

Струјање течности кроз цеви

Дипломски рад

Крагујевац, 2016.

**Факултет инжењерских наука Универзитета у
Крагујевцу**



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Дипломске академске студије

Смер: Производно машинство

Предмет: Механика флуида

Број индекса: 133/82-W

Душица Д. Блажић

Струјање течности кроз цеви

Дипломски рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Др Слободан Савић, ред.проф.
2. _____
3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог дипломског рада кандидаткиња треба да:

- проучи одговарајућу литературу везану за проблеме струјања течности,
- на основу података из препоручене и друге литературе, објасни поступак одређивања режима струјања течности кроз цеви,
- представи објасни и анализира прорачуне, добијене на практичној примени изложене материје

Препоручена литература:

[1] Обровић, Б., МЕХАНИКА ФЛУИДА, Машински факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац 2007.

[2] Обровић, Б., Савић, С., ХИДРАУЛИКА – основи, Машински факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац 2005.

[3] Шашић, М., ТРАНСПОРТ ФЛУИДА У ЦЕВИМА, Машински факултет Универзитета у Београду, Београд 1982.

У Крагујевцу

20.06.2016.г.

Ментор:

Др Слободан Савић, ред. проф.

Резиме:

Шта све терба знати о струјној енергији и како исту обезбедити, да би течност могла да струји кроз цеви. На чему се струјна енергија губи и како је надокнађивати, да би течност струјала истим интензитетом како на почетку, тако и на крају њеног тока. Циљ је транспортовати течност за веома различите употребне сврхе.

Кључне речи:

Струјна енергија, ламинарно струјање, турбулентно струјање, пад притиска, отпор услед трења, локални отпор, пијезометриска висина, геодезиска висина.

Abstract:

What do we need to know about energy current and how to provide it, in order to make the fluid able to flow through the pipes. How is the energy current lost and how to compensate it in that way, that the fluid flows through the pipes with the same intensity at the beginning and at the end of its flow. The goal is to transport the fluid for very different usability purposes.

Key words:

Energy current, lamilar flow, turbulent flow, pressure drop, frictional resistance, local resistance, geodetic height, piezometric head.

Садржај

Списак ознака	7
Увод.....	10
1. ФИЗИЧКА СВОЈСТВА НЕСТИШЉИВОГ ФЛУИДА.....	12
1.1. СИЛЕ КОЈЕ ДЕЛУЈУ НА ФЛУИД.....	12
1.2. ОСНОВНА ФИЗИЧКА СВОЈСТВА ФЛУИДА	14
1.2.1. ГУСТИНА ТЕЧНОСТИ.....	14
1.2.2. СТИШЉИВОСТ ФЛУИДА	15
1.2.3. УНУТРАШЊЕ ТРЕЊЕ - ВИСКОЗНОСТ.....	16
1.2.4. ПОЈАМ САВРШЕНОГ ФЛУИДА	17
2. ОСНОВЕ ТЕОРИЈЕ СТРУЈАЊА САВРШЕНОГ ФЛУИДА.....	18
2.1. СТРУЈАЊЕ ФЛУИДА – ОСНОВНИ ПРИНЦИП	18
2.2. ЈЕДНАЧИНА КОНТИНУИТЕТА	19
2.3. ЗАПРЕМИНСКИ И МАСЕНИ ПРОТОК	20
2.4. ДИНАМИЧКЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА САВРШЕНОГ ФЛУИДА	23
2.4.1. ОЈЛЕРОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ.....	23
2.4.2. БЕРНУЛИЈЕВО РЕШЕЊЕ ОЈЛЕРОВИХ ЈЕДНАЧИНА.....	24
2.5. ЗАКОН О ПРОМЕНИ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА	27
3. ДИНАМИКА РЕАЛНОГ ФЛУИДА.....	30
3.1. КРЕТАЊА ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА ВИСКОЗНОГ ФЛУИДА	31
3.1.1. КРЕТАЊЕ ВИСКОЗНОГ ФЛУИДА КРОЗ ПРАВЕ КРУЖНЕ ЦЕВИ	34
4. ОСНОВНИ ХИДРАУЛИЧКИ ПОЈМОВИ.....	37
4.1. ПОЈАМ О ВЛАКНАСТОМ КРЕТАЊУ ТЕЧНОСТИ	37
4.2. ОСНОВНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ ТОКА ТЕЧНОСТИ	38
4.2.1. ЖИВИ ПРЕСЕК.....	38
4.2.2. СРЕДЊЕ ВРЕДНОСТИ СТРУЈНИХ ВЕЛИЧИНА.....	38
4.2.3. ОКВАШЕНИ ОБИМ	40
4.2.4. ХИДРАУЛИЧКИ РАДИЈУС	41
4.3. ЛАМИЛАРНО И ТУРБУЛЕНТНО КРЕТАЊЕ ТЕЧНОСТИ	42
5. ГУБИЦИ СТРУЈНЕ ЕНЕРГИЈЕ ПРИ КРЕТАЊУ РЕАЛНОГ ФЛУИДА.....	45
5.1. ПАД ПРИТИСКА У ПРАВОЈ КРУЖНОЈ ЦЕВИ ПРИ УСТАЉЕНОМ КРЕТАЊУ ТЕЧНОСТИ	45
5.2. БЕРНУЛИЈЕВА ЈЕДНАЧИНА ЗА РЕАЛНЕ ТЕЧНОСТИ	47
5.3. ПРОРАЧУН ГУБИТАКА СТРУЈНЕ ЕНЕРГИЈЕ	48
5.3.1. ПРОРАЧУН ОТПОРА УСЛЕД ТРЕЊА	48
5.3.1.a). КОЕФИЦИЈЕНТ ТРЕЊА λ КОД ЛАМИЛАРНОГ СТРУЈАЊА РЕАЛНЕ ТЕЧНОСТИ КРОЗ ПРАВУ КРУЖНУ ЦЕВ	49

5.3.1.6). КОЕФИЦИЈЕНТ ТРЕЊА λ КОД ТУРБУЛЕНТНОГ КРЕТАЊА РЕАЛНЕ ТЕЧНОСТИ КРОЗ ХИДРАУЛИЧКИ ГЛАТКЕ И ХИДРАУЛИЧКИ ХРАПАВЕ ЦЕВИ	50
5.3.2. ГУБИЦИ СТРУЈНЕ ЕНЕРГИЈЕ УСЛЕД ЛОКАЛНИХ ОТПОРА	54

6. ХИДРАУЛИЧНИ ПРОРАЧУН ЦЕВОВОДА	59
6.1. ХИДРАУЛИЧКИ ПРОРАЧУН ПРОСТОГ ЦЕВОВОДА СА ПУМПОМ	61
6.2. ЦЕВОВОД ЗА ТРАНСПОРТ ТЕЧНОСТИ ПОМОЋУ ПУМПЕ	63
6.3. ХИДРАУЛИЧКИ НАГИБ ЦЕВОВОДА - ШЕЗИЈЕВ ОБРАЗАЦ	68
6.4. ХИДРАУЛИЧКИ ПРОРАЧУН ДУГОГ ПРОСТОГ ЦЕВОВОДА ПРИМЕНОМ ШЕЗИЈЕВЕ ФОРМУЛЕ	70
6.4.1. ДУГИ ПРОСТ ЦЕВОВОД СА РЕДНО СПОЈЕНИМ ЦЕВИМА	73
6.5. ПРОРАЧУН СЛОЖЕНОГ ПАРАЛЕЛНОГ ЦЕВОВОДА	75
6.6. ПРОСТ ЦЕВОВОД СА УСПУТНОМ ПОТРОШЊОМ	79
6.6.1. ПОТРОШЊА ТЕЧНОСТИ У ПОДЈЕДНАКО УДАЉЕНИМ ТАЧКАМА СА ИСТОМ ПОТРОШЊОМ	79
6.6.2. НЕПРЕКИДНА УСПУТНА ПОТРОШЊА	81
ЗАКЉУЧАК	83
ЛИТЕРАТУРА	84

СПИСАК ОЗНАКА

A	површина, пресек
B	ширина, тачка
b	ширина, константа
C	константа, Шезијев коефициент
D	пречник
d	диференцијал, пречник
E	енергија
E_k	кинетичка енергија
e	струјна енергија јединице масе течности
$\vec{F}$	сила
$\vec{F_R}$	сила отпора услед вискозности
$\vec{F_w}$	сила отпора
f	функција
$\vec{f}$	запреминска сила по јединици масе
$\vec{G}$	сила земљине теже
$\vec{g}$	убрзање земљине теже
H	висина
h	висина, дубина
h_m	висина губитка струјне енергије
h_v	висина губитка струјне енергије услед трења
I	хидраулички нагиб струјног тока
K	модул протока, константа
$\vec{K}$	количина кретања
k	коефицијент, преводни коефицијент, коефицијент притиска, константа
L	дужина, крива линија
L	димензија дужине
$d\vec{L}$	усмерени елемент криве линије
l	дужина

M	тачка,
M	димензија масе
m	маса, изложилац степена
dm	елементарана маса
N	снага, тачка
$\Delta \vec{N}$	сила нормална на површину ΔA
N_k	корисна снага
n	број обртаја, коефициент храпавости
$\vec{n}$	вектор нормале
O	координатни почетак, оквашени обим
$\vec{P}$	сила притиска
$d\vec{P}$	елементарна сила притиска
p	притисак
p^*	генералисани притисак
Δp	пад притиска
δp	промена (пораств) притиска
p_a	атмосферски притисак
p_m	натпритисак
p_v	потпритисак
Q	проток
dQ	елементарни проток
Q_m	масени проток
Q_T	транзитни проток
q	специфични проток
R	полупречник
$\vec{R}$	сила реакције
$\Delta \vec{R}$	површинска сила
Re	Рејнолдсов број
Re^*	критични Рејнолдсов број
R_h	хидраулички радијус
R_m	губитак струјне енергије по јединици масе течности
R_v	губитак струјне енергије по јединици масе услед трења
S	модул брзине
s	коефицијент стишљивости
T	интервал времена
T	димензија времена
$\vec{T}$	сила трења
$\Delta \vec{T}$	тангентна сила
t	време, температура

U	функција силе
V	запремина
dV	елементарна запремина
$\vec{v}$	брзина
$v_{кр}$	критична брзина
v_{max}	максимална брзина
$\vec{v}_r$	радијална брзина
v_s	средња брзина
v_x, v_y, v_z	пројекције брзина
X, Y, Z	пројекције резултанте запреминских сила (по јединици масе)
x, y, z	Декартове координате
Y_{Π}	јединични рад кола струјне машине
z	геодезиска висина

— ∴ —

α	угао, Кориолисов број, коефициент
α'	Бусинесков број
β	угао
δ	апсолутна храпавост зидова цеви
δ_{gs}	дебљина граничног слоја
ε	модул стишљивости
η	коефициент корисности, бездимензиска променљива
θ	угао
λ	коефициент отпора услед трења
μ	динамичка вискозност
ξ	коефициент локалног отпора
Π	пумпа
ρ	густина
σ	нормални напон
τ	напон трења, тангенцијални напон
φ	потенцијал брзине

Увод

Механика флуида је наука из области Физике, која се бави проучавањем течности и гасова. Течности спадају у нестишљиве флуиде, јер имају занемарљиву промену запремине под утицајем врло великих притисака, што није случај код гасова. Због тога шири појам Механика флуида може да се назове Механика стишљивог флуида за гасове или Механика нестишљивог флуида за течности. Отуда и називи Хидромеханика, Аеродинамика, Динамика гасова...

У Механици нестишљивог флуида проучава се мировање и кретање течности помоћу сложених математичких метода и познатих физичких закона (као што су Закон о одржању масе, Закон о промени количине кретања и др.)

Примењена Механика флуида која проучава практичну примену закона, изводи се на бази средњих вредности физичких величина и као таква назива се Хидраулика. Хидраулика заправо теоријске резултате, мировања и кретања течности, своди на практичну примену.

Тачан настанак Механике флуида као научне дисциплине, односно Хидраулике везује се за Архимеда око 250 г.п.н.е који је у чувеном трактату "О телима која пливају" [1] дефинисао силу потиска. Још су хиљадама година пре Кинези, Римљани, Стари Грци, изградили канале за наводњање, вештачка језера, водоводе, чак за топлу и хладну воду чиме се Механика флуида сврстава у једну од најстаријих научних дисциплина.

Много после Архимеда, Леонардо да Винчи наставља да се бави проучавањем течности из чега настаје његов чувени рад „О кретању и мерењу воде“. До османестог века озбиљан допринос развоју, ове научне дисциплине, дали су: холандски научник Стевин (1548-1620) са веома важним делом „ Начела Хидраулике“, затим следе Галилеј, Торичели, Паскал и Њутн (1642-1727) који уводи Закон трења у течности, заправо закон, на коме је заснована читава Динамика реалног флуида.

Посматрања и мерења појава везаних за течности, запажање, доношење закључака од којих касније настају закони, уско су били повезани са развојем Математике као науке, која свакако представља основни механизам за означавање и интерпретацију физичких величина, као и њихове повезаности по јасно утврђеним законима. Тако, у осмнаестом веку Ломоносов дефинише Закон о одржању масе и Закон о одржању енергије код течности. У истом периоду Бернули поставља једну од

најважнијих једначина у Хидраулици, којом је назвао и истоимено дело. Једначина је и данас позната као Бернулијева једначина и представља основ проучавања свих хидрауличких система. У то време, такође, Ојлер поставља систем диференцијалних једначина које у потпуности описују кретање и мировање течности. Ове једначине тада нису могле у потпуности да се употребљавају, јер је њихова примена била условљена степеном развоја читаве цивилизације.

Због тога су до давадесетог века, научници били више окренути експерименталним испитивањима. На основу експеримената научници Шези, Борда и Рејнолдс су успели да открију низ закона, који су се одлично показали у техничкој пракси и користе се и данас.

Крајем деветнаестог и почетком двадесетог века Жуковски поставља теорију о хидрауличком удару, а Прантл теорију о граничном слоју, чиме су успоставили везу између теориског и практичног приступа овој науци.

У двадесетом веку са појавом и наглим развојем индустрије, производе се нови технички елементи са којима су се стекли нови услови за коришћење флуида. Рад машина алатки, грађевинских машина, моторних возила, средстава ваздухопловне и ракетне технике, незамислив је без флуида као погонског средства. Затим средства за хлађење и подмазивање, односно у уљно-хидрауличким и пнеуматским системима на које се савремено друштво потпуно ослања и са којима једино функционише.

1. ФИЗИЧКА СВОЈСТВА НЕСТИШЉИВОГ ФЛУИДА

Реч флуид је заједнички назив за течности и гасове и посматра се као непрекидна средина, која попуњава простор без икаквих шупљина. Сматра се да се флуид састоји од делића који садрже врло велики број молекула. Делић је увек испуњен материјом и има увек исту масу dm , али нема сталан облик ни запремину.

Са претпоставком о непрекидним испуњавању простора (континуум) могуће је примењивати диференцијални и интегрални рачун у Механици флуида. Због покретљивости делића, на флуид не могу деловати концентрисане силе (као у механици крутих тела) већ само силе непрекидно распоређене по читавој маси или површини течности.

1.1. СИЛЕ КОЈЕ ДЕЛУЈУ НА ФЛУИД

За анализу сила које делју на течност посматра се запремина V , испуњена масом m . У мировању на флуид делује сила земљине теже и силе притиска околног флуида. Ако се флуид креће на њега делују још и силе инерције и силе трења.

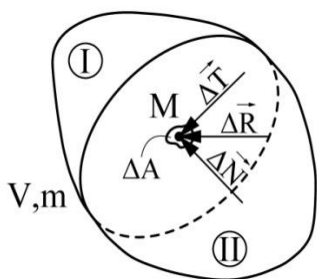
Сила земљине теже, делује на сваки делић флуида, а самим тим и на укупну масу флуида. Ова сила је сразмерна маси флуида (као и сила инерције) и назива се **запреминском силом**. Ове силе су заправо последица дејства поља (поље земљине теже) у коме се флуид налази.

Ако је $\vec{f}$ сила, која делује на јединицу масе, онда на елементарну масу dm делује запреминска сила:

$$\vec{f} \cdot dm$$

Јединична сила $\vec{f}$ има своје пројекције у Декартовом координатном систему $f(X,Y,Z)$

$$\vec{f} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$



Сл.1. Површинске силе

Поред запреминских сила на флуид делују друге силе. На слици (Сл.1), која представља неку запремину флуида V , масе m , ако уклонимо део 2, његов утицај на део 1 замењује се силом $\Delta \vec{R}$. Сила која делује на одговарајућу површ ΔA назива се **површинска сила**. Компоненте површинске силе су: $\Delta \vec{N}$ – нормална сила која делује нормално на површину ΔA и $\Delta \vec{T}$ – тангенцијална сила која делује на површини ΔA .

Граничне вредности ових сила по изабраној површини дају нам одговарајуће напоне:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA} = \sigma ; \quad \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} = \frac{dT}{dA} = \tau,$$

нормални напон - σ и тангенцијални напон - τ .

Нормални напон σ представља **притисак** p , јер код флуида напон на истезање нема никаквог смисла. Према изложеном притисак се, за произвољну тачку М чије су координате положаја $M(x,y,z)$ дефинише као:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA}, \quad (1.1)$$

и као такав зависи од положаја тачке М, па је самим тим и притисак функција координата у Декартовом координатном систему односно:

$$p = p(x, y, z)$$

Из израза (1.1) добијамо израз за елементарну силу

$$d\vec{P} = -p \cdot dA, \quad (1.2)$$

у којем знак минус, означава супротне смерове притисних сила по нормали на површину ΔA . Притисак је скаларна величина, чија је изведена величина Паскал (Pa) дефинисан као:

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Флуид се често налази под притиском који је већи од атмосферског, па се такав притисак назива надпритисак односно манометарски притисак:

$$p_m = p - p_a \quad (1.3)$$

а у случајевима када се налази под притиском мањим од атмосферског (нпр. код уписне гране цевовода) такав притисак се назива потпритисак и за њега важи релација:

$$p_v = p_a - p \quad (1.3')$$

При томе је p - апсолутни притисак.

1.2. ОСНОВНА ФИЗИЧКА СВОЈСТВА ФЛУИДА

Како су делићи телности веома покретљиви, то је облик њене запремине непостојан. Течности не заузимају читаву запремину, већ могу да имају слободну површину. Под слободном површином сматра се површина течности изнад које влада атмосферски притисак, Стање неке течности одређено је вредностима извесних физичких величина, које се називају параметрима или величинама стања.

Задатак Механике флуида је да постави законитости између ових величина за разна стања у којима се флуид може наћи.

1.2.1. ГУСТИНА ТЕЧНОСТИ

Основно физичко својство течности јесте свакако **густина**. У случају коначне запремине течности, средња густина по дефиницији је:

$$\rho_s = \frac{m}{V} \quad (1.4)$$

Код течности густина је у свим тачкама посматране запремине једнака односно:

$$\rho = \rho(x, y, z, t) = \text{const.} \quad (1.5)$$

Густина представља скаларну величину димензија:

$$[\rho] = \frac{M}{L^3}$$

Где је М-димензија масе, а L-димензија дужине.

Из израза за густину, посматрану за бесконачно малу запремину dV добијамо израз за елементарну масу непрекидног флуида

$$dm = \rho \cdot dV \quad (1.6)$$

којом је одређена маса флуидног делића. Флуидни делић има увек исту масу, па на основу једначине (1.6) добијамо **Закон о одржању масе:**

$$dm = \rho \cdot dV = \text{const.} \quad (1.7)$$

Значајан утицај на промену густине имају притисак и температура ($\rho = \rho(p, T)$), ако говоримо о гасовима, али у овом излагању посматрају се течности, на које промена притиска нема значајнијег утицаја, док утицај температуре не би смео да буде занемарен. Температурне разлике у режимима који ће се овде пратити, релативно су мале, па ће се температура сматрати константном величином тј. $T = \text{const.}$ Утицај температуре на густину дат је таблички (Таб. 1), на пример за воду:

Табела 1. *Густина воде при разним температурама*

t, °C	0	2	4	10	20	40	60	80	100
ρ, kg/m ³	999,87	999,97	1000	999,73	998,23	992,24	983,24	971,83	958,38

Густине осталих течности на оптималним температурама:

Табела 2. *Густина неких течности*

Течност	t, °C	ρ, kg/m ³
Чиста вода	15	999
Морска вода	15	1020
Жива	15	13595
Бензин	15	680-720
Алкохол	15	790
Глицерин	0	1260
Сирова нафта	20	700-1000

Предходно излагање доводи нас до **карактеристичне једначине течности**:

$$\rho = \rho_0 = \text{const.} \quad (1.8)$$

Ова једначина важи само за течности, односно нестишљиве флуиде и то при константним температурама.

1.2.2. СТИШЉИВОСТ ФЛУИДА

Стишљивост је својство течности и гасова која се манифестује променом запремине под дејством спољашњих сила:

$$s = - \frac{dV}{V \cdot dp} \quad (1.9)$$

Као мера овог својства користи се **коэффициент стишљивости s**. Испитивања су показала, да стишљивост течности опада са повећањем температуре, али пошто се у овом излагању, како је већ речено, температура креће у оптималним вредностима то она неће имати битног утицаја на промену стишљивости код течности. Реципрочна вредност коефициента стишљивости назива се **модулом стишљивости ε**:

$$\varepsilon = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad (1.10)$$

У табели 3 може се видети да се вредности коефициента стишљивости и модула стишљивости сасвим мало разликују.

Табела 3. *Вредности коефицијента и модула стишљивости за воду*

t, °C	10	20	30
s m ² /N	4,93·10 ⁻¹⁰	4,74·10 ⁻¹⁰	4,66·10 ⁻¹⁰
ε N/m ²	20,30·10 ⁸	21,08·10 ⁸	21,48·10 ⁸

Такође за промену коефицијента (модула), потребни су врло велики притисци на течности, да би промена износила једва 1%. Због оваквих особина, везано за коефицијент стишљивости, течности су сврстане у тзв. **нестишљиве флуиде**. Зато се за густину нестишљивог флуида користи константна густина односно по карактеристичној једначини

$$\rho = \rho_0 = \text{const.}$$

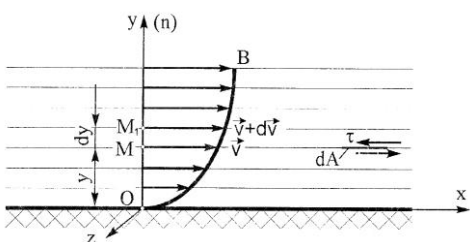
О стишљивости би имало много више да се каже када су у питању гасови, али овде је наведена највише због објашњења појма нестишљив флуид.

