

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Индустријски инжењеринг

Предмет: Механика флуида

Број индекса: 2001/2016

Милош Н. Петковић

Примене Бернулијеве једначине
завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Др Слободан Савић, ред.проф. -ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

Бернулијева једначина

При изради овог завршног рада кандидат треба да проучи одговарајућу литературу везану за проблем динамике савршеног флуида. На основу прикупљене и систематизоване материје неопходно је да размотри случај Бернулијевог решавања Ојлерових једначина за случајеве струјања нестишљивог и стишљивог флуида. Ово ће бити полазна основа за извођење Бернулијево једначине за струјање реалне течности. При томе ће посебну пажњу посветити прорачуну губитака струјне енергије. Будући да Бернулијева једначина има широку примену при решавању различитих практичних проблема, потребно је да кандидат у другом делу завршног рада укаже и на могућности конкретне примене ове једначине у техничкој пракси.

Препоручена литература:

- [1] Жижић, Б., *Курс опште физике*, Грађевинска књига, Београд, 1988.
- [2] Обровић, Б., *Механика флуида*, Факултет инжењерских наука, Крагујевац, 2007.
- [3] Протић З., Недељковић М., *Пумпе и вентилатори – проблеми, решења, теорија*, Едиција: *Механика флуида и Хидрауличне машине*, Машински факултет, Београд, 2006.

Ментор

Др Слободан Савић, ред.проф.

У Крагујевцу, децембар 2019. године

Бернулијева једначина

Резиме

За инжењерску анализу струјних проблема у хидраулици најважнија је **Бернулијева једначина**. Скоро сви практични задаци решавају се директно - применом Бернулијеве једначине, уз коришћење – **једначине континуитета**. Значај једначине огледа се у њеном садржају који представља биланс појединих врста флуидне енергије. Циљ овог рада биће да се прикаже примена Бернулијеве једначине на неколико примера.

Кључне речи: Бернулијева једначина, струјање, флуид

Summary

The most important for engineering analysis of current problems is the **Bernuli equation**. Almost all practical problems are solved directly - by applying the Bernoulli equation with its accompanying condition – **the continuity equation**. The significance of the equation is reflected in its content, which represents the balance of individual types of fluid energy. The aim of this paper will be to present Bernoulli's equation in several examples.

Keywords: Bernuli, equation, fluid

Садржај

Садржај	5
Увод.....	6
1. Историја породице Бернули.....	7
2. Бернулијева једначина.....	10
2.1. Развој Бернулијеве једначине	10
2.2. Ојлерова диференцијална једначина за савршени флуид.....	12
2.3. Бернулијево решење Ојлерове једначине.....	15
2.4. Бернулијева једначина за струјање нестишљивог флуида	16
2.5. Бернулијева једначина за струјну цев реалне течности	17
2.6. Препоруке примене Бернулијеве једначине.....	18
3. Примери примене.....	21
3.1. Експериментална инсталација.....	21
3.1.1. Резултати прорачуна.....	24
3.2. Питоова цев	30
3.3. Истицање кроз мале отворе. Торичелијева теорема.....	31
3.3.1. Истицање течности кроз мале отворе, оштрих ивица при сталном нивоу..	34
Закључак	38
Литература.....	39

Увод

Врло важна за инжењерску анализу струјних проблема је Бернулијева једначина. Готово сви практични задаци се решавају тако што се директно примењује Бернулијева једначина са њеним пратећим условом – једначином континуитета. Значај исте се огледа у њеном садржају који представља биланс одређених врста флуидне енергије.

На основу ње описује се Бернулијев принцип који се заснива на међусобној вези између притиска или потенцијалне енергије флуида и његове брзине или његове кинетичке енергије, у струјној цеви (струјном пољу). Принцип је добио име по научнику који га је и формулисао у књизи *Хидродинамика* 1738. године.

Флуидни делићи су под утицајем сопствене масе и притиска, крећу се између тачака са различитим статичким притиском, од већег према мањем. Ако се флуид креће хоризонтално, кроз струјну цев, брзина ће се повећавати ако се та разлика статичког притиска повећава између две тачке, односно између два пресека цеви. Брзина флуида се смањује ако се та разлика статичког притиска смањује. Највећа брзина је тамо где је притисак најмањи, а најмања је тамо где је притисак највећи.

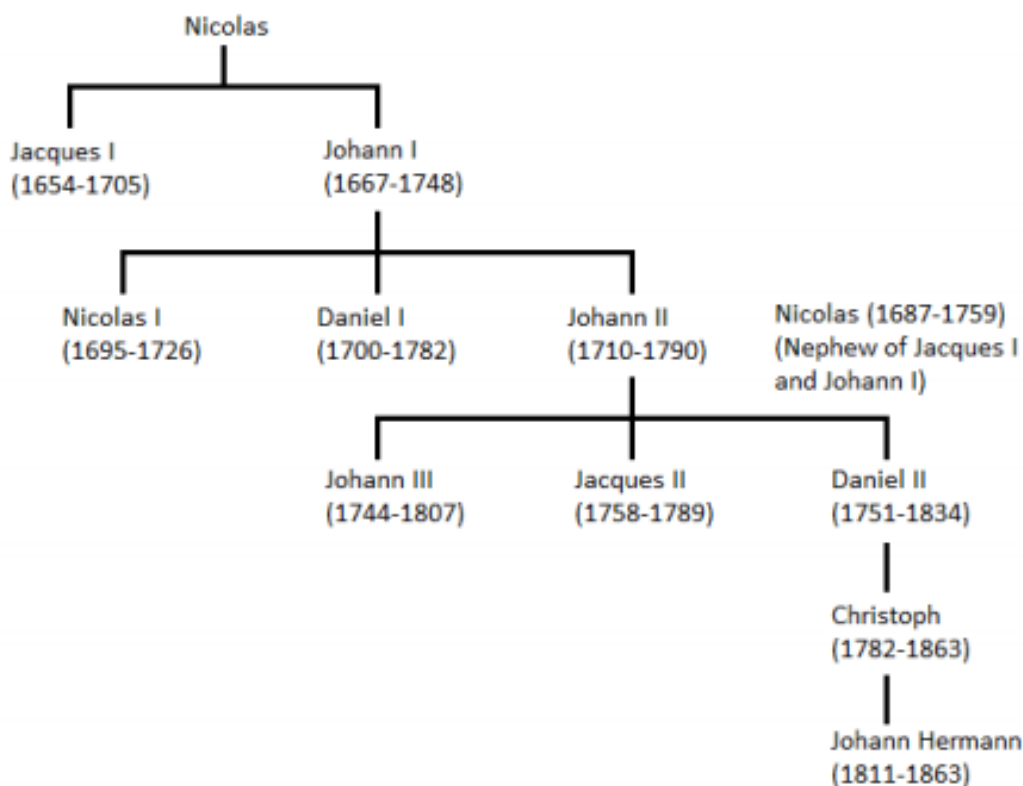
Такође, треба рећи да иако се очување енергије увек примењује, овај облик анализирања те енергије сигурно не описује како се та енергија дистрибуира под прелазним условима. Добра визуализација Бернулијевог ефекта је проток кроз сужење, али та уредна слика не описује течност када први пут укључите проток.

