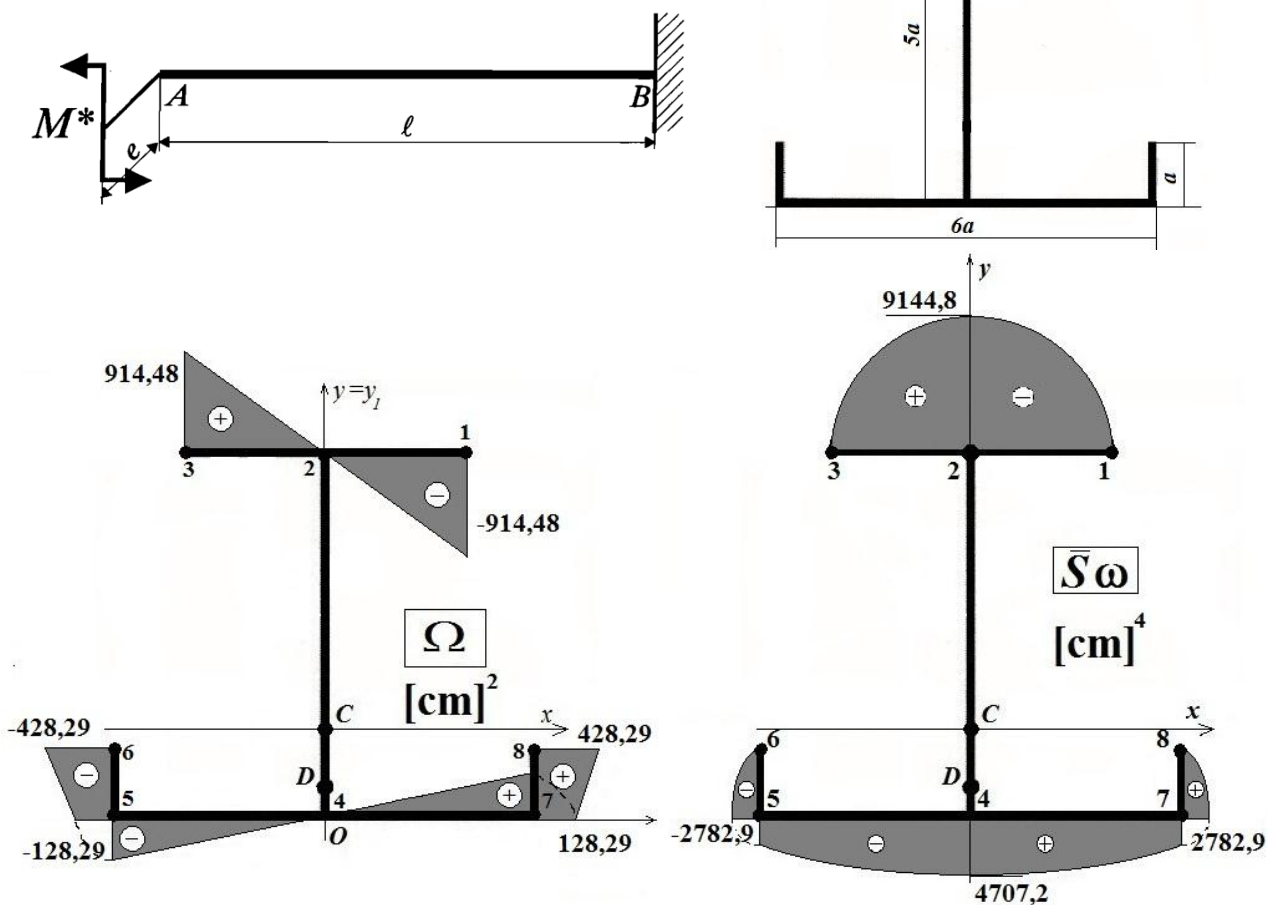
$$I_{\Omega} = \int_A \Omega^2 \cdot dA$$

$$I_{\Omega} = 2 \cdot \left[\frac{2a \cdot \delta}{3} \cdot 914,48^2 + \frac{3a \cdot \delta}{3} \cdot 128,29^2 + \frac{a \cdot \delta}{6} \cdot \left[128,29 \cdot (2 \cdot 128,29 + 428,29) + 428,29 \cdot (128,29 + 2 \cdot 428,29) \right] \right]$$

$$I_{\Omega} = 2 \cdot (5575157,8 + 164583,2 + 849453,2)$$

$$I_{\Omega} = 13178388,4 [\text{cm}^6].$$

3.2. Спречена торзија



Слика 3.7 – Поставка задатка II део

$$e = 30 [\text{cm}]$$

$$l = 2 [\text{m}]$$

$$M^* = 30 [\text{kNm}]$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 [\text{MPa}]$$

$$G = 0,8 \cdot 10^5 [\text{MPa}]$$

$$\mu = 0,3$$

Бимомент на слободном крају

$$B^* = M^* \cdot e = -30 \cdot 0,3 = -9 [\text{kNm}^2]$$

Из таблице 7.6. [13] следи да је:

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \frac{\varphi_0'}{k} \cdot \sinh(kz) + \frac{B_0}{GI_t} \cdot (1 - \cosh(kz)) + \frac{M_0}{GI_t} \cdot \left(z - \frac{1}{k} \cdot \sinh(kz) \right)$$

$$\varphi'(z) = \varphi_0' \cdot \cosh(kz) - \frac{B_0 k}{GI_t} \cdot \sinh(kz) + \frac{M_0}{GI_t} \cdot (1 - \cosh(kz))$$

$$B(z) = -\varphi_0' \cdot \frac{GI_t}{k} \cdot \sinh(kz) + B_0 \cdot \cosh(kz) + \frac{M_0}{k} \cdot \sinh(kz)$$

$$M(z) = M_0$$

$$M_s(z) = G \cdot I_t \cdot \varphi'(z)$$

$$M_\Omega(z) = -E_1 \cdot I_\Omega \cdot \varphi'''(z)$$

$$E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} = \frac{2,1 \cdot 10^5}{1 - 0,3^2} = 2,3 \cdot 10^5 [\text{MPa}]$$

$$I_t = \frac{\eta}{3} \sum_{i=1}^n s_i \cdot \delta_i^3 = \frac{1,31}{3} \cdot 17a \cdot \delta^3 = 74,23 [\text{cm}^4]$$

где је η – поправни коефицијент за I профил из табеле 6.2. [13]

$$k^2 = \frac{GI_t}{E_1 I_\Omega} = \frac{0,8 \cdot 10^5 \cdot 74,23 \cdot 10^{-8}}{2,3 \cdot 10^5 \cdot 13178388,4 \cdot 10^{-12}} = 0,0196 \frac{1}{\text{m}^2}$$

$$k = 0,140 \frac{1}{\text{m}}.$$

за $z = 0$ је: $\varphi = 0, \varphi' = 0$

за $z = l$ је: $M = 0, B = B^*$

$$\varphi(z) = \frac{B^*}{G \cdot I_t \cdot \cosh(kl)} \cdot (1 - \cosh(kz))$$

$$\varphi(z) = \frac{-9 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 74,23 \cdot 10^{-8} \cdot \cosh(0,140 \cdot 2)} \cdot (1 - \cosh(kz))$$

$$\varphi(z) = -0,146 \cdot (1 - \cosh(kz)) [\text{rad}]$$

$$\varphi'(z) = -\frac{B^* \cdot k}{G \cdot I_t \cdot \cosh(kl)} \cdot \sinh(kz) = -\frac{-9 \cdot 10^3 \cdot 0,140}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 74,23 \cdot 10^{-8} \cdot \cosh(0,140 \cdot 2)} \cdot \sinh(kz)$$

$$\varphi'(z) = 0,020 \cdot \sinh(kz) \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

$$B(z) = \frac{B^*}{\cosh(kl)} \cdot \cosh(kz) = \frac{-9 \cdot 10^3}{\cosh(0,140 \cdot 2)} \cdot \cosh(kz)$$

$$B(z) = -8,66 \cdot \cosh(kz) [\text{kNm}^2]$$

$$M_s(z) = -\frac{B^* \cdot k}{\cosh(kl)} \cdot \sinh(kz) = -\frac{-9 \cdot 10^3 \cdot 0,140}{\cosh(0,140 \cdot 2)} \cdot \sinh(kz)$$

$$M_s(z) = 1,21 \cdot \sinh(kz) [\text{kNm}]$$

$$M_\Omega(z) = \frac{B^* \cdot k}{\cosh(kl)} \cdot \sinh(kz) = \frac{-9 \cdot 10^3 \cdot 0,140}{\cosh(0,140 \cdot 2)} \cdot \sinh(kz)$$

$$M_\Omega(z) = -1,21 \cdot \sinh(kz) [\text{kNm}]$$

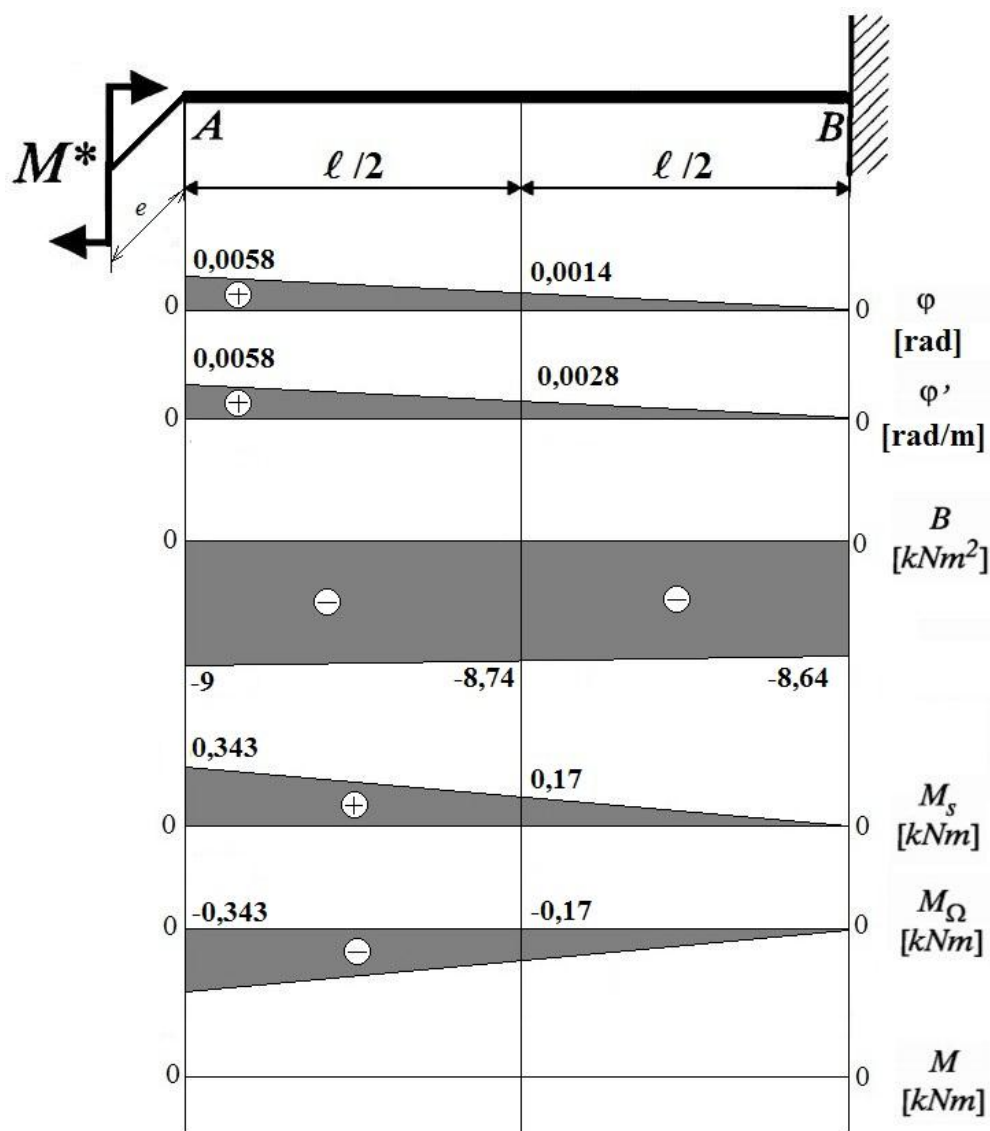
$$M(z) = M_s(z) + M_\Omega(z) = 0 [\text{kNm}]$$

