

**Факултет инжењерских наука Универзитета у
Крагујевцу**



Назив студијског програма: **Машинско инжењерство**
Ниво студија: **Основне академске студије**
Модул: **Информатика у инжењерству**
Предмет: **Коначни елементи I**
Број индекса: **707/2012**

Милка Љ Татовић
Радиофреквентна аблација
завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

Датум одбране:_____

1. **Др Мирослав Живковић - ментор**
2. _____
3. _____

Оцена:_____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да опише основне физичке појаве, теоријске појмове и примену у медицини из области радиофреквентне аблације.

Препоручена литература:

- [1] M. Kojić, M. Živković, R. Slavković, and N. Grujović, “Metod konačnih elemenata I”, Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski fakultet, Kragujevac, Srbija, 1998.
- [1] M. K. Jain, P. D. Wolf – “A Three Dimensional Finite Element Model of Radiofrequency Ablation with Blood Flow and its Experimental Validation”, Vol. 28, pp. 1075-1084, 2000.
- [2] M. Kojić, N. Filipović, B. Stojanović, N. Kojić., “Computer Modelling in Bioengineering – Theoretical Background, Examples and Software”, J. Wiley and Sons, 2008.

Крагујевац, датум

05.05.2013.

ментор:

Др Мирослав Живковић, ред. проф.

Резиме

Рад је настао као резултат интересовања за области примене радиофреквентне аблације. Радиофреквентна аблација данас има велику улогу и значај у медицини у лечењу људске популације. Кроз рад биће изложен значај примене топлоте у медицини (Радиофреквентне аблације) као и њено функционисање. Приказане су основне теоријске поставке које описују процес аблације и дата је примена у методи коначних елемената. На крају рада дати су примери аблације решени за реалне проблеме.

Abstract

The paper is the result of interest in the field of application of radiofrequency ablation. Radiofrequency ablation has a great role and importance in medicine and the treatment of the human population. Through the work importance of applying heat transfer in medicine (radiofrequency ablation) and its functioning will be exposed. Basic theoretical background describing the ablation process and application to the finite element method are described. The paper ends with examples of ablation solved for real problems.

Садржај

1. Увод.....	5
2. Радиофреквентна аблација.....	6
2.1. Функционисање радиофреквентне аблације.....	6
2.2. Примена радиофреквентне аблације	7
3. Основне једначине које описују процес радиофреквентне аблације.....	8
4. Једначине коначног елемента за радиофреквентну аблацију.....	10
5. Примери	18
5.1. Ефекат Џуловог грејања услед деловања статичког електричног поља	18
5.2. Пример аблације хепатичног тумора.....	26
6. Закључак	29
Литература.....	30

1. Увод

Завршни рад “Радиофреквентна аблација” је настао као резултат интересовања за области примене топлоте у медицини. Проучавајући област примене, дошло се до сазнања о њеној примени у лечењу људске популације, значају у медицини и другим областима. Кроз завршни рад биће приказане једначине којима се описује радиофреквентна аблација и изложене могућности примене радиофреквентне аблације у медицини.

Овај завршни рад се састоји из шест поглавља.

- У првом поглављу рада су изложене уводне напомене, дат је увод у тему завршног рада.
- У другом поглављу истакнута је примена радиофреквентне аблације, односно значај примене топлоте у медицини, као и примери где се најчешће користи.
- У трећем поглављу дата је теоријска основа, односно приказане су једначине које описују процес радиофреквентне аблације.
- У четвртом поглављу приказано је извођење једначина коначног елемента за радиофреквенту аблацију.
- У петом поглављу приказани су примери примене радиофреквентне аблације у медицини.
- Шесто поглавље је закључак овог рада, где су сумирани резултати рада.

2. Радиофреквентна аблација

2.1. Функционисање радиофреквентне аблације

Радиофреквентна аблација је медицинска процедура у којој се део нефункционалног ткива одстрањује коришћењем високе фреквенције наизменичне струје. Коришћењем високофреквентних наизменичних струја се изазива трење између јона који се налазе у подручју између посебно припремљених електрода. У ћелијама ткива пацијента се ствара одређени „немир“ при чему се ослобођа топлота која се користи као термички разарач болесног ткива. Топлота изазива уништење туморских ћелија или оштећених ћелија, а може се уништити и део здравог ткива, које се налази у околини туморских ћелија, односно оштећеног ткива. Процес се ограничава на део оштећеног ткива (тумора) и здравог ткива који се налазе у непосредном додиру са електродом. Електрода је проводни материјал, углавном метал или угљеник, који је уроњен у раствор електролита. За електричне системе који користе наизменичну струју електроде представљају везу електричног кола и објекта на који се делује наизменичном струјом. У том случају нису дефинисане катодe и аноде, с обзиром да се смер кретања електрона мења периодично, обично много пута у секунди.

За извршење процеса аблације, у техничком смислу, постоји више начина. Један од њих је коришћење генератора који производи радиофреквенцијске таласе, који уствари производи високофреквентну наизменичну струју [1], [2]. Преко посебних каблова се та струја помоћу електроде преноси кроз ситну цевчицу (катетер) пречника пола милиметра. Кроз катетер се у оштећено ткиво уводи електрода, чиме при пуштању високофреквентне наизменичне струје долази до кретања јона у ткиву. Услед насталог трења при кретању јона долази до загревања ткива које се налази уз электроду. Када се користи електрични нож извор је директно електрична струја, па су извори топлоте саме ћелије околног здравог ткива и тумора (или оштећеног ткива). При извођењу радиофреквенцијске аблације, врши се снимање вођења катетера кроз организам пацијента скенирањем помоћу X – зрака, коришћењем ултрасонди и сл.

Велики је број успешно извршених процедура применом ове методе. Због великог процента успешних захвата поступак аблације се доста истражује, симулирају се процеси и формирају разноврсни модели, једноставни или сложени, сходно броју

апроксимација које модел укључује. Постоји и одређени број пацијената код којих се аблацијом не уклони обољење, па се мора наставити са терапијом лековима или се мора урадити неки други захват.

2.2. Примена радиофреквентне аблације

У околностима немогућности примене хируршке терапије, селективна аблација малигног ткива топлотом је ефикасна алтернативна терапијска метода. Примена топлоте у медицини постаје све више заступљена у циљу лечења пацијената.

Радиофреквентна аблација се може применити за одстрањивање тумора плућа, костију и тумора јетре, за лечење варискозних вена, за отклањање бола у лумбалном делу кичме, за лечење срчаних аритмија. Такође, успешно се користи у области лечења поремећаја вида, код ока се најчешће примењује на ретину и мрежњачу, али и на многе друге органе. Аблација тумора се примењује када није могуће извести хируршку операцију и пружа већу сигурност од класичне операције. При одстрањивању тумора радиофреквентном аблацијом, користе се три начина извођења:

1. директним третирањем игле кроз кожу пацијента
2. лапороскопом – када се тумор налази у околини виталних органа и
3. класичним начином, односно хируршком аблацијом. У случају хируршке аблације пацијенту се прави велика рана (рез).

Посебно је значајна примена методе аблације на срчани мишић, како би се уклониле аритмије код пацијената. До пре десетак година није постојао начин да се излечи пацијент који болује од прескакања или убрзаног рада срца, а болест се само лековима могла контролисати. Данас се методом радиофреквентне аблације ова здравствена тегоба у потпуности елиминише. Енергија радиофреквентне аблације се користи за уништење нерегуларних електричних путања срчаног ткива које доводе до настанка срчане аритмије.

3. Основне једначине које описују процес радиофреквентне аблације

Проблем радиофреквентне аблације је спрегнут проблем три физичка поља: поља флуида, поља температуре и електричног поља. За описивање проблема користе се Навије-Стоксове једначине, једначина континуитета, једначина баланса флуида са преносом топлоте и Лапласова једначина [1], [2]. Математички модел је заснован на ефекту Џулове топлоте и апроксимацији да је електрично поље, које ствара електрода са катетера, квазистатичко.

Навије – Стоксове једначине описују тродимензионално струјање вискозног нестишљивог флуида [3]

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j \right) = -p_{,i} + \mu v_{i,jj} + f_i^v \quad (1)$$

где су: ρ густина флуида, v_i брзина струјања флуида у x_i правцу ($i=1,2,3$), p притисак, μ динамичка вискозност. Коришћена је конвекција да се по поновљеном индексу врши сабирање, $i, j = 1, 2, 3$.

Једначина континуитета нестишљивог флуида има следећи облик [3]

$$v_{i,i} = v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} = 0 \quad (2)$$

Једначина баланса нестишљивог флуида са преносом топлоте је дата следећим изразом [3]

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_i T_{,i} \right) - (k T_{,i})_{,i} - \sigma (\varphi_{,i}) \cdot (\varphi_{,i}) = 0 \quad (3)$$

Последњи члан у једначини (3) представља топлотни извор - загревање проводника кроз који протиче електрична струја (ефекат Џулове топлоте). У једначини (3) k је термичка прводљивост, c_p је специфична топлотна капацитивност, T је температура, σ је електрична прводљивост а φ је електрични потенцијал.