Бернулијева једначина изведена је за стационарно струјање. Међутим, ако промене брзине и протока нису нагле, једначина може да се примени и у тражењу решења таквих проблема, проблема где је нестационарност слабо изражена.

У овом раду је предмет истраживања управо Бернулијева једначина и примена у одређеним областима.

1. Историја породице Бернули

У историји науке значајно место заузима изузетна породица истакнутих швајцарских математичара, Бернули. Посебно се истичу Жак Први (Jacques I), Јохан Први (Johann I) и Данијел Први (Daniel I). Захваљујући труду браће Жака и Јохана, математичке анализе популарност стичу у 18. веку, а Данијел је међу првима користио парцијалне диференцијалне једначине и њему се приписује да је међу „оснивачима математичке физике“. Четири члана ове породице је примљено у Париску академију наука, а најмање 11 њених чланова је дало значајан допринос математици (слика 1.1). Ипак, презиме Бернули се не истиче само у математици, већ и у физици, астрономији, медицини, теологији, биологији, поезији, географији и праву [1].



Слика 1.1. Дрво живота породице Бернули [1]

Бернулијева једначина

Бернулијева једначина је тако названа у част Данијела Бернулија (Daniel Bernoulli, 1700 – 1782). Он је остао упамћен по примени математике у механици, посебно механици флуида, и по свом пионирском раду у области вероватноће и статистике. Био је и међу првима који су покушали да формулишу кинетичку теорију гасова [2].



Слика 1.2. Данијел Бернули [2]

Данијел Бернули је рођен 1700. године у Гронингену у Холандији. Његов отац Јохан, познати математичар, је био одлучан у томе да је за његовог сина најбоље да постане трговац, јер занимања везана за математику нису била финансијски исплатива. Данијел је ипак наставио да проводи много времена учећи математику и упорно је одбијао да постане трговац. На крају, када је имао 13 година, његов отац је коначно одустао, али је ипак одбио да му дозволи да постане математичар па је Данијел уписао медицину. Док је студирао медицину, Данијел је био заинтересован за дело Вилијама Харвија (William Harvey, 1578 – 1657) о раду срца и циркулацији крви (*Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus*), где се сугерише да је срце попут пумпе која „гура“ крв да тече као флуид кроз артерије. То је био почетак Данијеловог истраживања основних правила кретања флуида. Његово интересовање за математику наставило се током његових студија медицине [2].

Једна од области коју је Данијел проучавао био је закон о конзервацији „живе силе“ („*Vis viva*“), односно закон о очувању енергије. Тим проблемом се бавио и на студијама медицине. Писао је докторску дисертацију о механици дисања, примењујући математичку

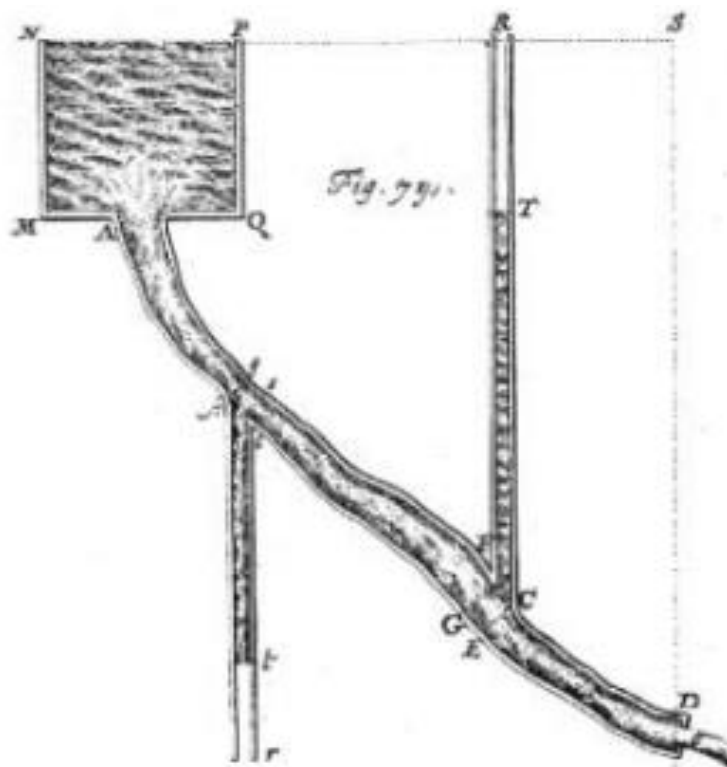
физику у медицини. Док је студирао у Венецији, објавио је књигу „Математичке вежбе“ (Mathematical Exercises). Са 23 године био је у Падови у Италији и док се опорављао од болести, дизајнирао је поуздан пешчани сат за бродове, чији рад не би пореметило ни олујно време. Добио је прву награду Француске академије 1725. године [2].

Након завршених медицинских студија у 21. години, тражио је академску позицију како би могао даље истраживати основна правила по којим се течности крећу. Данијел се пријавио на два места које су, у Базелу, нудиле катедре за анатомију и ботанику. Са 25 година добио је позив од руске царице Катарине Прве да постане професор математике на Царској академији у Санкт Петербургу. Прво Данијел није желео да путује у тако удаљену земљу, али његов старији брат Николаус (Nicolaus I) понудио се да иде с њим. Царица је била толико заинтересована да обезбеди долазак Данијела да се сложила да понуди другу катедру његовом брату. Нажалост, Николаус је преминуо од туберкулозе годину дана касније. У почетку је Данијел размишљао да се врати кући, али је ипак остао када му је отац сугерисао да би један од његових ученика, Леонард Ојлер (Leonhard Euler, 1707 – 1783), могао да му буде добар помоћник у истраживању [2].