1.2.3. УНУТРАШЊЕ ТРЕЊЕ - ВИСКОЗНОСТ

У свакодневном животу користе се реалне течности и оне заиста имају посебна својства. Њихови делићи су веома покретљиви и са малим силама, већ се изазива померање једних у односу на друге. При томе нису сви делићи једнако покретљиви, па се јавља трење између делића. Ово трење се назива **вискозност**, а као мерило вискозности неког флуида користе се **коефицијент динамичке вискозности** μ (Ns/m²) **коефицијент кинематичке вискозности** ν (m²/s) између којих је веза:

$$\mu = \rho \cdot \nu \quad (1.11)$$

Динамичку вискозност дефинисао је Њутн као, коефицијент сразмерности између напона и промене брзине у правцу нормале у односу на смер струјања.



Сл.2. Кретање течности

Ову тврдњу дефинисао је аналитичким изразом, на коме се заснива цела наука о струјању течности и гасова

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (1.12)$$

И динамичка и кинематичка вискозност зависе од природе течности (гаса), од притиска и топлотног стања. Код нестишљивог флуида утицај притиска је занемарљив

јер густина течности остаје константна, али утицај температуре је знатан и то: са порастом температуре вискозност опада и обратно. Ова појава се и користи код транспорта изразито вискозних течности. Међутим на константним температурама, код течности, вискозност се не мења. У овом излагању, вискозност ће бити константна за одговарајућу течност, јер су и температуре у оптималном опсегу.

1.2.4. ПОЈАМ САВРШЕНОГ ФЛУИДА

У Механици флуида прво се проучава кретање савршеног флуида. Заправо савршеног флуида у природи нема, јер не постоји флуид у коме нема терња између делића, односно вискозних сила, посебно не код течности. Увођењем појма **савршен флуид** олакшано је решавање великог броја случајева кретања флуида. Резултати добијени оваквим приступом, када се коригују коефицијентима добијеним мерењима, дају на крају тачне резултате и за реалне флуиде.

Сви важни закони су изведени најпре на савршеном флуиду, заправо флуиду који не поседује својство вискозности. Зато се прво проучава кретање савршеног, а онда и реалног флуида.

2. ОСНОВЕ ТЕОРИЈЕ СТРУЈАЊА САВРШЕНОГ ФЛУИДА

2.1 СТРУЈАЊЕ ФЛУИДА - ОСНОВНИ ПРИСТУП

У Механици флуида кретање флуида се посматра као кретање флуидних делића, односно као померање елемената непрекидне течљиве средине, који су потпуно испуњени материјом и између којих нема никаквих шупљина.

Пошто се у кинематици флуида не води рачуна о силама које делују на флуид, за проучавање струјања и успостављање кинематичких релација, користе се кинематичке величине и основне особине непрекидности и течљивости.

Значајна су два притупа проблематици струјања флуида. Један је Лагранжов, а други, који ће се користити у даљем излагању и који је више у примени, је Ојлеров приступ. Према Ојлеру посматра се једна тачка, и на њој се одређују – брзина v , притисак p , густина ρ и друге физичке величине. Како је положај тачке одређен координатама $M(x,y,z)$ то је и брзина сваког делића функција положаја и функција времена t односно

$$\vec{v} = \vec{v}(x,y,z,t) \quad (2.1)$$

Заправо проучавање струјања према Ојлеру своди се на одрђивање векторског поља брзине односно њених пројекција:

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(x,y,z,t) \\ v_y &= v_y(x,y,z,t) \\ v_z &= v_z(x,y,z,t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Такође је потребно одредити поље притиска p и поље густине ρ односно:

$$\begin{aligned} p &= p(x,y,z,t) \\ \rho &= \rho(x,y,z,t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решавање проблема струјања своди се на одређивање пет величина v_x, v_y, v_z, p и ρ

па је потребно да се има затворен систем од пет једначина. Прве три једначине су једначине пројекција брзина (2.2) а друге две су карактеристична једначина $\rho = \rho_0 = \text{const.} (1.8)$ за течности и једначина континуитета која ће бити изведена у овом поглављу.

Осим што је важно нагласити да је струјање **непрекидно**, овде трба истаћи и то, да ако брзина зависи, осим од положаја тачке, још и од времена t , струјање је

неустаљено. Ако брзина не зависи од времена t , него само од геометријских координата

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) \quad (2.4)$$

што значи да се струјно поље не мења. За струјање тада кажемо да је **устаљено**.

2.2. ЈЕДНАЧИНА КОНТИНУИТЕТА

У Механици флуида као природној науци, важе закони Физике, па тако и Закон о оджању масе, на основу ког флуидни делић не мења масу за време кретања. Овај закон је у предходном поглављу дат као једначина (1.7).

$$dm = \rho \cdot dv$$

помоћу које је изведена **једначина континуитета**. Овом једначином, успоставља се веза између поља густине и поља брзине, независно од врсте сила које делују на флуид. Једначином континуитета изражава се услов непрекидности флуида.

То у математичком смислу значи да је извод елементарне масе по времену једнак нули, односно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(dm) &= \frac{d}{dt}(\rho \cdot dV) = \frac{d\rho}{dt}dV + \rho \frac{d(dV)}{dt} = 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d(dV')}{dt \cdot dV'} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

при чему су:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \rho, \\ \frac{d(dV')}{dt \cdot dV'} &= \text{div} \vec{v}. \end{aligned}$$

Дивергенција вектора брзине $\text{div} \vec{v}$, представља вишак истекле запремине флуида из јединичне запремине у јединици времена [1].

Када се последње две једначине уврсте у једначину (2.5) добија се једначина континуитета облика:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad} \rho) + \rho \cdot \text{div} \vec{v} = 0 \quad (2.6)$$

Ова једначина може да се напише у другачијем облику,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.7)$$

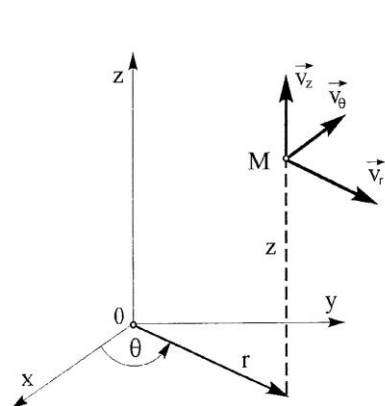
При устаљеном струјању физичке величине не зависе од времена, па је члан $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$, а за нестишљив флуид $\rho=\rho_0=\text{const}$. Тада једначина континуитета добија облик:

$$\text{div} \vec{v}=0 \quad (2.8)$$

Једначина (2.8) представља једначину континуитета нестишљивог флуида при устаљеном струјању. У Декартовом координатном систему једначина континуитета је

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

Ако уместо Декартових уведемо цилиндрични координатни систем $O r \theta z$ између којих са слике (Сл.3) постоји веза:



$$x=r \cos \theta, \quad y=r \sin \theta, \quad z=z$$

изрази за брзине биће дати изразима:

$$v_x = v_r \cdot \cos \theta - v_\theta \cdot \sin \theta,$$

$$v_y = v_r \cdot \sin \theta + v_\theta \cdot \cos \theta,$$

$$v_z = v_z$$

Сл. 3. Поларне координате

Заменом ових брзина у једначину (2.9), после сређивања добија се једначина континуитета нестишљивог флуида у цилиндричним координатама:

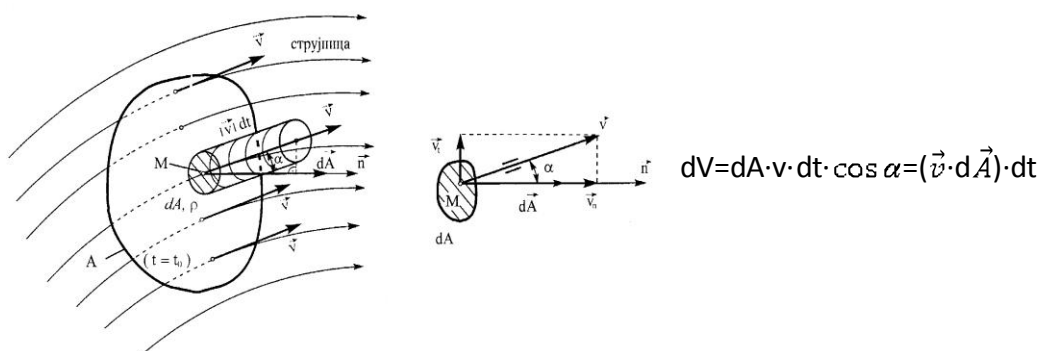
$$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

Овај облик једначине континуитета има важну примену у динамици флуида, посебно у случају решавања проблема струјања течности кроз праве цеви кружног попречног пресека.

2.3. ЗАПРЕМИНСКИ И МАСЕНИ ПРОТОК

Једна од најзначајнијих основних величина која карактерише струјање флуида је **проток**. Проток се дефинише као количина флуида која проструји кроз неку отворену односно затворену површ у јединици времена. За меру се може узети његова запремина или његова маса. Код нестишљивог флуида усвојена је његова запремина, па се проток назива **запремински проток** или само **проток**. Масени се користи код стишљивих флуида. За одређивање протока посматра се струјна површ и на њој

елементарна површинаца $d\vec{A}$ око тачке М. У тачки М, брзина $\vec{v}$ са површиницом $d\vec{A}$ заклапа угао α (Сл.4). За бесконачно мали временски интервал dt , запремина протеклог флуида дата је изразом:



Сл.4.Одређивање протока флуида

одакле после дељења са dt следи

$$dQ = \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (2.11)$$

Односно у интегралном облику за коначну површину:

$$Q = \int_A (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \quad (2.12)$$

У случају праволиниског струјања што и јесте случај код цевовода $\cos \alpha = 1$, па скаларни производ постаје обичан

$$Q = \int_A v \cdot dA \quad (2.13)$$

Ако се узме у обзир маса флуида, која струји кроз елементарну површ

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot (\vec{v} \cdot d\vec{A}) dt$$

елементарни масени проток биће:

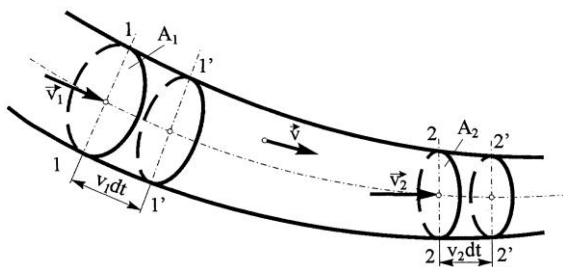
$$dQ_m = \rho \cdot (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \quad (2.14)$$

а по укупној површини А:

$$Q_m = \int_A \rho \cdot (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \quad (2.15)$$

па је у случају константне густине :

$$Q_m = \rho \cdot Q \quad (2.16)$$



Код устаљеног струјања нестишљивог флуида, $\text{div} \vec{v} = 0$ и $\rho = \rho_0 = \text{const.}$ па се може закључити да је и запремински проток у овом случају константан односно:

Сл. 5. Израчунавање протока

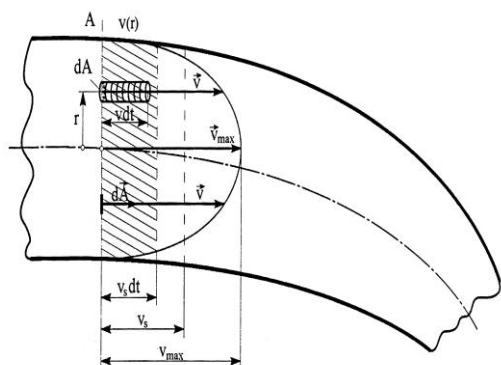
$$dQ = v dA = \text{const.} \quad (2.17)$$

$$v_1 dA_1 = v_2 dA_2 = \dots = v_n dA_n \quad (2.18)$$

Добијена једначина представља једначину континуитета за нестишљив флуид. Из ове једначине се може закључити да је елементарни запремински проток не-

променљив. Наиме при смањењу попречног пресека, брзина струјања нестишљивог флуида се повећава и обрнуто (Сл. 5).

Код техничких цеви у рачун се уводе средње вредности појединих физичких величина. Средња брзина v_s у пресеку струјне цеви дефинише се као: *замишљена континуална брзина, која помножена са површином попречног пресека A даје исти проток Q као стварна расподела брзина* (Сл. 6.)



$$v_s \cdot A = Q = \int_A (\vec{v} \cdot d\vec{A}), \quad (2.19)$$

$$v_s = \frac{1}{A} \int_A (\vec{v} \cdot d\vec{A}), \quad (2.20)$$

$$v_s = \frac{Q}{A}$$

Сл. 6. Средња брзина у цеви

Из ове једначине у пракси се рачуна проток као

$$Q = v_s \cdot A = \text{const.} \quad (2.21)$$

Ова једначина представља једначину континуитета у хидраулици.

2.4. ДИНАМИЧКЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА САВРШЕНОГ ФЛУИДА

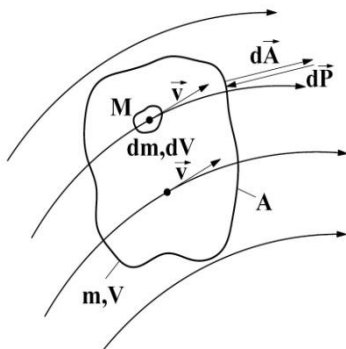
Савршен флуид у природи не постоји, али онај код кога су вискозне силе толико мале да се могу занемарити, може се сматрати савршеним флуидом. У овом поглављу неопходно је да се наведу основне једначине и закони, који су изведени на савршеном флуиду, јер се на тако добијене математичке једначине надовезују и остале, које се односе на реалан флуид. Заправо без Ојлерових једначина кретања, Закона о промени количине кретања, не би постојали математички модели за решавање реалних, техничких проблема струјања флуида у цевима односно у примењеној Механици флуида- Хидраулици.

2.4.1. ОЈЛЕРОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

За извођење ових једначина, у струјном пољу, посматра се маса m , запремине V ограничене површином A . Сила $\vec{f}$ је запреминска сила која делује на јединицу масе флуида, а $p=p(x,y,z)$ притисак којим околни флуид делује на сваки елемент dA , онда на флуид делују укупна запреминска сила и укупна сила притиска.

Збир ових сила износи:

$$\int_V \rho \vec{f} dV - \int_A p d\vec{A} = \int_V (\rho \vec{f} - \text{grad} p) dV$$



Ако се флуид креће, онда на њега делује и сила инерције, силе једнаке производу масе и убрзања (Њутн), а убрзање је једнако тоталном изводу брзине, па за флуидни делић елементарне масе dm , биће:

Сл.7. Кретање савршеног флуида

$$dm \vec{a} = dm \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV,$$

а укупна инерциска сила на запремину V износи $\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV$, па ће по Њутновом закону бити:

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V (\rho \vec{f} - \text{grad} p) dV$$

$$\int_V (\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{f} + \text{grad} p) dV = 0$$

Овај интеграл је једнак нули, ако је подинтегрална функција једнака нули па коначно следи

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (2.22)$$

Добијена једначина је **Ојлерова диференцијална једначина за кретање флуида у векторском облику**.

У скаларном облику ова једначина има облик:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.23)$$

Овде треба напоменути да чланови са леве стране представљају тоталне изводе пројекција брзине нпр. на x осу:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

а градијент неке скаларне функције:

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

Ојлерове диференцијалне једначине за кретање флуида садрже пет непознатих величина, пројекције брзине v_x, v_y, v_z брзине $\vec{v}$, притисак p и густину ρ . Да би се ове величине израчунале потребно је пет једначина. Прве три су једначине (2.23), четврта је једначина континуитета (2.9) за нестишљив флуид и пета је карактеристична једначина за течности (1.8)

Из свега изложеног види се да су Ојлерове једначине за кретање веома сложене. Ове једначине представљају систем диференцијалних нелинеарних парцијалних једначина који и до данас нема јединствено решење.

Издвојена решења су Коши-Лагранжево и Бернулијево решење (оно ће се на даље користити у разматрању и решавању проблема струјања течности кроз праве кружне цеви).

2.4.2. БЕРНУЛИЈЕВО РЕШЕЊЕ ОЈЛЕРОВИХ ЈЕДНАЧИНА

У Механици флуида Бернулијева једначина се изводи на такозваној трансформисаној Ојлеровој једначини помоћу које се добијају једначине кретања које важе за једну струјницу $d\vec{L} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ и мењају се од струјнице до струјнице.

Ова једначина је изведена са претпоставкама да струјање мора да буде устаљено $\frac{\partial}{\partial t}=0$, да је флуид баротропан $\rho=\rho(p)$ и да флуид струји у пољу конзервативних сила $\vec{f}=\vec{f}(X,Y,Z)$ и гласи:

$$d\left(\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho}\right) = 0$$

односно:

$$\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const} = e \quad (2.24)$$

Добијена једначина представља **уопштenu Бернулијеву једначину**. Међутим за нестишљив флуид имамо да је густина $\rho=\rho_0=\text{const.}$ и да течност струји у пољу земљине теже $U = -gz$ па се до Бернулијеве једначине долази на следећи начин.

Прво се Ојлерове једначине кретања (2.23) помноже редом са dx , dy , dz и све три се саберу:

$$\frac{dv_x}{dt}dx + \frac{dv_y}{dt}dy + \frac{dv_z}{dt}dz = Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)$$

Пошто су брзине дефинисане кинематичким једначинама кретања:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

можемо да их заменимо у предходној једначини на места dx , dy , и dz која се тада своди на:

$$\frac{dv_x}{dt}v_x dt + \frac{dv_y}{dt}v_y dt + \frac{dv_z}{dt}v_z dt = v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = \frac{1}{2}d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}d(v^2) = d\left(\frac{v^2}{2}\right),$$

где је v интензитет брзине. Израз на десној страни почетне једначине овог извођења, представља тотални диференцијал притиска p , ако је струјање устаљено, тако да добијамо израз:

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho}dp \quad (2.25)$$

Када су у питању свакодневни, практични проблеми који се односе на течност, од спољашњих сила делје само сила Земљине теже, тако да постоји само сила дуж z осе заправо

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=-g$$

односно:

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -gdz - \frac{1}{\rho}dp$$

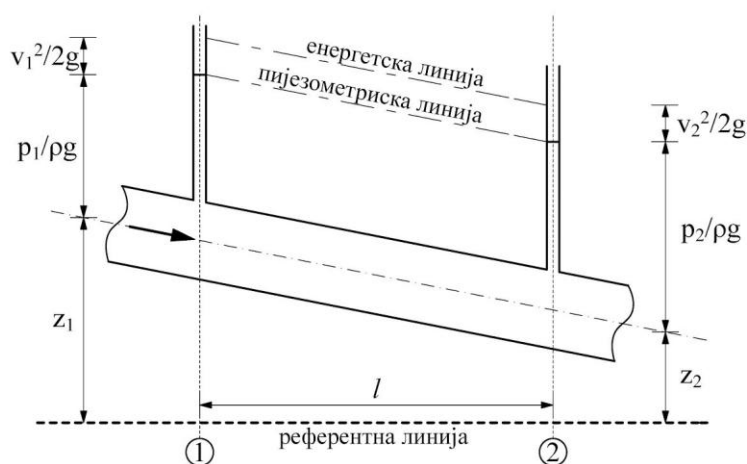
и како је , густина константа $\rho = \text{const.}$ и $g = \text{const.}$, то се може писати

$$d\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0$$

а интеграљењем, добијамо једначину за савршене течности односно **Бернулијеву једначину**.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.} = e \quad (2.26)$$

Ова једначина се може применити за било која два пресека струјног влакна . За два пресека 1-1 и 2-2 , (Сл.8) важи једначина:



Сл.8. Бернулијева једначина за два пресека 1-1 и 2-2

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \quad (2.27)$$

Бернулијева једначина у овом облику представља енергетску једначину па се тако и исказује, као Закон о одржању енергије при струјању течности. У овој једначини члан са квадратом брзине ($\frac{v^2}{2}$) представља кинетичку енергију по јединици масе, а друга два члана представљају потенцијалне енергије поља (gz) и притиска ($\frac{p}{\rho}$) сведене на јединичну масу. При устаљеном струјању савршене течности у пољу Земљине теже, збир кинетичке енергије, притисне и потенцијалне енергије има исту вредност дуж струјног влакна [2]. Ове енергије у току струјања могу да се трансформишу једна у другу, али њихов збир остаје непромењен, код савршене течности. За реалне течности ће бити другачије.

Ако једначину (2.26) поделимо са g , добијамо једначину у којој сваки члан има димензију дужине

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{const.} = H_u \quad (2.28)$$

У овој једначини први члан $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ је тзв.брзинска висина (напор), $\left(\frac{p}{\rho g}\right)$ представља пијезометриску висину (пијезометријски напор) и (z) геодезиску висину односно напор.Збир свих наведених висина чини укупни или пуни напор H_u струјне течности. На основу новог облика,помоћу висина, Бернулијева једначина може се исказати као: при устаљеном струјању течности у пољу Земљине тже, збир брзинске, пијезометријске и геодезиске висине има исту вредност за било који пресек струјног влакна [2].

У случају хоризонталног струјања ($z=\text{const.}$) Бернулијева једначина добија облик

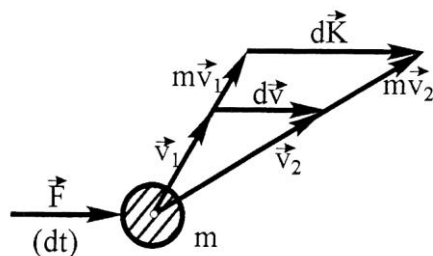
$$p + \rho \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (2.29)$$

у којој оба члана имају димензију притиска - струјни притисак p и динамички притисак $\left(\rho \frac{v^2}{2}\right)$. Значајно је да је струјни притисак максималних вредности, када флуид мирује и обрнуто, развија максималну брзину када је притисак нула.У ствари притисак увек опада са порастом брзине па при пројектовању хидрауличких постројења о овоме се мора водити рачуна да не би дошло до тзв. кавитације.

У Хидраулици Бернулијева једначина се примењује на целокупни ток струјне течности односно за два пресека техничке цеви кроз коју течност протиче. Тада физичке величине у једначини (2.27) не представљају стварне притиске нити брзине, већ њихове средње вредности у уоченим пресецима.

2.5. ЗАКОН О ПРОМЕНИ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА

Закон о промени количине кретања у техничкој пракси често се користи за решавање разних проблема. Назива се још и Закон импулса и у Механици флуида користи се при проучавању проблема као што су дејство струјне течности на равне површине, проучавање млаза за време истицања флуида и др. Закон о промени количине кретања гласи: *промена количине кретања у неком временском интервалу, једнака је импулсу сила које делују на систему том истом временском интервалу*[2] и односи се на сваки систем материјалних тачака, па тако и у Хидраулици.