Подаци за дијаграме промене величина $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $B(z)$, $M_s(z)$, $M_\Omega(z)$ дати су у табели 3.0:

Табела 3.0 – Потребни подаци за дијаграме

z, m	0	1	2
$\varphi(z)$ [rad]	0	0,0014	0,0058
$\varphi'(z)$ [rad/m]	0	0,0028	0,0058
$B(z)$ [kNm ²]	-8,64	-8,74	-9
$M_s(z)$ [kNm]	0	0,17	0,343
$M_\Omega(z)$ [kNm]	0	-0,17	-0,343
$M(z)$ [kNm]	0	0	0

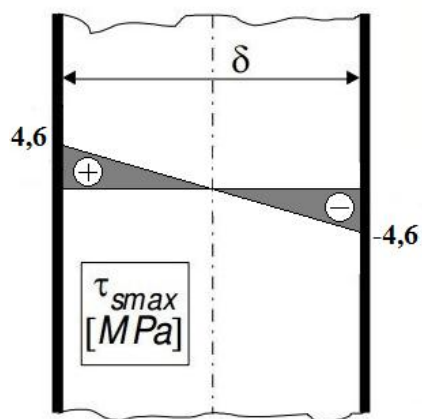
Тражени дијаграми приказани су на слици 3.8, у функцији од z .



Слика 3.8 – Дијаграм промене величина: ϕ , ϕ' , B , M , M_s , M_Ω по дужини греде.

Смичући напон услед слободног увијања:

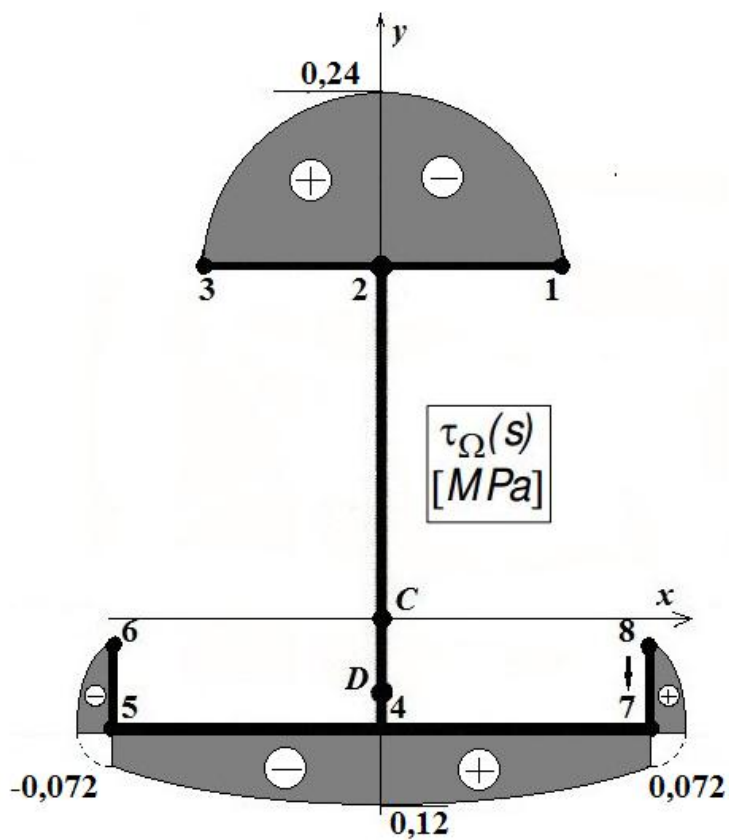
$$\tau_s = \frac{2 \cdot M_{s \max}}{I_t} \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{2 \cdot (-0,343) \cdot 10^3}{74,23 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-2}}{2} \cdot 10^{-6} = -4,6 [\text{MPa}]$$



Слика 3.9 – Промена смичућег напона услед слободног увијања τ_s

Смичући напон услед спреченог увијања:

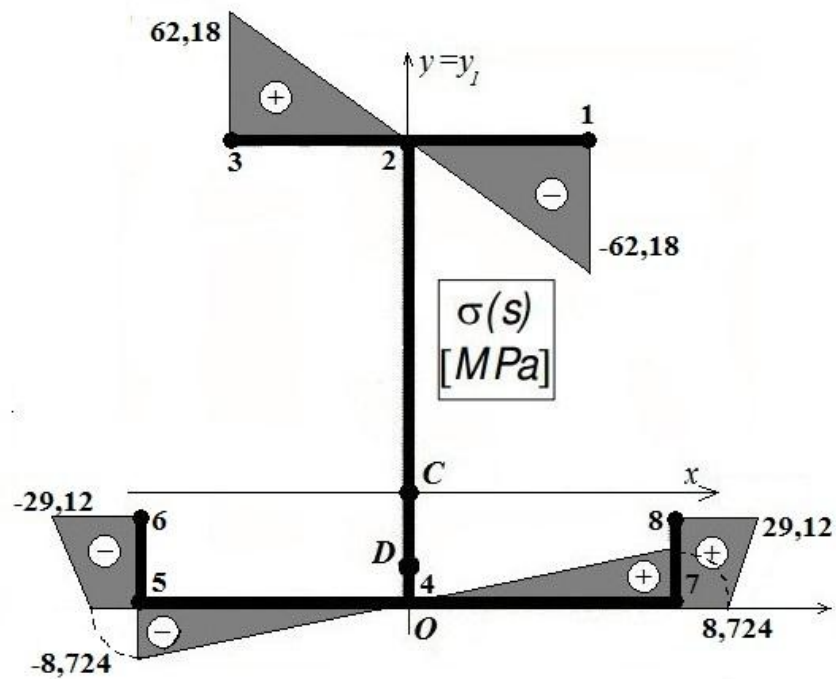
$$\tau_{\Omega} = -\frac{M_{\Omega \max}}{I_{\Omega} \cdot \delta} \cdot \bar{S}_{\Omega} = -\frac{-0,343 \cdot 10^3}{13178388,4 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} \cdot (\bar{S}_{\Omega} \cdot 10^{-8}) \cdot 10^{-6} = 0,000026 \cdot \bar{S}_{\Omega} [\text{MPa}]$$



Слика 3.10 – Промена смичућег напона услед спреченог увијања τ_{Ω}

Нормални напон услед спреченог увијања:

$$\sigma = \frac{B_{\max}}{I_{\Omega}} \cdot \Omega = \frac{9 \cdot 10^3}{13178388,4 \cdot 10^{-12}} \cdot (\Omega \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{-6} = 0,068 \cdot \Omega [\text{MPa}]$$

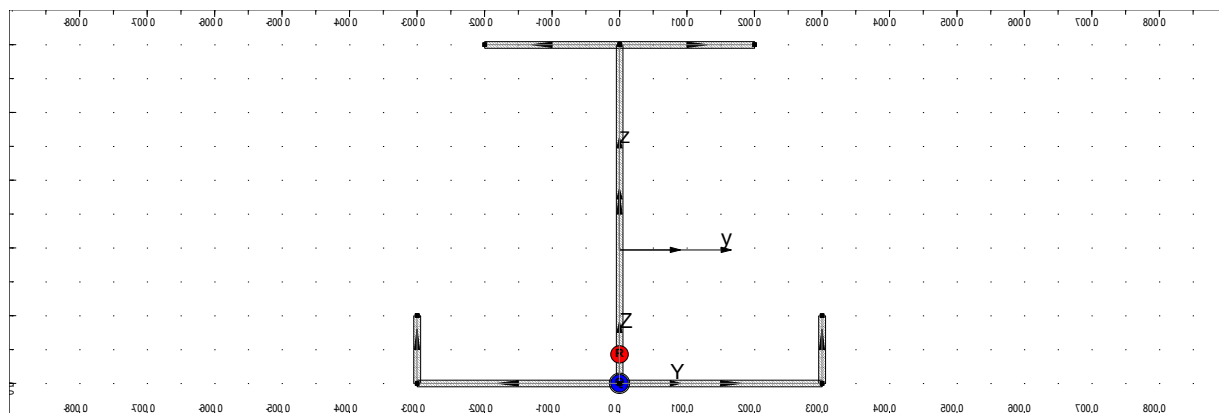


Слика 3.11 – Промена нормалног напона услед спреченог увијања σ

4. Пример прорачуна урађен у програмском софтверу Autodesk Robot Structural Analysis

Резултати који се добијају у овом софтверу, могу да се извезу у Word и одштапају у следећем облику:

SECTION ANALYSIS



Geometry description

Point no.	Y	Z
1	0 mm	0 mm
2	0 mm	500 mm
3	200 mm	500 mm
4	-200 mm	500 mm
5	300 mm	0 mm
6	300 mm	100 mm
7	-300 mm	0 mm
8	-300 mm	100 mm

Edge no.	Point P1	Point P2	Thickness
1	1	2	10 mm
2	2	3	10 mm
3	2	4	10 mm
4	1	5	10 mm
5	5	6	10 mm
6	1	7	10 mm
7	7	8	10 mm

General results

Area

$$A = 17000 \text{ mm}^2$$

Center of gravity

$$Y_c = 0 \text{ mm}$$

$$Z_c = 197 \text{ mm}$$

Shear center

$$Y_r = 0 \text{ mm}$$

$$Z_r = 43 \text{ mm}$$

Base material

STEEL

$$E = 205000.00 \text{ MPa}$$

$$\text{den} = 7852.83 \text{ kg/m}^3$$

$$WU = 133.50 \text{ kG/m}$$

Principal system

Angle

$$\alpha = 0.0 \text{ Deg}$$

Moments of inertia

$$I_x = 551967 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 763269608 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 413391667 \text{ mm}^4$$