Поље у околини наелектрисаног тела које мирује назива се електростатичко поље $E(x, y, z)$. Електростатичко поље се може изразити у функцији градијента електричног потенцијала тог поља

$$E = -\nabla \varphi \quad (4)$$

Електрода узрокује настанак пронемљивог електричног поља $E(x, y, z)$, које се апроксимира као квазистатичко. Електрични потенцијал мора да задовољи следећу једначину

$$(\sigma \varphi_{,i})_{,i} = 0 \quad (5)$$

Једначина (5) представља Лапласову једначину на основу које се може израчунати густина струје и јачина електричног поља.

Количина топлоте ослобођена у проводнику кроз који протиче електрична струја једнака је производу квадрата јачине електричне струје, електричне отпорности отпорника и времена протицања струје [1].

$$Q = UI t = I^2 R t = P t \quad (6)$$

Претходна једначина представља математички запис Џуловог закона. Ефекат загревања проводника кроз који протиче електрична струја је познат као ефекат Џулове топлоте.

За дуг цилиндрични проводник константног пресека унутар кога је струјно поље хомогено снага је:

$$P = RI^2 = \rho \frac{l}{S} (\vec{J}S)^2 = \rho \vec{J}^2 S l = \rho \vec{J}^2 V = \vec{E} \vec{J} V \quad (7)$$

Запремиска густина снаге трансформације електричног рада у топлотну енергију је:

$$\frac{P}{V} = \vec{J} \vec{E} = \rho J^2 = \frac{J^2}{\sigma} = \frac{\sigma^2 E^2}{\sigma} = \sigma E^2 = \sigma (-\nabla \varphi)^2 = \sigma \nabla \varphi \nabla \varphi \quad (8)$$

и представља Џулов закон у локалном облику. У једначини (7) J је густина струје која протиче кроз проводник.

У даљем тексту ће бити изложен нумерички поступак решавања проблема радиофреквентне аблације методом коначних елемената.

4. Једначине коначног елемента за радиофреквентну аблацију

Метода коначних елемената представља једну од најопштијих нумеричких метода која има примену у готово свим областима технике, науке и посебно техничке физике. Основна идеја анализе методом коначних елемената је моделирање проблема подразумевајући да је просторни домен проблема подељен – дискретизован на поддомене на које се применјују општа знања и искуства из механике континуума и нумеричке математике. Поддемени о којима је реч термилошки се означавају као коначни елементи. Анализа система спрегнутих симулација одзива континуума на задате побуде. Физичке величине које су обухвачене моделом добијају се у дискретном облику, тј. у тачкама које произилазе из дискретизације. Ове тачке зову се чворне тачке или једноставно чворови.

На основу дискретизације физичких проблема, интерполирањем и увођењем интерполационих функција уз увођење природног (локалног) координатног система, успостављањем равнотежне једначине за елементе и за целокупну структуру, долази се до матрица елемената и система. Веома широку примену у формулацији једначина коначних елемената имају методе тежинских остатака, од којих се Рицова и Галеркинова метода најчешће примењују. Посебна погодност Галеркинове методе је у томе што се може применити у случајевима када није могуће применити варијационе принципе. Као основ за примену Галеркинове методе користе се диференцијалне једначине које описују проблем, уз дефинисане граничне услове. Увођењем граничних услова и сила које делују на систем у нумерички модел и решавањем се добијају вредности физичког поља (померање, температура...) у чворовима које представљају решење проблема.

У овом одељку излажен је поступак формирања матрица и вектора коначног елемента помоћу Галеркиновог поступка. Формирање матриц и вектора система (скупа коначних елемената), као и поступци интеграције, излажу се укратко, јер важе општи принципи дати у литератури [3] и [4].

Основне диференцијалне једначине које описују радиофреквентну аблацију следе из (1), (2), (3) и (5), које овде пишемо редоследом који ће даље бити коришћен.

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j \right) = -p_{,i} + \mu v_{i,jj} + f_i^v \quad (9)$$

$$v_{i,i} = v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} = 0 \quad (10)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_i T_{,i} \right) - (k T_{,i})_{,i} - \sigma(\varphi_{,i}) \cdot (\varphi_{,i}) = 0 \quad (11)$$

$$(\sigma \varphi_{,i})_{,i} = 0 \quad (12)$$

Посматрајмо прво систем од три једначине (9). Полазимо од интерполације за компоненте брзине у коначном елементу облика

$$v_i = h_i V_i^I, \quad I = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

где су v_i компоненте брзине у чворовима коначног елемента, а $h_i(\xi, \eta, \zeta)$ интерполационе функције дефинисане у литератури [3], [4]. Ако сваку од једначина (9) помножимо интерполационим функцијама и интегралимо по запремини коначног елемента добијамо [3]

$$\int_V \rho \mathbf{H}^T \frac{\partial v_i}{\partial t} dV + \int_V \rho \mathbf{H}^T (v_1 v_{i,1} + v_2 v_{i,2} + v_3 v_{i,3}) dV + \int_V \mathbf{H}^T p_{,i} dV - \int_V \mu \mathbf{H}^T v_{i,jj} dV - \int_V \mathbf{H}^T f_i^v dV = 0 \quad (14)$$

Ако се примени парцијална интеграција на трећи и четвртог интеграл на десној страни једначине (14) добија се следеће:

$$\int_V \mathbf{H}^T p_{,i} dV = \int_S \mathbf{H}^T p n_i dS - \int_V \mathbf{H}^T_{,i} p dV \quad (15)$$

$$\int_V \mu \mathbf{H}^T v_{i,jj} dV = \int_S \mu \mathbf{H}^T v_{i,j} n_j dS - \int_V \mu \mathbf{H}^T_{,j} v_{i,j} dV \quad (16)$$

где је S површ која обухвата запремину V коначног елемента. Из нумеричких разлога, за интерполацију притиска се користе само угаони чворови, па дакле и интерполационе функције $\mathbf{G}$ које се разликују од $\mathbf{H}^T$ примењених за компоненте брзине и температуру. Тако се код 2D анализе користи 9 чворова за брзине, а 4 за притисак. У случају 3D изопараметарских елемената може се користити 21 чвор за брзине, а 8 за притиске. Дакле, интерполација за притисак је

$$p = \hat{h}_I p_I \quad I = 1, 2, \dots, M \quad (17)$$

Заменом (10) и (13) - (16) у једначину (11), добијамо матричну једначину облика

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}_{vv} \mathbf{V} + \mathbf{K}_{vp} \mathbf{P} = \mathbf{F}_v \quad (18)$$

Вектор брзине елемента се састоји од подвектора,

$$\mathbf{V}^T = [\mathbf{V}_1^T \mathbf{V}_2^T \mathbf{V}_3^T] \quad (19)$$

где су подвектори

$$\mathbf{V}_i^T = [\mathbf{V}_i^1 \mathbf{V}_i^2 \dots \mathbf{V}_i^N] \quad (20)$$

а N број чворова елемента, тако да се матрице $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}_{vv}$ и $\mathbf{K}_{vp}$, као и вектор $\mathbf{F}_v$, деле на одговарајуће подматрице и подвекторе. Тако имамо

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathbf{M}} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_{vv} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{vv} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathbf{K}}_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mathbf{K}}_{vv} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{K}_{vp} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vp1} \\ \mathbf{K}_{vp2} \\ \mathbf{K}_{vp3} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{F}_v^T = [\mathbf{F}_{v1}^T \mathbf{F}_{v2}^T \mathbf{F}_{v3}^T] \quad (24)$$

Компоненте ових подматрица и подвектора су
матрица маса

$$\overline{M}_{IJ} = \rho \int_V h_I h_J dV \quad (25)$$

матрица конвективног члана

$$(\overline{\mathbf{K}}_{vv})_{IJ} = \int_V h_I v_j h_{J,j} dV + \int_V \mu h_{I,j} h_{J,j} dV \quad (26)$$

матрица вискозног члана

$$(\mathbf{K}_{vpi})_{IJ} = - \int_V h_{I,i} \hat{h}_j dV \quad (27)$$

вектор спољашњих оптерећења

$$(\mathbf{F}_{vi})_I = \int_V h_I f_i^v dV + \int_S h_I (-p \delta_{ij} + \mu v_{i,j}) n_j dS \quad (28)$$

Сада једначину континуитета (10) помножимо интерполационим функцијама $\hat{h}_I$ за притисак и интегралимо по запремини коначног елемента. Тако добијамо једначину матричног облика

$$\mathbf{K}_{vp}^T \mathbf{V} = 0 \quad (29)$$

при чему је матрица $\mathbf{K}_{vp}$ одређена једначинама (23) и (27).