Сл. 9. Промена количине кретања

Ако се материјална тачка, масе m креће брзином $\vec{v}_1$ онда је количина кретања ове масе $\vec{K} = m\vec{v}_1$. Ако на ту тачку делује сила $\vec{F}$, тачка добије брзину $\vec{v}_2$, па је количина кретања $\vec{K} = m\vec{v}_2$. Промена количине кретања за време dt , услед дејства силе $\vec{F}$ дата је једначином:

$$d(m\vec{v}) = m d\vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F} dt.$$

Како течност посматрамо као систем материјалних тачака са различитим брзинама кретања, то је елементарна количина кретања масе dm делића

$$\vec{v} dm = \rho \vec{v} dV$$

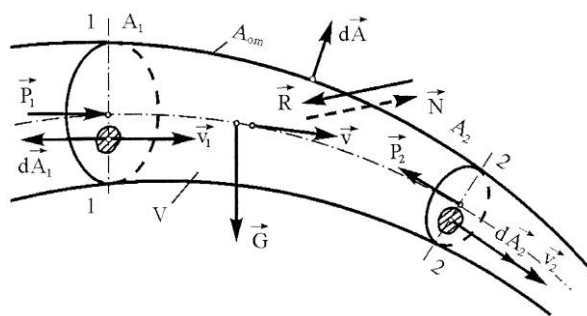
а количина кретања укупне масе:

$$\vec{K} = \int_V \rho \vec{v} dV.$$

По наведеној дефиницији Закона о промени количине кретања следи да је:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_V \rho \vec{v} dV \right) = \vec{F}_R \quad (2.30)$$

За случај устаљеног струјања израз (2.30) може се трансформисати у другачији облик, знатно погоднији за решавање задатака



Сл. 10. Промена количине кретања у струјној цеви

Ако посматрамо струјну цев, као на слици (Сл.10), увођењем средње брзине и употребом једначине протока (2.21) према којој је:

$$v_{s1} A_1 = Q_1 = v_{s2} A_2 = Q_2 = Q$$

између површина A_1 и A_2 односно преска 1-1 и 2-2 добиће се

$$\int_A \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{A}) = \rho \cdot Q \cdot (\vec{v}_{s2} - \vec{v}_{s1})$$

На основу везе $dV = dA \cdot v dt \cos \alpha = (\vec{v} \cdot d\vec{A}) dt$, интеграл по запремини V преведен је у интеграл по површини A , (сл. 10).

На овај начин добијен је Закон о промени количине кретања који се користи у Хидраулици и који гласи

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \rho \cdot Q (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}_R \quad (2.31)$$

У овој једначини $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ представљају средње брзине главног струјања нестишљивог флуида. При струјању течности кроз стварну техничку цев резултујућа сила износи

$$\vec{F}_R = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{G} + \vec{R}$$

где су: $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ силе притиска течности у пресеку 1-1 односно 2-2

$\vec{G}$ – сила Земљине теже

$\vec{R}$ – реакција омотача цеви која је заправо резултанта силе притиска и силе трења по омотачу.

Течност на зидове цеви између 1-1 и 2-2 делује силом $\vec{N} = -\vec{R}$, а силе $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ рачунају се са надпритисцима у одговарајућим цевима и усмерене су ка пресеку.

3. ДИНАМИКА РЕАЛНОГ ФЛУИДА

Све реалне течности и гасови су вискозни, при чему степен вискозности зависи од природе самог флуида. Као последица вискозности (2.3) јављају се силе трења, које доводе до претварања једног дела струјне енергије у топлотну. То значи да се при кретању флуида увек губи један део струјне енергије, која се мора надокнађивати. Код пројектовања цевовода та енергија се надокнађује нагибом или струјном машином (пумпом).

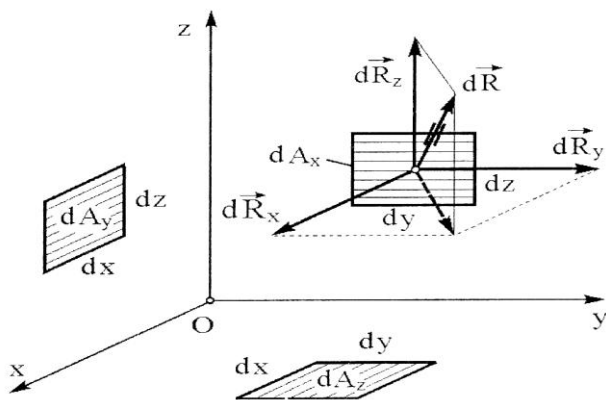
У овом излагању, проучавање струјања вискозног флуида, биће изведено под истим условима као и код савшеног флуида што подразумева: константну температуру $T = \text{const.}$ да испуњава услов непрекидности, тако да важи једначина континуитета (2.7) за стишљив и (2.8) за нестишљив флуид. Њутнова дефиниција силе, као производа масе и убрзања, важи и за вискозни флуид, док Ојлерову једначину струјања савшеног флуида (2.22), треба допунити новим члановима који зависе од вискозности. Дефинисање нових чланова је врло сложен поступак који овде не може бити приказан, јер премашује оквире овог дипломског рада, али детаљно је описан у књизи [1].

Треба истаћи да Ојлерова једначина кретања савшеног флуида у векторском облику, допуњена новим члановима везаним за вискозност, заправо доводи до такозваних Навије-Стоксових једначина кретања вискозног флуида. Ове једначине са једначином континуитета и карактеристичном једначином нестишљивог флуида, чине затворен систем једначина, чија решења у потпуности описују и дефинишу кретање вискозне течности.

Навије-Стоксова једначина је веома сложена, па зато и нема јединствено решење. У Механици флуида изведена су приближна и тачна решења ове векторске једначине а у једно од тачних решења спада *СТРУЈАЊЕ ТЕЧНОСТИ КРОЗ ПРАВЕ КРУЖНЕ ЦЕВИ* што је и тема овог рада.

3.1. ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА ВИСКОЗНОГ ФЛУИДА

Увођење вискозних сила условило је и појаву нових напона. Наиме силе притиска и силе трења су силе које делују на сваку површ у флуиду. Напон је дефинисан као количник интензитета силе и површине. Усвојено је да силе које делују нормално на површину проузрокују нормални напон σ а силе које леже на површини проузрокују смичући напон τ . Тако да са слике (Сл.11) следи:



$$\frac{dR_x}{dydz} = \frac{dR_x}{dA_x} = \sigma_{xx},$$

$$\frac{dR_y}{dydz} = \frac{dR_y}{dA_x} = \tau_{xy},$$

$$\frac{dR_z}{dydz} = \frac{dR_z}{dA_x} = \tau_{xz}$$

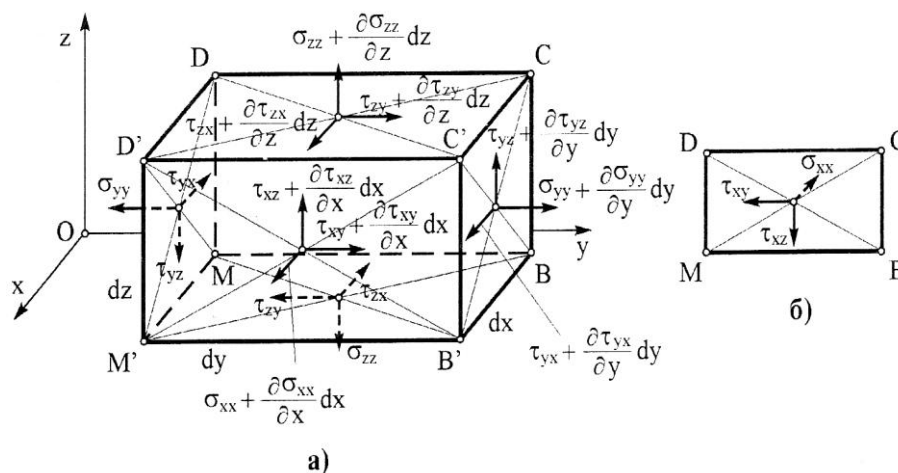
где први индекс у ознакама напона представља нормалну осу на посматрану површину, а други индекс представља правац деловања напона.

Сл. 11. Површинске силе у вискозном флуиду

Ако се површница dA посматра у равни Oxy или Oxz напони добијају нове индексе па ће се имати: $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$, девет напона који чине тензор напона из чије симетричности следи да су:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx},$$

чиме је смањен број различитих тангенцијалних напона . Напонско стање:



Сл. 12. Стање напона елементарног паралелоипеда вискозном флуиду

Као пројекције резултујућих сила, рачунате по јединици запремине флуида добијају се једначине:

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}, \\ Y_u &= \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}, \\ Z_u &= \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

У даљем извођењу, уведене су претпоставке о напонима, помоћу којих су успостављене везе између брзина деформисања и нормалних и тангенцијалних напона. Претпоставкама о напонима, које су детаљно, на високом научном нивоу, објашњене у књизи [1], довеле су до једначина:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \cdot \text{div} \vec{v}, & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \cdot \text{div} \vec{v}, & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \cdot \text{div} \vec{v}, & \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Када се ове једначине напона замене у једначинама резултујућих сила (3.1) добиће се

$$\begin{aligned} X_u &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta v_x + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x}(\text{div} \vec{v}), \\ Y_u &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v_y + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial y}(\text{div} \vec{v}), \\ Z_u &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta v_z + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial z}(\text{div} \vec{v}), \end{aligned} \quad (3.2')$$

једначине које представљају скаларни облик суме пројекција унутрашњих сила по јединици запремине, на основу ког се може написати и векторски облик, јер $\vec{F}_u(X_u, Y_u, Z_u)$ па је унутрашња сила по јединици запремине у векторском облику:

$$\vec{F}_u = -\text{grad} p + \mu \Delta \vec{v} + \frac{1}{3}\mu \text{grad div} \vec{v},$$

Сила по јединици масе, добија се дељењем са ρ :

$$\frac{\vec{F}_u}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{3} \text{grad div} \vec{v} \quad (3.3)$$

Последња два сабирка у једначини (3.3) потичу од вискозности, и њих треба додати Ојлеровој једначини кретања (2.22), чиме се добија једначина кретања вискозног флуида у векторском облику, која се назива Навије-Стоксовом једначином :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{v} \cdot \Delta \vec{v} + \frac{\mathbf{v}}{3} \text{grad div} \vec{v} \quad (3.4)$$

Као и код кретања савршеног флуида и овде, код струјања реалног флуида, имамо непознате пројекције брзина v_x, v_y, v_z , притисак p и густину ρ . Систем који даје решења за свих пет физичких величина чине Навије-Стоксове једначине у скаларном облику (има их три), једначина континуитета и карактеристична једначина. Уз помоћ почетних и граничних услова, овим системом је потпуно дефинисано кретање вискозног флуида.

За нестишљив флуид једначина континуитета је $\text{div} \vec{v} = 0$, па је последњи сабирак у Навије-Стоксовој једначини такође нула, тако да једначина кретања вискозног флуида прлази у облик:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{v} \cdot \Delta \vec{v} \quad (3.5)$$

Овој векторској једначини одговарају три скаларне једначине облика:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \mathbf{v} \cdot \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right], \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \mathbf{v} \cdot \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right], \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \mathbf{v} \cdot \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

У динамици струјања нестишљивог флуида кроз праве кружне цеви, због природе проблема корисно је и прихватљивије коришћење Навије-Стоксових једначина у цилиндричном координатном систему. У складу са насловом овог целокупног излагања, неопходно је да се ове једначине и изложе:

$$(1) \quad v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \mathbf{v} \cdot \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right),$$

$$(2) \quad v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mathbf{v} \cdot \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right),$$

$$(3) \quad v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \mathbf{v} \cdot \Delta v_z, \quad (3.7)$$

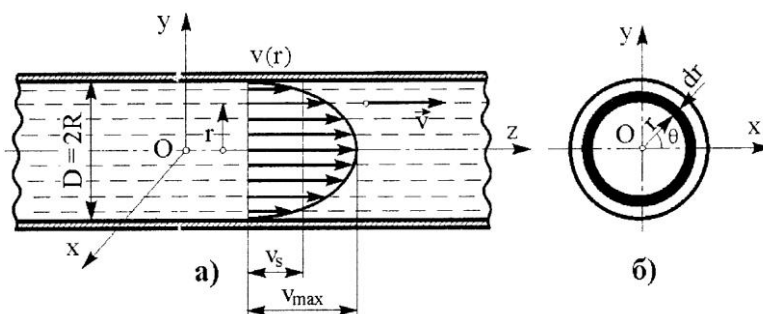
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.8)$$

где је израз за Δ , Лапласов оператор у цилиндричним координатама.

Ове три једначине, са једначином континуитета (2.10) такође у цилиндричним координатама и карактеристична једначина у потпуности дефинишу устаљено струјање течности кроз праве кружне цеви, које спада у једно од тачних решења Навије-Стоксових једначина.

3.1.1. КРЕТАЊЕ ВИСКОЗНОГ ФЛУИДА КРОЗ ПРАВЕ КРУЖНЕ ЦЕВИ

Најчешћи пример у техничкој пракси је стрјање течности кроз цеви кружног попречног пресека. Због саме природе проблема за ово решење Навије-Стоксових једначина, уведен је цилиндрични координатни систем и то тако, што се оса Oz из Декартовог координатног система поклопи са осом цеви као на слици 13.



Сл.13.Струјање кроз праве кружне цеви

Цев, кроз коју стрји флуид је непорозна, осно симетрчна, због чега је :

- струјње осносиметрично тј. $v_\theta = 0$ и v_θ не зевиси од угла θ
- не постоји пројекција брзине у правцу потега r , $v_r = 0$,
- постоји само аксијална брзина $v_z = v$,
- струјање је устаљено $\partial/\partial t = 0$,
- сољашње силе имају потенцијал $\vec{f} = \text{grad}U$

$$(\vec{f}_r \vec{r}_0 + \vec{f}_\theta \vec{\theta}_0 + \vec{f}_z \vec{z}_0 = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{\theta}_0 + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{z}_0)$$

Помоћу једначине континуитета у цилиндричном координатном систему (2.10), долази се до закључка да $\partial v_z / \partial z = 0$, што значи да брзина $v_z = v$ не зависи од z . Тако да брзина зависи само од променљиве r односно $v_z = v = v(r)$. Под овим условима једначине (3.7)своде се на:

$$\begin{aligned} 0 &= f_r - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ 0 &= f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \\ 0 &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

при чему су инерциски чланови једнаки нули. Нови појам , **генералисани притисак**, уводи се због тога што, у општем случају $p = p(r, \theta, z)$ и гласи

$$p^* = p - \rho U \quad (3.10)$$

Заменом овог притиска у прве две једначине (3.7) добија се

$$\frac{\partial p''}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(p - \rho U) = \frac{\partial p}{\partial r} - \rho \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} - \rho f_r = -\rho(f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}) = 0$$

$$\frac{\partial p''}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(p - \rho U) = \frac{\partial p}{\partial \theta} - \rho \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \theta} - \rho f_\theta = -\rho(f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}) = 0$$

на основу чега се закључује да генерализани притисак не зависи ни од r ни од θ , већ зависи само од z односно $p^* = p^*(z)$. Као и у прве две једначине, и овде се лако налази

$$f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp''}{dz},$$

Па ће трећа једначина система (3.7) имати облик:

$$\frac{\partial p''}{\partial z} = \mu \left(\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dt} \right).$$

Како је речено, брзина зависи само од r , а притисак само од z , онда последња једначина има смисла само ако се уведе константа ($-k$), којој су једнаке и лева и десна страна ове једначине чиме се добијају две диференцијалне једначине:

$$\frac{dp''}{dz} = -k, \quad \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{\mu} \quad (3.11)$$

Из прве једначине добијамо промену генерализаног притиска дуж осе цеви:

$$p^* = -kz + p_0^*, \quad (3.12)$$

из чега се види да притисак линеарно опада низ струју. Из друге једначине добијамо расподелу брзине по пресеку цеви, интеграљењем друге једначине (3.11) из облика:

$$d\left(r \frac{dv}{dt}\right) = \frac{k}{\mu} r dr,$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{k}{2\mu} r + \frac{C_1}{r},$$

$$v = -\frac{k}{4\mu} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Ова једначина представља опште решење друге диференцијалне једначине система (3.11) а константе C_1 и C_2 добијају се из граничних услова: за $r=0$, било би $\ln 0 = -\infty$, чиме би брзина имала бесконачне вредности што је немогуће, па да би брзина имала коначне вредности $C_1 = 0$, а из другог граничног услова на зидовима цеви, због приањања $v=0$ за $r=R$, добија се константа $C_2 = kR^2/4\mu$. Овим, израз за расподелу брзине по пресеку, изгледа

$$v = \frac{k}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (3.13)$$

Брзина се мења по параболи, која достиже максималну вредност у осе цеви за $r=0$

$$v_{max} = \frac{kR^2}{4\mu}.$$

Израз за расподелу брзине доводи до закључка да су брзине свих тачака на одстојању r од осе цеви једнаке односно $r = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Такђе овај израз омогућава израчунавање протока флуида кроз цев. Са слике (Сл.13 б), кроз површину попречног пресека у облику прстена r ширине dr , протиче елементарна количина течности

$dQ = v dA = v(r) \cdot 2\pi r dr$, одакле је проток кроз цев дат изразом

$$Q = 2\pi \cdot \int_0^R v(r) r dr.$$

После замене израза за брзину решење овог интеграла биће:

$$Q = \frac{\pi k R^4}{8\mu} = \frac{\pi k D^4}{128\mu} \quad (3.14)$$

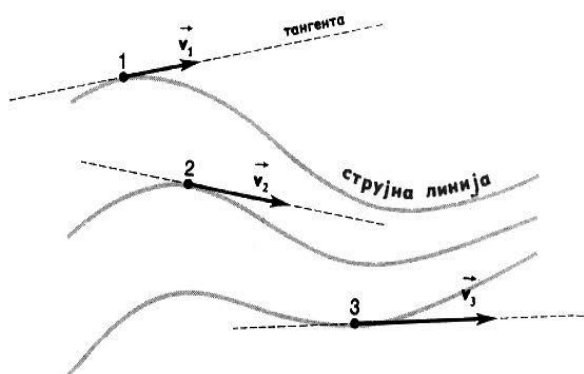
Овај израз представља Стоксов образац за проток а интересантно је да су Хаген и Поазеј независно, вршећи експерименте дошли до истог обрасца. У пракси, за израчунавање, користи се средња брзина, са којом су брзине исте и у осе цеви и на њеном зиду. Израз за средњу брзину лако добијамо када проток Q поделимо са укупном површином пресека цеви $A = r^2 \pi$, па је

$$v_s = \frac{Q}{A} = \frac{4R^2}{8\mu}, \quad \text{односно} \quad v_s = \frac{1}{2} v_{max} \quad (3.15)$$

4. ОСНОВНИ ХИДРАУЛИЧКИ ПОЈМОВИ

4.1. ПОЈАМ О ВЛАКНАСТОМ КРЕТАЊУ ТЕЧНОСТИ

При кретању течности, у њеној унутрашњости крећу се и њени делићи и то сваки



по својој путањи и својом брзином $\vec{v}$. У неком трнутку времена t_0 безброј делића има векторе брзине $\vec{v}$ такве да им се правци поклапају са правцем тангенте на криву линију. Та линија се назива **струјница**.

Сл. 14. Струјнице

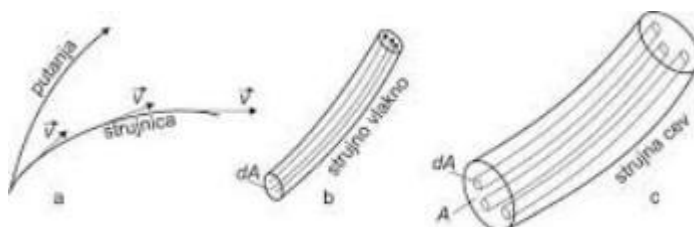
Из саме дефиниције струјнице, у којој су вектори брзине $\vec{v}$ и усмереног елемента криве $d\vec{L}$ колинеарни, добија се једначина струјнице:

$$(\vec{v} \times d\vec{L}) = 0 \quad (4.1)$$

При чему је $d\vec{L} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, а вектор брзине $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, а једначина струјнице

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Ако се кроз затворену криву линију, кроз сваку њену тачку поставе струјнице, добиће се затворена крива површ која се назива **омотач струјне цеви**, а део захваћеног простора **струјна цев** (Сл.15.с). Струјна цев бесконачно малог поречног пресека dA , назива се **струјно влакно** (Сл.15.б)



Сл.15.

На струјном влакну су и изведене једначине, које су после проширене на струјну цев. Код устаљеног струјања облик струјног влакна и струјне цеви су постојани, док код

неустаљеног струјања оне мењају и облик и положај у простору. Битне особине струјног влакна су:

- због веома малог поречног пресека dA усваја се да су све физичке величине по површини константне, па тиме и брзина $\vec{v}$,
- брзина је нормална на одговарајући пресек, што је последица њене тангентности на струјницу,
- нормални пресек струјног влакна се сматра да је раван.

4.2. ОСНОВНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ ТОКА ТЕЧНОСТИ

У Хидраулици под основним карактеристикама сматрају се: живи пресек, проток, средња брзина, оквашени обим и хидраулички радијус. О протоку и средњој брзини је већ предходно речено у другој глави (2.3) па ће овде о њима бити изостављено излагање. Остале карактеристике први пут се помињу у овом излагању, па захтевају и објашњење.

4.2.1. ЖИВИ ПРЕСЕК

Живи пресек представља површ у чијој се свакој тачки струјне линије поклапају са одговарајућом нормалом. Ова површ је равна површ, само у случају кретања течности са паралелним струјницама. **Живи пресек** је заправо, попречни пресек струјне цеви управан на главни правац кретања течности, па се чешће назива попречни пресек.

4.2.2. СРЕДЊЕ ВРЕДНОСТИ СТРУЈНИХ ВЕЛИЧИНА

Код струјања течности кроз техничке цеви, струјање није једнодимензионално, јер се поред промене физичких величина дуж осе цеви, јављају и промене по површини попречног пресека, Самим тим што је брзина на зидовима цеви нула, а у оси достиже максималну вредност (Сл.12), било је неопходно да се приступи средњим вредностима појединих величина. Овим се постигло да струјне величине буду константне по површини пресека, а тиме и да се струјање кроз техничку цев посматра као једнодимензиско.