2. Бернулијева једначина

2.1. Развој Бернулијеве једначине

Данијел Бернули и његов ученик Ојлер су покушали да открију више о протоку флуида. Посебно су желели да схвате однос између брзине кретања крви и њеног притиска. Да би то истражили, Данијел је експериментисао тако што је пробушио зид цеви са малом сламком отвореном на другом крају (слика 2.1.). Приметио је да је висина до које се течност у сламци подигла била везана за притисак флуида у цеви [3].



Слика 2.1. Бернулијев дијаграм [3]

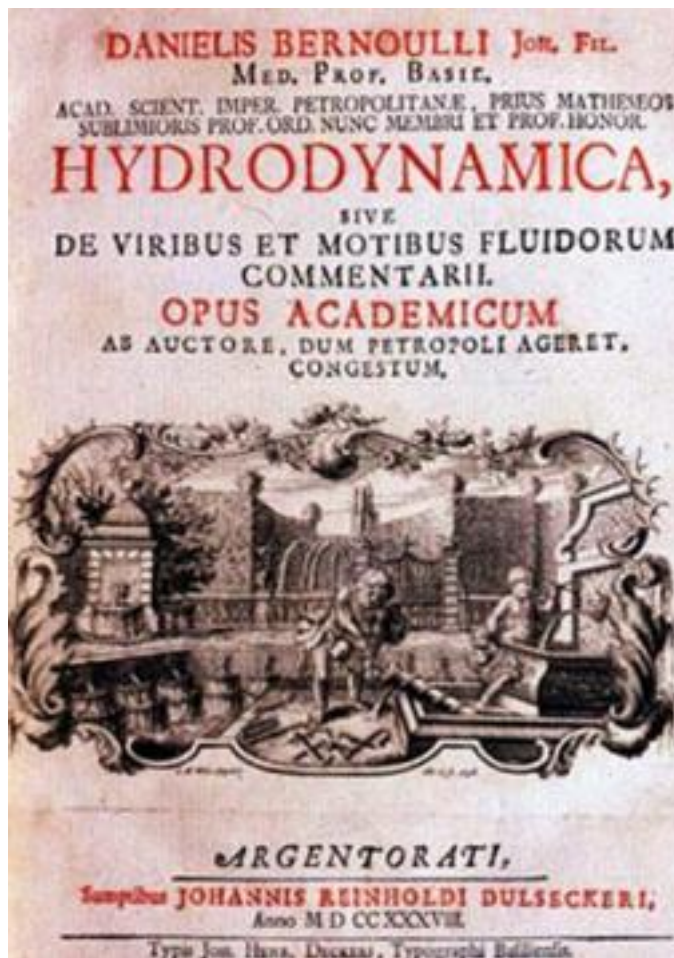
Широм Европе лекари су пацијентима мерили притисак примењујући овај начин, све док 1896. године, италијански лекар није открио пријатнији безболан метод који се и данас користи. У даљем истраживању, Данијел Бернули се вратио свом ранијем раду о одржању енергије. Било је познато да се кинетичка енергија тела у покрету трансформише у потенцијалну како се тело подиже на неку висину. Данијел је схватио да се на сличан начин, код флуида у покрету његова „кинетичка енергија“ (што би одговарало динамичком

Бернулијева једначина

притиску) трансформише у притисак (статички притисак). Овај закон се може исказати математички:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{Const.} \quad (2.1)$$

Где је ρ густина флуида, v брзина протока, а p притисак.



Слика 2.2. Књига Хидродинамика Данијела Бернулија [3]

Са око 30 година је радио на свом делу Хидродинамика (*Hydrodynamica*). У међувремену, настојао је да се, упркос неуспешним покушајима избори за академску позицију, и врати у Базел. То му је пошло за руком 1734. године. У наредне три године привео је крају Хидродинамику. Наводећи „Хидродинамика, дело Данијела Бернулија, сина Јохановог“, покушао је да поправи однос са оцем. Међутим његов отац је објавио дело Хидраулика (*Hydraulics*), које се чинило да има превише сличности са Хидродинамиком.

Након догађаја у породици, Данијел се више посветио медицини и физиологији. Остао је у Базелу до своје смрти. Хидродинамика је објављена 1738. године. То је теоријска и практична студија равнотеже, притиска и брзине течности. Данијел Бернули је представио идеју потенцијалне енергије и дао тачну анализу воде која истиче кроз отвор на суду, засновану на принципу очувања енергије. У делу су између осталог садржане и теорија о Архимедовом вијку и почетак кинетичке теорије гасова, као и примитивни облик Бернулијеве једначине. Његово сазнање је искоришћено за производњу вакуума у хемијским лабораторијама повезивањем посуде са цеви кроз коју се оствари брз проток воде [4].

2.2. Ојлерова диференцијална једначина за савршени флуид

Савршени флуид се креће, у том тренутку делују инерцијске силе. Према Њутновој дефиницији силе, збир запреминских и површинских сила једнак је производу масе и убрзања. Убрзање флуидног делића једнако је тоталном изводу вектора брзине, па за флуидни делић елементарне масе $dm = \rho dV$ овај производ износи:

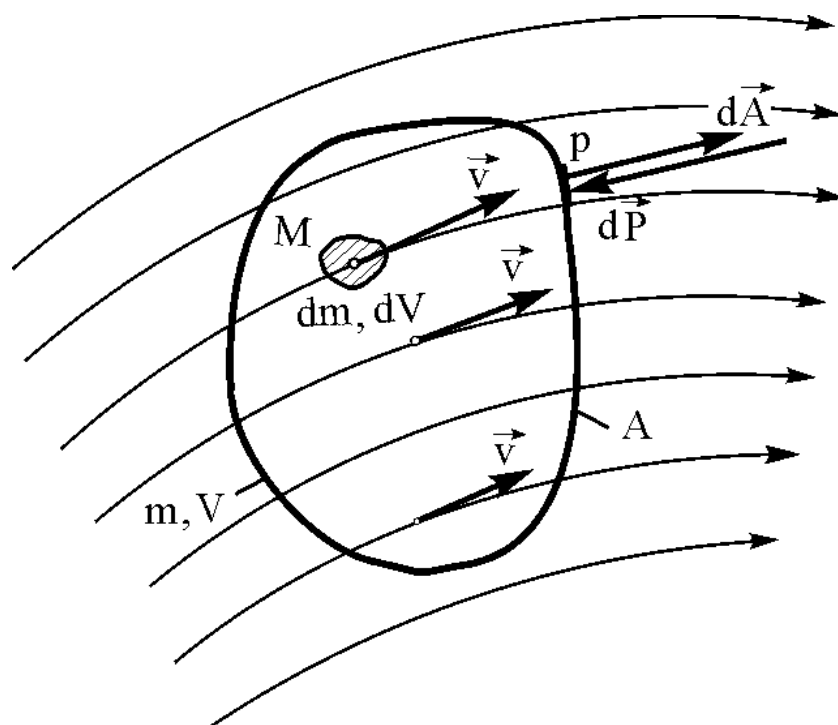
$$dm \vec{a} = dm \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV. \quad (2.2)$$