За температуре и електрични потенцијал усвајамо интерполацијоне функције h_I - исте као и за компоненте брзине, па је температура, односно електрични потенцијал, у тачки једнака

$$T = h_I T^I \quad (30)$$

$$\varphi = h_I \varphi^I \quad (31)$$

Помножимо једначину (11) интерполационим функцијама h_I и интегралимо по запремини коначног елемента. Тако добијамо једначину облика

$$-\rho \int_V c_p h_I \frac{\partial T}{\partial t} dV - \rho \int_V c_p T_{,i} h_I v_i dV + \int_V h_I (k T_{,i})_{,i} dV + \int_V \sigma_i h_I^T \varphi_{,i} \varphi_{,i} dV = 0 \quad (32)$$

Заменом интерполација (13), (30) и (31) за брзине, температуре и електрични потенцијал, добијамо једначину

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{K}_{TV} \mathbf{V} + \mathbf{K}_{TT} \mathbf{T} + \mathbf{K}_{\sigma T} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{F}_T \quad (33)$$

при чему су матрице и вектори

$$C_{IJ} = \rho \int_V c_p h_I h_J dV \quad (34)$$

$$(\mathbf{K}_{TV})_{IJ} = \rho \int_V c_p T_{,i} h_I h_J dV \quad (35)$$

$$\mathbf{K}_{TT} = \int_V k \nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (36)$$

$$\mathbf{K}_{\sigma T} = -\sigma \int_V \mathbf{H}^T (\nabla \mathbf{H}^T \boldsymbol{\varphi}) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (37)$$

$$\mathbf{F}_T = \int_S \mathbf{H}^T k \mathbf{T}_{,i} n_i dS \quad (38)$$

Ако се Лапласова једначина (12) помножи интерполационим функцијама h_I и интеграл по запремини коначног елемента добија се

$$\int_V \mathbf{H}^T \nabla (\sigma \nabla \boldsymbol{\varphi}) dV = 0 \quad (39)$$

Превођењем запреминског интеграла у претходној једначини у збир површинског и запреминског интеграла добија се

$$\left[\sigma \int_V \nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H} dV \right] \boldsymbol{\varphi} - \int_S \mathbf{H}^T \sigma \boldsymbol{\varphi}_{,i} n_i dS = 0 \quad (40)$$

У матричном облику једначина (40) се може записати:

$$\mathbf{K}_{\sigma\phi}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{F}_{\phi} \quad (41)$$

где су:

$$\mathbf{K}_{\sigma\phi} = \sigma \int_V \nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (42)$$

$$\mathbf{F}_{\phi} = \int_S \mathbf{H}^T \sigma \boldsymbol{\phi}_{,i} n_i dS \quad (43)$$

Груписањем матричних једначина (18), (29), (33) и (41) у један систем, добијамо

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\mathbf{P}} \\ \dot{\mathbf{T}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv} & \mathbf{K}_{vp} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{vp}^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{TV} & 0 & \mathbf{K}_{TT} & \mathbf{K}_{\sigma T} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\sigma\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{T} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_V \\ \mathbf{F}_p \\ \mathbf{F}_T \\ \mathbf{F}_{\phi} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Сабирањем ових једначина коначних елемената долазимо до матричне једначине система. У наставку поглавља биће укратко изложен поступак интеграције система једначина (44).

Систем једначина (44) је несиметричан и нелинеаран систем дифернцијалних једначина првог реда по непознатим величинама у $\mathbf{V}, \mathbf{P}, \mathbf{T}$ и $\boldsymbol{\phi}$. Nelinearne matrice su $\mathbf{K}_{vv}$ i $\mathbf{K}_{TV}$, чак и у случају да су материјалне константне независне од температуре, јер садрже брзине, односно изводе температуре. Ово се види из израза (26) i (35) за $(\bar{\mathbf{K}}_{vv})_{IJ}$ i $(\mathbf{K}_{TV})_{IJ}$. Уколико су материјалне константе зависне од температуре, онда су нелинеарне и матрице $\mathbf{C}$ i $\mathbf{K}_{TT}$, као и вектори $\mathbf{F}_V$ и $\mathbf{F}_T$.

Ради једноставности даљег извођења, систем једначина (44) написаћемо у облику

$$\hat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (45)$$

при чему матрице $\hat{\mathbf{M}}$ и $\hat{\mathbf{K}}$ садрже одговарајуће подматрице, вектор $\mathbf{F}$ представља вектор десне стране, а $\mathbf{U}$ је вектор генералисаног померања чворова који садржи брзине $\mathbf{V}$, притиске $\mathbf{P}$, температуре $\mathbf{T}$ и електрични потенцијал $\boldsymbol{\phi}$. За решавање система једначина (44) применићемо инкрементално-итеративни поступак и добити, за сваки временски корак Δt , прираштај генералисаног померања $\Delta \mathbf{U}$. Прво усвајамо корак временске интеграције Δt за једначину (44). Једначину (44) можемо написати у облику

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{M}} \frac{1}{\Delta t} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U} \right) + {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \quad (46)$$

где леви индекси " t " и " $t+\Delta t$ " означавају величине на почетку и на крају корака интеграције. Полазежи од познатог стања на почетку корака, долазимо до једначине која договара i -тој итерацији

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta t} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{M}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}^{(i-1)} \right) \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} - \\ & - \left(\frac{1}{\Delta t} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{M}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}^{(i-1)} \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} \end{aligned} \quad (47)$$

или

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_V + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{VV}^{(m-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mu V}^{(m-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{J}_{VV}^{(m-1)} & \mathbf{K}_{VP} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{VP}^T & 0 & 0 & 0 \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{TV}^{(m-1)} & 0 & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{TT}^{(m-1)} + c_p {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{VV}^{(m-1)} & {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\sigma T}^{(m-1)} \\ 0 & 0 & 0 & {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\sigma \phi}^{(m-1)} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{V}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{P}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{T}^{(i)} \\ \Delta \Phi^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_V^{(m-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_P^{(m-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_T^{(m-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_\phi^{(m-1)} \end{Bmatrix} \quad (48)$$

из кога можемо одредити вектор $\Delta \mathbf{U}^{(i)}$ и генералисано померање

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (49)$$

При чему је ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U}$.

Ако се користи пеналти (penalty) формулација [4] притисак у моделу се не рачуна, односно претпоставља се да нема генерисања притиска на границама ни унутар модела. Инкрементално – итеративна форма једначине (48) је

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_V + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{VV}^{(m-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mu V}^{(m-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{J}_{VV}^{(m-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\lambda V}^{(m-1)} & 0 & 0 \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{TV}^{(m-1)} & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{TT}^{(m-1)} + c_p \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{VV}^{(m-1)} \right) & {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\sigma T}^{(m-1)} \\ 0 & 0 & {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\sigma \phi}^{(m-1)} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{V}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{T}^{(i)} \\ \Delta \Phi^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_V^{(m-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_T^{(m-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_\phi^{(m-1)} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

Матрице и вектори у једначини (50) дати су

$$\mathbf{M}_V = \rho \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (51)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{VV}^{(m-1)} = \rho \int_V \mathbf{H}^T (\mathbf{H}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(m-1)}) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (52)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mu V}^{(m-1)} = \int_V \mu \nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (53)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{J}_{VV}^{(m-1)} = \rho \int_V \mathbf{H}^T (\nabla \mathbf{H}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(m-1)}) \mathbf{H} dV \quad (54)$$

$$\mathbf{K}_{\lambda V} = \lambda \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (55)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_V^{(m-1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_B + {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_S^{(m-1)} - \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{VV}^{(m-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mu V}^{(m-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\lambda V}^{(m-1)} \right) {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(m-1)} \quad (56)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_B = \int_V \mathbf{H}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^V dV \quad (57)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_S^{(m-1)} = \int_S \mathbf{H}^T \left(-{}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{(m-1)} \mathbf{n} + \nabla {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(m-1)} \cdot \mathbf{n} \right) dS \quad (58)$$

$$\mathbf{C} = \rho \int_V c_p \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (59)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{TV}^{(m-1)} = \rho \int_V c_p \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^{(m-1)} \right) \mathbf{H} dV \quad (60)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{TT}^{(m-1)} = \int_V k \nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (61)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\sigma T}^{(m-1)} = \sigma \int_V \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\phi}^{(m-1)} \right) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (62)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\sigma \phi}^{(m-1)} = \sigma \int_V \nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (63)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_T^{(m-1)} &= \mathbf{T}_S - \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} \right] \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^{(m-1)} - {}^t \mathbf{T} \right) - \\ &- \left[{}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{TV}^{(m-1)} {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(m-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{TT}^{(m-1)} {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^{(m-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\sigma T}^{(m-1)} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\phi}^{(m-1)} \right] \end{aligned} \quad (64)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_\phi^{(m-1)} = \mathbf{T}_\phi - \left[{}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\sigma \phi}^{(m-1)} \right] \left({}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\phi}^{(m-1)} \right) \quad (65)$$

$$\mathbf{T}_S = \int_S k \mathbf{H}^T \nabla {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^{(m-1)} \mathbf{n} dS \quad (66)$$

$$\mathbf{T}_\phi = \sigma \int_S \mathbf{H}^T \nabla^{t+\Delta t} \boldsymbol{\phi}^{(m-1)} \mathbf{n} dS \quad (67)$$

На крају, напомнимо да се ради ефикасности рачунања, константни делови матрица и вектора система могу чувати записани у меморији (на диску) рачунара и ажурирање вршити само по деловима који се мењају у току итерација. Материјалне константе које зависе од температуре за итерацију "i-1" одговарају температурама $T^{(i-1)}$ у интеграционим тачкама [3].