Осим “осредњавања” брзине о којој је већ све речено, уводе се средње вредности густине, притиска и количине кретања и оинетичке енергије, са обзиром да су последње две величине у директној вези са брзином струјања. Средња густина је важна за гасове, а код течности је константна ($\rho = \rho_0 = \text{const.}$)

Средњи притисак p_s се дефинише као: *змишљени константни притисак, који помножен са површином пресека А, даје исту силу притиска Р течности на површину пресека, као и стварна расподела притиска[2].* На основу једнакости

$$p_s A = P = \int_A p \, dA$$

дакле је средњи притисак:

$$p_s = \frac{1}{A} \int_A p \, dA \quad (4.2)$$

Количина кретања добијена на основу средње брзине и количина кретања добијена на основу стварне брзине се разликују због тога што постоји и разлика између стварне и средње брзине. Та разлика је дефинисана као $v' = v - v_s$ и представља одступање стварне брзине v од средње брзине v_s . Елементарна количина кретања за елементарну масу dm , која за време dt проструји кроз површину A средњом брзином v_s , износи:

$$dK_s = dm v_s = \rho A v_s^2 dt = dK(v_s)$$

Стварна количина кретања рачуна се посредством стварних брзина v у пресецима dA струјних влакана, која чине цев. Кроз свако влакно проструји елементарна маса $dm = \rho dV$ за време dt , чија је количина кретања $v dm = \rho v^2 dA dt$. За читав пресек A елементарна количина кретања је:

$$dK = \rho dt \int_A v^2 dA$$

заменом $v = v_s + v'$ израз за количину кретања стварних брзина је

$$\int_A v^2 dA = \int_A (v_s + v')^2 dA = v_s^2 A + 2v_s \int_A v' dA + \int_A v'^2 dA,$$

Други сабирак једнак је нули, јер су одступања брзине v' и позитивна и негативна, па је

$$dK = \rho dt (v_s^2 + \int_A v'^2 dA)$$

па је однос количина кретања

$$\frac{dK}{dK_s} = 1 + \frac{1}{Av_s^2} \int_A v'^2 dA = 1 + k. \quad (4.3)$$

Како је v'^2 увек позитивно то је и k увек позитивно, па се закључује да је стварна количина кретања увек нешто већа. У Хидраулици вредност за $k = 0,037$ па је

$$\frac{dK}{dK_s} = 1 + k = \alpha'$$

Бусинесков број $\alpha' = 1,037$ треба користити за тачније прорачуне и то код ламиларног струјања док код турбулентних за овај коефициент се сматра $\alpha' = 1$. (Наведена струјања ће у наредном излагању бити детаљно објашњена.)

Кинетичка енергија срачуната помоћу средње брзине v_s , за елементарну масу dm која за време dt проструји кроз пресек A је.

$$dE_{ks} = \frac{1}{2} dm \cdot v_s^2 = \frac{1}{2} \rho A v_s dt \cdot v_s^2 = \frac{1}{2} \rho A v_s^3 dt = dE_k(v_s)$$

кинетичка енергија посредством стварне брзине v , за свако влакно па и за саму цев, аналогно предходном поступку биће

$$dE_k = \int_A \frac{1}{2} v^2 dm = \int_A \frac{1}{2} v^2 \cdot \rho A v dt = \frac{1}{2} \rho dt \int_A v^3 dA$$

односно заменом за v ,

$$\int_A v^3 dA = \int_A (v_s + v')^3 dA = v_s^3 A + 3v_s^2 \int_A v' dA + 3v_s \int_A v'^2 dA + \int_A v'^3 dA$$

Други члан је једнак нули па је однос стварне и средње кинетичке енергије:

$$\frac{dE_k}{dE_{ks}} = 1 + 3k + \frac{1}{Av_s^3} \int_A v'^3 dA \quad (4.4)$$

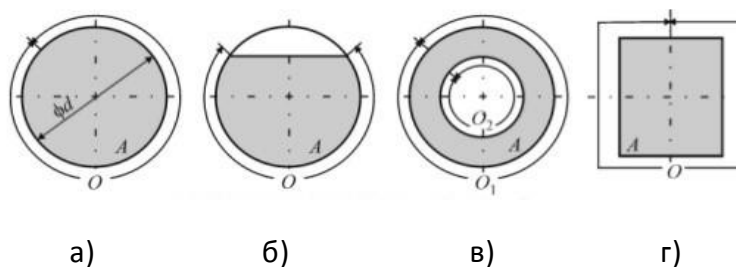
Последњи члан се може занемарити, јер може да има и позитивне и негативне вредности, па је у коначном збиру веома мали у односу на сабирак са квадратом брзине па је однос кинетичких енергија

$$\frac{dE_k}{dE_{ks}} = 1 + 3k = \alpha$$

Где је $\alpha = 1 + 3 \cdot 0,037 = 1,111$ Кориолисов број. И у овом случају код ламиларног струјања Кориолисов број је знатно већи, $\alpha = 2$ па се за такво струјање α мора узети у обзир.

4.2.3. ОКВАШЕНИ ОБИМ

Приликом струјања, течност пролази кроз цеви или канале различитих поречних пресека. При томе може потпуно да их испуњава - код напорног струјања или да их не испуњава - код слободног течења. Део обима попречног пресека канала или цеви који је у директном додору са течности је **оквашени обим**. На слици 16 имамо примере потпуно испуњених цеви а), в) и г), чије су дужине оквашених обима потпуно различите, и пример оквшеног обима делимично испуњене цеви б). Овако различити обими имаће утицај на израчунавање хидрауличког радијуса који се користи у хидрауличким прорачунима.



Сл.16. Оквасени обим за различите случајеве

4.2.4 ХИДРАУЛИЧКИ РАДИЈУС

У случајевима када течност не испуњава потпуно цев кроз коју протиче или када попречни пресек цеви није кружног облика, у Хидраулици се користи тзв. **хидраулички радијус**. Ова величина дефинисана је као однос површине живог пресека А и оквасеног обима О, односно:

$$R_h = \frac{A}{O} \quad (4.5)$$

Хидраулички радијус код напорних цевовода, са цевим кружног попречног пресека, оквасени обим је исти као и обим проточног пресека (Сл.15.а), па је:

$$R_h = \frac{D^2 \pi / 4}{D \pi} = \frac{D}{4}$$

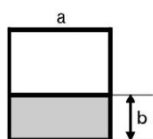
$$D = 4R_h \quad (4.6)$$

У случају да је напорни цевовод правоугаоног попречног пресека страница m и n хидраулички радијус би био (Сл.15.г):

$$R_h = \frac{m n}{2(m+n)},$$

Хидраулички радијуси могу бити једнаки за сасвим различите облике и величине пресека струјне течности. Као на пример $R_h=1$ у случају цеви пречника $D=2m$ и цеви правоугаоног попречног пресека $a=2m$ и $b=4m$. разликују се и обликом и величинама површина.

Хидраулички радијус за слободни ток (Сл. 17) кроз канал правоугаоног попречног пресека износи:



Сл. 17.

$$R_h = \frac{ab}{2a+2b}$$

Где су a - ширина канала, а b – дубина течности у каналу.

4.3. ЛАМИЛАРНО И ТУРБУЛЕНТНО КРЕТАЊЕ ТЕЧНОСТИ

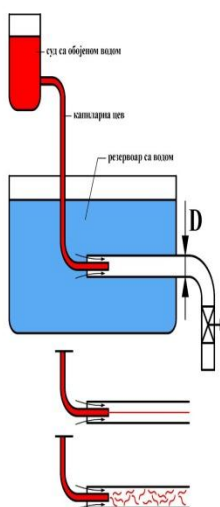
У свакодневном животу лако се уочавају различити токови течности, почев од речних токова, различитих млазева на изласку течности из разних црева, славина кроз разне канале и сл. Лако се уочава да течност, на својој површини, негде тече мирно, равно, без избочина, а негде је та површина узбуркана, неравна просто хаотична. Ове разлике у изгледу површине течности, која струји последица су различитих врста кретања. Ове појаве постоје и код течности које немају слободну површину, односно ако струје кроз цеви.

Код мирног струјања течности, притисак и брзина не пулсирају[2], течност нема попречна кретања, заправо струји слојевито па отуда и назив **ламинарно струјање**.

У другом случају испупчења и удубљења видљива на површини, последица су поречног кретања течности у односу на главни ток. Делићи прелазе из једног слоја у други, мешају се ометају једни друге без икаквих правилности. Притисак и брзина у том случају пулсирају[2] а струјање се назива **турбулентно струјање**.

Проблематиком режима кретања течности, научници су се бавили углавном експерименталним путем, на основу ког је Менделјев дошао до закључка да отпор услед трења битно зависи од режима кретања течности. Из тог разлога развијени су и различити прорачуни који зависе од режима струјања. Критеријум по коме се одређује режим струјања извео је Рејнолдс (1883.) једноставним огледом.

У резервоару са водом налази се стаклена цев пречника D у коју из суда са бојом може да се доведе обојена течност крз струјну цев.



Сл. 18. Одређивање режима струјања

При малим брзинама течност која истиче из суда има јасно издвојено струјно влакно, што значи да није дошло до мешања течности. Постепеним повећањем брзине слика струјања се не мења значајније, да би при даљем повећању брзине настала нагла промена, тако што се влакно растури и сва течност у цеви постане обојена (Сл.18). Рејнолдс је закључио да се одређеној брзини, коју је назвао **критична брзина** дешава прелаз из ламинарног у турбулентно струјање. Заправо, критична брзина је најмања брзина при којој ламинарно прелази у турбулентно.

У даљим експериментима Рејнолдс је мењао пречнике цеви D и добијао различите вредности критичних брзина, али је закључио да је критична брзина $v_{кр}$

директно пропорционална са коефициентом кинематске вискозности ν и обрнуто пропорционална пречнику цеви D .

$$v_{kr} = k \cdot \frac{\nu}{D}$$

Коефициент k је бездимензионалан и исти је за све течности и гасове што значи да сваки флуид одређене вискозности у цеви одређеног пречника има своју критичну брзину, али да све три величине испуњавају услов

$$k = \frac{v_{kr} D}{\nu} = 2320$$

што заправо представља Рејнолдсов број R_e^* који се и назива **критични Рејнолдсов број**.

$$R_e^* = 2320 \quad (4.7)$$

Ако се посматра било које кретање течности, онда се за њега може израчунати стварни Рејнолдсов број

$$R_e = \frac{vD}{\nu} \quad (4.8)$$

Стварни Рејнолдсов број може бити мањи од критичног Рејнолдсовог броја, тада је брзина посматраног кретања течности $v < v_{kr}$, па је струјање ламиларно:

$$R_e < R_e^* \quad (4.9)$$

У случају да је стварни Рејнолдсов број већи од критичног тада је и брзина посматраног струјања $v > v_{kr}$, а посматрано струјање турбулентно:

$$R_e > R_e^* \quad (4.10)$$

На основу релација (4.9) и (4.10) добијен је критеријум за одређивање режима кретања флуида, који је такође добио назив по Рејнолдсу.

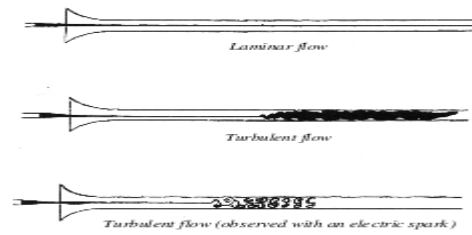
За случај да се течност креће у цевима које нису округлог попречног пресека или нису потпуно испуњене, при израчунавању Рејнолдсовог броја користи се **еквивалентни пречник** D_e који се рачуна помоћу хидрауличког радијуса

$$D_e = 4R_h \quad (4.6')$$

У овом случају Рејнолдсов број биће:

$$R_e' = \frac{R_e}{4} = \frac{vR_h}{\nu} \quad (4.11)$$

па ће за ламиларно струјање бити услов $R_e' < 580$ док за турбулентно $R_e' > 580$.



Сл. 19. Прелазак из ламиларног у турбулентно струјање извођењем Рејнолдсовог огледа

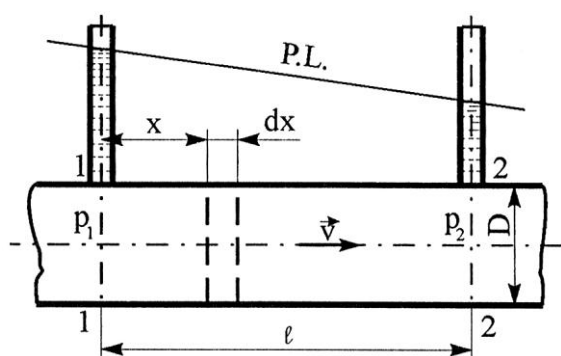


Сл. 20. Илустровани приказ промене режма струјања

5.ГУБИЦИ СТРУЈНЕ ЕНЕРГИЈЕ ПРИ КРЕТАЊУ РЕАЛНОГ ФЛУИДА

5.1. ПАД ПРИТИСКА У ПРАВОЈ КРУЖНОЈ ЦЕВИ ПРИ УСТАЉЕНОМ КРЕТАЊУ ТЕЧНОСТИ

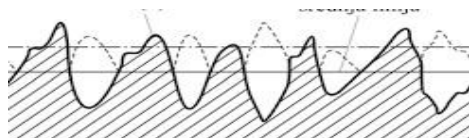
Сви вискозни флуиди при кретању губе струјну енергију, делом на пружању отпора померању својих делића а више на трње о зидове цеви или канала кроз које се крећу. Зато се флуиду, који струји мора непрестано додавати енергија што се постиже струјном пумпом или нагибом. Због тога што је дејство силе трења увек у супротном смеру од кретања течности, долази до појаве смањења притиска у цеви кроз коју флуид тече.



Сл.21. Пад притиска у правој кружној цеви

Методом димензиска анализа, постављен је аналитички израз који у потпуности описује појаву **пада притиска при устаљеном кретању флуида кроз праве кружне цеви**. Овом методом то се постиже помоћу димензија физичких величина.

Једноставним мерењем лако се уочава да при струјању течности кроз цев дужине l и пречника D долази до пада притиска $\Delta p = p_1 - p_2$ (Сл.21.) На местима 1 и 2, постављени пиезометри показују да притисак пада у правцу струјања течности, чиме је и p_1 веће од p_2 . Линија која их спаја назива се пијезометарска линија. Пад притиска сведен на јединицу дужине је $\Delta p/l$ а елементарни пад притиска на деоници dx биће dp/dx . Величине које утичу на пад притиска су: v_s , D , ρ и δ -храпавост.



Сл. 21'. Неравнине унутрашње површине цеви

Средња храпавост δ унутрашње површине цеви је средња висина неравнина која зависи од начина израде и ову величину даје произвођач.

Применом димензиске анализе имаћемо:

$$f\left(\frac{dp}{dx}, D, v, \delta, \mu, \rho\right) = 0$$

На ову појаву утиче шест величина од којих су три независне а то су D, v, ρ па се помоћу π -теореме формира функција од три бездимензиска монома, односно:

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$$

$$1) \pi_1 = \frac{dp}{dx} D^{x_1} v^{y_1} \rho^{z_1}, \quad 2) \pi_2 = \delta D^{x_2} v^{y_2} \rho^{z_2}, \quad 3) \pi_3 = \mu D^{x_3} v^{y_3} \rho^{z_3},$$

где су x_i, y_i, z_i ($i=1,2,3$) експоненти чији збир мора да буде такав, да π_1, π_2 и π_3 буду мономи без димензија (M^0 -димензија масе, L^0 -димензија дужине, T^0 -димензија времена) па се редом добија за

	1) π_1	2) π_2	3) π_3
[M] :	$0 = 1 + z_1$	$0 = z_2$	$0 = 1 + z_3$
[L] :	$0 = -2 + x_1 + y_1 - 3z_1$	$0 = 1 + x_2 - y_2 - 3z_2$	$0 = -1 + x_3 + y_3 - 3z_3$
[T] :	$0 = -2 - y_1$	$0 = -y_2$	$0 = -1 - y_3$

Решењем ова три ситема једначина добијамо тражене мономе:

$x_1=1, y_1=-2, z_1=-1$	$x_2=-1, y_2=0, z_2=0$	$x_3=-1, y_3=-1, z_3=-1$
$\pi_1 = \frac{dp}{dx} \frac{D}{\rho v^2}$	$\pi_2 = \frac{\delta}{D}$	$\pi_3 = \frac{\nu}{Dv}$

$$\Phi\left(\frac{dp}{dx} \frac{D}{\rho v^2}, \frac{\delta}{D}, \frac{\nu}{Dv}\right) = 0,$$

$$\frac{dp}{dx} \frac{D}{\rho v^2} = \Phi_1\left(\frac{\delta}{D}, \frac{\nu}{Dv}\right),$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho v^2}{D} \cdot \frac{1}{2} 2\Phi_1\left(\frac{\delta}{D}, \frac{\nu}{Dv}\right),$$

У овом изразу су: $\frac{\delta}{D}$ – релативна храпавост цеви, а $\frac{\nu}{Dv} = \frac{1}{Re}$ већ познати Рејнолдсов број. Ове величине су за исти режим струјања, једне течности (ν), кроз цев полупречника D исте храпавости (δ) константне, па је део израза $2\Phi_1\left(\frac{\delta}{D}, \frac{\nu}{Dv}\right)$, обухваћен бездимензиским коефицијентом, λ – коефицијент отпора услед трења. Коефицијент λ , као што се види зависи од режима струјања, храпавости цеви, природе течности, посебно се израчунава за сваки случај струјања, па ће се у каснијем излагању овоме посветити посебна пажња.

Елементарни пад притиска услед трења, на деоници dx , пошто са повећаем растојања опада, добија знак минус и у елементарном облику добија изглед:

$$- dp = \lambda \frac{dx}{D} \frac{v^2}{2} \rho, \quad (5.1)$$

Овај израз представља Дарсијев образац за елементарни пад притиска услед трења у диференцијалном облику. Одређени интеграл у границама за $p=p_1$ до $p=p_2$, и $x=(0 \div l)$ лако се добија Дарсијев образац у коначном облику:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2} \rho, \quad (5.2)$$

Овај образац представља основ за „транспорт цевима“, може се примењивати и код цеви које нису кружног попречног пресека (код вентилационих гасовода), као и код делимично испуњених цеви, само се тада води рачуна о еквивалентном пречнику (4.6') па у том случају израз за пад притиска добија изглед:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{4R_h} \frac{v^2}{2} \rho \quad (5.2')$$

5.2. БЕРНУЛИЈЕВА ЈЕДНАЧИНА ЗА РЕАЛНЕ ТЕЧНОСТИ

Реални флуид при струјању, дакле губи енергију, па се намеће питање "исправности" Бернулијеве једначине изведене за савршен флуид (в.2.4.2). Запрво, огледи са реалним флуидом (теčnostима) показали су да бројне вредности добијене посредством Бернулијеве једначине, нису једнаке са стварним вредностима. Енергија струјне течности смањује се низводно дуж струјног влакна односно

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 > \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2$$

Механичка енергија струјањем течности прелази у друге облике енергије нпр. топлоту, што је за ове услове потпуно бескорисно. Главни узрок овом губитку је трење између делића, чије је деловање занемарено приликом извођења Бернулијеве једначине. Десној страни горње неједначине, недостаје изгубљена енергија, која је у ствари рад сила трења. Овај рад рачунат по јединици масе течности обележен је са R_v , па једначина може да се напише :

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + R_v \quad (5.3)$$

Струјна енергија се такође губи на местима промене попречног пресека, на промени правца струјања R_{m1} , па за вредност свих отпора на путу реалне течности по јединици масе између два узастопна пресека 1-1 и 2-2 струјног влакна усвојена је ознака R_m тако да енергетска Бернулијева једначина гласи:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + R_m \quad (5.4)$$

Ако Бернулијеву једначину напишемо у облику који изражава висине (дељењем енергетске једначине са g) добијамо :

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_m \quad (5.5)$$

при чему је $h_m = R_m / g$, и назива се **изгубљена висина**.

Предходне једначине потпуно су тачне, ако се примењују на струјно влакно, што није случај код струјне цеви. Разлог за то је што се код струјне цеви користе средње брзине v_s , па је потребно вршити преправку. То се постиже Кориолисовим коефициентом α који коригује средњу кинетичку енергију (4.4), из тог разлога се везује за члан $\frac{v^2}{2}$ па потпуна Бернулијева једначина за струјну цев гласи:

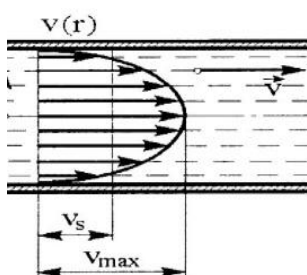
$$\alpha \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \alpha \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + R_m \quad (5.6)$$

У овој једначини v_1 и v_2 су средње брзине, p_1 и p_2 притисци у тежиштима струјних пресека, z_1 и z_2 висине тежишта у односу на уопоредну раван. У овом изразу неопходно је одреди израз за R_m односно R_v (R_{tr}) и R_{mi} .

5.3. ПРОРАЧУН ГУБИТАКА СТРУЈНЕ ЕНЕРГИЈЕ

5.3.1. ПРОРАЧУН ОТПОРА УСЛЕД ТРЕЊА

Рад вискозних сила $R_v = R_{tr}$ (отпор услед трења) лако се дефинише на правој, хоризонталној кружној цеви кроз коју струји флуид (Сл.22.) за коју важи једначина протока:



$$v_{s1} A_1 = v_{s2} A_2; \quad A_1 = A_2; \quad v_{s1} = v_{s2}$$

тада је Бернулијева једначина сведна на:

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_2}{\rho} + R_v, \quad \text{одакле је:}$$

$$R_v = \frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho} = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2} \quad (5.7)$$

односно изгубљена висина:

$$h_v = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (5.8)$$

Даљи проблем се наставља у налажењу коефициента трења λ , који како је већ речено највише зависи од режима струјања флуида.

5.3.1.a) КОЕФИЦИЈЕНТ ТРЕЊА λ КОД ЛАМИЛАРНОГ СТРУЈАЊА

РЕАЛНЕ ТЕЧНОСТИ КРОЗ ПРАВУ КРУЖНУ ЦЕВ

Ламиларно, као и турбулентно струјање течности може да буде и устаљено и неустаљено. Овде ће се разматрати коефицијент λ при устаљеном струјању у складу са целокупним излагањем до сада.

Теорија о кретању вискозног флуида кроз праве кружне цеви (3.1.1), добро се слаже са огледима, када је у питању ламиларно струјање. Зато се при налажењу коефицијента λ у потпуности користе, већ изведени изрази за кретање вискозног флуида кроз праве кружне цеви.