За сву масу флуида у запремини V овај производ има вредност:

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV. \quad (2.3)$$

Према Њутновом закону је:

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V (\rho \vec{f} - \text{grad } p) dV \Rightarrow \int_V \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{f} + \text{grad } p \right) dV = 0. \quad (2.4)$$



Слика 2.3. Кретање савршеног флуида [5]

Једначина важи за произвољну запремину V флуида па претходни интеграл представља неодређени интеграл. Зато подинтегрална функција мора бити једнака нули [5], одакле следи:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2.5)$$

Бернулијева једначина

Овој једначини једнаке су три скаларне једначине [6]:

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

(2.6)

То су Ојлерове диференцијалне једначине за кретање флуида у скаларном облику. Оне могу бити написане и у развијеном облику, у случају неустаљеног струјања:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + vx \frac{\partial v_x}{\partial x} + vy \frac{\partial v_x}{\partial y} + vz \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + vx \frac{\partial v_y}{\partial x} + vy \frac{\partial v_y}{\partial y} + vz \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + vx \frac{\partial v_z}{\partial x} + vy \frac{\partial v_z}{\partial y} + vz \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

(2.7)

Ојлерове диференцијалне једначине за кретање савршеног флуида односе се на систем нелинеарних парцијалних спрегнутих диференцијалних једначина. Код истих се не зна опште решење. Могуће је издвојити нека посебна решења добијена под одређеним условима струјања флуида [5]:

- када се тражене величине врло мало мењају у току времена,
- када се брзине у међусобно паралелним равнима сасвим незнатно разликују,
- када је битно само струјање у једном правцу, Ојлерове једначине се упрошћавају, јер се тада поједини чланови у једначинама могу занемарити.

2.3. Бернулијево решење Ојлерове једначине

Ојлерове једначине могу да се реше једино под одређеним условима. У случају постојања баротропног флуида који струји у стањеном пољу конзервативних сила, онда су поменути услови следећи:

$$\rho = \rho(p), \vec{f} = \text{grad } U, \frac{\partial}{\partial t} = 0. \quad (2.8)$$

Ови услови, коришћењем релације која следује из услова баротропног флуида, Ојлерову једначину су трансформисали овако:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}) = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2.9)$$

Своди се на:

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} \right) = (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}). \quad (2.10)$$

Лева и десна страна једначине (2.10) се множи скаларно усмереним елементом струјнице. Ова једначина се пројектује на струјницу, тј. путању. Скаларним множењем (2.10) једначине усмереним елементом струјне линије се долази до уопштене Бернулијеве једначине:

$$d \left(\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} = \text{Const.} = C = e. \quad (2.11)$$

2.4. Бернулијева једначина за струјање нестишљивог флуида

Када је реч о нестишљивом флуиду, ту важи карактеристична једначина:

$$\rho = \rho_0 = \text{Const.} \quad (2.12)$$

Уколико нестишљиви флуид струји у пољу Земљине теже, тада је функција силе одређена следећим изразом:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{Const.} = C = e. \quad (2.13)$$

За тачке М и М₀ на истој струјници је важећа Бернулијева једначина у ужем смислу:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gz_0. \quad (2.14)$$

Пресек dA струјног влакна неизмерно је мали па се Бернулијева једначина може применити и за струјно влакно савршене течности. За било која два пресека 1-1 и 2-2 струјног влакна ова једначина гласи:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2. \quad (2.15)$$

Претходна једначина се примењује за два пресека струјне цеви, кроз коју течност протиче. У том случају физичке величине у претходној једначини представљају њихове средње вредности у уоченим пресецима.

2.5. Бернулијева једначина за струјну цев реалне течности

$$\alpha_1 \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + R_m \quad (2.16)$$

Услед једначине (2.16) знамо:

v_1, v_2 - средње брзине течности у одговарајућим пресецима струјне цеви,

p_1, p_2 - притисци у тежиштима ових пресека,

z_1, z_2 - удаљења тежишта пресека од упоредне хоризонталне равни.

R_m - рад свих отпора на путу реалне течности јединичне масе између два пресека струјне, тј. техничке цеви [5].

Када α_1 и α_2 заменимо у пракси, добијамо:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + R_m. \quad (2.17)$$

Члан R_m у енергијској једначини (2.16) представља рад свих отпора при кретању реалне течности, сведен на јединицу масе. У примењеној механици флуида, тј. у хидраулици постоје две врсте отпора:

- отпори услед трења,
- локални отпори [5].

Прва врста отпора назива се још и успутним отпором или отпором на праволинијском путу. Ова врста отпора је последица трења течности о додирне површине опструјаваног чврстог тела или зидове цеви, односно о додирне површине:

- унутрашњих
- струјних простора [5].

Ови отпори, тј. губици струјне енергије изазвани трењем флуида, проузроковани локалним отпорима називају се локални губици. Локални отпори се јављају на местима нагле промене проточног пресека по облику или по величини, или на местима постепеног или наглог скретања струјног тока [5].