Sectional moments of inertia

$$I_{omy} = -9000548 \text{ mm}^5$$

$$I_{omz} = 0 \text{ mm}^5$$

$$I_{om} = 13178226002443 \text{ mm}^6$$

Maximum distances

$$V_y = 300 \text{ mm}$$

$$V_{py} = 300 \text{ mm}$$

$$V_z = 303 \text{ mm}$$

$$V_{pz} = 197 \text{ mm}$$

Values in characteristic points

no	y(s) [mm]	z(s) [mm]	omega(s) [mm ²]	A(s) [mm ²]	Sy(s) [mm ³]	Sz(s) [mm ³]	Som(s) [mm ⁴]
1	-0	-197	-0	4000	-738235	-750000	47072783
2	0	303	0	2000	605882	-200000	-91447258
3	200	303	91447	0	0	0 0	
4	-200	303	-91447	0	0	0 0	
5	300	-197	-12829	1000	-147059	300000	-27829113
6	300	-97	-42829	0	0	0 -0	
7	-300	-197	12829	1000	-147059	-300000	27829113
8	-300	-97	42829	0	0	0 0	

Central system

Moments of inertia

$$I_{yc} = 763269608 \text{ mm}^4$$

$$I_{zc} = 413391667 \text{ mm}^4$$

$$I_{yczc} = -0 \text{ mm}^4$$

Maximum distances

$$\begin{aligned}V_{yc} &= 300 \text{ mm} \\V_{pyc} &= 300 \text{ mm} \\V_{zc} &= 303 \text{ mm} \\V_{pzc} &= 197 \text{ mm}\end{aligned}$$

Arbitrary system

Angle

$$\alpha = 0.0 \text{ Deg}$$

Moments of inertia

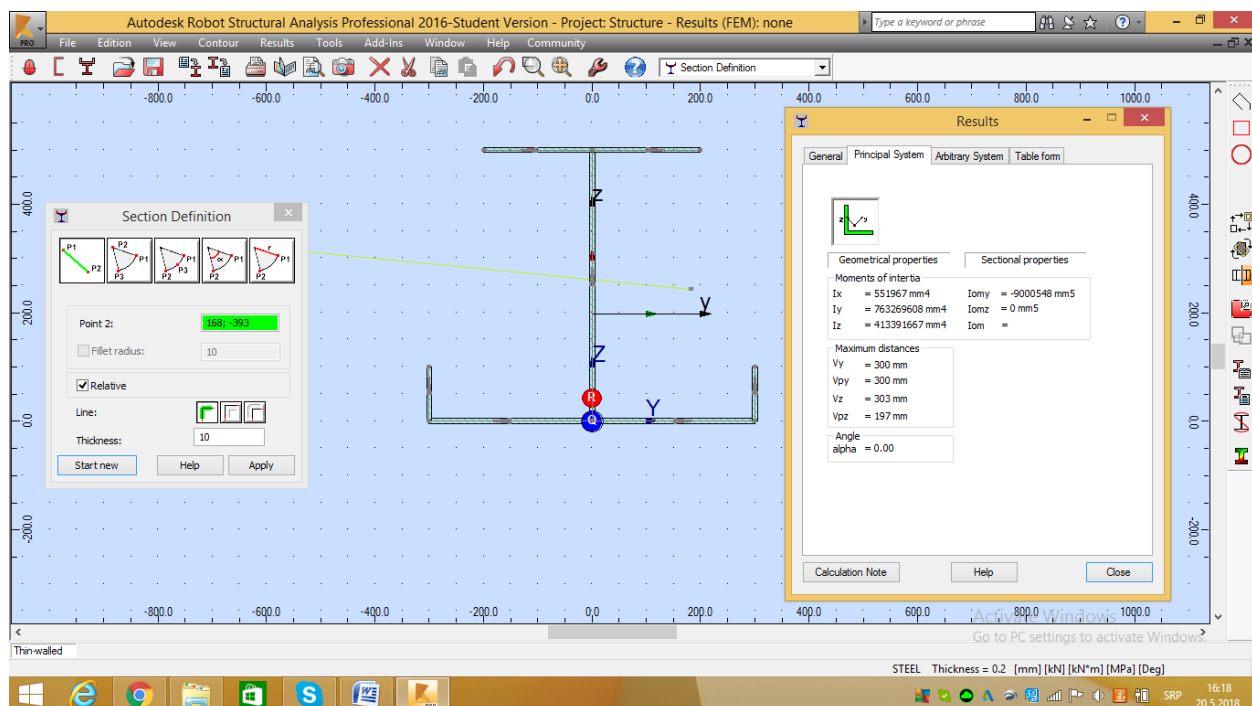
$$\begin{aligned}I_{y'} &= 763269608 \text{ mm}^4 \\I_{z'} &= 413391667 \text{ mm}^4 \\I_{y'z'} &= -0 \text{ mm}^4\end{aligned}$$

Maximum distances

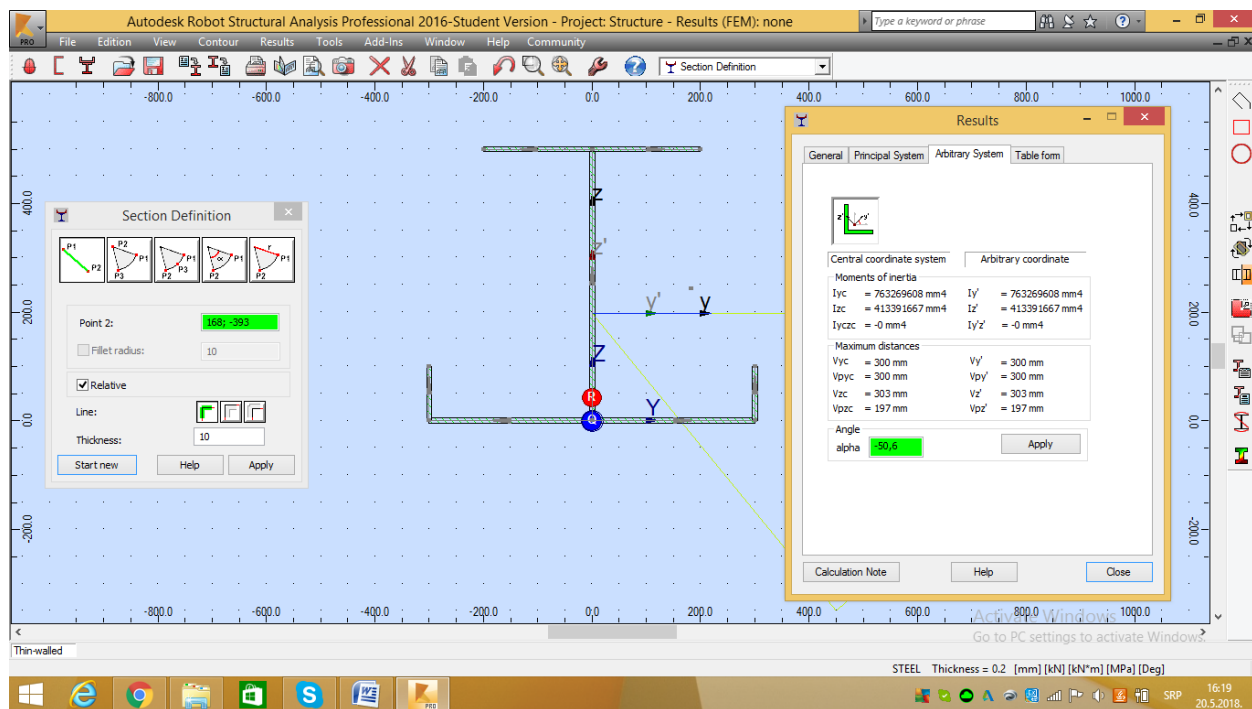
$$\begin{aligned}V_{y'} &= 300 \text{ mm} \\V_{py'} &= 300 \text{ mm} \\V_{z'} &= 303 \text{ mm} \\V_{pz'} &= 197 \text{ mm}\end{aligned}$$

На овај начин се графички и табеларно приказују све геометријске карактеристике датог танкозидног профила. На следећим сликама показани су исти резултати приказани у прозорима за дијалог и бројне комбинације које могу да се праве при испитивању профила.

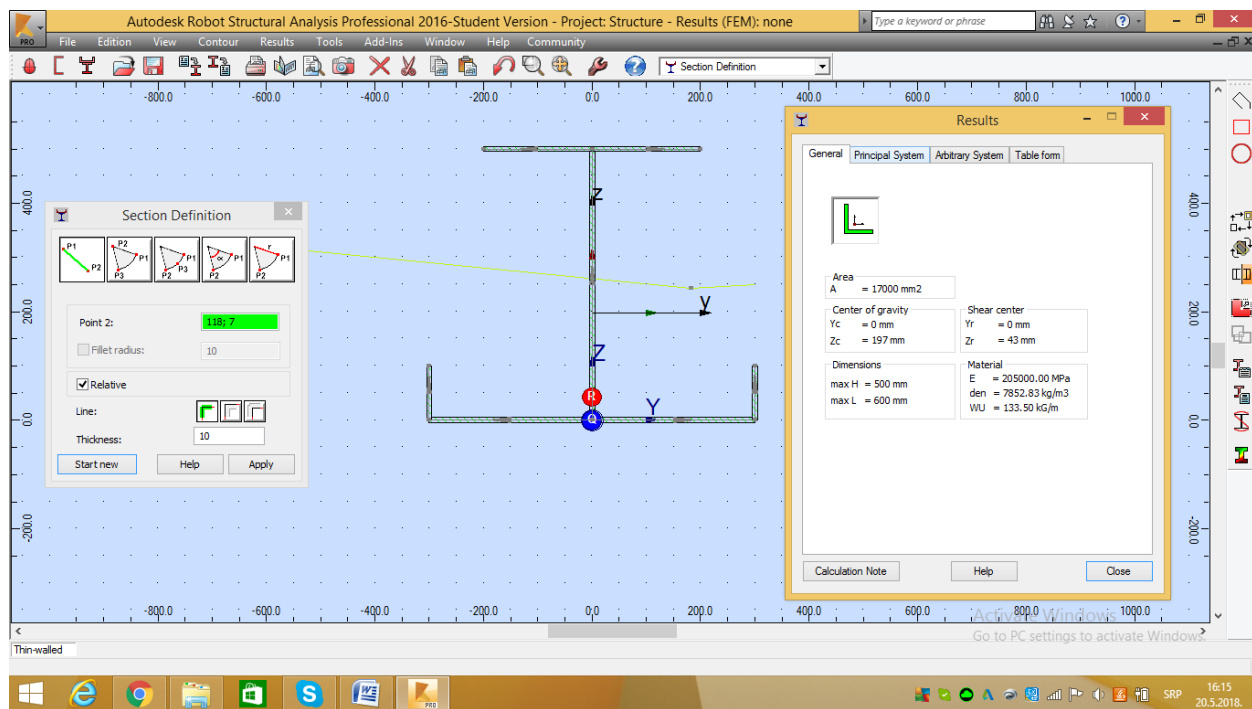
4.1. Дијаграми добијени у програмском софтверу Autodesk Robot Structural Analysis