Изведени и објашњени аналитички изрази, који су овде потребни су:

$$v(r) = \frac{k}{4\mu} (R^2 - r^2), \quad v_{\max} = \frac{kR^2}{4\mu},$$

$$v_{sr} = \frac{1}{2} v_{\max} = \frac{kR^2}{8\mu} = \frac{kD^2}{32\mu} \quad (3.15')$$

$$\frac{dp^*}{dx} = -k = \text{const.} \quad p^* = p - \rho U, \quad \vec{f} = \text{grad} U$$

за које у посматраном струјању важи:

$\frac{dp^*}{dx} = \frac{dp}{dx} - \rho X$, ($\rho X = 0$), па је $\frac{dp^*}{dx} = \frac{dp}{dx} = -k$, односно $dp = -k dx$, $\int_0^l dx = - \int_{p_1}^{p_2} dp$, добија се

$$kl = p_1 - p_2 = \Delta p = \rho R_v,$$

$$R_v = \frac{k l}{\rho},$$

Заменом коефицијента k израженог из једначине (3.15'), израз за отпор услед трења добија облик

$$R_v = \frac{32\mu v_s}{D^2} \cdot \frac{l}{\rho},$$

изједначавањем последње једначине са једначином (5.7) добијамо једнакост из које се лако добија тражени израз за коефицијент трења при устаљеном ламиларном струјању реалне течности кроз праве кружне цеви.

$$\frac{32\mu v_s}{D^2} \frac{l}{\rho} = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2},$$

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (5.9)$$

с обзиром да је већ изведено $R_e = \frac{D v_s}{\nu} < 2320$ код ламиларног струјања течности. Још закључујемо да релативна храпавост зидова цеви не утиче на коефициент трења, већ на њега највише утиче вискозност флуида

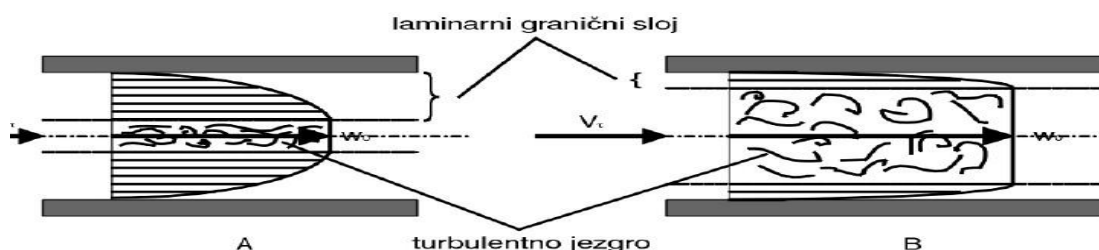
$$\lambda = \lambda(R_e)$$

5.3.1.6) КОЕФИЦИЈЕНТ ТРЕЊА λ КОД ТУРБУЛЕНТНОГ КРЕТАЊА РЕАЛНЕ ТЕЧНОСТИ

КРОЗ ХИДРАУЛИЧКИ ГЛАТКЕ И ХИДРАУЛИЧКИ ХРАПАВЕ ЦЕВИ

Димензиска анализа показала је да коефициент трења λ , зависи од R_e броја и релативне храпавости δ/D . Храпавост код ламиларног струјања нема утицаја због дебљине граничног слоја, који је у том случлју довољно дебео, да прекрива све неравнине, па се цев понаша као да је глатка. У турбулентном струјању постоје три области и то:

- прва - уска област уз зид цеви- гранични слој. Он је или ламиларни или турбулентни (чак и тад има подслој који је ламиларан)
- друга – прелазна област
- трећа- турбулентно језгро.



Сл. 23. Области које се формирају при турбулентном струјању

Све техничке цеви су храпаве и висина нервнина зависи од начина производње, стања цеви, материјала и сл. Течност која струји преко овакве површине ствара гранични слој чија се дебљина обележава са δ_{gs} , док је са δ обележава висина неравнина површине цеви. У зависности од степена храпавости цеви, R_e броја, течност се различито понаша.

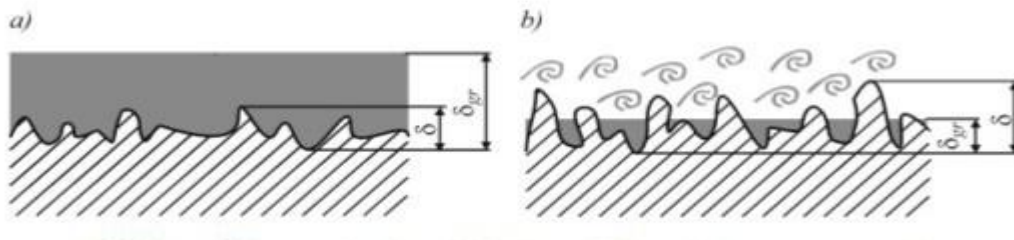
У првом случају ако је R_e број доста мали, δ_{gs} односно дебљина граничног слоја је велика, па се може десити да $\delta_{gs} > \delta$. Тада трећа област- турбулентно језгро, струји преко прве области- граничног слоја, па храпавост не утиче на струјање. У том случају главни отпор кретању је трење течности о течност и коефициент трења λ зависи само од R_e броја, односно: $\lambda = \lambda(R_e)$, што важи у случају **хидраулички глатких цеви**.

У другом случају када је R_e број, врло велики, дебљина граничног слоја тежи малој вредности $\delta_{gs} \rightarrow 0$ па не може да прекрије неравнине. Тада гранични слој као да не

постоји а неравнине "штрче" у главни део течности, око њих настају вртлози, тако да су неравнине главни узрок отпора. Трење течности о течност је тада занемарљиво па је

$$\lambda = \lambda\left(\frac{\delta}{D}\right)$$

при чему се δ/D назива релативна храпавост. У овом случају ће бити $R_{\text{mtr}} = f(v^2)$, а струјање се назива "квадратично" и односи се на **хидраулички потпуно храпаве цеви**.



Сл. 24. а) Хидраулички глатке цеви

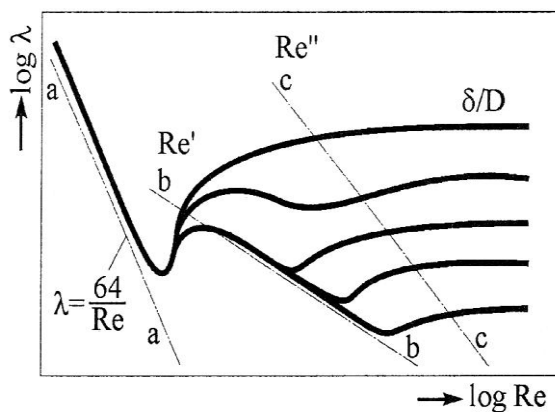
б) Хидраулички храпаве цеви

У трећем случају Re број може бити велики, гранични слој формиран али није много велики, дакле има трења и течности о течност и трења између течности и нервнина па

$$\lambda = \lambda\left(Re, \frac{\delta}{D}\right),$$

у овом случају ради се о **хидраулички храпавим цевима**.

Из свега изложеног долази се до закључка да би требало да постоје три врсте образаца



Сл. 25. Зависност λ од Re -броја

- а-а ламинарно струјање
- b-b хидраулички глатке цеви
- између b-b и c-c на λ утиче и Re и $\frac{\delta}{D}$ хидраулички храпаве цеви
- изнад c-c криве су хоризонталне $\lambda = \lambda\left(\frac{\delta}{D}\right)$, хидраулички потпуно храпаве цеви

Испитивања су показала да део између b-b и c-c има граничне вредности Re :

$$R_e' = 27 \left(\frac{D}{\delta}\right)^{8/7}, \quad R_e'' = 560 \frac{D}{\delta} \quad (5.10)$$

Део на дијаграму између а-а и b-b, одговара прелазном режиму струјања и ту се цев понаша као да је глатка и коефициент трења λ рачуна се по обрасцу:

$$\lambda = 0,0025 \sqrt{R_e} \quad (5.11)$$

За праву b-b користи се Блазијусов образац, само струјање одговара хидраулички глатким цевима. Вредности за R_e број крећу се од 4000 до 100 000.

$$\lambda = \frac{0,3164}{R_e^{0,25}} \quad (5.12)$$

У овом делу за хидраулички глатке цеви али за све брзине, за које су R_e бројеви врло велики погодан је Конаков образац

$$\lambda = (1,8 \log R_e - 1,5)^{-2} \quad (5.13)$$

За турбулентно струјање у хидраулички глатким цевима користи се Прантлов израз:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{2,51}{R_e \sqrt{\lambda}} \quad (5.14)$$

За област десно од праве с-с коефициент λ зависи само од релативне храпавости и ова област одговара хидраулички потпуно храпавим цевима. Формула Прантл-Никурадзе даје најтачније вредности за коефициент λ ,

$$\lambda = 0,25 \log \left(\frac{3,71D}{\delta} \right)^{-2} \quad (5.15)$$

али се више користи Шифринсонов образац за област десно од праве с-с

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\delta}{D} \right)^{0,25} \quad (5.16)$$

За област између b-b и с-с односно област у којој коефициент трења λ зависи и од Рејнолдсовог броја и од релативне храпавости. За ову област посебно је издвојена Колебрукова формула којом је успео да обједини формулу за хидраулички глатке цеви и хидраулички потпуно храпаве цеви. Ова формула је врло сложена, можда и због тога што резултат коефициента λ не даје у експлицитном облику, и гласи:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{R_e \sqrt{\lambda}} + \frac{\delta}{3,71D} \right) \quad (5.17)$$

Једноставнију формулу за исту област извео је Аљтшуљ на основу које се коефициент λ добија са високом тачношћу

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\delta}{D} + \frac{68}{R_e} \right)^{0,25} \quad (5.18)$$

Тумачењем дијаграма зависности коефициента λ од R_e броја требало је да се дође до "грубог" закључка да при и одређивању режима струјања изрчунавањем R_e добијене вредности, ако су :

$R_e > R_e''$ - имамо област потпуно хидраулички храпаве цеви

$R_e' < R_e < R_e''$ - имамо област хидраулички храпаве цеви.

За одабир цеви које ће у одговарајућем пројекту бити економски и технички оправдане: глатке цеви; хидраулички храпаве цеви; потпуно хидраулички храпаве цеви, постоје табеле са препорукама у сваком уџбенику, који описује ову научно-техничку дисциплину [1],[2],[3]...Као и многобројни понуђени каталози разних произвођача цеви, за ову намену.

Данас постоје многобројне формуле развијене у Хидраулици које су добијене емпириским путем, експериментима чији резултати, дају врло тачне вредности коефициента трења λ . Манингова формула за хидраулички потпуно храпаве цеви:

$$\lambda = \frac{124,6n^2}{D^{1/8}}, \quad \text{за } n=0,012^*$$

за сирову нафту Лангеов образац:

$$\lambda = 0,2 + \frac{1,7}{\sqrt{R_e}}$$

за струјање ваздуха формула Блеса:

$$\lambda = 0,0125 + 0,0011/D,$$

а код струјања водоводних мрежа, препоручена је формула Шевељева:

$$\lambda = 0,021 D^{-0,3}$$

Важно је истаћи да је врло битно најтачније могуће израчунати коефициент трења λ , посебно код магистралних цевовода где су растојања и по неколико стотина па и хилада километара дуги чиме је однос l/D велики број, у Хидраулици се каже, хидраулички дуге цеви, па битно утиче на R_{tr} -губитак струјне енергије услед трења.

Код хидраулички кратких цеви, значајнији су локални губитци R_l , јер код ових цевовода долази до пада притиска.

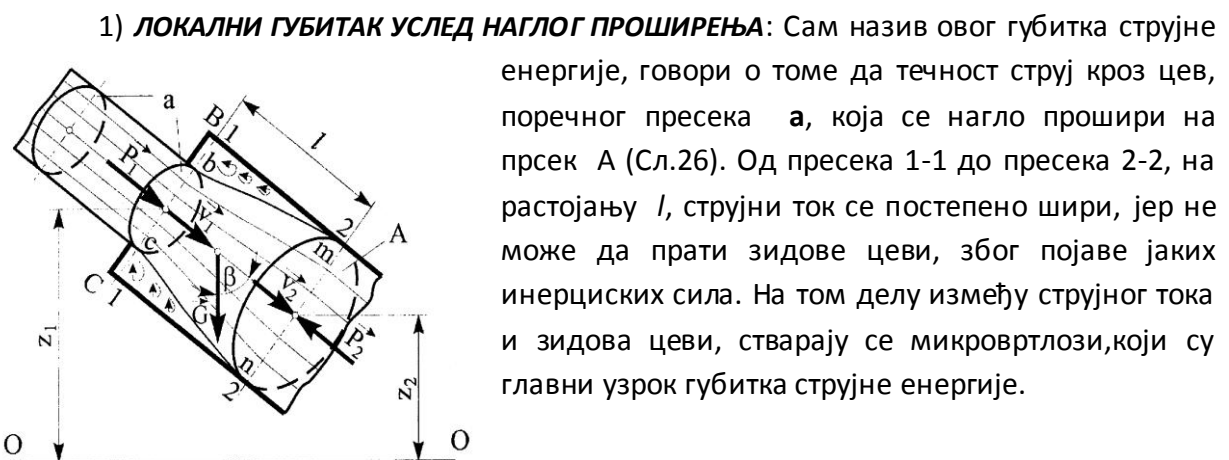
* n – детаљно објашњење у одељку 6.3. Коефициент је везан за "старост" цеви.

5.3.2. ГУБИЦИ СТРУЈНЕ ЕНЕРГИЈЕ УСЛЕД ЛОКАЛНИХ ОТПОРА

У Хидромеханичкој физици енергија која описује кретање, везана је за кинетичку енергију, па и све промене струјне енергије морају бити оправдане коефициентима који је их умањују. Губитак струјне енергије је увек присутан на местима као што су: промена правца кретања, наглих проширења, постепених проширења, наглих сужења, и много других локалних места на путу течности до њене употребне вредности. Као ознака за коефициент пропорционалности губитака струјне енергије усвојен је симбол ξ , који са одговарајућим индесом $\xi_{kl}, \xi_v, \dots$ означава тип локалног места, код кога настају губици. Ови коефициенти везани за кинетичку енергију и по јединици масе течности дају нам образац за израчунавање локалних отпора:

$$R_{ml} = \xi_l \frac{v^2}{2}, \quad (l = k, v, u, np, ns, \dots) \quad (5.19)$$

Коефициенти локалних губитака ξ_l углавном се одређују експериментално. Локални губици су последица појаве микровртлога, због којих је струјање на тим местима турбулентно, па самим тим и не зависи од Re броја. Зато су коефициенти локалних отпора ξ константне вредности, у свим случајевима, осом у случају наглог проширења ξ_{np} које се може израчунати.



Сл. 26. Струјни ток при наглом проширењу

За пресек 1-1 до 2-2 можемо поставити Бернулијеву једначину за реалне течности (5.6)

$$R_{mnp} = \left(\alpha \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \right) - \left(\alpha \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \right)$$

$$R_{mnp} = \frac{\alpha}{2} (v_1^2 - v_2^2) + \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2), \dots \dots \dots a)$$

Применом Закона о промени количине кретања (2.31), губитак струјне енергије добијамо помоћу средњих брзина v_1 и v_2 у пресецима а и А. Векторска једначина овог закона, пројектована на осу цеви биће:

$$\alpha' \rho Q (v_2 - v_1) = P_1 - P_2 + mg \cos \beta,$$

При чему су: $P_1 = p_1 A$, $P_2 = p_2 A$, $Q = v_2 A = v_1 a$, $m = \rho A l$, $l \cos \beta = z_1 - z_2$. Када ове величине уврстимо у једначину Закона о промени количине кретања добијамо:

$$\alpha' v_2 (v_2 - v_1) = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2), \dots \dots \dots \text{б)}$$

На основу једначина а) и б) добијамо, за губитак струјне енергије наглог проширења:

$$R_{\text{мнр}} = \frac{\alpha}{2} (v_1^2 - v_2^2) + \alpha' v_2 (v_2 - v_1)$$

после сређивања једноставним математичким трансформацијама, уз то да је $\alpha/\alpha' \approx 1$

$$R_{\text{мнр}} = \frac{\alpha'}{2} (v_1 - v_2)^2 \quad (5.20)$$

У сличају турбулентног струјања, што на овом локалном месту и јесте случај $\alpha' \approx 1$,

$$R_{\text{мнр}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} \quad (5.21)$$

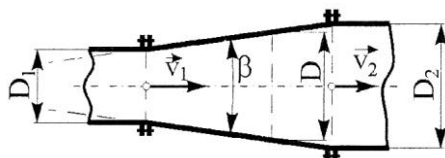
Овај образац представља Борда-Карноову формулу, која се може написати у другачијем облику, ако се уме у обзир једначина протока по којој је, $v_1/v_2 = A/a$,

$$R_{\text{мнр}} = \xi_{\text{нр}} \frac{v_2^2}{2} \quad (5.22)$$

при чему је коефициент $\xi_{\text{нр}}$ одређен изразом:

$$\xi_{\text{нр}} = \left(\frac{A}{a} - 1 \right)^2.$$

2) ЛОКАЛНИ ГУБИЦИ УСЛЕД ПОСТРПЕНОГ ПРОШИРЕЊА (У ДИФУЗОРУ): Код постепеног проширења попречног пресека струјна енергија се губи, због појаве макровртлога и израчунава се помоћу обрасца



$$R_{\text{мд}} = \xi_d \frac{v_2^2}{2} = k \frac{(v_1 - v_2)^2}{2}, \quad \text{при чему је}$$

$$\xi_d = k \left[\left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 - 1 \right]^2$$

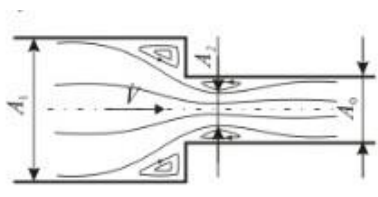
Сл. 27. Дифузор

Коефициент k даје се таблички и зависи од угла ширења дифузора β .

Табела 4. *Коефициент k дифузора*

β°	3	4	5	6	7	8	10	15	20
k	0,180	0,150	0,140	0,135	0,140	0,145	0,170	0,265	0,429

3) **ЛОКАЛНИ ГУБИТАК УСЛЕД НАГЛОГ СУЖЕЊА:** У овом случају, се као код наглог проширења, јављају микровртлози између струјног тока и цеви већег попречног пресека (Сл.28), јер ни овде течност не може да прати зидове цеви, већ се њен ток



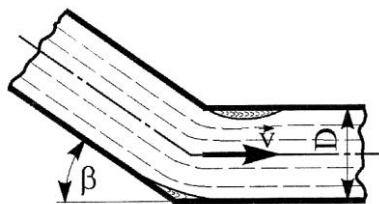
постепено сужава. Већа разлика у пречницима цеви ,условљава и већи губитак струјне енергије па је однос $(d/D)^2$ и узет (према Вајсбаху) као меродаван за налажење коефициента локалног отпора при наглом сужењу ξ_{ns} , и дат је табелом 5.

Сл. 28 Струјни ток при наглом сужењу

Табела 5. *Коефициент локалног отпора услед наглог сужења ξ_{ns}*

$(d/D)^2$	0,01	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80	0,90
ξ_{ns}	0,50	0,49	0,42	0,33	0,25	0,15	0,09

4) **ЛОКАЛНИ ГУБИТАК У КОЛЕНУ:** На слици 29 приказана су места где се стварају



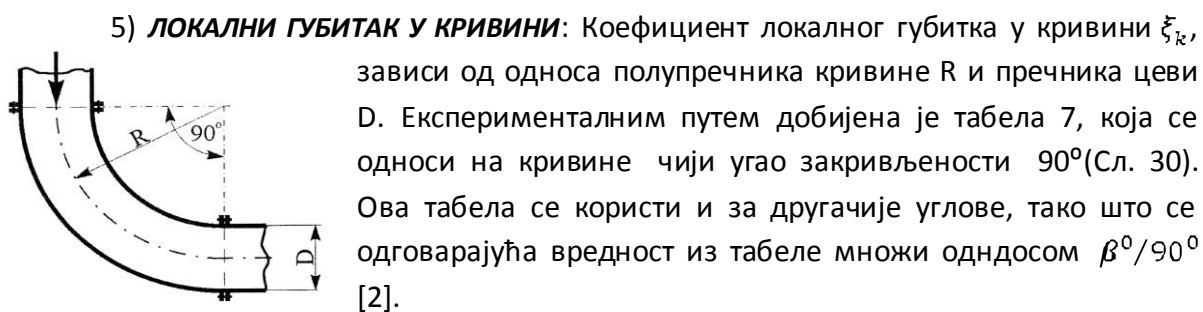
микровртлози, због којих долази до губитка струјне енергије, а свакако највећи утицај има угао скретања струјног тока β . Важан утицај има и стање цеви кроз коју протиче течност, па су измерене вредности коефициента, добијене експерименталним путем, ξ_k дате табелом 6.