Члан R_m у енергијској једначини (2.16) имаће разне вредности, зависно од врсте отпора који прате конкретно струјање између два посматрана пресека. У општем случају је:

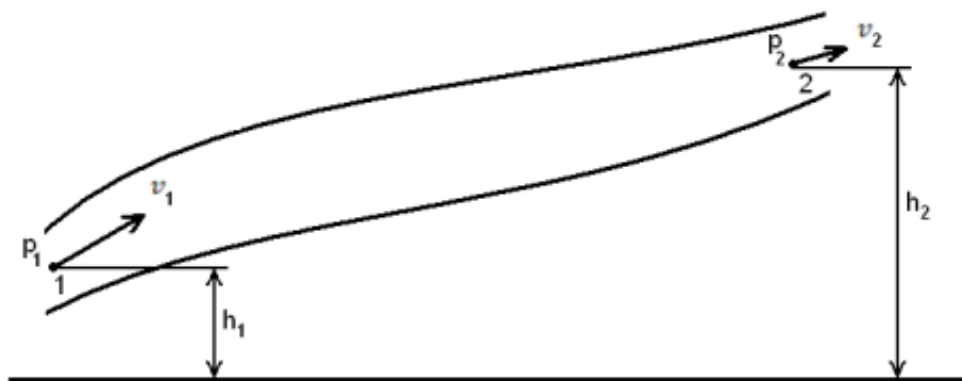
$$R_m = R_v + \sum R_{mi}. \quad (2.18)$$

$\sum R_{mi}$ — сума свих локалних губитака струјне енергије разматраног струјања.

2.6. Препоруке примене Бернулијеве једначине

Како би ефикасно била примењена Бернулијева једначина, неопходно је да се поштују наредни принципи:

1. Бернулијева једначина се увек пише само за два пресека, по правилу се са леве стране записују величине које карактеришу „први“ пресек одакле тече струја (1), а са десне стране оне које карактеришу „други“ пресек ка коме се струјање врши (2), (слика 2.4). Испред Бернулијеве једначине се наводи податак којим је означено за које тачке је написана Бернулијева једначина.



Слика 2.4. Уочени струјни пресеци и њихове карактеристике

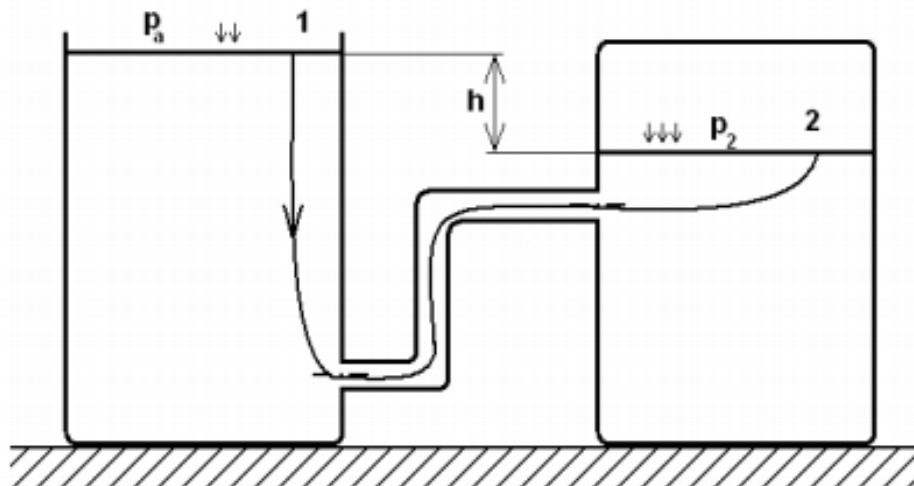
Јако је важно водити рачуна да се чланови Бернулијеве једначине односе на делић течности који се налази у одређеном положају. У складу са тим, ако се посматрају делићи флуида који се налазе у тачкама на различитим висинама, онај у вишој тачки има већи висински притисак. За њихову висинску разлику h , разлика висинских притисака износи ρgh (слика 2.5).



Слика 2.5. Висинска разлика флуидних делића

Бернулијева једначина

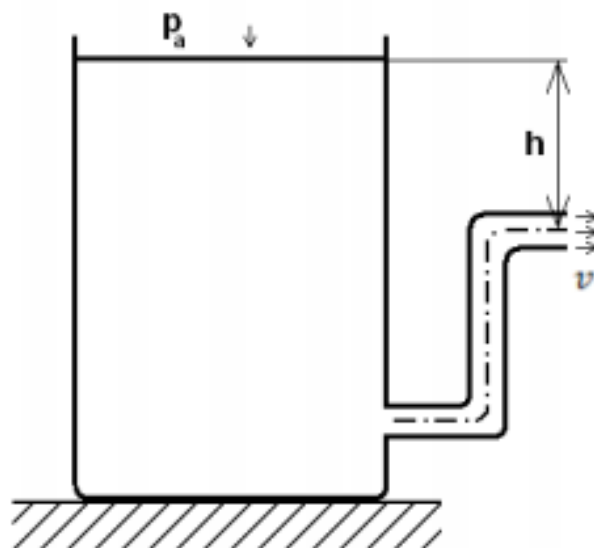
2. Бернулијева једначина може да буде написана и као пуноважна за било које две тачке које могу да се повежу замишљеном или стварном струјницом (слика 2.6).



Слика 2.6. Повезивање две тачке замишљеном или стварном струјницом

3. Једначнина континуитета увек иде уз Бернулијеву једначнину. Када је реч о стишљивом флуиду, и када је масени проток константан, једначнина континуитета је $\rho vA = \text{const}$. Код нестишљивог флуида, када је запремински проток константан једначнина је следећа $vA = \text{const}$. Код ове једначнине у Бернулијевој једначнини може бити елиминисана једна непозната брзина. Уколико се висина одреди у односу на ниже означен пресек, у Бернулијевој једначнини се уместо висине јавља и њихова разлика као једна непозната. Увођење једначнине континуитета и реперног нивоа (који се бира тако да одговара нижој тачки), у Бернулијевој једначнини се могу елиминисати две непознате величине. Међутим, потребно је посветити пажњу избору тачака 1 и 2 које су карактеристичне, да би се могло доћи до решења. Пресеке (тачке 1 и 2) треба узимати на местима за која постоји највећи број познатих података. За случај претакања (без губитака) из једног резервоара у други, уколико је у резервоарима површина течности много већа од површине пресека спојне цеви, за карактеристичне тачке Бернулијеве једначнине погодно је одабрати слободне нивое течности у резервоарима. У тим тачкама су динамички притисци делића течности занемарљиви, односно $v_1 = v_2 = 0$, а статички притисак $p_1 = p_a$. Тада Бернулијева једначнина 1-2 има облик:

$$p_a + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \Rightarrow \rho gh = p_2 - p_a. \quad (2.19)$$