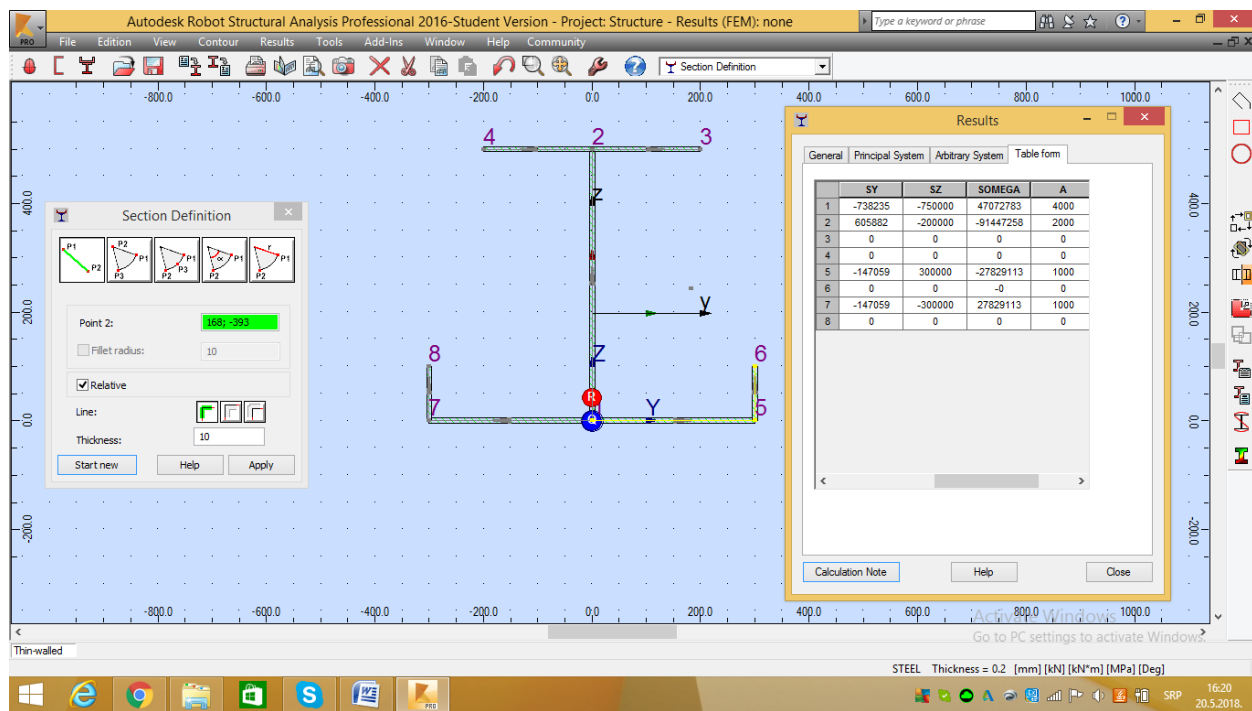
Слика 4.0 – Моменти инерције за главни координатни систем и секторски момент инерције



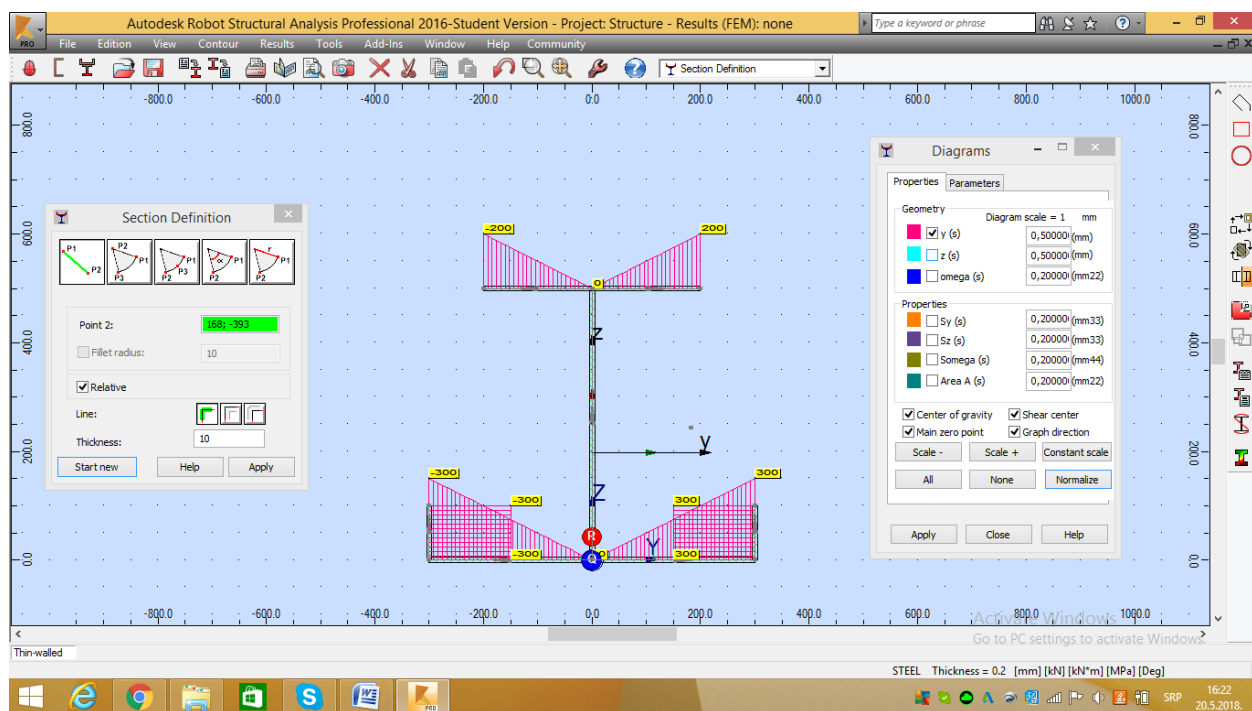
Слика 4.1 – Моменти инерције за произвољни заокренути координатни систем (за угао - 50,6)



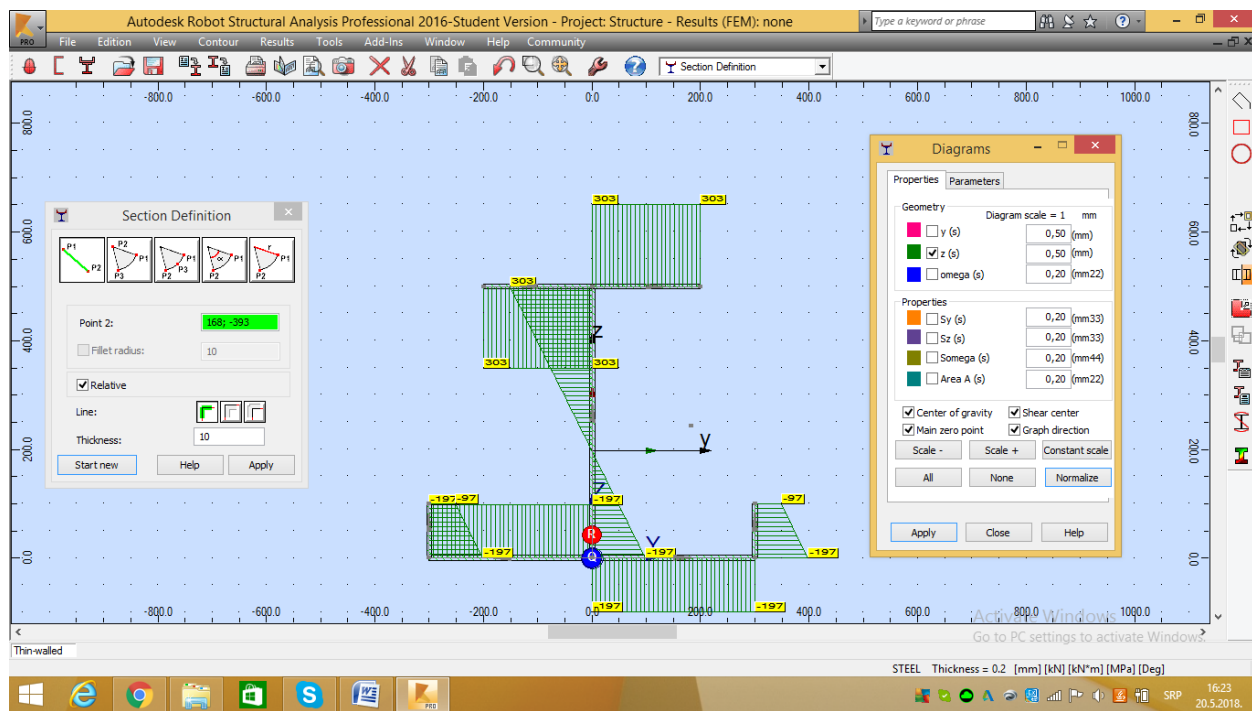
Слика 4.2 – Основне геометријске карактеристике, површина, тежиште и центар смицања