Сл. 29. Струјање у колену

Табела 6. *Коефициент отпора колена ξ_k*

β°	5	10	15	22,5	30	45	60	90
ξ_k glatke	0,016	0,034	0,042	0,066	0,130	0,236	0,471	1,129
ξ_k hrpave	0,024	0,044	0,062	0,154	0,165	0,320	0,684	1,265

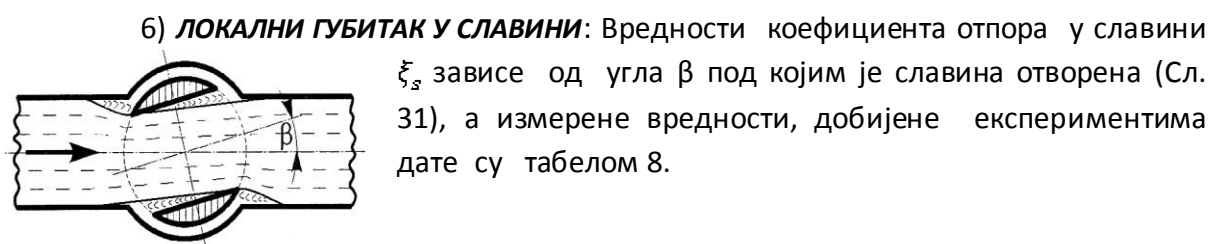
Овај коефициент зависи и од пречника цеви D, па се препоручује Вајсбахова формула у случајевима цеви до 30mm. Са већим пречницима, установљено је да се ξ_k смањује



Сл. 30. Кривина

Табела 7. Коэффициент отпора кривине ξ_{kr}

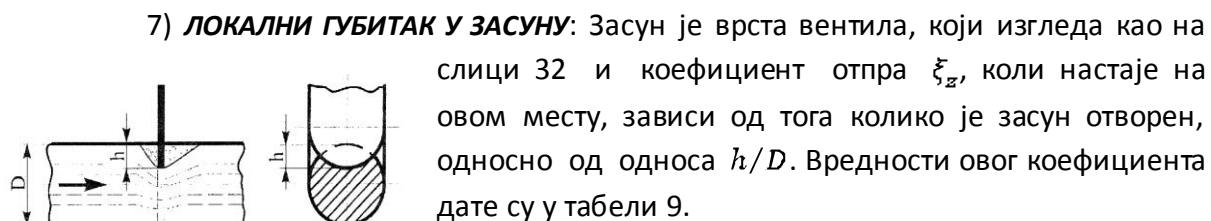
R/D	1	2	4	6	10
ξ_{kr} glatke	0,23	0,14	0,10	0,08	0,09
ξ_{kr} hrapave	0,51	0,30	0,23	0,18	0,20



Сл. 31. Струјање кроз славину

Табела 8. Коэффициент отпора славине ξ_s

β°	5	10	20	30	40	50	60	70
ξ_s	0,36	0,90	2,70	7,50	18,20	49,20	151	675

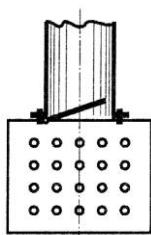


Сл. 32. Струјање у засуну

Табела 9. Коэффициент отпора засуна ξ_z

h/D	0	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8
ξ_z	0,12	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

- 8) **ЛОКАЛНИ ГУБИТАК У ЗАШТИТНОЈ КОРПИ:** Заштитна корпа се поставља на усисном делу цевовода, а улога јој је да заштити пумпу од нечистоћа, које се евентуално налазе у течности. Коефициент отпора заштитне корпе ξ_{zk} , представљени су табелом 10 у зависности од пречника цеви D.

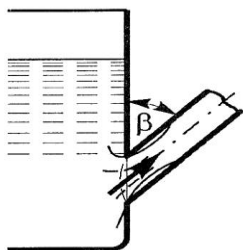


Sl. 33. Заштитна корпа

Табела 10. Коефициент отпора заштитне корпе ξ_{zk}

D mm	50	75	100	125	150	200	250	300	400
ξ_{zk}	10	8	7	6,5	6	5	4,5	4	3

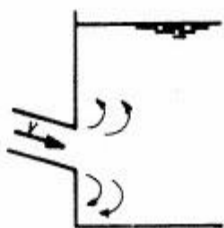
- 9) **ЛОКАЛНИ ГУБИТАК НА УЛАЗУ У ЦИЛИНДРИЧНУ КОСУ ЦЕВ:** Како се види на слици 34, цилиндрична цев је нагнута под углом β у односу на резервоар из кога течност улази у цев. Поред Вајсбахове формуле [2] по којој се коефициент отпора може израчунати, углавном се за угао $\beta=90^\circ$ усваја $\xi_u=0,5$, док код прописно заобљеног улаза у цев за овај коефициент могу се узети вредности



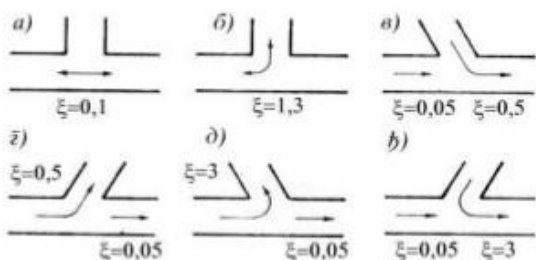
$$\xi_u = 0,04 \div 0,10.$$

Сл. 34. Улаз у косу цев

- 10) **ЛОКАЛНИ ГУБИТАК ПРИ ИСТИЦАЊУ ТЕЧНОСТИ ИЗ ЦЕВИ У РЕЗЕРВОАР:** При истицању течности из цеви у резервоар (Сл.35), кинетичка енергија коју је флуид поседовао у цеви, губи се у великим димензијама резервоара и остаје неискоришћена. Коефициент губитака у овом случају $\xi_r=1$ за турбулентно, а $\xi_r=2$ за ламиларно струјање.



Сл.35. Истицање из цеви у резервоар



- 11) **ЛОКАЛНИ ГУБИЦИ У РАЧВАМА:** Рачве су места спајања више цеви истих или различитих пречника под различитим угловима у циљу "развијања" течности у више различитих праваца. Неки од коефициената ξ_r дати су на слици (Сл.35')

Сл. 35'. Коефицијенти губитака у рачвама

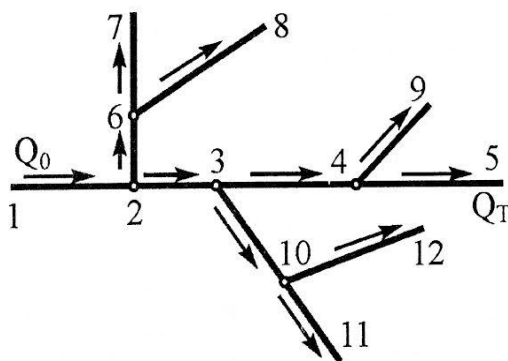
6. ХИДРАУЛИЧНИ ПРОРАЧУН ЦЕВОВОДА

Хидраулички цевоводи користе се за транспорт флуида, када се ради о великим капацитетима и расотјањима транспорта и сврставају се у најефикаснија непокретна транспортна средства. Цевима се најчешће транспортује хладна и топла вода, сирова нафта и њени деривати, природни гас, водена пара, разне киселине у хемиској индустрији, разне меласе у прехранбеној индустрији, енергетски флуиди у термоенергетским системима... Аналогно томе имамо нафтоводе, водоводе, топоводе, гасоводе при чему сваки наведени цевовод има исти задатак-да транспортује и допреми одговарајући флуид до места где ће имати своју употребну вредност. Воду за коришћење у домаћинству или за наводњавање у пољопривреди, топлу воду за преношење топлоте и много других примера. Цевоводи за транспорт флуида на великим растојањима спадају у **ХИДРАУЛИЧКИ ДУГЕ ЦЕВОВОДЕ** и представљају веома сложене системе како за пројектовање тако и за експлоатацију. Између изворишта и крајњег корисника налази се веома сложена инсталација, чије пројектовање за инжењера представља решавање низа проблема, који треба да омогуће добијање релевантних величина и њихових веза. Код ових цевовода губици струјне енергије услед трења су знатно већи од локалних губитака, па је посебно вазно тачно одредити коефициенте трења λ , што је детаљно објашњено у делу (5.3.1).

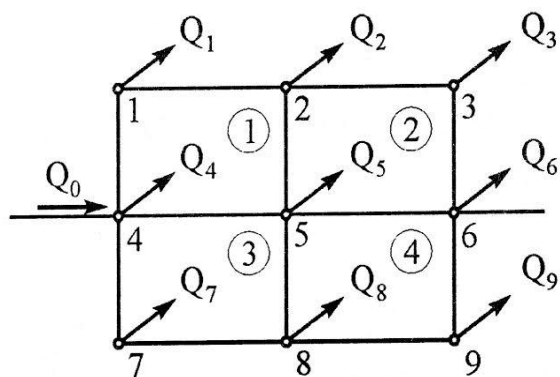
Цевоводи као што су инсталације за црпљење воде, уљнохидраулички системи на пољопривредним и грађевинским машинама, машинама алаткама, развод уља у моторима и др. Спадају у **ХИДРАУЛИЧКИ КРАТКЕ ЦЕВОВОДЕ**. Код ових цевовода, значајнију улогу у губитку струјне енергије имају локални отпори (5.3.2).

Подела цевовода на **ПРОСТЕ** и **СЛОЖЕНЕ** подразумева цевовод који се састоји из једне цеви са истим попречним преском (прост) или цевовод састављен из више простих, у коме има различитих пречника и дужина цеви. По начину повезивања делова, сложени цевоводи се деле на **РАЗГРАНАТЕ** и **ПРСТЕНАСТЕ**.

Код разгранатог цевовода (Сл.36), постоји магистрална грана (1-2-3-4-5) и огранци (2-6-7), (2-6-8), (3-10-11). Потршачи се у овом случају снабдевају водом у једном смеру, па при прекиду струјног тока у случају квара, сви потрошачи иза места квара остају без воде.



Сл. 36. Разгранат цевовод



Сл. 37. Прстенаст цевовод

Због тога се данас више прибегава пројектовању прстенастих цевовода (Сл.37), код којих се потрошачи снабдевају водом из два смера, па прекид тока на једном месту не утиче на снабдевање осталих потрошача.

Без обзира која врста водоводне мреже се пројектује, она мора да задовољава основне законе Хидраулике:

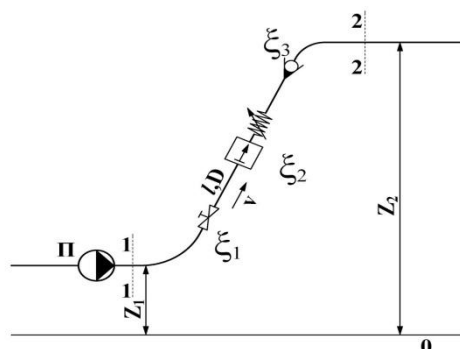
- прво, да алгебарски свих протока буде једнак нули (долазећи-позитивни, одлазећи-негативни)
- друго, да се при устаљеном струјању разлика притисака између било која два пресека у мрежи, троши на савлађивање отпора и висинске разлике између та два пресека.

Како се течност креће кроз цевовод на рачун разлике струјних енергија на почетку и крају цевовода, неопходно је обезбедити или различите нивое течности на почетку и на крају цевовода или употребити рад струјне машине односно пумпе. Обезбеђивање струјне енергије различитим нивоима примењује се углавном код отпадних течности, односно у случајевима где цеви не морају да су пуне и да су под одређеним притиском. Наравно код ових цевовода води се рчуна о хидрауличком радијусу R_h . За цевоводе код којих се захтева прописани притисак, нпр. због одржавања квалитета воде (мања опасност од појаве нечистоћа), као и због обезбеђивања струјне енергије користе се струјне пумпе, чији је избор заиста велики (зупчaste, мембранске, клипне...). Избор пумпе зависи од врсте и димензија цевовода, као и од природе флуида који ће се налазити у мрежној инсталацији.

При прорачуну неопходно је да се познаје појам **ХИДРАУЛИЧКИ НАГИБ I** , а за одабир пумпе као меродавна величина користи се **ЈЕДИНИЧНИ РАД КОЛА ПУМПЕ γ_p** .

6.1 ХИДРАУЛИЧКИ ПРОРАЧУН ПРОСТОГ ЦЕВОВОДА СА ПУМПОМ

Прост цевовод са пумпом, спада у системе код којих се кретање течности изазива радом струјне машине – пумпом. Кретање течности кроз цевовод, дужине l



Сл. 38. Шема простог цевовода

константног пречника D , између пресека 1-1 и 2-2, остварује се помоћу пумпе П (Сл.38). На том растојању налазе се и локални отпори са коефициентима отпора ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Како је пречник цеви константан, из једначине протока и брзина струјања ће бити иста, заправо $v = v_1 = v_2$. Бернулијева једначина за реалан флуид у том случају је:

$$\frac{p_a + p_{m1}}{\rho g} + Z_1 = \frac{p_a + p_{m2}}{\rho g} + Z_2 + h_m,$$

где h_m представља висину губитка струјне енергије, а p_{m1} и p_{m2} надпритиске у пресецима 1-1 односно 2-2. Ако горњу једначину сведемо на облик

$$\frac{p_{m1}}{\rho g} = \frac{p_{m2}}{\rho g} + Z_2 - Z_1 + h_m,$$

можемо да закључимо : пумпа треба да обезбеди притисак којим ће се савладати висинска разлика $\Delta z = z_2 - z_1$, пијезометриска висина $\frac{p_{m2}}{\rho g}$ и висина губитака струјне енергије, изражена у функцији протока $h_m = kQ^m$, да би течност струјала кроз цевовод. Укупна висина назива се **потребни напор цевовода H_C** , а збир висинске и пијезометриске висине **H_S -статички напор цевовода**. Коефициент k је коефициент карактеристике цевовода, m -изложилац протока, одакле добијамо:

$$H_C = H_S + kQ^m \quad (6.1)$$

Коефициент k и експонент m зависе од режима струјања течности у цевоводу, па за **ламинарно** струјање имаћемо:

$$h_m = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{Re} \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} = \frac{64v}{vD} \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g}, \quad v = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$h_m = \frac{128 l v Q}{g \pi D^4},$$

па је потребни напор цевовода:

$$H_C = H_S + \frac{128lv}{g\pi D^4} Q$$

одакле се јасно види да је експонент $m=1$, а коефициент k - израз уз проток Q у предходној једначини.

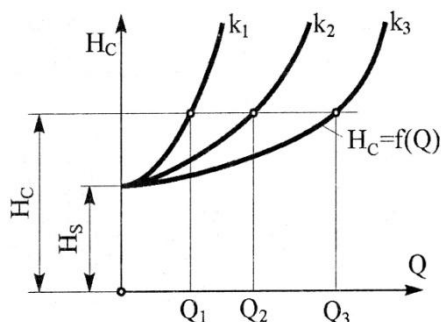
Коефициент k и експонент m , у случају **турбулентног** струјања, код кога је $\lambda=f(\frac{\delta}{D})$, а висина губитка струјне енергије:

$$h_m = \left(\lambda \frac{l}{D} + \sum \xi_i \right) \frac{v^2}{2g} = \left(\lambda \frac{l}{D} + \sum \xi_i \right) \frac{16Q^2}{2gD^4\pi^2},$$

су одређене као

$$k = \frac{8}{gD^4\pi^2} \left(\lambda \frac{l}{D} + \sum \xi_i \right), \quad m = 2 \quad (6.2)$$

Једначина која представља потребни напор цевовода H_C представља математичку функцију, која може да се представи графички (Сл.39) и тај график представља **карактеристику цевовода**.



Сл. 39. Карактеристике цевовода

Заправо завртањем или одвртањем вентила, мењају се коефициенти локалних отпора ξ_i чиме се директно мења и коефициент карактеристике цевовода k , тако да за један исти цевовод можемо имати различите криве. Ово би значило да за исту вредност потребног напора H_C , може да се има различит проток Q . Пошто је статички напор константан за један исти цевовод (константне и увек познате величине су l , D , Δz), то се проток Q или напор цевовода H_C лако израчунавају у

зависности од тога који је познат. Ако још напор цевовода H_C помножимо убрзањем земљине теже g , добијамо енергетску једначину која представља потребни рад по јединици масе да би се течност кретала кроз цевовод односно **јединични рад пумпе** Y_C .

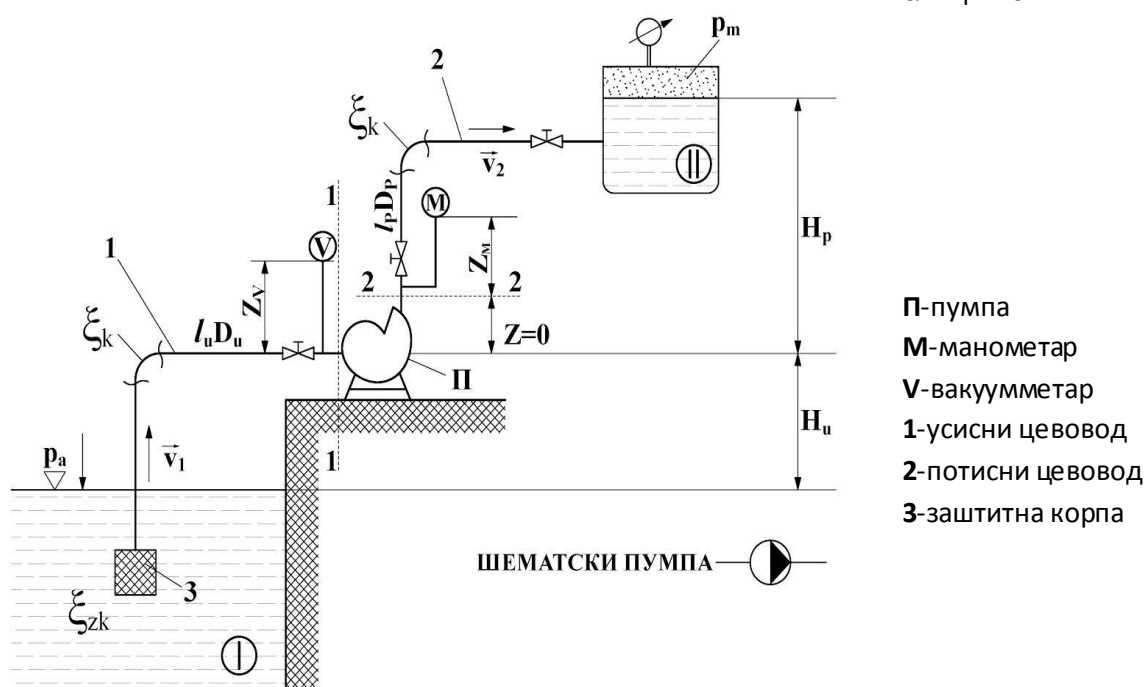
$$Y_C = gH_C = gH_S + k' Q^m,$$

где је $k' = gk$.

6.2. ЦЕВОВОД ЗА ТРАНСПОРТ ТЕЧНОСТИ

ПОМОЋУ ПУМПЕ

Цевоводи са пумпом могу бити отворени или затворени. Затворени цевоводи се користе у случајевма када једна иста течност треба да циркулише и при томе обавља своју функцију (нпр у системима за хлађење или грејање). Отворени цевоводи се користе за пребацивање течности из једног у други резервоар. Један такав цевовод за транспорт течности из резервоара I у резервоар II помоћу пумпе П приказан је на слици 40.



Сл. 40. Цевовод за транспорт течности помоћу пумпе

Између нивоа течности у доњем резервоару и осе пумпе, постоји висинска разлика H_u , која се назива **геодезиска висина усисавања**, тај део цевовода **усисни цевовод** (l_u, D_u). Део цевовода од осе пумпе до нивоа течности у другом резервоару назива се **потисни цевовод** (l_p, D_p) а висинска разлика у том делу H_p **геодезиска висина потискивања**. Укупна геодезиска висина дизања течности H износи

$$H = H_u + H_p$$

На улазу у пумпу имамо средњу брзину v_1 и притисак p_1 , па је струјна енергија по јединици масе, у пресеку 1-1

$$e_1 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho},$$

На излазу из пумпе имао другу вредност средње брзине v_2 и притиска p_2 , па је струјна енергија по јединици масе на излазу, у пресеку 2-2

$$e_2 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz \quad (z=0),$$

Висина z се занемарује јер представља висинску разлику између пресека 1-1 и 2-2, (односно између места где су прикључени манометар и вакуумметар), па је далеко мања у односу на димензије цевовода. Течност на излазу из пумпе има већу енергију него на улазу, зато што је пумпа течности "предала" неку количину енергије. Та енергија се назива **јединични рад кола пумпе** Y_{Π} и представља разлику струјних енергија, на излазу из пумпе и на улазу у пумпу:

$$Y_{\Pi} = e_2 - e_1, \quad \left[\frac{J}{kg} \right] \quad (6.3)$$

односно

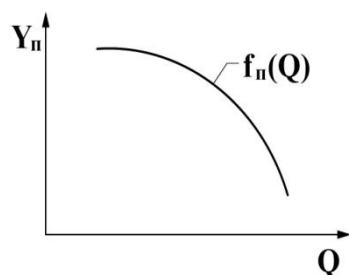
$$Y_{\Pi} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} \quad (6.4)$$

У пресеку 2-2 притисак је већи од атмосферског па се на излазу из пумпе јавља надпритисак $p_{m\pi}$, а у пресеку 1-1 притисак је мањи од атмосферског па на улазу у пумпу имамо подпритисак $p_{v\pi}$, па је јединични рад кола пумпе

$$Y_{\Pi} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_{m\pi} + p_{v\pi}}{\rho}, \quad (6.5)$$

Јединични рад кола пумпе, дефинисан са (6.5), назива се **манометарски јединични рад**, јер је дефинисан преко притисака измерених манометром $p_{m\pi}$ и вакуумметром $p_{v\pi}$. Манометарски јединични рад одређује се експериментално за сваку пумпу. Јединични рад кола пумпе, мења се при промени протока Q и ако број обрта n кола остаје константан. Зависност $Y_{\Pi} = f_{\Pi}(Q)$ назива **карактеристика пумпе** и представља се графиком, који је неопходан за практичну примену при избору пумпе, па се зато даје од стране произвођача таблички или дијаграмом.

За центрифугалне пумпе Е.А.Прегер, експерименталним путем је утврдио да једначина у облику квадратне функције, најбоље апроксимира график функције (Сл.41)



$$Y_{\Pi} = f_{\Pi}(Q)$$

$$Y_{\Pi} = f_{\Pi}(Q) = a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2$$

Сл. 41. Карактеристика центрифугалне пумпе

Једну исту пумпу можемо уградити у више инсталација. Ако уградимо пумпу у цевовод са слике 40, струјне енергије e_1 и e_2 можемо изразити преко карактеристике овог цевовода.

Бернулијева једначина за ниво воде у резервоару I и пресек 1-1, односно за усисни цевовод, дужине l_u , пречника цеви D_u , коефицијената локалних отпора $\sum \xi_u$ биће:

$$\frac{p_a}{\rho} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gH_u + R_{mu},$$

где R_{mu} представља укупне губитке на усисном цевоводу, а брзина нивоа воде у резервоару $v_I = 0$, односно занемарљиво мала у односу на брзине у цевима. Прва два сабирка са десне стране ове једначине представљају струјну енергију e_1 , па за усисни цевовод имамо

$$e_1 = \frac{p_a}{\rho} - (gH_u + R_{mu}),$$

За потисни цевовод, односно за пресек 2-2 и ниво течности у резервоару II, чија је дужина l_p , пречник цеви D_p , и коефицијентима локалних отпора $\sum \xi_p$, Бернулијева једначина је:

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} = \frac{p_a + p_m}{\rho} + gH_p + R_{mp},$$

где R_{mp} представља укупне губитке на потисном цевоводу, а брзина нивоа воде у резервоару II као и код усисног цевовода занемарљиво мала тј. $v_{II} = 0$. Лева страна ове једначине представља струјну енергију e_2 , па за потисни цевовод добијамо

$$e_2 = \frac{p_a + p_m}{\rho} + gH_p + R_{mp},$$

На основу израза (6.3), а и по дефиницији јединичног рада кола пумпе, следи да је потребан рад пумпе:

$$Y_{II} = \frac{p_m}{\rho} + g(H_u + H_p) + R_{mu} + R_{mp},$$

при чему збир губитака струјне енергије у усисном и потисном цевоводу ($R_{mu} + R_{mp}$) можемо заменити губитком струјне енергије дуж целог цевовода R_m , а збир висина укупном геодезиском висином H , одакле ће потребни јединични рад пумпе бити:

$$Y_{II} = \frac{p_m}{\rho} + gH + R_m \quad (6.6)$$

Дакле јединични рад кола пумпе, троши се на савлађивање укупне геодезиске висине H , на савлађивање надпритиска p_m у резервоару II и на савлађивање свих отпора на путу течности од резервоара I до резервоара II.