5. Примери

5.1. Ефекат Џуловог грејања услед деловања статичког електричног поља

Опис проблема

Разматра се проблем Џуловог грејања услед деловања статичког електричног поља унутар блока са проводљивим флуидом, слика 2. Константна густина струје је генерисана кроз стално статично електрично поље у 2Д блоку. Интензитет електричног поља и расподела температуре су добијени програмом ADINA-EM [6] који је у интеракцији са програмом за струјање флуида ADINA-CFD [7].

Модел коначних елемената

Модел коначних елемената састоји се од четворочворних $FCBI - C$ елемената. Константна јачина струје се генерише на границама целог домена коначних елемената. Електрично поље се решава у Е-равни, док се за расподелу температуре претпоставља да буде стационарна.

Решење проблема:

За решавање описаног проблема користе се следеће једначине:

$$1) \nabla \times \varepsilon \mathbf{E} = 0$$

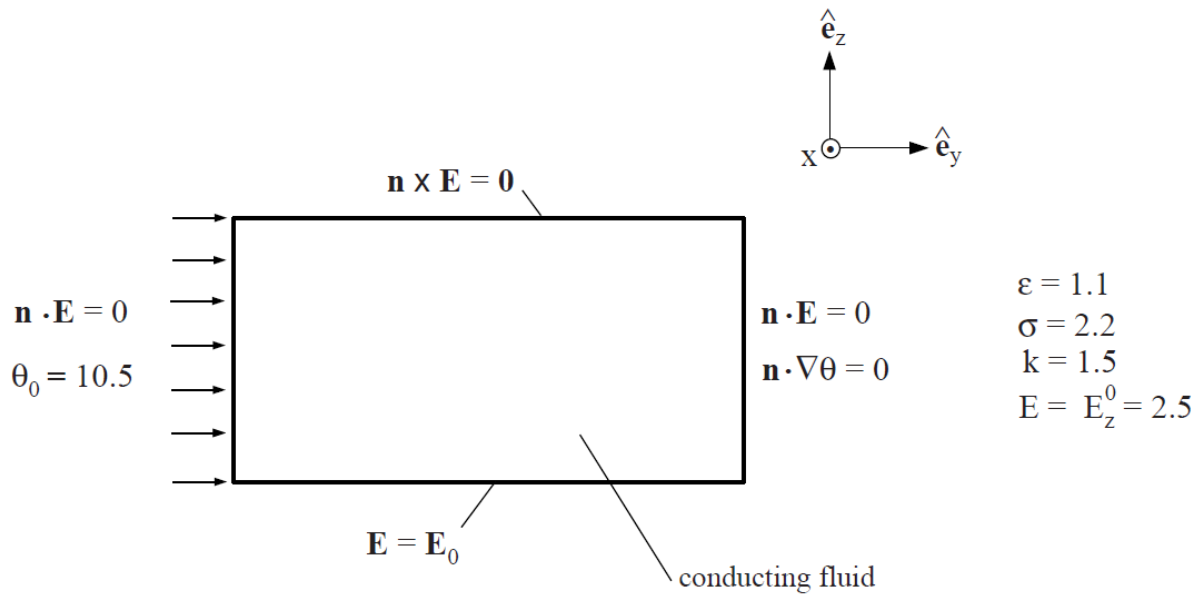
$$2) \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Решење описаног проблема у аналитичком облику је:

$$E = E_z^0 = 2.5, J = \sigma E$$

$$T = -\frac{J^2}{2k\sigma} y^2 + \frac{J^2}{k\sigma} y_0 y^2 + T_0$$

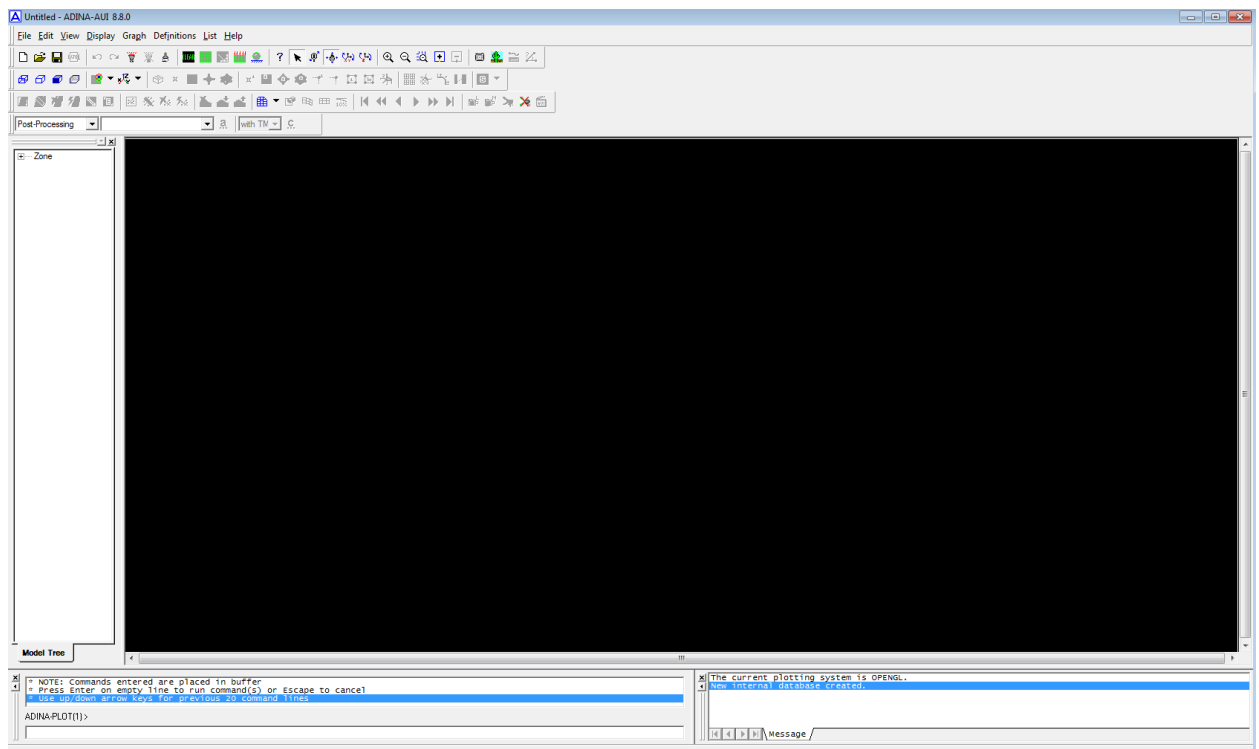
где су: пермитивност материјала $\varepsilon = 1.1$, електрична кондуктивност $\sigma = 2.2$, топлотна проводљивост $k = 1.5$, почетна температура $T_0 = 10.5$, слика 2.



Слика 2: 2Д блок са граничним условима и карактеристикама материјала.

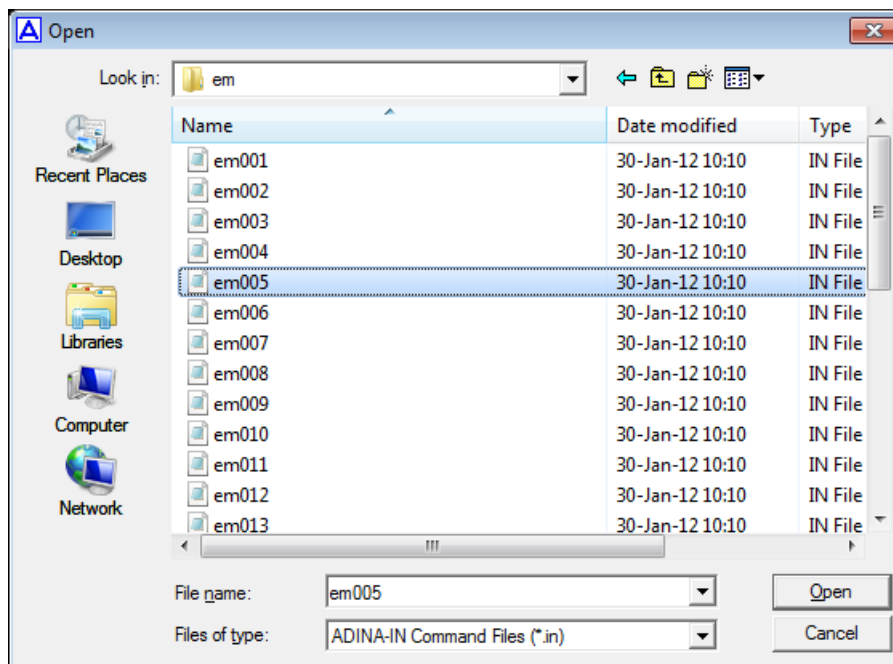
У наставку је објашњено како је описани пример решен у софтверу ADINA [6]. Пример је дат у упутству за софтвер ADINA, што значи да је су геометрија, модел, гранични услови и оптерећења већ дефинисани у датотеци.

Стартиванхен програмског пакета ADINA појављује се прозор приказан на слици 3.