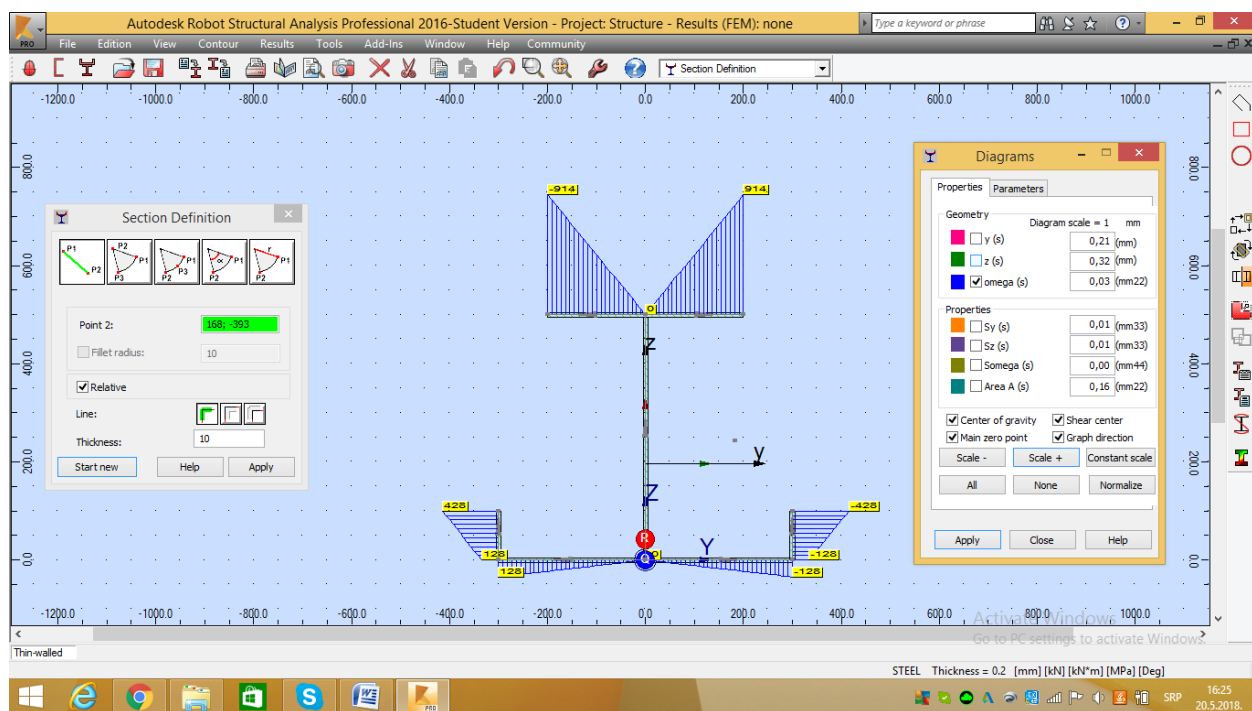
Слика 4.3 – Табеларни приказ резултата за све геометријске карактеристике



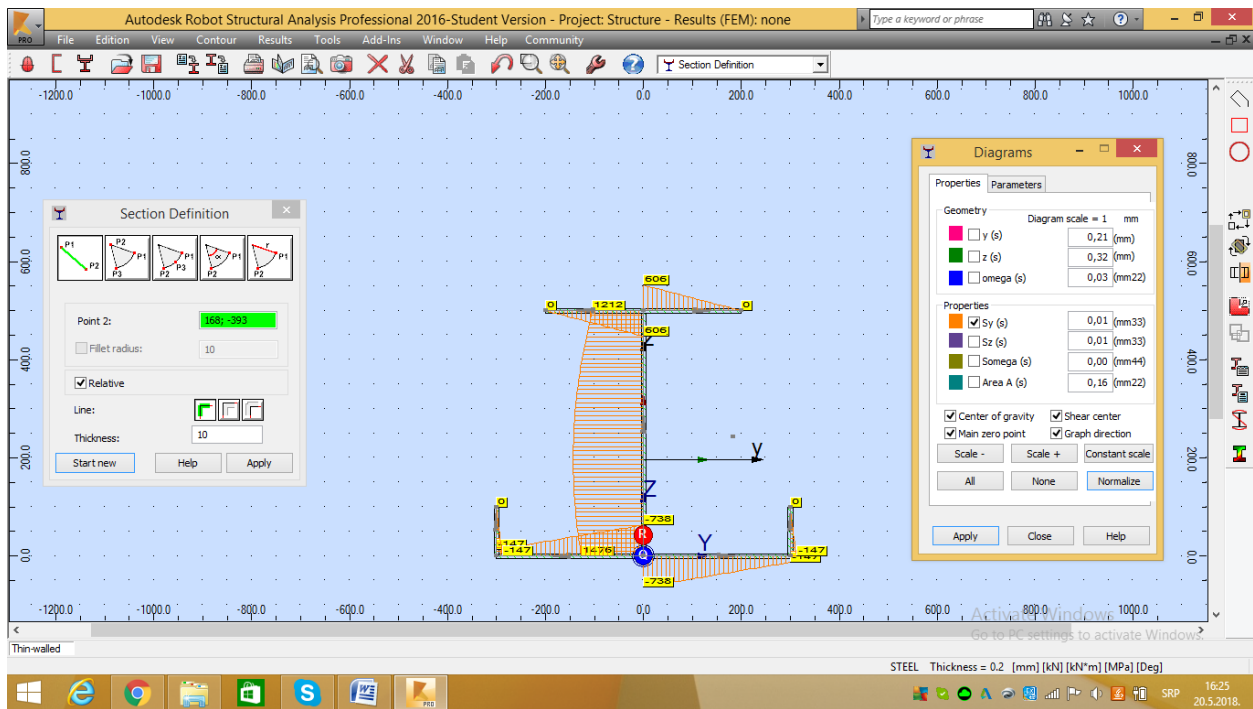
Слика 4.4 – Дијаграм промене координате x (y)



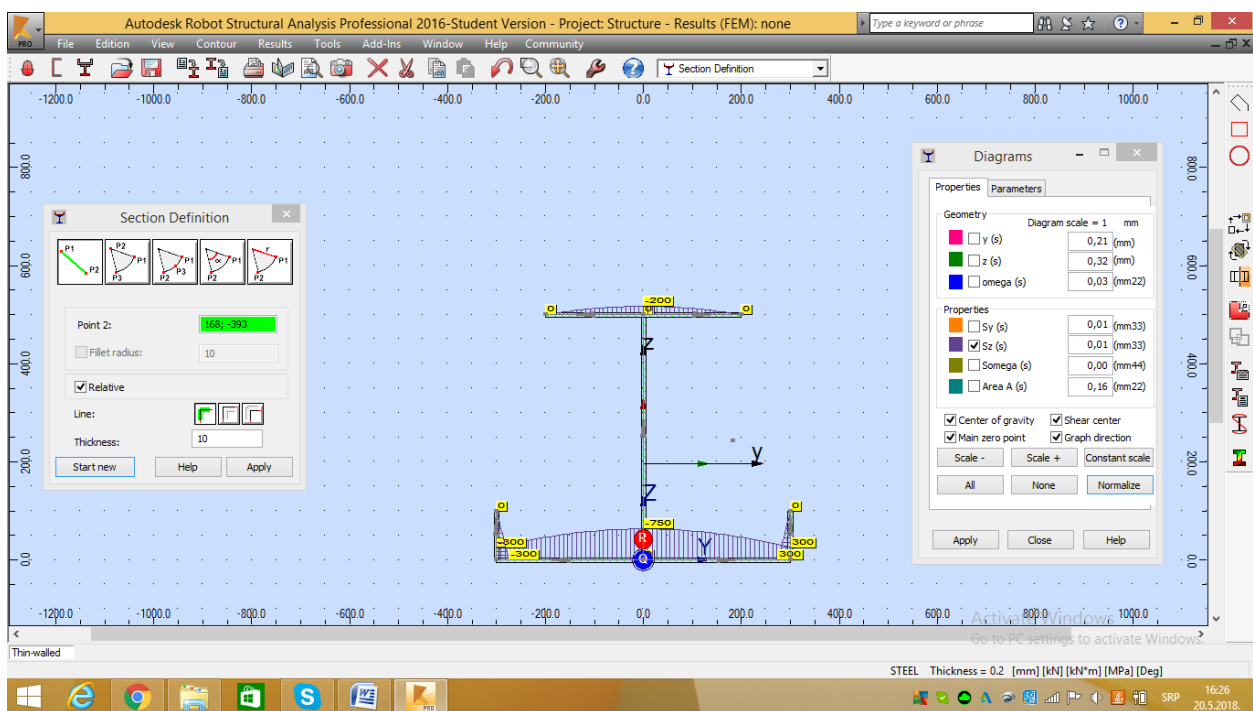
Слика 4.5 – Дијаграм промене координате z



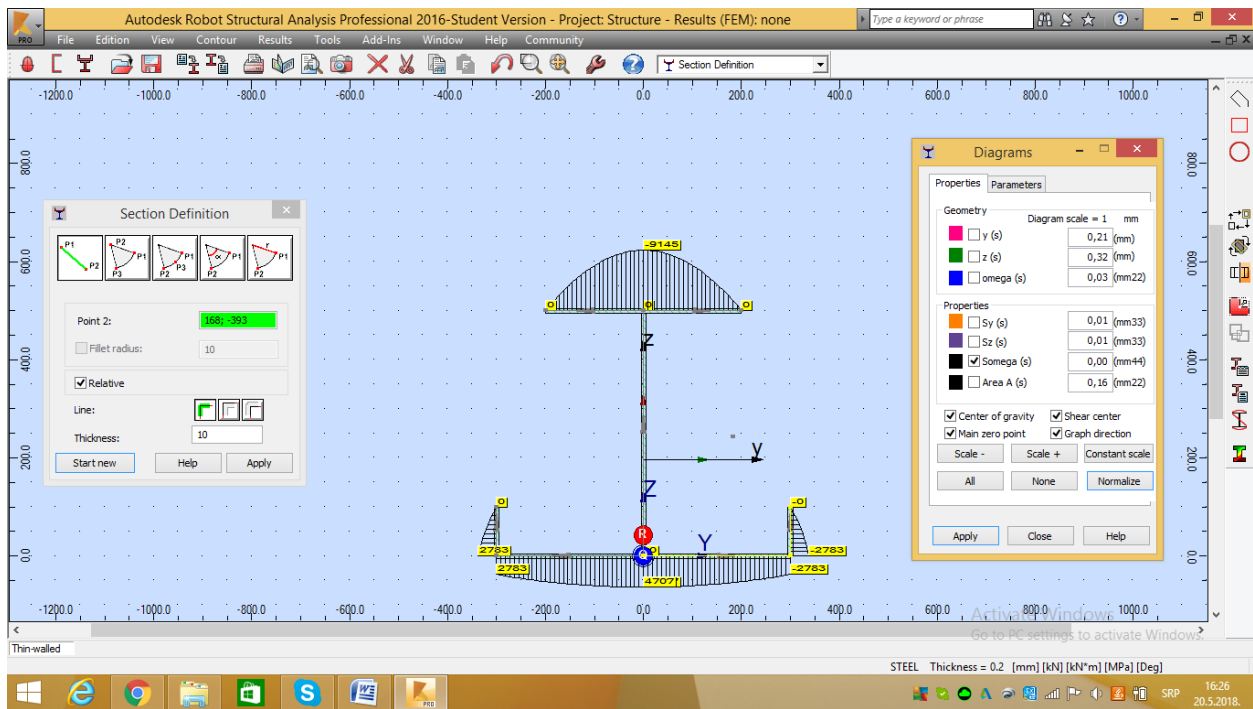
Слика 4.6 – Дијаграм промене нормиране секторске координате по контури профила