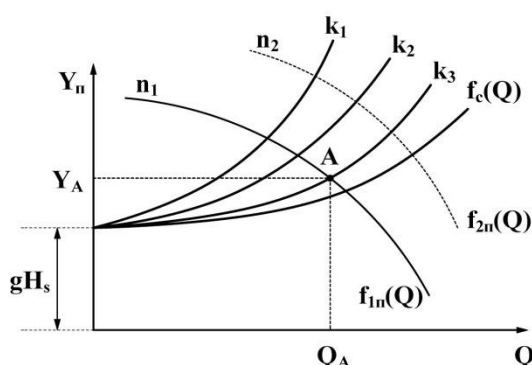
Како је већ у одељку 6.1. речено, да је збир висинске и пјезометриске висине једнак статичком напору H_s , а укупни губитак струјне енергије $R_m = k'Q^m$, долазимо до идентичности:

$$Y_{\Pi} = gH_s + R_m = gH_s + k'Q^m = f_c(Q) \quad (6.7')$$

односно

$$Y_{\Pi} = Y_c \quad (6.8)$$

Што значи да је потребни јединични рад пумпе функција протока Q , па је у случају изразито турбулентног струјања ($m=2$) график функције (6.7') парабола, која представља **карактеристику цевовода** са којим пумпа чини целиу. Једначина (6.8) представља основ у прорачунома цевовода са пумпом.



Заправо две криве $Y_{\Pi} = f_{\Pi}(Q)$ на слици (Сл.41) и крива $Y_c = f_c(Q)$ на слици (3.9), представљене на једно грфику, даће нам тачку пресека А која представља **радну тачку** пумпе (Сл.42).

Сл. 42. Графичко одређивање радне тачке пумпе

Са графика имамо да пумпа ради под одређеним режимом (Q_A) и (Y_{Π}). Како пумпу покреће електромотор, то би значило да режим можемо да променимо бројем обртаја електромотора из $n_1 \rightarrow n_2$ (в. Сл.42), што се у пракси не ради. Режим рада пумпе мења се на другачији начин. Окретањем вентила, мењамо вредности локалних отпора (ξ_i), тиме у ствари коефициент карактеристике цевовода k' . На пример смањењем протока Q повећава се оптерећење и обратно.

Цевоводи се данас пројектују тако, да су пречници улазног цевовода D_u и потисног цевовода D_p једнаки ($D_u = D_p$), зато сто су и прикључне компоненте на пумпи једнаких пречника, што за последицу има да су и средње брзине усисног и потисног цевовода једнаке $v_1 = v_2$, то онда и јединични рад пумпе на основу (6.4) и (6.5) има облик:

$$Y_{\Pi} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{p_{m\Pi} + p_{v\Pi}}{\rho},$$

а за инсталације код којих се пумпом остварују веома велики притисци, где је $p_{m\Pi} \gg p_{v\Pi}$, јединични рад пумпе биће

$$Y_{\Pi} \approx \frac{p_{m\Pi}}{\rho} = \frac{p}{\rho} \quad \text{a)}$$

- Прва и основна карактеристика свих пумпи је капацитет или проток који пумпа даје $Q = [\frac{m^3}{s}]$,
- Друга карактеристика је јединични рад кола пумпе $Y_{\Pi} = [\frac{J}{kg}]$.

Сваки килограм течности, који прође кроз пумпу, добије јединични рад колапумпе Y_{Π} , чиме јој се за толико повећа струјна енергија одакле је **корисна снага пумпе N_k** једнака:

$$N_k = \rho Q Y_{\Pi}, \quad [W] \quad (6.9)$$

а ако се корисна снага пумпе изражава у [kW],

$$N_k = \frac{\rho Q Y_{\Pi}}{1000}, \quad [kW] \quad (6.10)$$

У случају, да је пумпа у инсталацији за остваривање веома високих притисака једначина а), корисна снага пумпе је:

$$N_k = \rho Q \quad (6.11)$$

Стварни проток који пумпа обезбеђује цевоводу заправо је мањи него технички проток који би пумпа обезбеђивала, да нема губитака запремине у процепима између нпр. зупчаника (код зупчастих пумпи) или евентуалног цурења радне течности, што се изражава запреминским степеном корисног дејства η_v , па се стварни проток израчунава

$$Q = \eta_v Q_T, \quad (6.12)$$

при чему је Q_T технички проток пумпе који се рачуна помоћу **специфичног протока q** који представља запремину радне течности по једном обртају кола пумпе [m^3 / o], тј.

$$Q_T = \frac{q n}{60}, \quad (6.13)$$

Потребна снага за погон пумпе N :

$$N = \frac{N_k}{\eta} \quad (6.14)$$

Где је η -укупни степен корисног дејства и чине га η_v, η_h -хидраулички коефициент корисног дејства, η_m - механички степен корисног дејства (даје произвођач), $\eta \approx 0.8$:

$$\eta = \eta_v \eta_h \eta_m.$$

- Трећа основна карактеристика пумпе је корисна снага N_k
- Четврта карактеристика је снага за погон пумпе N (или степен корисног дејства).

6.3. ХИДРАУЛИЧКИ НАГИБ ЦЕВОВОДА ШЕЗИЈЕВ ОБРАЗАЦ

Хидраулички нагиб цевовода је појам који је директно повезан са губитком струјне енергије услед трења R_v - образац (5.7), односно падом притиска услед трења, при кретању течности кроз праву кружну цев Δp - образац (5.2). У петом поглављу овог излагања лако се дошло до једнакости која повезује ове две величине:

$$R_v = \frac{\Delta p}{\rho} = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2}, \quad (5.7)$$

Ова једнакост представља Дарсијев образац за губитак струјне енергије услед трења, по јединици масе течности и важи за пуне цеви кружног попречног пресека. Ако цеви нису кружне (вентилационе) или су делимично испуњене користи се хидраулички радијус $R_h = A/O$, па Дарсијев образац добија облик:

$$R_v = \lambda \frac{l}{4R_h} \frac{v^2}{2}, \quad (5.7')$$

Оби обрасци користе се у енергетским изразима кретања течности, али код израза представљених висинама, добијамо висину губитка струјне енергије:

$$h_v = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g}, \quad (5.8)$$

$$h_v = \lambda \frac{l}{4R_h} \frac{v^2}{2g}, \quad (5.8')$$

за пуне и делимично испуњене цеви.

Хидраулички нагиб цевовода је бездимензиска величина и представља однос висине губитка струјне енергије услед трења и дужине тока течности:

$$I = \frac{h_v}{l}, \quad (6.15)$$

Овим обрасцем и (5.8') добијамо израз за брзину течности у цеви:

$$v = C \sqrt{IR_h}, \quad (6.16)$$

који представља **Шезијеву формулу**, а коефициент C Шезијев коефициент.

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}, \quad (6.17)$$

Овај коефициент израчунава се на исти начин као и коефициент трења λ .

Образац (6.16) може се написати и у облику:

$$v = S\sqrt{I}, \quad (6.18)$$

у коме је $S=C\sqrt{R_h}$ и назива се **модул брзине**, изражава се у $[m/s]$.

Шезијева формула, користи се за прорачун, како простих тако и сложених ценовода, односно Хидрауличких система без примене Бернулијеве једначине и Дарсијевог обрасца. Овде се користи таблички метод који је заснован на Шезијевој формули.

У ту сврху за израчунавање коефициента C , постоје и формуле добијене емпириским путем, од којих су предложене, у уџбенику [1], следеће:

Манингова формула:

$$C = \frac{1}{n} R_h^{\frac{1}{6}}, \quad (6.18)$$

формула Павловског:

$$C = \frac{1}{n} R_h^y,$$

формула Агроскина:

$$C = \frac{1}{n} + 17,72 \log R_h.$$

У овим обрасцима n -коефициент хравости, а y -изложилац степена који се израчунава.

Тако су на пример према [1] вредности коефициента n следеће (за челичне и ливене):

$n = 0,011$ - за нове, чисте цеви

$n = 0,012$ - обичне, нормалне цеви*

$n = 0,014$ - за старе, прљаве цеви,

а експонент y се рачуна:

$$y \approx 1,5\sqrt{n}, \quad \text{за} \quad 0,1 < R_h < 1$$

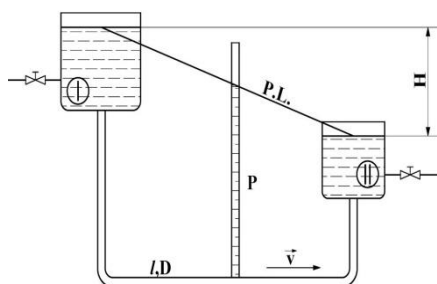
$$y \approx 1,3\sqrt{n}, \quad \text{за} \quad 1 < R_h < 3, \quad R_h = [m].$$

Може се видети, да Шезијев коефициент C не зависи од Рејнолдсовог броја R_e , што значи да овај коефициент важи за изразито турбулентно ступање, које је и најчешћи случај код водовода на пример.

6.4. ХИДРАУЛИЧКИ ПРОРАЧУН ДУГОГ ПРОСТОГ ЦЕВОВОДА

ПРИМЕНОМ ШЕЗИЈЕВЕ ФОРМУЛЕ

За ову врсту прорачуна, потребно је да се изведу изрази, на бази Шезијеве формуле. У том циљу посматра се једнолико кретање течности кроз дуги прост цевовод константног попречног пресека (Сл.43), у коме течност струји на основу разлике нивоа течности у резервоарима I и II.



Сл. 43. Прост цевовод

На основу Бернулијеве једначине, за нивое течности у резервоарима, лако се уочава да је

$$H = h_m = h_v,$$

на основу чега је хидраулички нагиб (6.15) код овог цевовода:

$$I = \frac{H}{l} = \frac{\lambda}{8g} \frac{v^2}{R_h}. \quad (6.19)$$

Запремински проток дат је изразом:

$$Q = Av = AC\sqrt{R_h I}, \quad (6.20)$$

У овом изразу све вредности су константне за представљени цевовод, осим хидрауличног нагиба. Пречник D је константан, па је и површина попречног пресека A константна, хидраулички радијус R_h , а и Шезијев коефициент C због изразито турбулентног струјања. Зато ове константне величине можемо да заменимо једном константом K која представља **модул** или **карактеристику протока**:

$$K = AC\sqrt{R_h}, \quad (6.21)$$

одакле је израз за проток:

$$Q = K\sqrt{I}. \quad (6.22)$$

Заменом I из (6.19) у (6.22) добијамо проток у облику једначине:

$$Q = K\sqrt{\frac{H}{l}}. \quad (6.23)$$

Ова једначина је **основна једначина једноликог струјања течности кроз просте дуге цевоводе**.

Чешће се једначина (6.23) користи у облику који изражава губитак струјне енергије H , односно неопходну разлику нивоа течности:

$$H = \frac{l}{K^2} Q^2, \quad (6.24)$$

у којој l/K^2 , представља **хидраулички отпор** цевовода.

Модул протока K код пуних цеви кружног пресека ($4R_h = D$), применом Манингове формуле, може се представити изразом:

$$K = \frac{D^{2.667}}{4} \frac{1}{n} R_h^{\frac{1}{6}} R_h^{\frac{1}{2}} = \frac{D^{2.667}}{4} \frac{1}{n} \left(\frac{D}{4}\right)^{0.667} \Rightarrow K=K(D,n)$$

одавде добијамо да је модул протока, за наведене коефицијенте храпавости (в.6.3)

$$\begin{aligned} K &= 28,31 D^{2,667} & (n=0,011) \\ K &= 25,95 D^{2,667} & (n=0,012) \\ K &= 22,24 D^{2,667} & (n=0,014) \end{aligned} \quad (6.25)$$

Модул брзине S , на исти начин, код пуних цеви кружног пресека је:

$$S = C\sqrt{R_h} = \frac{1}{n} \left(\frac{D}{4}\right)^{0,667} \Rightarrow S=S(D,n) \quad (6.26)$$

Како модул протока K и модул брзине S , зависе једино од пречника и врсте цеви у цевоводу, на основу стандардизованих вредности унутрашњих пречника цеви D , направљене су табеле, чије су колоне израчунати делови образаца: за брзину v -(S), за проток Q -(K), за разлику нивоа H -(l/K^2), чиме је у многоме олакшан и убрзан прорачун дугог простог цевовода. У литератури која је коришћена [2] налази се једна оваква табела(таб.14), у којој се налазе поменуте вредности, за случај нормалних челичних цеви ($n=0,012$). Треба напоменути да су пречници D у табели дати у милиметрима (mm), а у осталим величинама фигурише метар (m). Због упутства за коришћење наведене табеле, овде бих изложила заглавље са прве две врсте у њој

Табела 11. **Вредности модула брзине и протока** (део табеле 14. из [2])

НОРМАЛНЕ ЦЕВИ ($n=0,012$; $1/n = 83,33$)				
D Mm	S m/s	K l/s	$K^2/1000$ l^2/s^2	$1000/K^2$ s^2/l^2
40	3,86	2,25	0,005	197,531
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Дакле, дужина цевовода l увек је позната. У прорачуну треба одредити D, Q и H .

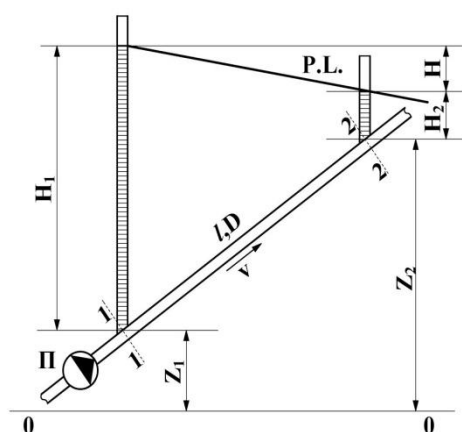
Ако треба одредити разлику нивоа H , такву да кроз цев одређеног пречника D протиче вода у количини Q , онда се прво за задати пречник D , из табеле 11, нађе вредност l/K^2 , па се на основу те вредности ,замене у једначини (6.23) израчуна тражена разлика нивоа H .

Проблем код хидрауличких прорачуна, дугих простих цевовода, је у томе да од три величине (Q, H, v), ако је једна непозната, лако се нађе трећа, али је чешћи проблем да се зна само једна величина, па треба "уклопити" друге две, а да цевовод буде у функцији. Ту постоји низ ограничења који се више стичу искуством и о којима треба водити рачуна. Као нпр: колика је издашност извора који би напајао цевовод $Q_{\max}$; затим да ли се исплати за мали проток правити цевовод $Q_{\min}$; разлика нивоа H не може бити много велика, је се јављају високи притисци, што изазива пуцање цеви. Најважнија ограничења су везана за брзину v : мале брзине су лоше због малих протока, па се из течности издвајају примесе, које се таложе што "квари" храпавост. При великим брзинама примесе имају абразивно дејство и изазивају хидраулички удар који изазива чак и хаварије. Зато постоје стручне препоруке за брзине, које су дате са стандардним пречницима, за различите врсте течности. У табели 12 дате су неке од тих вредности, али за дуге просте цевоводе са пумпом.

Табела 12. **Препоручене брзине за цевоводе са пумпом**

$D_u = D_p$	водоводи	уља
усисни цевовод $v \text{ (m/s)}$	0,8 ÷ 1,2	< 1
потисни цевовод $v \text{ (m/s)}$	0,85 ÷ 2	4 ÷ 6

Заправо, изведени обрасци у овом одељку, применљиви су и за дуги цевовод, кроз који се кретање течности остварује радом пумпе P (Сл.44). Код овог цевовода



између преска 1-1 и 2-2, нема локалних отпора, а пречник цеви D је целом дужином l , константан, што значи и да су брзине $v_1 = v_2 = v$, што је последица једначине континуитета $Q = vA = \text{const}$.

Висине H_1 и H_2 , које би показивали пијезометри у 1-1 односно 2-2 су:

$$H_1 = \frac{p_{m1}}{\rho g}, \quad H_2 = \frac{p_{m2}}{\rho g},$$

p_{m1} и p_{m2} надпритисци у наведеним пресцима.

Сл. 44. Дуги прост цевовод са пумпом

Бернулијева једначина за пресеке 1-1 и 2-2, посматрајућег цевовода је:

$$\alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_m,$$

при чему су притисци $p_1 = p_a + p_{m1}$ и $p_2 = p_a + p_{m2}$, а висина губитка струјне енергије $h_m = h_v$, јер се у овом случају, јавља само отпор трења, па једначина добија облик:

$$\left(\frac{p_{m1}}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_{m2}}{\rho g} + z_2 \right) = h_v,$$

односно, кад заменимо висине:

$$(H_1 + z_1) - (H_2 + z_2) = h_v,$$

при чему је лева страна једначине, једнака разлици нивоа течности у пијезометрима:

$$H = h_v.$$

Дакле, потребна разлика притисака, односно нивоа H , да течност може да струји кроз наведени цевовод, протоком Q , троши се само на савлађивање отпора трења.

Ако је цевовод још и хоризонталан ($z_1 = z_2$), имаћемо једначину:

$$H = H_1 - H_2 = \frac{p_{m1} - p_{m2}}{\rho g} = h_m,$$

и још ако течност у пресеку 2-2 истиче у атмосферу, па је $p_{m2} = 0$, основна једначина једноликог струјања код дугог простог цевовода имаће облик:

$$p_{m1} = \rho g \frac{l}{K^2} Q^2. \quad (6.27)$$

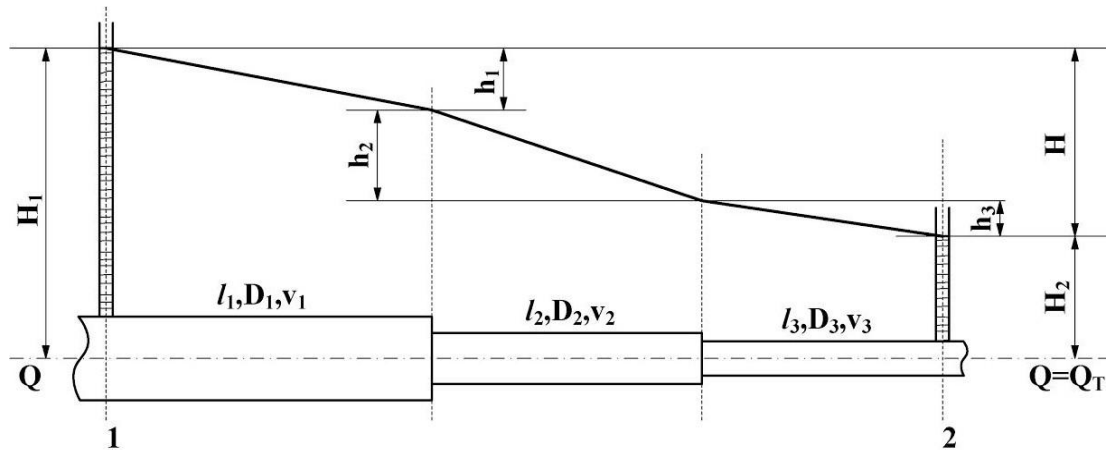
Надпритисак p_{m1} обезбеђује пумпа, а модул протока K налази се у табели 12, за задати пречник D .

6.4.1 ДУГИ ПРОСТ ЦЕВОВОД СА РЕДНО СПОЈЕНИМ ЦЕВИМА

Овде се, заправо мисли на дуги прост цевовод, који се састоји из више деоница различитог пречника ($D_1 \neq D_2 \neq D_3 \neq \dots \neq D_n$). Цеви су постављене једна иза друге, тако да чине **редну везу**. Свака деоница има своју своју дужину l_i , ($i=1,2,3,\dots,j$), и кроз сваку протиче иста колочина течности $Q = Q_T = \text{const.}$ (Q_T -транзитни проток). Самим тим, што су различити пречници и различите дужине деоница, биће различити и модули протока ($K_1 \neq K_2 \neq \dots \neq K_n$), а то подразумева, да ће свака деоница цевовода имати свој хидраулички отпор, $\frac{l_i}{K_i^2}$, и свој губитак струјне енергије h_i односно:

$$h_i = \frac{l_i}{K_i^2} Q^2, \quad \text{где је } i=1,2,3,\dots,j\text{-број деоница}$$

На слици 45 приказан је један овакав цевовод састављен из три дела на коме ће бити објашњен приступ овом проблему ($j=3$).