Слика 2.6. Слободно истицање у атмосферу

Ако је реч о слободном истицању течности у атмосферу (без губитака) (слика 2.6), погодне карактеристичне тачке 1 и 2 су ниво течности у резервоару и завршни пресек ценовода у коме влада атмосферски притисак. Тада може бити постављена Бернулијева једначина 1-2 која гласи:

$$p_a + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = p_a + \frac{\rho v_2^2}{2}$$
$$h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

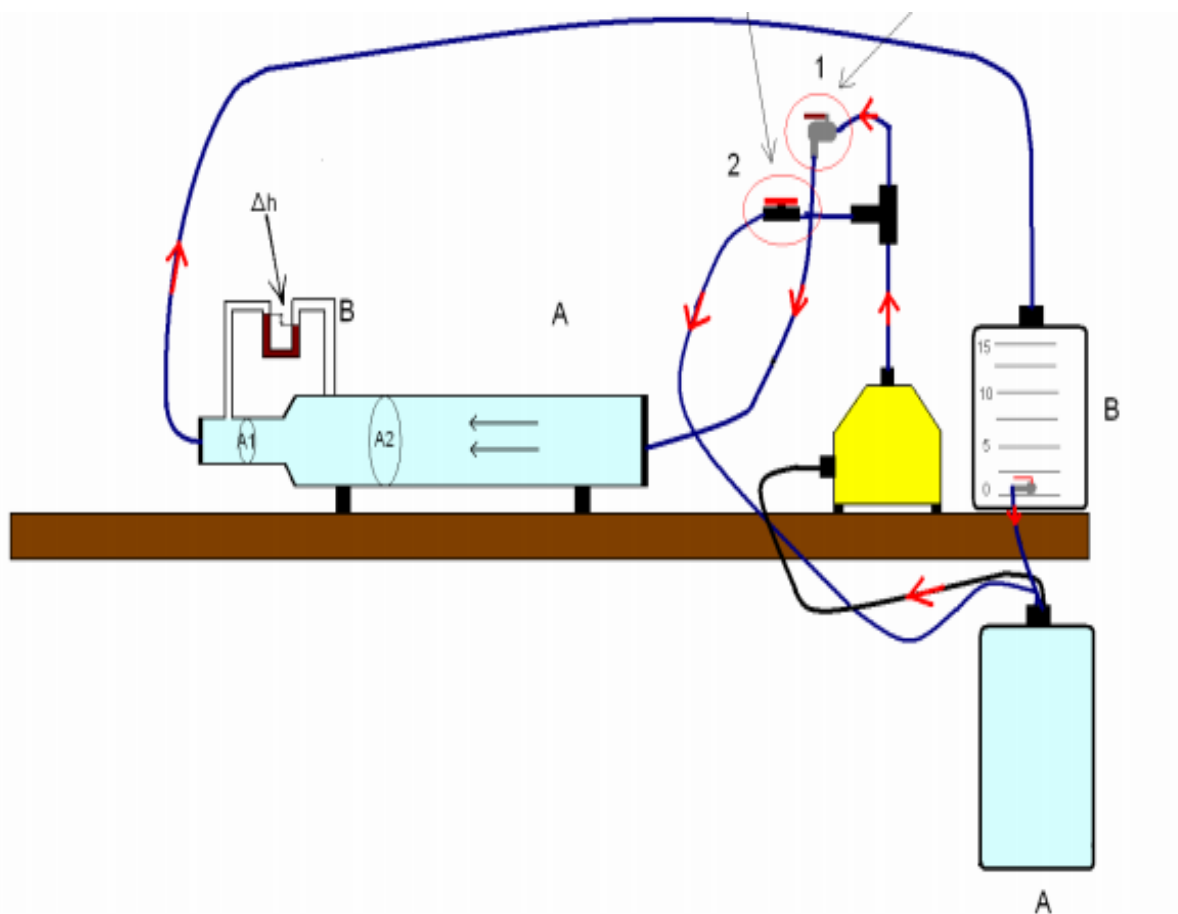
(2.20)

4. У случају да се за неки струјни проблем поред постојеће Бернулијеве једначине могу написати и друге Бернулијеве једначине, такве да се у њима јављају нове непознате величине, оне су такође пуноважне. То је случај када се решавају проблеми сложених ценовода.
5. Пре постављања Бернулијеве једначине треба да се изврши анализа проблема, потребно је схватити и потврдити његов физички смисао, одабрати одговарајуће карактеристичне тачке и редослед решавања једначина. Резултат нумеричког решења биће квантитативни односи тражених и познатих величина и потврдиће се оправданост постављеног задатка. Када се добије решење треба утврдити да ли добијена вредност има физичког смисла [7].

3. Примери примене

3.1. Експериментална инсталација

Експериментална инсталација приказана је на слици 3.1. Она се састоји од пумпе која пумпа воду из контејнера А, кроз стаклену цев са две различите површине попречног пресека у контејнер В. Да би се избегло повећање притиска у систему, када се пумпа укључи са вентилом бр.1 затворен део воде се враћа у пумпу А. Постоје два вентила у систему, раније споменути (бр. 1), који омогућава контролу протока воде у систему (уvek треба да буде затворен када се укључи пумпа) и вентил бр.2 (треба увек бити отворен).



Слика 3.1. Експериментално подешавање

Бернулијева једначина

У два дела стаклене цеви, у делу где је шири и делу где је ужи притисак, манометријске цеви се користе за мерење статичког притиска у систему. Овакве врсте мерења не ремете проток воде у стакленој цеви. Бернулијев закон каже да ће притисак бити различит у ове две тачке стаклене цеви. Ако се повежу две манометријске цеви као што је приказано на слици 3.1., добија се Вентуријева цев и посматрана разлика нивоа течности ће бити једнака разлици статичког притиска између две тачке у цеви. Познавање разлике у притисцима $p_1 - p_2$ није довољно за одређивање протока воде. Мора се претпоставити континуитет протока и мора се знати подручје пресека A_1 и A_2 .

За почетак је потребно измерити пречник два пресека (1 и 2, видети слику 3.1) цеви и израчунати површине попречних пресека A_1 и A_2 .

Затим треба припремити систем за експеримент и обратити пажњу на следеће: пре него што се укључи пумпа, потребно је да се провери да ли је вентил бр. 2. отворен и да је вентил бр.1 затворен. Такође треба бити сигуран да је резервоар А напуњен водом, да је резервоар В празан и да су сви прикључци у реду. Никада не треба укључивати пумпу без провере конфигурације вентила и прикључка црева.