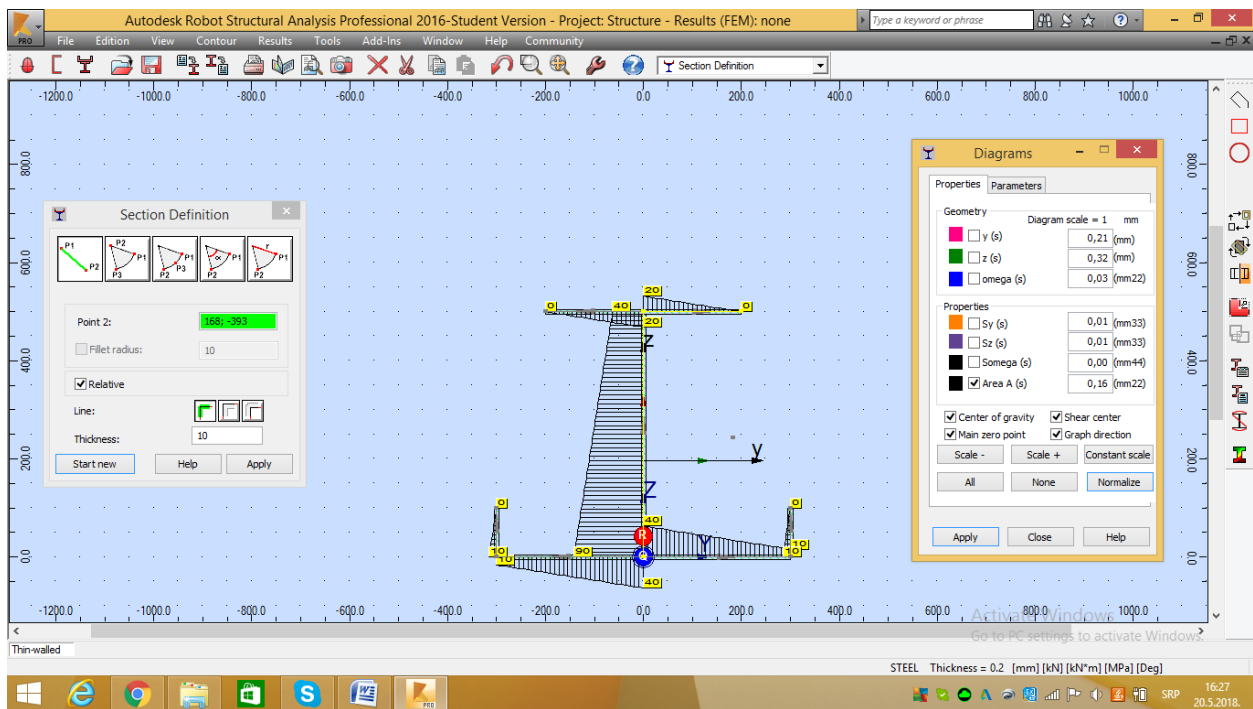
Слика 4.7 – Дијаграм промене статичког момента за y-осу



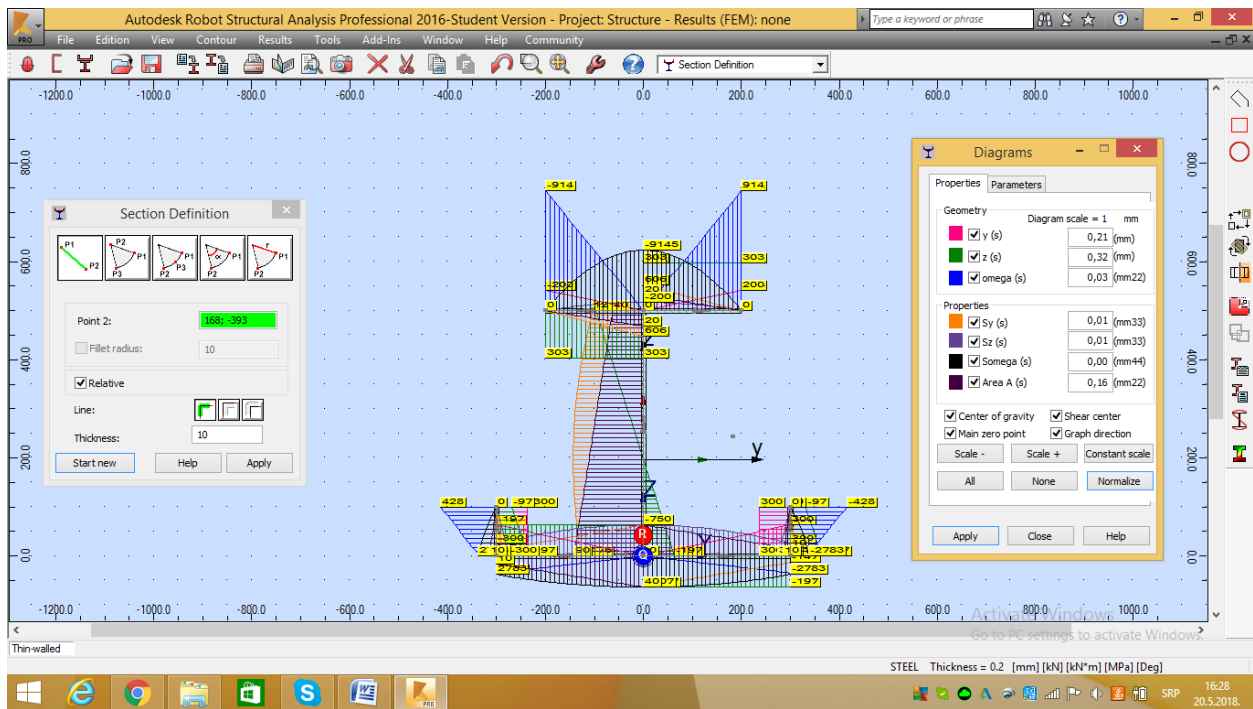
Слика 4.8 – Дијаграм промене статичког момента за z-осу



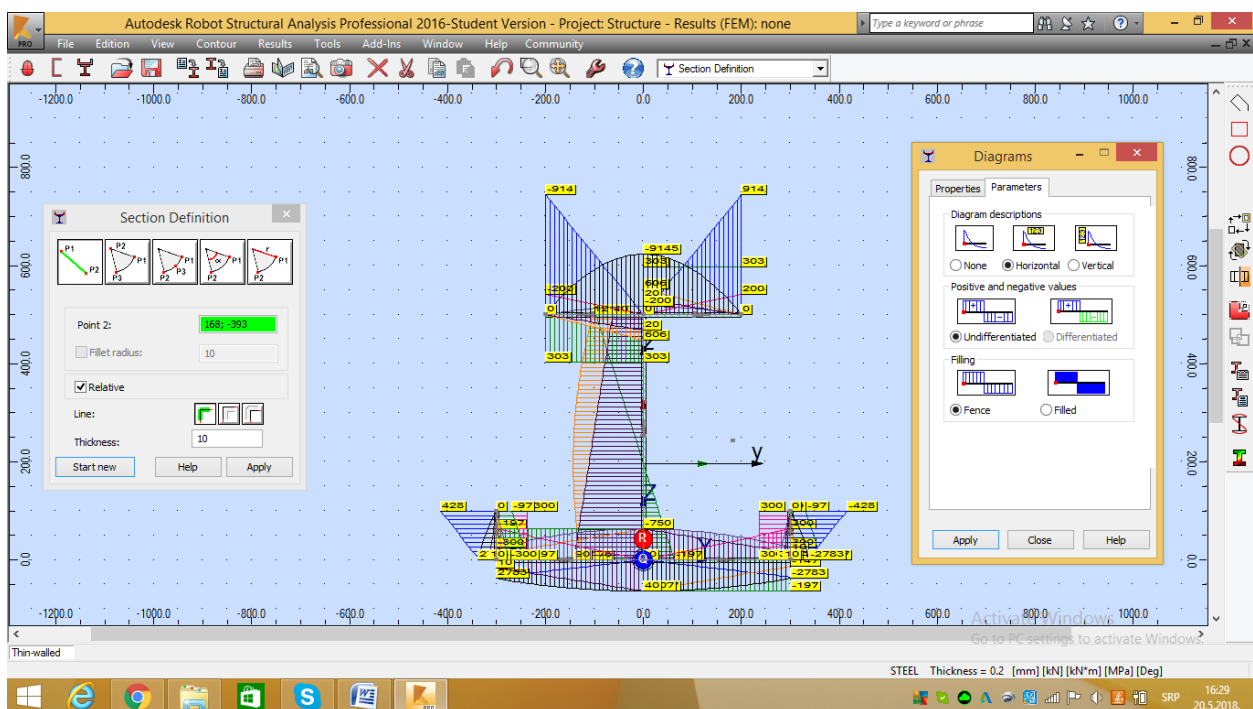
Слика 4.9 – Дијаграм промене секторског статичког момента по контури пресека



Слика 4.10 – Дијаграм промене површине

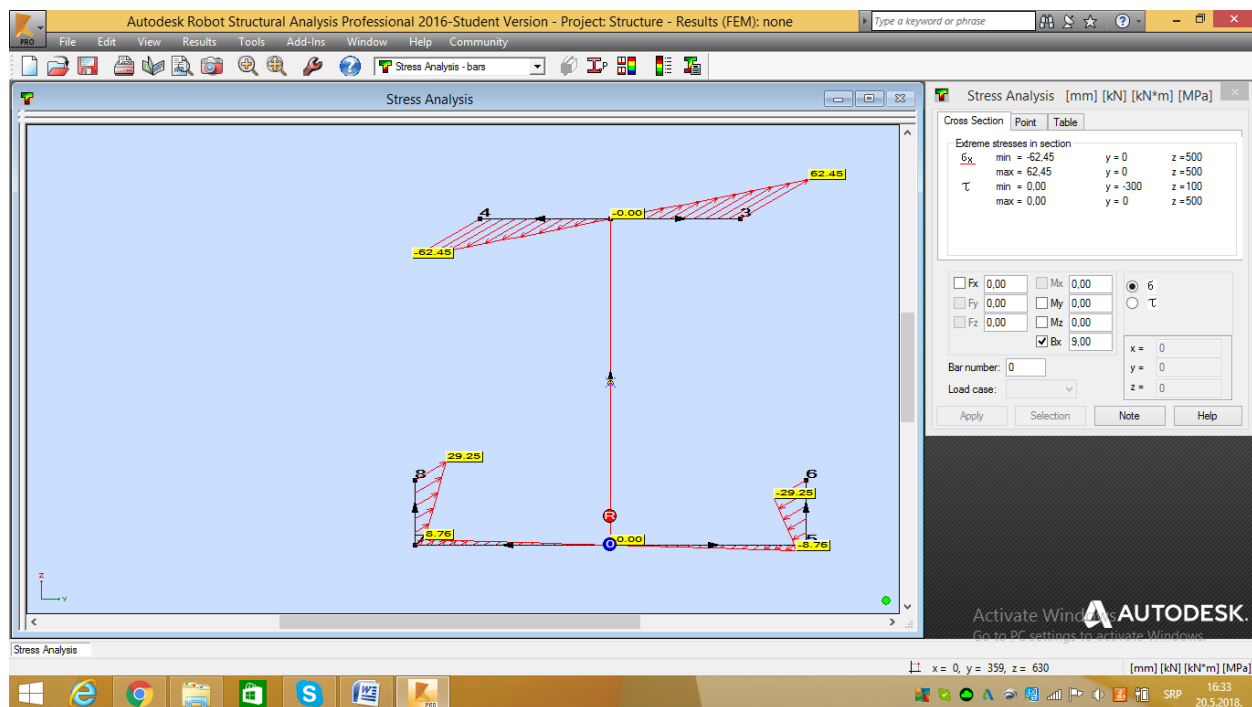


Слика 4.11 – Сви дијаграми видљиви истовремено, (ради поређења)