Сл. 45. Цевовод са редно спојеним цевима

У пресеку 1-1, пијезометар би показивао да се течност подигла до неке висине H_1 , а у пресеку 2-2, други пијезометар би измерио висину подизања течности H_2 . Пијезометриска линија између ова два пресека изломљена, зато што линије губитака струјне енергије h_{v1} , h_{v2} и h_{v3} имају различите нагибе у односу на референтну раван, јер свака за себе има свој хидраулички отпор. Ипак разлика нивоа од пресека 1-1 до 2-2 и разлике висина у деоницама повезане су једначином:

$$H = H_1 - H_2 = \sum_{i=1}^j h_i = h_{v1} + h_{v2} + h_{v3} = h_{v1+2},$$

$$H = \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{v_2^2}{2g} + \lambda_3 \frac{l_3}{D_3} \frac{v_3^2}{2g}$$

јер су $h_1 \approx h_{v1}$, $h_2 \approx h_{v2}$ и $h_3 \approx h_{v3}$ са слике, висине изгубљене само на савлађивању отпора трења, што се може потврдити Бернулијевом једначином постављеном од пресека 1-1 до 2-2:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_{m1+2},$$

Ако се занемаре брзинске висине, као и локални отпори на местима где су цеви спојене, јер се сматра да су деоноце већих дужина па су губици услед трења знатно већи од наведених, па можемо рећи да је $h_{m1+2} \approx h_{v1+2}$. Притисци су $p_1 = p_a + p_{m1}$ и $p_2 = p_a + p_{m2}$, па се Бернулијева једначина своди на облик:

$$\frac{p_{m1} - p_{m2}}{\rho g} \approx h_{v1+2} = H.$$

Пошто је проток Q , свуда исти, укупна разлика нивоа H , потребна да би се течност кретала кроз наведени цевовод је:

$$H = Q^2 \left(\frac{l_1}{K_1^2} + \frac{l_2}{K_2^2} + \frac{l_3}{K_3^2} \right) = Q^2 \sum_{i=1}^j \frac{l_i}{K_i^2} \quad (6.28)$$

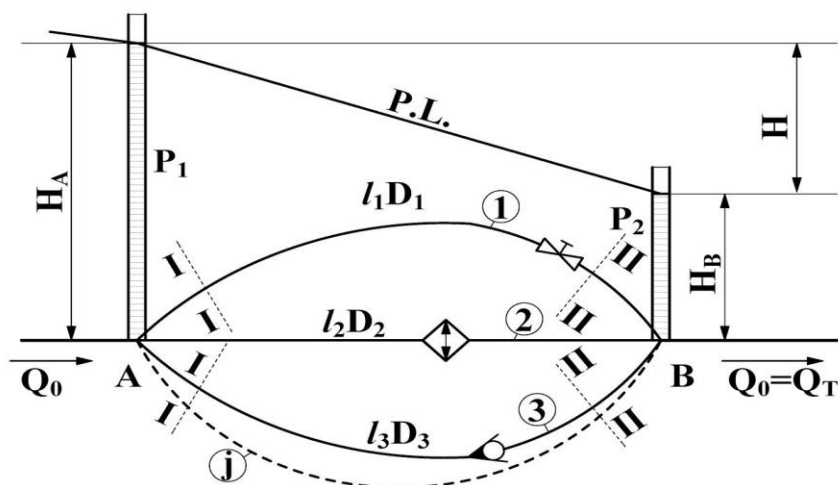
На почетку цевовода требало обезбедити притисак:

$$\frac{p_{m1}}{\rho g} = \frac{p_{m2}}{\rho g} + Q^2 \sum_{i=1}^j \frac{l_i}{K_i^2}, \quad (6.28')$$

а ако би течност истицала у атмосферу $p_{m2} = 0$, а пијезометриска линија за тај пример, на слици је представљена испрекиданом линијом (стрма наниже).

6.5. ПРОРАЧУН СЛОЖЕНОГ ПАРАЛЕЛНОГ ЦЕВОВОДА

Сложени паралелни цевовод, заправо је састављен из више (j) простих, паралелно везаних цевовода. Шема једног таквог цевовода приказана је на слици 46.



Сл. 46. Сложени паралелни цевовод

Течност магистралном цеви, протоком Q_0 , доспева у тачку А (чвор), одакле се грана на три дела (у овом примеру $j=3$), који се поново састају у чвору В, одакле наставља да тече истим протоком Q_0 , односно транзитним протоком. Све три гране су различитих дужина, (l_1, l_2, l_3)- l_i , различитих пречника (D_1, D_2, D_3)- D_i , и свака грана у себи може да има различите врсте локалних отпора (вентил, филтер, неповратни вентил ...). Чворови А и В су заједнички са све гране. У чвору А пијезометар P_1 би показивао висину $H_A = \frac{p_{mA}}{\rho g}$, а у чвору В пијезометар P_2 би показивао висину $H_B = \frac{p_{mB}}{\rho g}$, при чему су p_{mA} и p_{mB} надпритисци у посматраним оворовима. На рачун разлике ових притисака, течност струји кроз сваку грану цевовода и то са истим падом притисака у свакој грани.

$$H = \frac{p_{mA} - p_{mB}}{\rho g}. \quad (6.29)$$

Поставићемо Бернулијеву једначину за грану 1, у пресецима I-I (непосредно иза чвора А) и II-II (непосредно испред чвора В):

$$\frac{v_I^2}{2g} + \frac{p_I}{\rho g} = \frac{v_{II}^2}{2g} + \frac{p_{II}}{\rho g} + h_{m1}.$$

При чему су: $v_I = v_{II}$; $p_I = p_a + p_{mI}$ и $p_{II} = p_a + p_{mII}$; на основу чега заменом у предходну једначину, добијамо висину губитка струјне енергије у грани 1 која је:

$$h_{m1} = \frac{p_{mI} - p_{mII}}{\rho g},$$

На потпуно исти начин добићемо висину губитака струјне енергије у грани 2, 3...j, зато што су притисци у одабраним пресецима (I-I и II-II) приближно једнаки, односно:

$$h_{m1} = h_{m2} = h_{m3} = \dots = h_{mj}, \quad (6.30)$$

Што доводи до закључка да је разлика нивоа између чворова Н, једнака висини губитака струјне енергије у свакој паралелној грани појединачно h_{mi} :

$$H = h_{mi}. \quad (6.30')$$

Из једначина (6.30) и (6.30'), дефинисан је **Други закон Хидраулике као**: губици струјне енергије у паралелним гранама сложеног цевовода међусобно су једнаки [1].

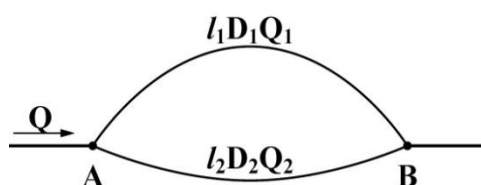
Свака грана сложеног паралелног цевовода има и свој модул протока $K_1 \neq K_2 \neq K_3 \neq \dots \neq K_i$ па онда сходно томе свака грана има и свој проток Q_i који је:

$$Q_i = K_i \sqrt{\frac{H}{l_i}}, \quad i=1,2,\dots,j \quad (6.31)$$

На основу Првог закона Хидраулике $\sum Q_i = 0$, у чвору А: $Q_0 - Q_1 - Q_2 - Q_3 - \dots - Q_i = 0$, тако и у чвору В: $Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_i - Q_0 = 0$, јер збир свих протока који улазе у чвор треба да буде једнак збиру свих протока који из њега излазе.

. За прорачун је битно да се одреди укупни проток кроз цевовод Q_0 , који представља збир протока сваке гране (6.31) која чини цевовод, па би укупни проток био дефинисан једначином:

$$Q_0 = \sqrt{H} \sum_{i=1}^j \frac{K_i}{\sqrt{l_i}}. \quad (6.32)$$



Сл. 47.Паралелни цевовод са две гране

Интересантно је да овај прорачун спроведемо на примеру најједноставнијег паралелног цевовода са две гране ($j=2$). Овакав цевовод приказан је на слици 47. За сваку грану овог цевовода можемо да поставимо једначине:

$$Q_1 = K_1 \sqrt{\frac{H}{l_1}}, \quad Q_2 = K_2 \sqrt{\frac{H}{l_2}},$$

а укупан проток:

$$Q_0 = \sqrt{H} \left(\frac{K_1}{\sqrt{l_1}} + \frac{K_2}{\sqrt{l_2}} \right).$$

Ако би из неког разлога, ове две цеви заменили једном, која би давала исти притисак, исти проток и исти пад H , за ту нову цев било би:

$$Q_0 = K_0 \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{l_0}},$$

одакле изједначавањем последње две једначине добијемо:

$$\frac{K_0}{\sqrt{l_0}} = \frac{K_1}{\sqrt{l_1}} + \frac{K_2}{\sqrt{l_2}},$$

а после сређивања:

$$l_0 = \frac{K_0^2 l_1 l_2}{(K_1 \sqrt{l_2} + K_2 \sqrt{l_1})^2}.$$

Ако још одаберемо исте пречнике, $D_1=D_2=D_0$ онда ће и модули протока бити једнаки односно $K_1=K_2=K_0$, добојамо једначину која се назива Дипијев (Dupuit) образац:

$$l_0 = \frac{l_1 l_2}{(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2})^2}. \quad (6.33)$$

Сложенији случај, а и чешћи, је када се сложени паралелни цевовод састоји из већег броја грана (j). Једначина (6.31) и овде служи за одређивање протока у појединим гранама а једначина (6.32) да се одреди разлика притисака H , која обезбеђује проток Q_0 . За сваку грану је познато стање цеви (n) и пречник, па се модули отпора $K_1, K_2, \dots, K_j$, лако израчунавају (помоћу образаца (6.25) или препорученом табелом 11). Такође су нам познате и дужине l_i сваке гране. Са овим познатим величинама, проток у савакој грани можемо изразити преко једног познатог протока Q_1 , следћим једнакостима:

$$Q_2 = Q_1 \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}, \quad Q_3 = Q_1 \frac{K_3}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_3}}, \quad \dots \quad Q_j = Q_1 \frac{K_j}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_j}} \quad (6.34)$$

па би на основу $Q_0 = \sum Q_i$ добили израз за укупни проток из кога се рачуна Q_1 :

$$Q_0 = Q_1 \left(1 + \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} + \frac{K_3}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_3}} + \dots + \frac{K_j}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_j}} \right), \quad (6.35)$$

Разлику притисака H лако рачунамо применом обрасца (6.24), ако га применимо на било коју од грана посматраног цевовода:

$$H = \frac{l_1}{K_1^2} Q_1^2. \quad (6.36)$$

Прорачун сложеног паралелног цевовода може се урадити и другим поступком, који у основи не одступа од предходног, јер се и овде на основу познатог укупног протока Q_0 и помоћу коефицијената карактеристике k_i , који су добијени из израза за губитке струјне енергије h_{mi} , за сваку грану посебно, налази проток Q_1 , помочу ког се после лако израчунају и остали протоци сваке гране.

И за овај поступак, морају бити познате дужине l_i и пречници D_i , за сваку грану цевовода, као и коефицијенти храпавости n . Губитак струјне енергије у грани 1 биће:

$$h_{m1} = \left(\lambda_1 \frac{l_1}{D_1} + \sum \xi_{i1} \right) \frac{v_1^2}{2g},$$

односно, када средњу брзину v_1 изразимо помоћу протока Q_1 и попречног пресека цеви A_1 , из једначине за проток $v_1 = Q_1 / A_1$

$$h_{m1} = \left(\lambda_1 \frac{l_1}{D_1} + \sum \xi_{i1} \right) \frac{Q_1^2}{2g A_1^5}.$$

Коефицијент отпора услед трења λ_1 , налазимо помоћу образаца наведених у (5.3.1.6), а коефицијенте локалних отпора, ако нису познати, можемо наћи у (5.3.2). За једну грану, величине $(l, D, \lambda, \sum \xi, A)$ су константне па се могу заменити једном константом, за грану 1 константом k_1 , за грану 2 константом k_2 , за грану i константу k_i , па тако имамо:

$$k_1 = \left(\lambda_1 \frac{l_1}{D_1} + \sum \xi_{i1} \right) \frac{1}{2g A_1^5},$$

Константе $k_1, k_2, \dots, k_i$, су коефицијенти карактеристике. Губитак струјне енергије у грани 1

$$h_{m1} = k_1 Q_1^2. \quad (6.37)$$

На овај начин можемо да израчунамо губитак струјне енергије за сваку грану $i=1,2,\dots,j$.

$$h_{mi} = k_i Q_i^2,$$

Одакле на основу Другог закона Хидраулике (6.30) лако добијамо изразе за протоке у свакој грани, изражене у функцији једног познатог протока Q_1 и унапред израчунатих коефицијената карактеристике k_i . Тако добијамо:

$$Q_2 = Q_1 \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}; \quad Q_3 = Q_1 \sqrt{\frac{k_1}{k_3}}; \quad \dots \quad Q_j = Q_1 \sqrt{\frac{k_1}{k_j}}. \quad (6.38)$$

Проток Q_1 добијамо на основу Првог закона Хидраулике у ком за један чвор (А) важи

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_j,$$

одакле заменом (6.38) добијамо:

$$Q_0 = Q_1 \left(1 + \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} + \sqrt{\frac{k_1}{k_3}} + \dots + \sqrt{\frac{k_1}{k_j}} \right). \quad (6.39)$$

Помоћу израза (6.39) лако израчунавамо проток Q_1 , када је већ познат укупан проток Q_0 , док разлику притисака H можемо израчунати из било које од једначина за губитак струјне енергије h_{mi} (6.30').

6.6 ПРОСТ ЦЕВОВОД СА УСПУТНОМ ПОТРОШЊОМ

Цевоводи који имају исту количину течности на улазу Q_0 , као и на излазу из њега $Q_0=Q_T$, су цевоводи са тзв. транзитним протоком и то су били сви цевоводи посматрани до сада. Чешћи случај је да се једна количина течности доводи у цевовод Q_0 , а да сасвим друга количина излази из њега Q_T . То је зато што се нека количина течности Q , троши, на путу течности између почетног и крајњег пресека цевовода. Тада вжи једначина:

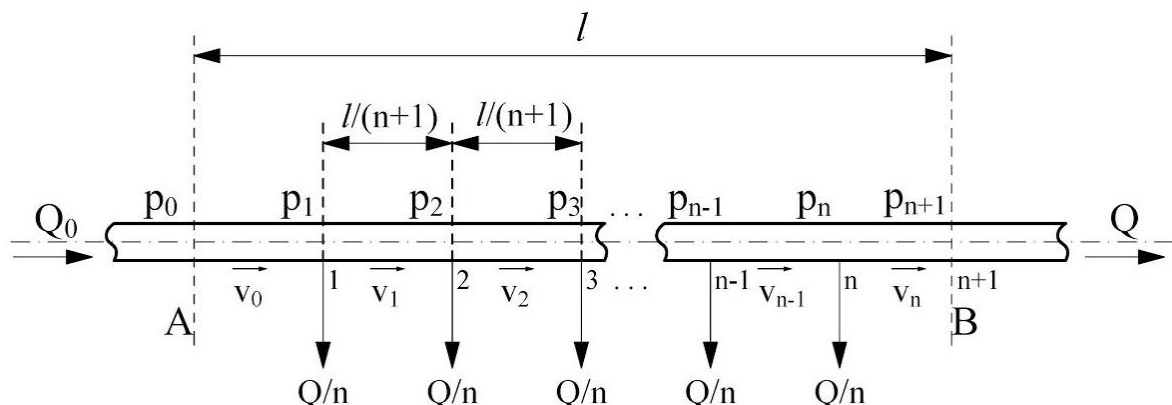
$$Q_0 = Q_T + Q \quad (6.40)$$

На путу од улаза до излаза, један део течности може да се троши на разне начине, на разним местима и разним растојањима, чиме прорачун оваквих цевовода постаје врло сложен и компликован проблем. Најједноставнији случај је потрошња течности у једнако удаљеним тачкама са истом потрошњом.

6.6.1. ПОТРОШЊА ТЕЧНОСТИ У ПОДЈЕДНАКО УДАЉЕНИМ ТАЧКАМА

СА ИСТОМ ПОТРОШЊОМ

На слици (Сл.48) представљен је цевовод, код кога је потрошња течности у свакој тачки иста (Q/n) и сва места потрошње су на једнаким растојањима, $l/(n+1)$, при чему је n -број места потрошње, на некој дужини l .



Сл. 48. Цевовод са потрошњом течности у подједнако удаљеним тачкама

У свакој деоници, између тачака [1-2], [2-3], ... [(n-1)-n], [n-(n+1)], различите су брзине а различити су и притисци. У првом преску притисак је p_0 , а у последњем p_{n+1} . Прорачун се почиње од последње деонице, ка првој, чиме се добије $n+1$ једначина па имамо:

$$\frac{p_n - p_{n+1}}{\rho g} = \lambda \frac{l}{(n+1)D} \frac{v_n^2}{2g} = \lambda \frac{l}{(n+1)} \left(\frac{4Q_T}{D^2 \pi} \right)^2 = \frac{16\lambda l}{2g(n+1)D^3 \pi^2} Q_T^2 = M Q_T^2,$$

где је

$$M = \frac{16\lambda l}{2g(n+1)D^3 \pi^2}.$$

Даље би редом за сваку деоницу било:

$$\frac{p_n - p_{n-1}}{\rho g} = M \left(Q_T + \frac{Q}{n} \right)^2,$$

$$\frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{\rho g} = M \left(Q_T + 2\frac{Q}{n} \right)^2,$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = M \left(Q_T + (n+1)\frac{Q}{n} \right)^2,$$

$$\frac{p_0 - p_1}{\rho g} = M \left(Q_T + n\frac{Q}{n} \right)^2.$$

Разлику висина од почетног до крајњег места потрошње (у замишљеним пиезометрима), добијамо када саберемо све наведене једначине, јер укупна разлика нивоа и јесте последица свих падова притисака у свакиј деоници посебно. Тако имамо:

$$а) \dots \frac{p_0 - p_{n+1}}{\rho g} = M \sum_{i=0}^n \left(Q_T + \frac{i}{n} Q \right)^2 = M \left[(n+1) Q_T^2 + \sum_{i=0}^n 2 \frac{i}{n} Q_T Q + \sum_{i=0}^n \frac{i^2}{n^2} Q^2 \right].$$

Даље математичком индукцијом долазимо до следећих једнакости:

$$\sum_{i=0}^n 2 \frac{i}{n} = \frac{2}{n} (1+2+\dots+n) = \frac{2}{n} (1+n) \frac{n}{2} = 1+n$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n^2} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{1}{n^2} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{(2n+1)(n+1)}{6n},$$

помоћу којих једначину а) сводимо на облик:

$$\frac{p_0 - p_{n+1}}{\rho g} = M \left[(n+1) Q_T^2 + (n+1) Q_T Q + \frac{(2n+1)(n+1)}{6n} Q^2 \right],$$

$$б) \dots \frac{p_0 - p_{n+1}}{\rho g} = \frac{16\lambda l}{2g \pi^2 D^3} \left(Q_T^2 + Q_T Q + \frac{2n+1}{6n} Q^2 \right).$$

Како је већ познато, да је разлика нивоа у замишљеним пијезометрима на првом и на последњем пресеку једнака:

$$в) \dots\dots\dots H = \frac{p_0 - p_{n+1}}{\rho g} = \frac{p_{m0} - p_{m(n+1)}}{\rho g} = \frac{p_A - p_B}{\rho g} = H_A - H_B,$$

добиамо изједначавањем једначина б) и в)

$$H = \frac{16\lambda l}{2gD^5\pi^2} (Q_T^2 + Q_T Q + \frac{2n+1}{6n} Q^2). \quad (6.41)$$

У одељку (6.4) овог излагања разлику нивоа H изразили смо помоћу хидрауличног отпора цевовода (l/K^2) , добијену из Шезијевог обрасца (6.24). Хидраулички отпор цевовода може се развити:

$$\frac{l}{K^2} = \frac{l}{A^2 C^2 R_h} = \frac{16\lambda}{D^5 \pi^2 8g} \frac{l}{D} = \frac{16\lambda l}{2g \pi^2 D^5},$$

где су A -попечни пресек, C -Шезијев коефициент, R_h -хидраулички радијус. Сада израз (6.41) добија коначни облик (применом Шезијеве методе) којим је одређена укупна разлика притисака:

$$H = \frac{l}{K^2} (Q_T^2 + Q_T Q + \frac{2n+1}{6n} Q^2) \quad (6.42)$$

Овим смо добили образац за цевовод са потрошњом течности у подједнако удаљеним тачкама, када је број места потрошње n коначан.

6.6.2. НЕПРЕКИДНА УСПУТНА ПОТРОШЊА

Предходно објашњена потрошња течности није потпуна у случајевима када имамо бесконачно много места потрошње тј. $n \rightarrow \infty$. У том случају, лако се долази до израза потребног за прорачун оваквог цевовода, ако се нађе гранична вредност, дела течности која "одлази" из цевовода што би значило да се из израза (6.42) одреди:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{6n} = \frac{1}{3},$$

па би се уврштавањем у наведену једначину добила једначина непрекидне успутне потрошње:

$$H = \frac{l}{K^2} (Q_T^2 + Q_T Q + \frac{1}{3} Q^2) \quad (6.43)$$

У случају да је транзитни проток $Q_T=0$, односно да се течност потроши на дужини l , последњи образац добија облик:

$$H = \frac{1}{3} \frac{l}{K^2} Q^2, \quad (6.44)$$

на основу ког се може закључити да, је губитак струјне енергије при непрекидној успутној потрошњи три пута мањи, него губитак струјне енергије без успутне потрошње. У узбенику [2] образац (6.43) добијен је применом одређеног интеграла на дужини l ,

с обзиром да потрошња течности у овом сличају има особину непрекидности тј. континуалности.

На крају требало би напоменути, да сви наведени цевоводи, припадају простим цевоводима као и да се изнети прорачуни односе на устаљено струјање течности кроз цеви.

Закључак

У уводу последњег дела овог излагања, речено је да постоје сложени цевоводи разгранати и прстенасти. Али у целом овом излагању о њима није речено ништа. Разлог томе је што упуштање у проблематику овако сложених цевовода, залази у додатна изучавања, везана за посебне врсте научне дисциплине из ове области. Тако на пример, прорачун водоводне мреже прстенастог типа, веома је детаљно објашњен у уџбенику [3] препоручене литературе овог излагања. Затим сложени разгранати цевоводи за прераду или транспорт нафте, транспорт природног гаса, воде, водене паре...

Дакле, врста флуида, режими у којима ће се налазити приликом струјања кроз неки цевовод, да ли је могуће постићи квалитативне и квантитативне захтеве, економска оправданост, и много других детаља, пре свега треба да буду услов да се пројекат неког цевовода уопште започне.

Овако сложене пројекте, (као и одржавање постојећих) највероватније обавља читав тим стручњака, који би по мом мишљењу требало да предводе машински инжењери.

Литература

- [4] Чантрак, С., Бенишек, М., Павловић. М., МЕХАНИКА ФЛУИДА ТЕОРИЈА И ПРАКСА, V прерађено и допуњено издање, Машински факултет Београд 1994.г
- [5] Вороњец, К., Обрадовић, Н., МЕХАНИКА ФЛУИДА "Грађевинска књига", Београд,1979.
- [6] Ашковић, Р., ОСНОВИ ХИДРАУЛИКЕ И ПНЕУМАТИКЕ, Машински факултет Универзитета у Београду, Београд 1978.
- [7] Ђорђевић, В., ДИНАМИКА ЈЕДНОДИМЕНЗИСКИХ СТРУЈАЊА ФЛУИДА, Машински факултет Универзитета у Београду, Београд 1995.
- [8] Печорник, М., ТЕХНИЧКА МЕХАНИКА ФЛУИДА, друго порављено издање, "Школска књига", Загреб 1985.
- [9] Петровић, Ј., ХИДРАУЛИКА (Хидраулика и пнеуматика I део), Факултет стројарства и бродоградње, Свеучилиште у Загребу, 2012.
- [10] Протић, З., Недељковић, М., (2006), ПУМПЕ И ВЕНТИЛАТОРИ– проблемаи, решења, теорија. Едиција Механика флуида и хидрауличне машине, Машински факултет Београд пето издање