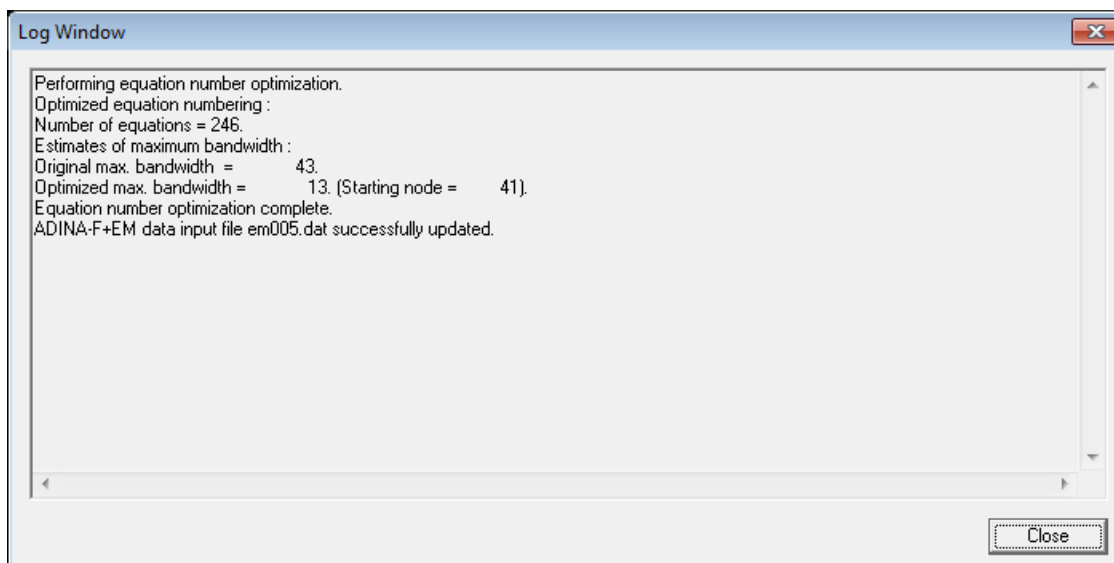
Слика 3: Почетни прозор програмског пакета ADINA

Отварање већ постојеће датотеке у софтверу врши се командом **Open**. У прозору **Open** селектовати одговарајућу датотеку (em005), слика 4.



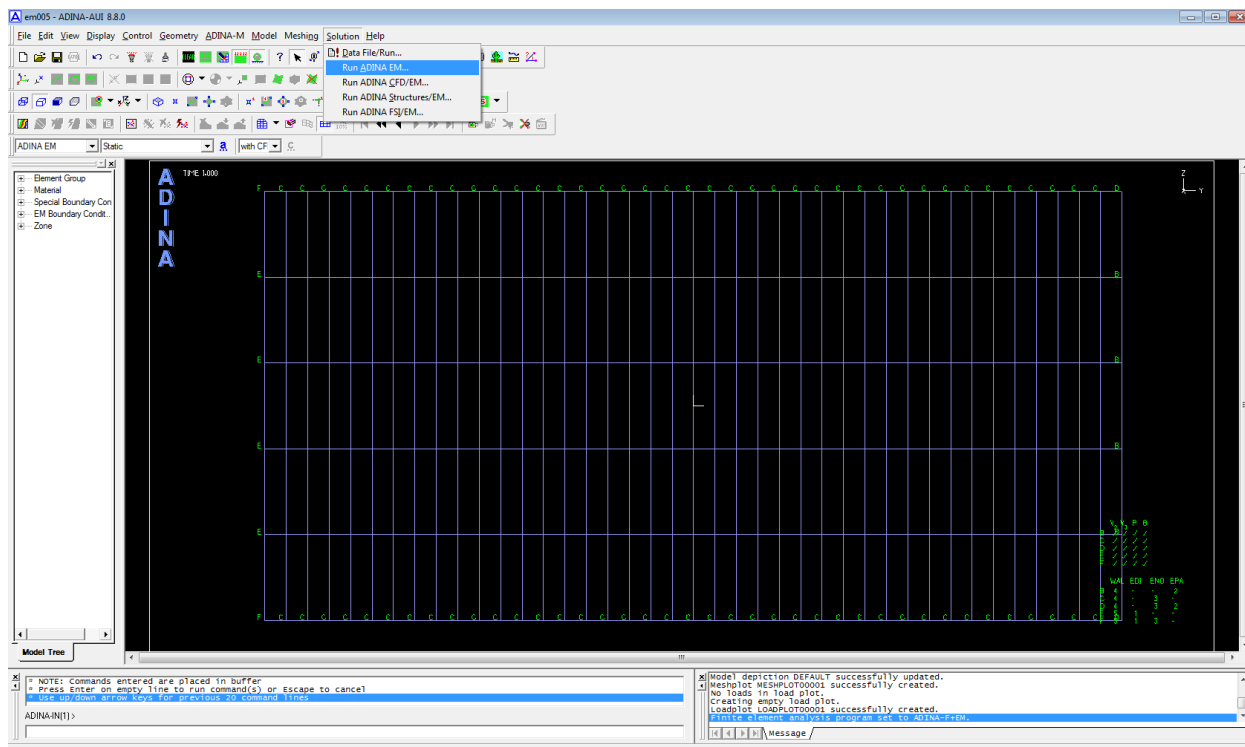
Слика 4: Прозор **Open** програмског пакета ADINA

На слици 5. приказан је лог прозор који приказује да учитани фајл без грешака.



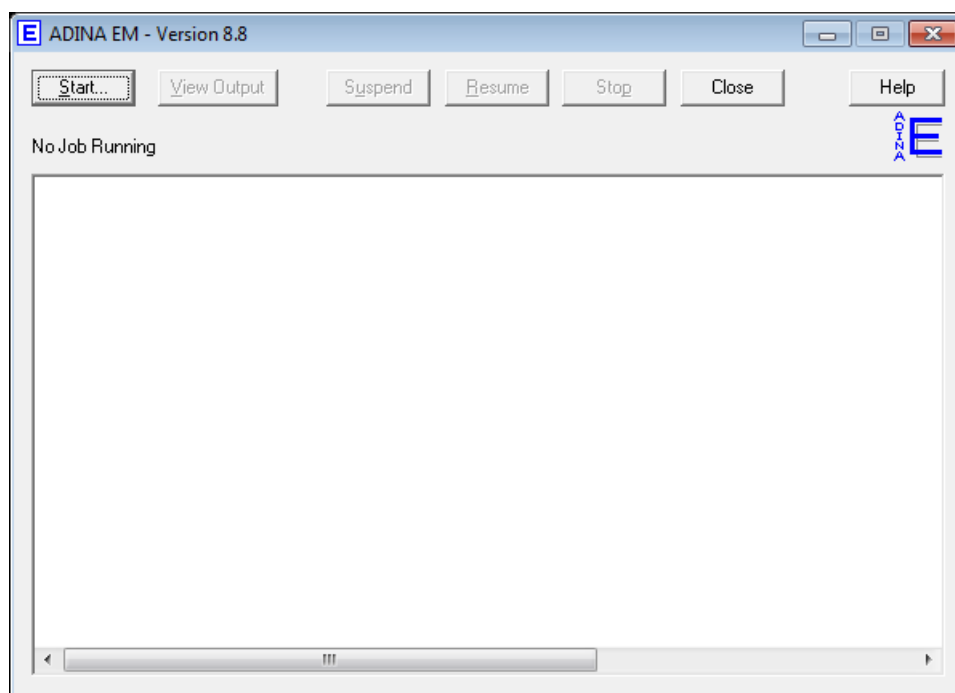
Слика 5: Лог прозор при учитавању примера

На слици 6. приказан је учитан модел коначних елемената за пример са Џуловим грејањем.