Експеримент:

- Пре сваког мерења потребно је забележити почетну разлику нивоа течности у епрувети (не би требало да буде веће од 15 mm).
- Након провера конфигурације и прикључака вентила укључити пумпу.
- Након отварања вентила бр.1, требало би приметити време потребно за пуњење посуде В са запремином воде једнаком 5 l, 10 l и 15 l.
- Истовремено, забележити разлику нивоа течности у Вентуријевој цеви за дату запремину.
- Након завршетка мерења, лагано треба затворити вентил бр.1, а затим искључити пумпу (тачно наведеним редоследом).
- По завршетку датог мерења, треба излити воду из контејнера В у контејнер А и поновити мерења за други вентил бр.1 отвореног степена.

Такође је јако важно водити рачуна о следећем: посуду А увек треба напунити водом до означеног минималног нивоа. Ако ниво воде у посуди А достигне минимум, одмах треба искључити пумпу.

Калкулације:

Из једначине континуитета и Бернулијеве једначине може се изразити брзина у пресеку 2 као:

Бернулијева једначина

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1}$$

$$p_1 + \rho_w \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho_w \frac{v_2^2}{2}$$

$$p_1 + \rho_w \frac{v_2^2 A_2^2}{2 A_1^2} = p_2 + \rho_w \frac{v_2^2}{2}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{-2 \Delta p A_1^2}{\rho_w (A_1^2 - A_2^2)}}$$

(3.1)

где је Δp разлика притиска између пресека A_2 и A_1 :

$$-\Delta p = -(p_2 - p_1) = p_1 - p_2.$$

(3.2)

Разлика притиска, која је једнака хидростатском притиску течности, треба да се мери коришћењем разлике у нивоу течности у Вентуријевој цеви:

$$p_1 - p_2 = \rho_m h g$$

(3.3)

ρ_m - густина млазне течности

h - разлика у висини између две руке манометра.

Бернулијева једначина

Дакле, коначно се може писати:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\rho_m hg A_1^2}{\rho_w (A_1^2 - A_2^2)}}. \quad (3.4)$$

Други начин израчунавања брзине v_2 је мерењем запремине воде која излази из цеви за одређено време t :

$$V = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4} t \quad \text{или} \quad v_2 = \frac{4V}{\pi d_2^2 t}. \quad (3.5)$$

У датим мерењима (за дати вентил бр.1 отворен) за сваки измерени пар (запремина воде у посуди В - време потребно да се достигне таква запремина) вредност Δh је константна.

3.1.1. Резултати прорачуна

На основу прикупљених података, израчунати просечне вредности:

$$\bar{v}_{2a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_{2ai} \quad \text{и} \quad \bar{v}_{2b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_{2bi}. \quad (3.6)$$

Процењује се несигурност измерених вредности брзина уз коришћење формула за еквиваленте:

$$dv_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial v_2}{\partial h_1}\right)^2 dh + \left(\frac{\partial v_2}{\partial A_1}\right)^2 dA_1 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial A_2}\right)^2 dA_2}. \quad (3.7)$$

Ако усвојимо да је $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$, коначни резултат гласи:

$$v_2 = \bar{v}_2 \pm dv_2. \quad (3.8)$$

Бернулијева једначина

У табелама 3.1. и 3.2. представљени су резултати мерења помоћу којих су израчунате вредности почетних брзина. За обе млазнице, мерено је време за које ће истећи 800 ml течности. Мерење времена је вршено тако што је штоперица стартована тек када би се мензура напунила до 200 ml, а заустављана када се напунила до 1000 ml.

Табела 3.1. Мерено време истицања течности за прву млазницу

<i>D_o, mm</i>	<i>V, ml</i>	<i>t, s</i>
8	800	22,61
8	800	22,68
8	800	23,03
8	800	22,70
8	800	23,07
8	800	22,60
8	800	23,00
8	800	22,55
8	800	22,77
8	800	22,49

Бернулијева једначина

Табела 3.2. Мерено време истицања течности за другу млазницу

D_0, mm	V, ml	t, s
6	800	26,98
6	800	26,78
6	800	26,52
6	800	26,99
6	800	27,27
6	800	26,84
6	800	26,97
6	800	27,18
6	800	26,72
6	800	27,32

За млазницу пречника $8\ mm$, средње време за које истекне $800\ ml$ износи $22,75\ s$, док за млазницу пречника $6\ mm$ то време износи $26,96\ s$. Добијени резултати за почетне брзине истицања течности за обе млазнице су дати у табелама 3.1. и 3.2. Осим ових података, у истим табелама су наведене вредности за пречнике оба млаза, као и односи почетних пречника и пречника на различитим растојањима H . Такође, дате су теоријске вредности односа пречника рачунате преко растојања H и вредности почетних брзина. У табелама су приказана релативна одступања ових односа.

Уведен је и коефицијент сразмере k , чија теоријска вредност износи 1. Представљен је следећим изразом:

$$k = \frac{\frac{d_0}{d}}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}}. \quad (3.9)$$

Бернулијева једначина

Табела 3.3. Одређивање коефицијента сразмерности за прву млазницу

d_0 (mm)	d (mm)	$\frac{d_0}{d}$	$\left(\frac{d_0}{d}\right)^4 - 1$	H (cm)	$\frac{v_0}{\left(\frac{m}{s}\right)}$	$\sqrt[4]{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}$	$k = \frac{\frac{d_0}{d}}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}}$	δ (%)
8	7,28	1,10	0,46	2	0,7	1,16	0,95	5,17
8	6,98	1,15	0,75	4	0,7	1,27	0,90	9,45
8	6,38	1,25	1,44	6	0,7	1,36	0,92	8,09
8	5,72	1,40	2,84	8	0,7	1,43	0,98	2,10
8	5,32	1,50	4,06	10	0,7	1,50	1,01	0,00
8	5,22	1,53	4,48	12	0,7	1,55	0,99	1,29
8	5,00	1,60	5,55	14	0,7	1,60	1,00	0,00
8	4,92	1,63	6,06	16	0,7	1,65	0,99	1,21
8	4,46	1,79	9,27	18	0,7	1,69	1,06	5,92
8	4,46	1,79	9,27	20	0,7	1,73	1,04	3,47