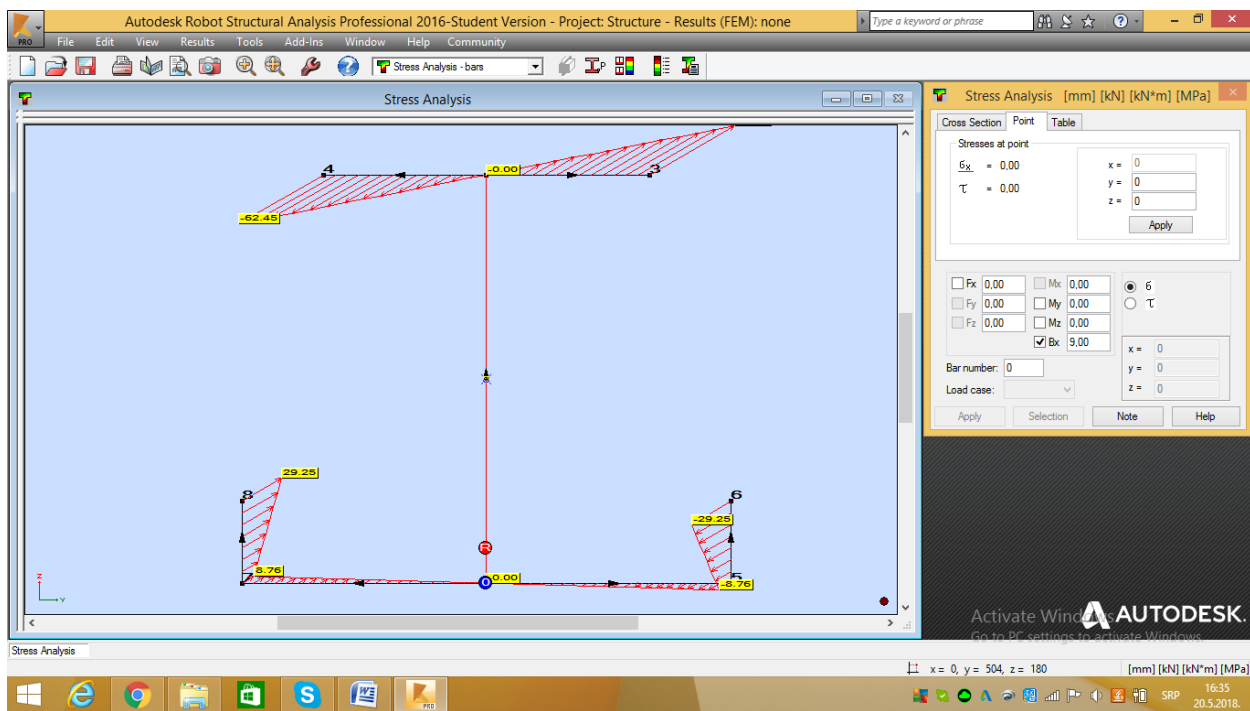


Слика 4.12 – Бројне могућности подешавања приказивања дијаграма (размера, боја, знак)

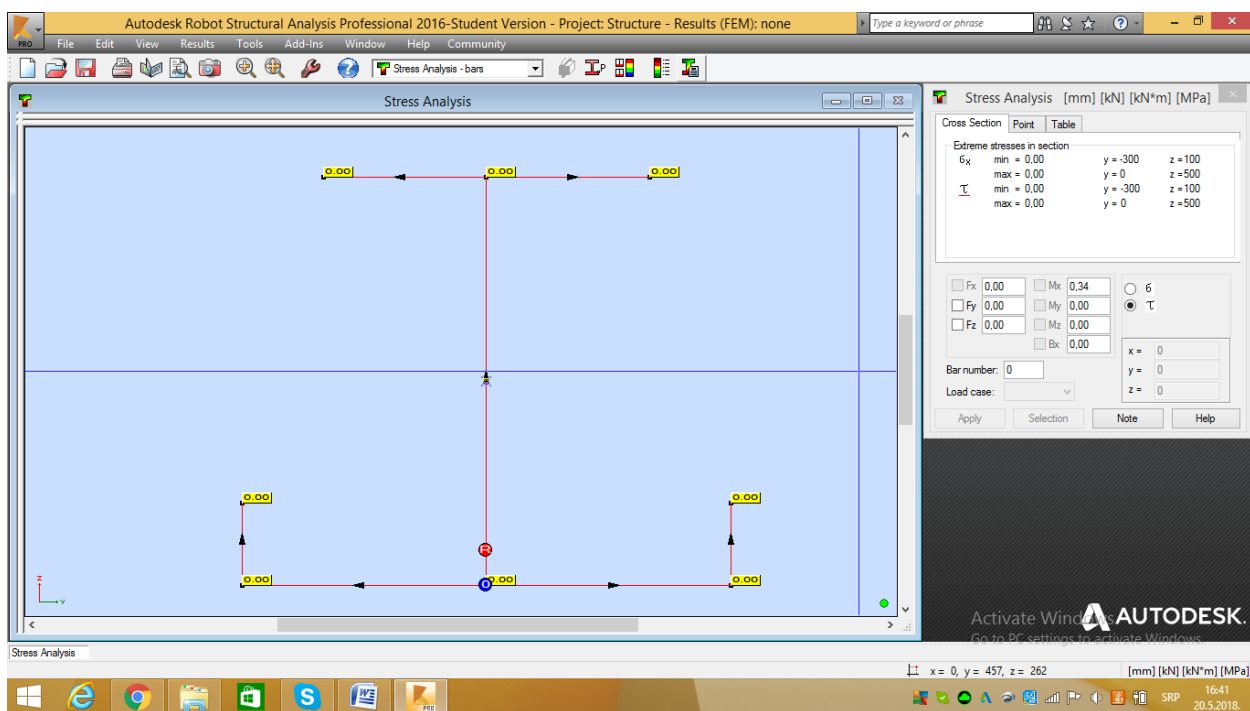
На следећим сликама приказани су дијаграми нормалног и смицајног напона у карактеристичном пресеку. У овом случају узима се пресек на крају конзоле јер је ту максимални нормални напон. Смицајни напон је јако мали, што се аналитичким путем и добило (максимални смицајни напон је 0, 24 [Мпа]). Софтвер овај напон и не приказује а и није потребно тражити Мизесове напоне јер је довољно посматрати само нормални напон који има знатну вредност (максимални нормални напон је 62, 45 [Мпа]).



Слика 4.13 – Дијаграм промене нормалног напона по контури пресека (на крају конзоле где је нормални напон последица бимоментa $B_x=9[\text{KNm}^2]$)

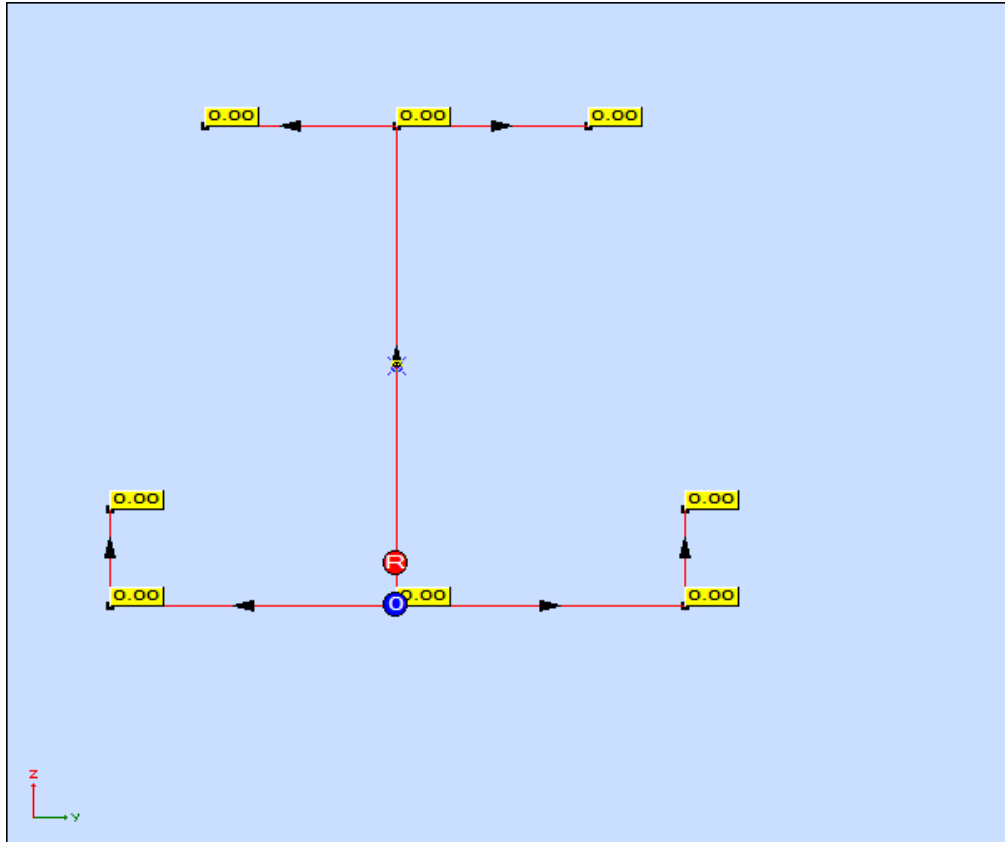


Слика 4.14 – Могућности приказивања напона у прозору за дијалог



Слика 4.15 – Смицајни напон од неуниформне торзије (изазива га мали момент спречене торзије те је напон близак нули)

CROSS SECTION



Stress analysis type (hypothesis) : Tau

Internal forces taken into account :