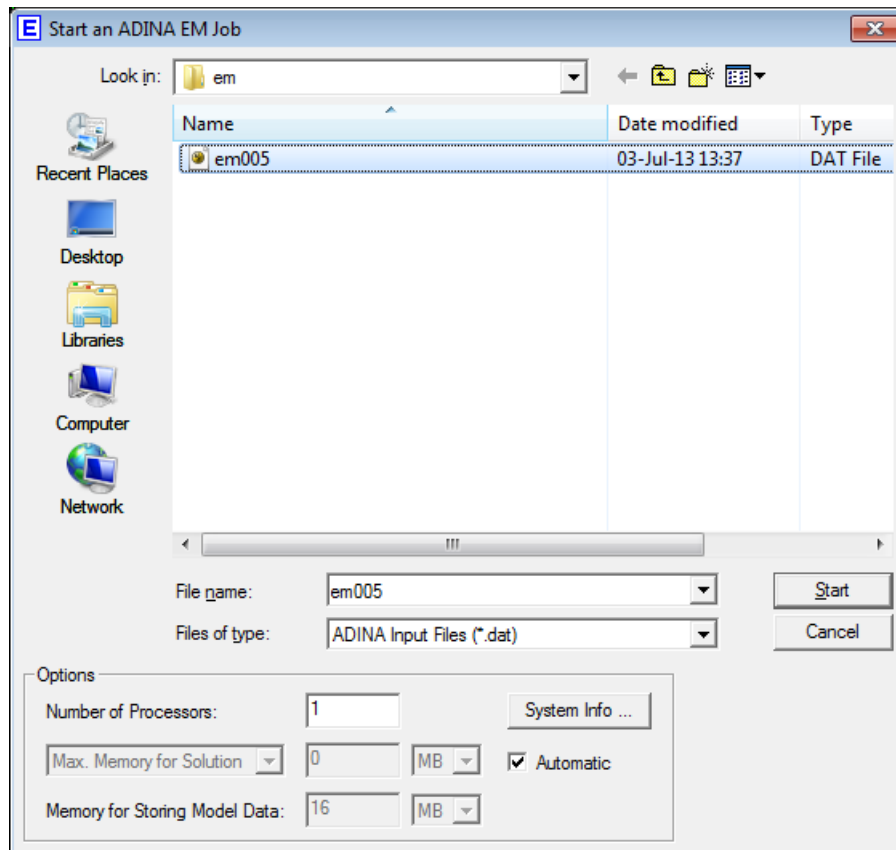


Слика 6: Модел коначних елемената за пример Џуловог грејања

Да би се покренула анализа потребно је у главном менију изабрати **Solution** и након тога кликнути на **Run ADINA-EM**, слика 7. Потребно је прво кликнути на дугме **Start**, а након тога учитати претходно већ креирани *.dat фајл (слика 8.).

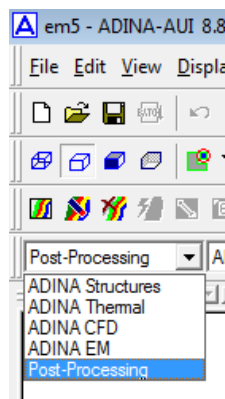


Слика 7: Стартовање анализе

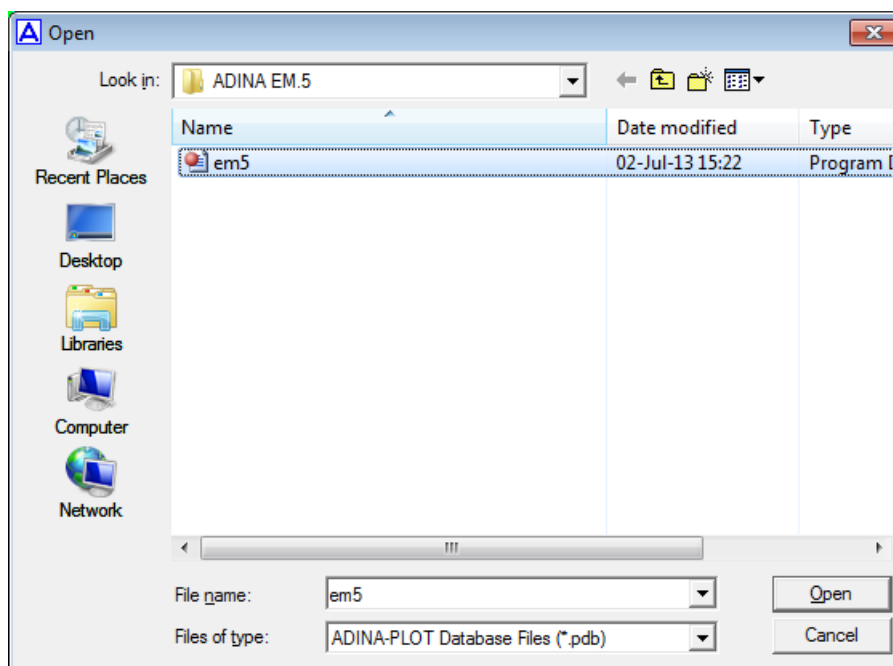


Слика 8: Учитавање датотеке

Након завршеног прорачуна, софтвер ће резултате сачувати у посебан фајл. Да би се приказали резултати потребно је прећи у део програма за постпроцесирање (опција **Post-Processing**, слика 9.)

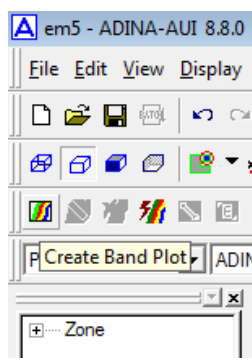


Слика 9: Прелазак у део програма за постпроцесирање



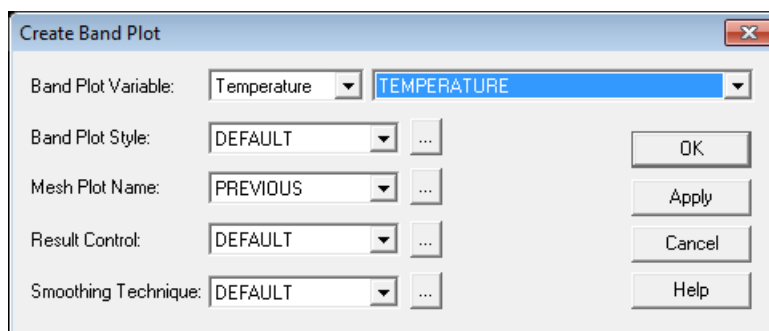
Слика 10: Учитавање резултата

Након учитавања резултата потребно је приказати физичка поља добијена анализом. Опција **Create Band Plot** служи да се изабере одређена променљива добијена прорачуном. То може бити брзина, померање, температура, електрични потенцијал итд.

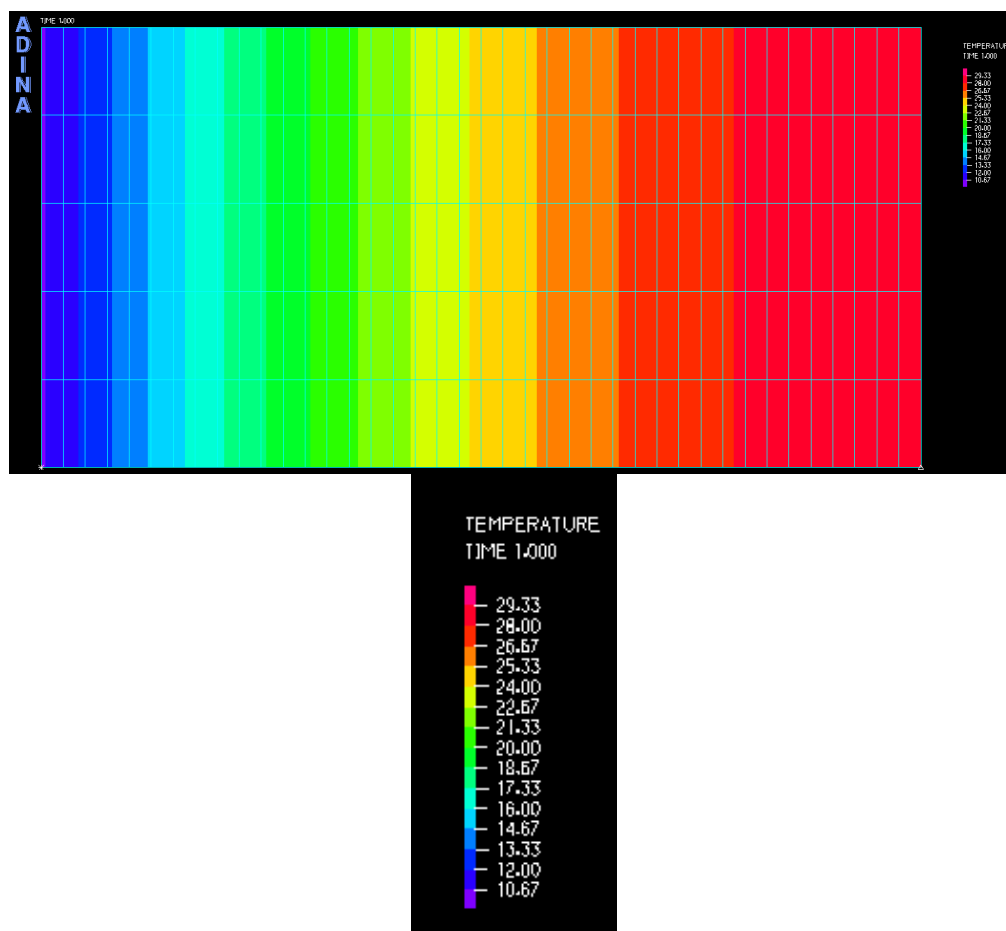


Слика 11: Одабир опције за приказ резултата

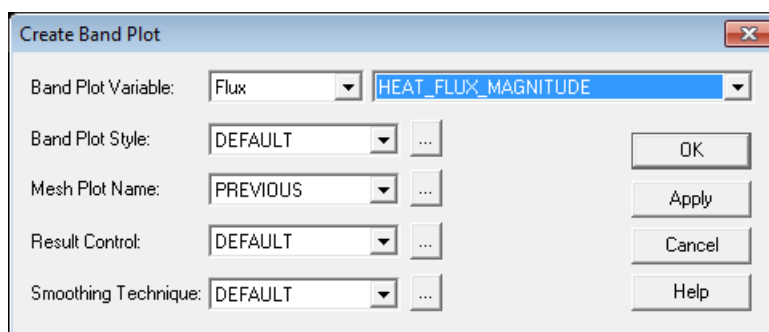
На слици 12 приказан је дијалог са изабраним опцијама за приказ поља температуре. Поље температуре добијено анализом приказано је на слици 13. На слици 14 приказан је дијалог са изабраним опцијама за приказ топлотног флуksа. Топлотни флуks је приказан на слици 15.



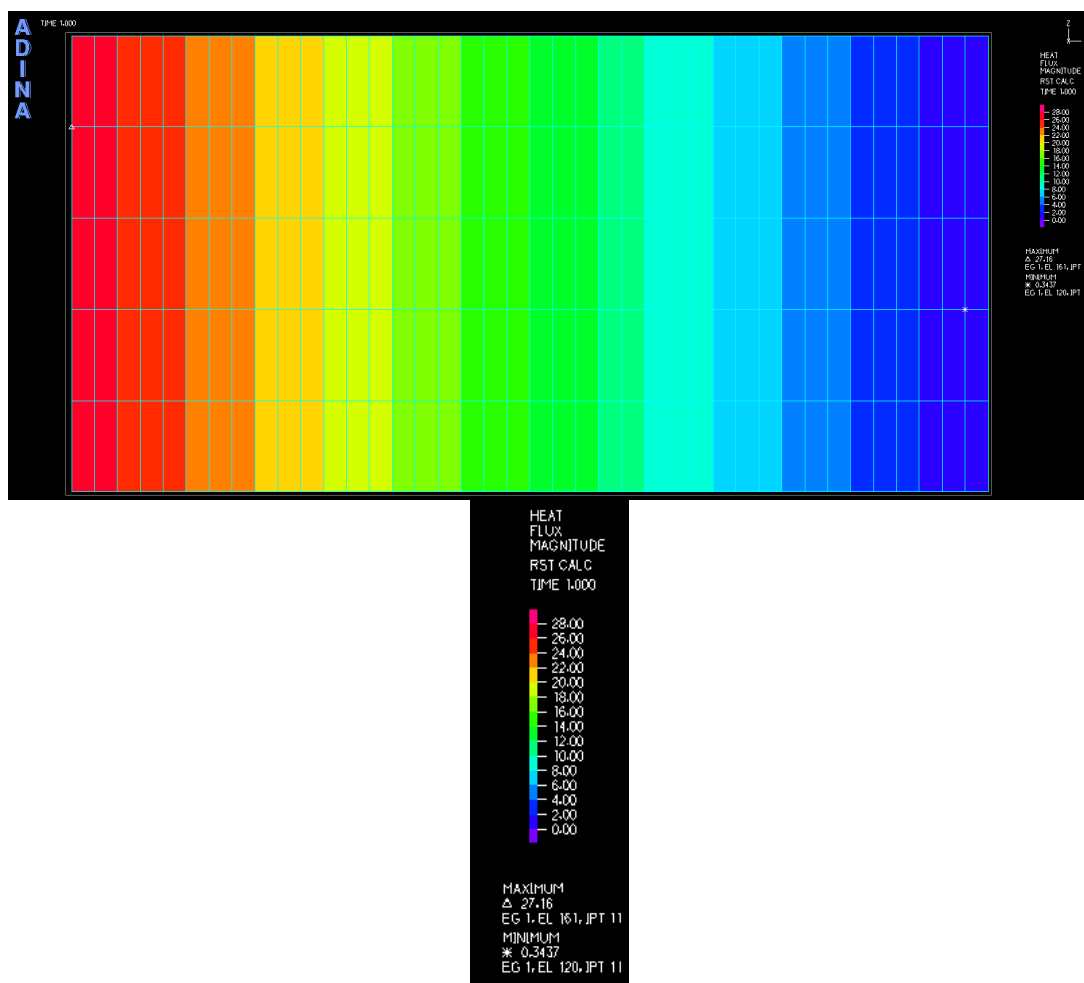
Слика 12: Избор опције за приказ температуре



Слика 13: Расподела температуре у моделу



Слика 14: Одабир опције за приказ топлотног флукса

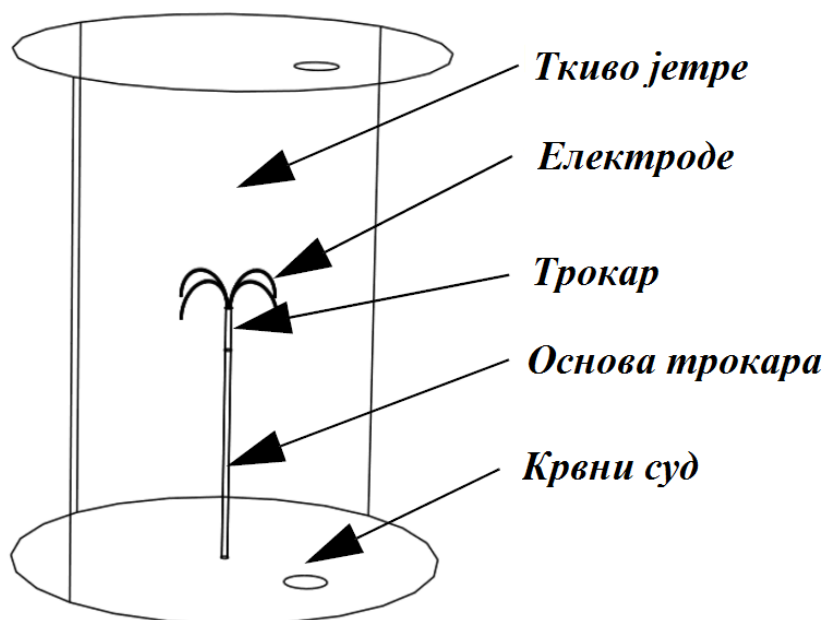


Слика 15: Расподела топлотног флукса у моделу

5.2. Пример аблације хепатичног тумора

У овом поглављу описан је пример аблације хепатичног тумора анализиран у софтверу COMSOL Multyphysics [8]. Медицинска процедура аблације отклања оболело ткиво тако што га загрева на температуру од 45 °C до 50 °C. Овај начин захтева локални извор топлоте, што се остварује убацивањем мале електричне сонде. Сонда је направљена од Трокара (главни штап) и четири електроде на ручици, као на слици 16. Трокар је изолован, осим у близини ручице електроде [9].

Електрична струја кроз сонду ствара електрично поље у ткиву. Поље је најјаче у непосредној близини сонде и генерише топлоту, која је највећа око електроде сонде.



Слика 16: Приказ сонде у моделу

Овај модел користи **Bioheat Transfer** интерфејс и интерфејс **Electric Currents** за пренос електричне струје софтвера COMSOL Multyphysics.

Изглед модела је приближан телесном ткиву са великим цилиндром и претпоставља се да његова температура на граници остаје 37° C у току целог поступка.

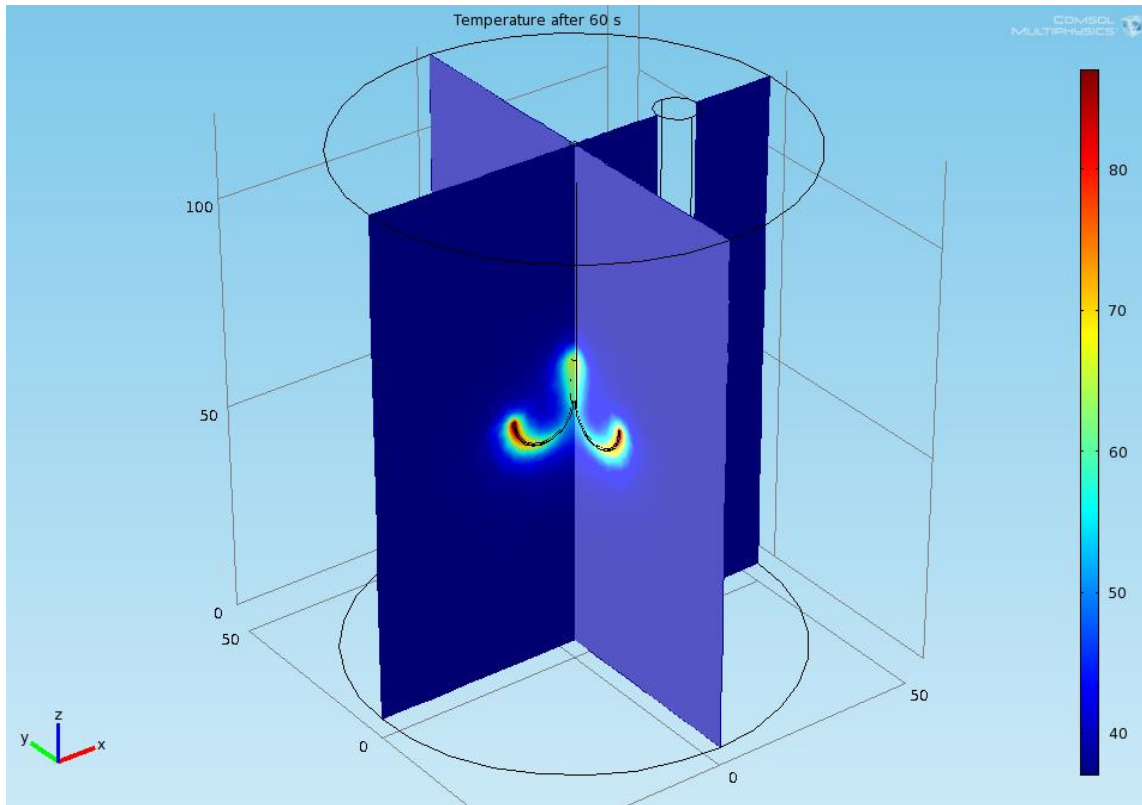
Тумор се налази у близини центра цилиндра и има исте термичке карактеристике, као и околно ткиво. Модел лоцира сонду, дуж централне линије цилиндра тако да њене електроде обухватају регион где се налази тумор. Геометрија обухвата велики крвни суд.