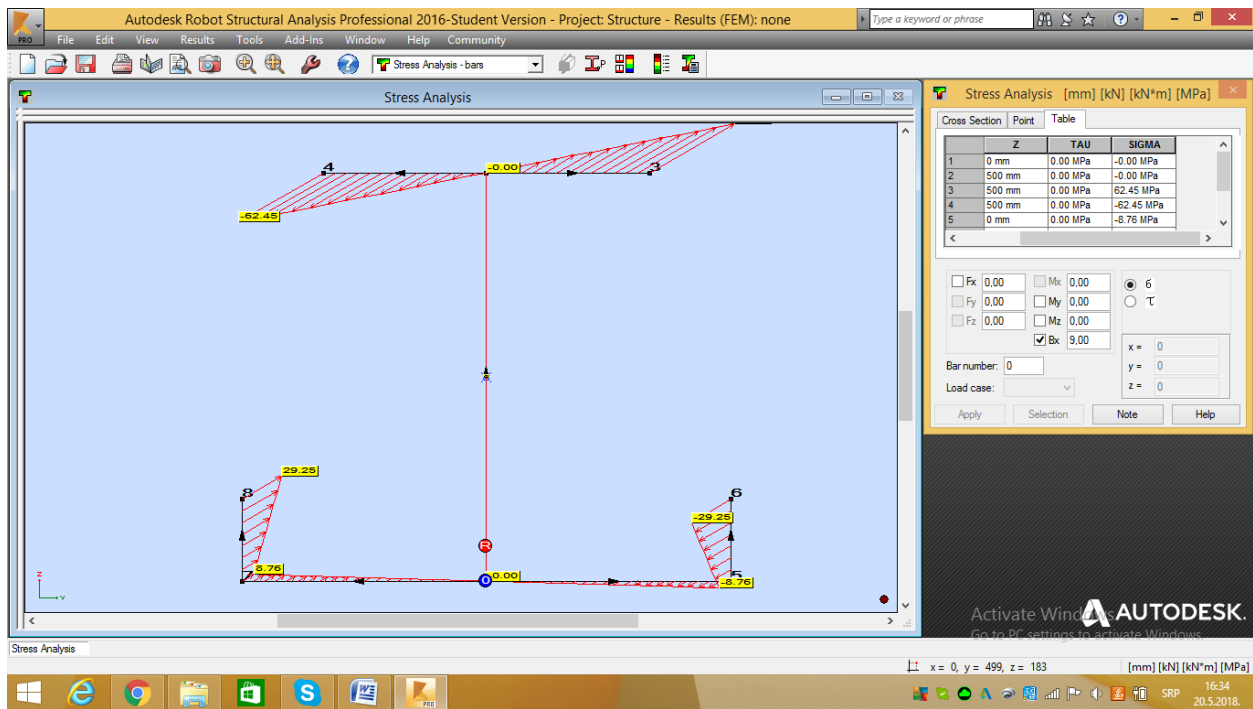
RESULTS IN THE SECTION

Forces applied to the section

F_x = 0.00 kN	M_x = 0.34 kN*m
F_y = 0.00 kN	M_y = 0.00 kN*m
F_z = 0.00 kN	M_z = 0.00 kN*m
	B_x = 0.00 kN*m ²

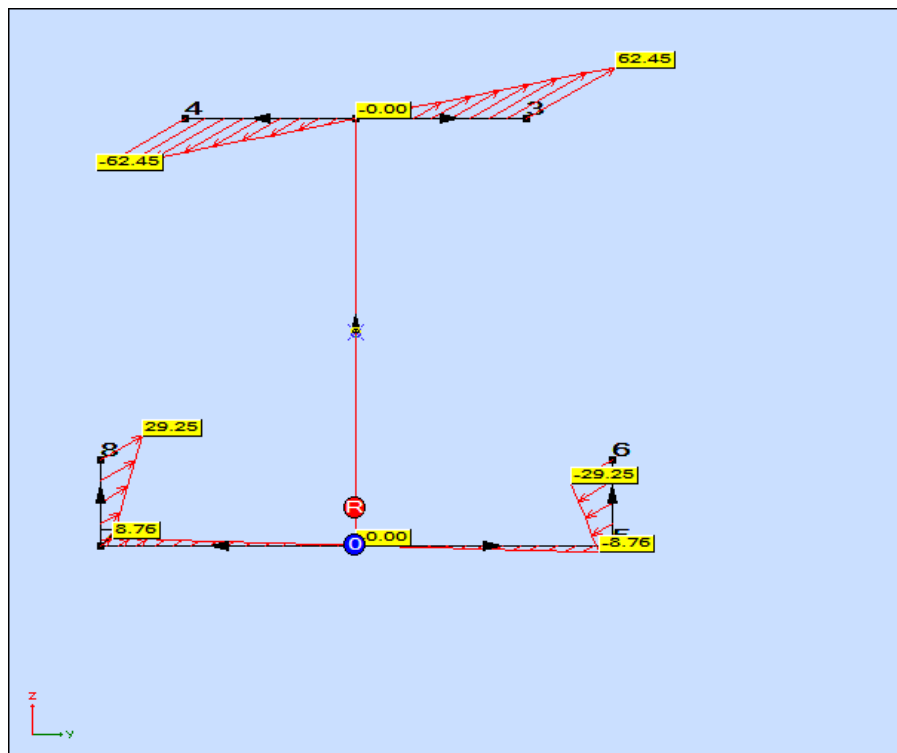
Extreme stresses in the section

	S_x max	S_x min	 t max	 t min
Stresses	0.00 MPa	0.00 MPa	0.00 MPa	0.00 MPa
Y local	0 mm	-300 mm	0 mm	-300 mm
Z local	500 mm	100 mm	500 mm	100 mm



Слика 4.16 – Нормални напон услед неуниформне торзије

CROSS SECTION



Stress analysis type (hypothesis) : Normal

Internal forces taken into account : Bx

RESULTS IN THE SECTION

Forces applied to the section

F_x = 0.00 kN **M_x** = 0.00 kN*m
F_y = 0.00 kN **M_y** = 0.00 kN*m
F_z = 0.00 kN **M_z** = 0.00 kN*m
B_x = 9.00 kN*m²

Extreme stresses in the section

	S_x max	S_x min	 t max	 t min
Stresses	62.45 MPa	-62.45 MPa	0.00 MPa	0.00 MPa
Y local	0 mm	0 mm	0 mm	-300 mm
Z local	500 mm	500 mm	500 mm	100 mm

5. Анализа добијених резултата

У табелама 5.0 и 5.1 приказани су напони који су добијени аналитичким путем на основу теорије еластичности и напони које показује коришћени софтвер. Резултати се готово незнатно разликују. Смицајни напон тежи нули те је по целој контури 0 по софтверу а на основу аналитичког решења има такође мале вредности. Што се тиче геометријских карактеристика ту је слагање потпуно, што и обавезно треба да буде за тачно урађен аналитички прорачун.

Табела 5.0 – Упоредне вредности смицајних напона τ [MPa]

Тачка	1	2	3	4	5	6	7	8
Аналитички прорачун	0	0,24	0	0,12	0,072	0	0,072	0
ROBOT	0	0	0	0	0	0	0	0

Табела 5.1 – Упоредне вредности нормалних напона σ [MPa]

Тачка	1	2	3	4	5	6	7	8
Аналитички прорачун	62,18	0	62,18	0	8,724	29,12	8,724	29,12
ROBOT	62,45	0	62,45	0	8,76	29,25	8,76	29,25

Закључак

Правилно конструисање и димензионисање конструкције треба у првом реду да садржи детаљну анализу свих оптерећења на њене делове као и одређивање напона и деформација који се при томе јављају. Овај задатак је посебно компликован код танкозидних конструкција отвореног попречног пресека које су изложене дејству неуниформне (спречене) торзије.

Торзија се у челичним конструкцијама углавном не јавља као самостално напрезање, већ у комбинацији са другим оптерећењима, а најчешће савијањем. Дели се на униформну или Сен Венанову торзију при којој у попречном пресеку постоји само смицајни напон и неуниформну или ограничену (спречену) торзију при којој се јавља и знатни нормални напон. Деформација која је доминантна је витоперење попречног пресека.

Специфичности отвореног танкозидног попречног пресека захтевају одређивање поред уобичајених геометријских карактеристика (површина, тежиште и моменти инерције) и одређивање секторских карактеристика. Анализа напона и деформација код ових профила је сложен задатак који се може урадити аналитички према теорији еластичности. Савремени ЕВРОКОД стандарди се такође везују за ове изразе уз извесна поједностављења веома компликованих математичких израза. Савремени софтвери овај проблем решавају на више начина. Најадекватнији је Autodesk Robot Structural Analysis. Помоћу њега се могу добити резултати који су добри за поређење са аналитички добијеним вредностима. Овај софтвер може да користи Еврокод стандарде.

У овом раду прво је детаљно урађен аналитички пример прорачуна једног штапа танкозидног отвореног попречног пресека оптерећеног бимоментом на једном крају. Одређене су све геометријске карактеристике, статички дијаграми промена унутрашњих сила по дужини конзоле и промене угла увијања као и напони у критичном пресеку. Нису одређивани Мизесови напони зато што су вредности за смицајни напон у критичном пресеку јако мали, те се могу посматрати само нормални напони који су најугицајнији. Затим су за исти пример одређене геометријске карактеристике и нормални и смицајни напони у програмском софтверу Autodesk Robot Structural Analysis. Добијено је велико поклапање резултата при поређењу вредности нормалних и смицајних напона. Што се тиче геометријских карактеристика ту се резултати у потпуности поклапају, што је и обавезно за тачно урађен аналитички прорачун.

Autodesk Robot Structural Analysis нам омогућава да на много бржи и једноставнији начин дођемо до потребних резултата како за стандардне профиле тако и за било који други нестандартни попречни пресек. Инжењерима остаје више времена за креативне послове јер поступак може и да се понавља са лакоћом све док се не добију задовољавајућа решења.

Литература

- [1] Марјановић В., Лаке металне конструкције, скрипта у електронском облику, Факултет инжењерских наука, Крагујевац, 2016.
- [2] Марковић Ж., Гранична стања челичних конструкција према еврокоду, Грађевински факултет, Београд, 2014.
- [3] Николић Р., Вељковић Ј., Марјановић В., Металне конструкције – збирка решених задатака, Факултет инжењерских наука, Крагујевац, 2013.
- [4] Тимошенко С., Теорија еластичне стабилности, Научна књига, Београд, 1952.
- [5] Рашковић Д., Теорија еластичности, Научна књига, Београд, 1985.
- [6] Острић Д., Металне конструкције, Машински факултет у Београду, 1988.
- [7] Петковић З., Металне конструкције у машиноградњи 2, Машински факултет у Београду, Београд, 2005.
- [8] Egger, интернет адреса: https://www.egger.com/shop/en_SE/inspiration/high-bay-stock, приступљено 29. јануар, 2018.
- [9] Slovan Agrad, интернет адреса: <http://www.slovan.co.rs/sr/slovan-agrar>, приступљено 29. јануар, 2018.
- [10] Bosna Press, интернет адреса: <http://bosnapress.net/elektroprijenos-bih-grad-i-dalekovod-tomislavgrad-kupres-vrijedan-443-milijuna-km/>, приступљено 29. јануар, 2018.
- [11] Пластеници, интернет адреса: <http://plastenici.net/staklenici/>, приступљено 29. јануар, 2018.
- [12] YouTube, интернет адреса: <https://www.youtube.com/>, приступљено 7. фебруар, 2018.
- [13] Николић Р., Марјановић В., Металне конструкције – Приручник за прорачуне, Машински факултет, Крагујевац, 1998.