На моделу су одређени гранични услови на следећи начин:

- Температура на спољним границама цилиндра и на зидовима крвног суда је 37°C . Претпоставља се да је топлотни флуks континуалан за све друге границе. Почетна температура износи 37°C у свим доменима.
- На спољним границама цилиндра електрични потенцијал (φ) је једнак нули (0 V).
- На електродама електрични потенцијал износи 22 V и континуалан је за све остале границе.

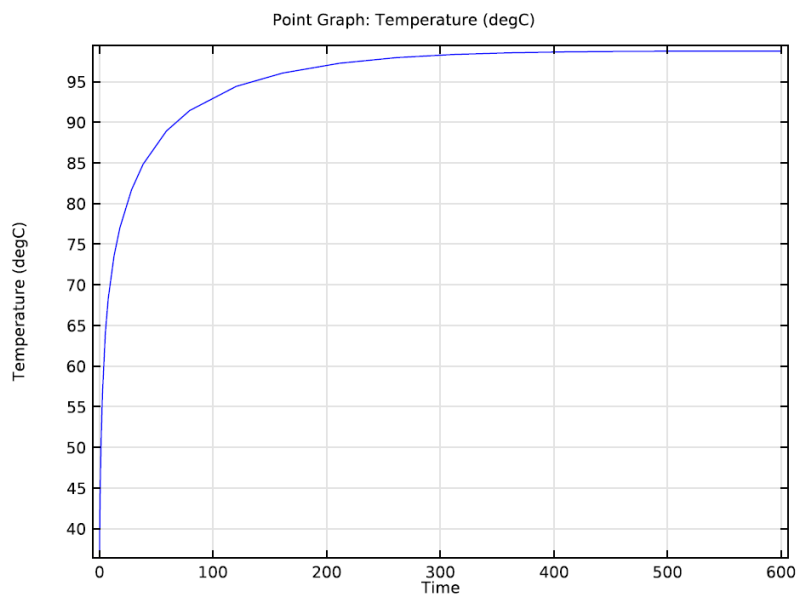
Модел решава наведене једначине у поглављу 3 са датим граничним условима да би се добило температурно поље у функцији времена.

Слика 17. показује како температура расте са временом у ткиву око електроде. Приказана је расподела температуре на исечку модела након 60 секунди од почетка аблације.



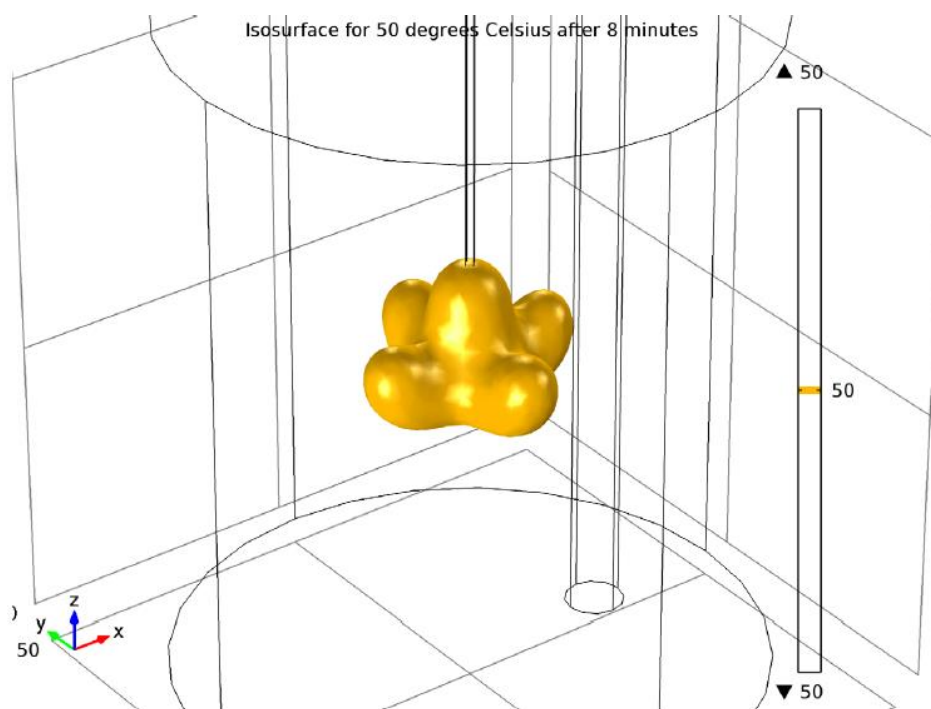
Слика 17: Расподела температуре након 60 секунди

На слици 18. приказана је температура на врху једне од електрода. Температура брзо расте све док не достигне стационарно стање, односно температуру од око 90°C .



Слика 18: Дијаграм који приказује однос температуре и времена загревања електроде

Такође је интересно да се визуализује регион где ћелије рака умиру, где је температура достигла најмање 50°C . Слика 19. приказује једну ћелију након 8 минута на 50°C .



Слика 19: Изглед ћелије рака после 8 минута на температури око 50°C

6. Закључак

Радиофреквентна аблација је медицинска процедура у којој се нефункционална ткива, срца, тумори одстрањују коришћењем високе фреквенције наизменичне струје како би се уклониле медицинске неправилности. Главна предност радиофреквентне методе, у односу на претходно коришћене ниске фреквенције наизменичне струје или пулсне функције једносмерне струје, се састоји у томе што радиофреквентна наизменична струја не стимулише директно нерве мишића и због тога се може често користити и без примене анестетика. Област примене радиофреквентне аблације се знатно проширила последњих 15-ак година, због добијања задовољавајућих резултата.

До пре десетак година није постојао начин да се излечи пацијент који болује од прескакања или убрзаног рада срца, а болест се само лековима могла контролисати. Данас се методом радиофреквентне аблације ова здравствена тегоба решава. Операција која је готово безболна, траје свега сат или два, а опоравак најдуже дванаест сати. Па чак и професионални фудбалери који пате од ове болести, после примене ове методе могу наставити са тренинзима након два дана. Пре примене радиофреквентне аблације, за пацијенте који болују од тахикадрије и других болести није постојала могућност излечења, а хируршким интервенцијама подвргавали су се само они пацијенти којима је живот био угрожен.

У циљу проучавања, истраживања и развоја нових техника и да се побољшају постојеће, истраживачи могу да користи клиничке и експерименталне студије, и теоријске моделе. Друго, значајно у овом истраживању, је напредак у разумевању електричних и топлотних појава које су укључене у аблацију. У последњих 10 година неколико група су развиле теоријски модел за проучавање радиофреквентне аблације. Моделирање је постало значајан инструмент у „помагању“ експерименталних истраживања на развоју техника радиофреквентне аблације.

Литература

- [1] Милица Обрадовић – Дипломски рад – “Моделирање процеса аблације на срчаном мишићу”, Крагујевац, 2010.
- [2] М. К. Jain, Р. D. Wolf – “A Three Dimensional Finite Element Model of Radiofrequency Ablation with Blood Flow and its Experimental Validation”, Vol. 28, pp. 1075-1084, 2000.
- [3] М. Kojić, М. Živković, R. Slavković, and N. Grujović, “Metod konačnih elemenata I”, Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski fakultet, Kragujevac, Srbija, 1998.
- [4] М. Kojić, N. Filipović, B. Stojanović, N. Kojić., “Computer Modelling in Bioengineering – Theoretical Background, Examples and Software”, J. Wiley and Sons, 2008.
- [5] М. Kojić, N. Filipović, M. Živković, R. Slavković, N. Grujović, “PAK-F Finite Element Program for Laminar Flow of Incompressible Fluid and Heat Transfer”, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kragujevac, Serbia, 1998.
- [6] <http://www.adina.com/adina-electromagnetics.shtml>, приступљено 05.07.2013.
- [7] <http://www.adina.com/adina-CFD.shtml>, приступљено 05.07.2013.
- [8] <http://www.comsol.com/products/multiphysics/>, приступљено 05.07.2013.
- [9] <http://www.comsol.com/showroom/gallery/497/>, приступљено 05.07.2013.