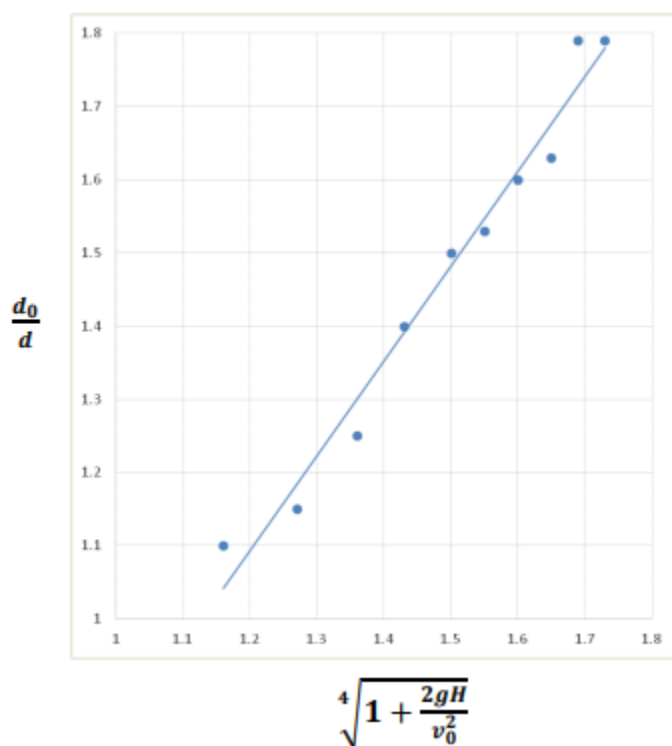


График 3.1. Приказ коефицијента сразмере k за прву млазницу

Бернулијева једначина

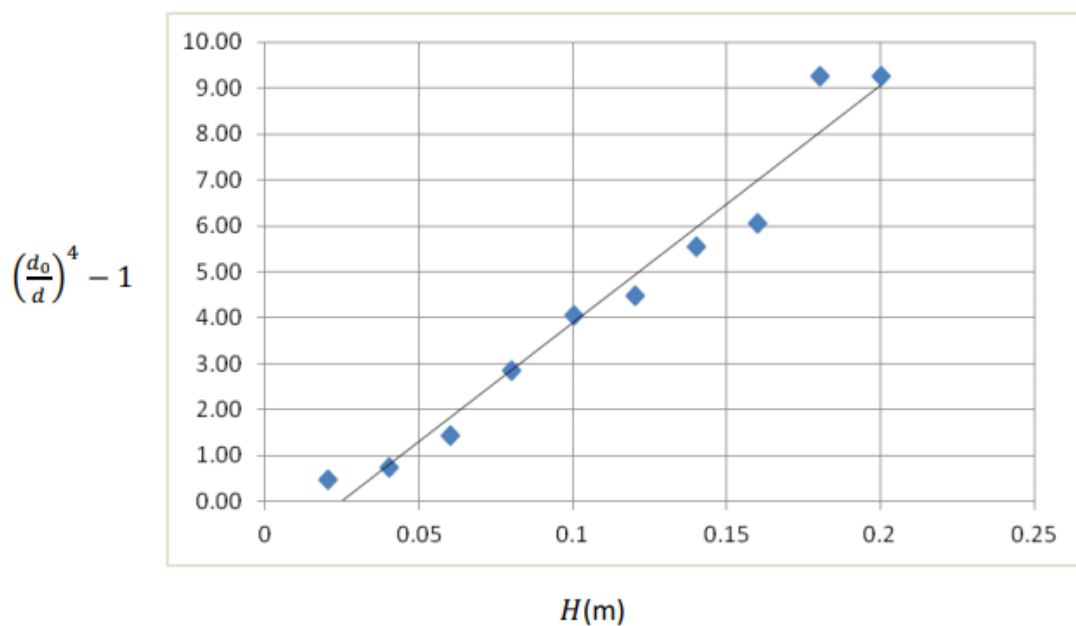
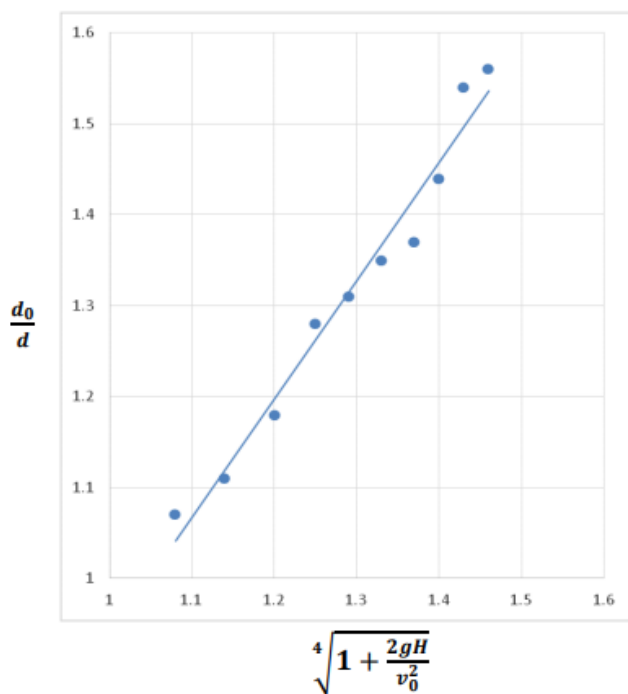


График 3.2. Приказ зависности функције за прву млазницу

Табела 3.4. Одређивање коефицијента сразмерности за прву млазницу

d_0 (mm)	d (mm)	$\frac{d_0}{d}$	$\left(\frac{d_0}{d}\right)^4 - 1$	H (cm)	v_0 $\left(\frac{m}{s}\right)$	$\sqrt[4]{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}$	$k = \frac{\frac{d_0}{d}}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}}$	δ (%)
6	5,55	1,07	0,31	2	1,05	1,08	1,00	0,93
6	5,42	1,11	0,52	4	1,05	1,14	0,97	2,70
6	5,08	1,18	0,94	6	1,05	1,20	0,98	1,69
6	4,70	1,28	1,68	8	1,05	1,25	1,02	2,34
6	4,58	1,31	1,94	10	1,05	1,29	1,01	1,53
6	4,46	1,35	2,32	12	1,05	1,33	1,01	1,48
6	4,38	1,37	2,52	14	1,05	1,36	1,00	0,73
6	4,16	1,44	3,30	16	1,05	1,40	1,03	2,78
6	3,90	1,54	4,62	18	1,05	1,43	1,07	7,14
6	3,84	1,56	4,92	20	1,05	1,46	1,07	6,41

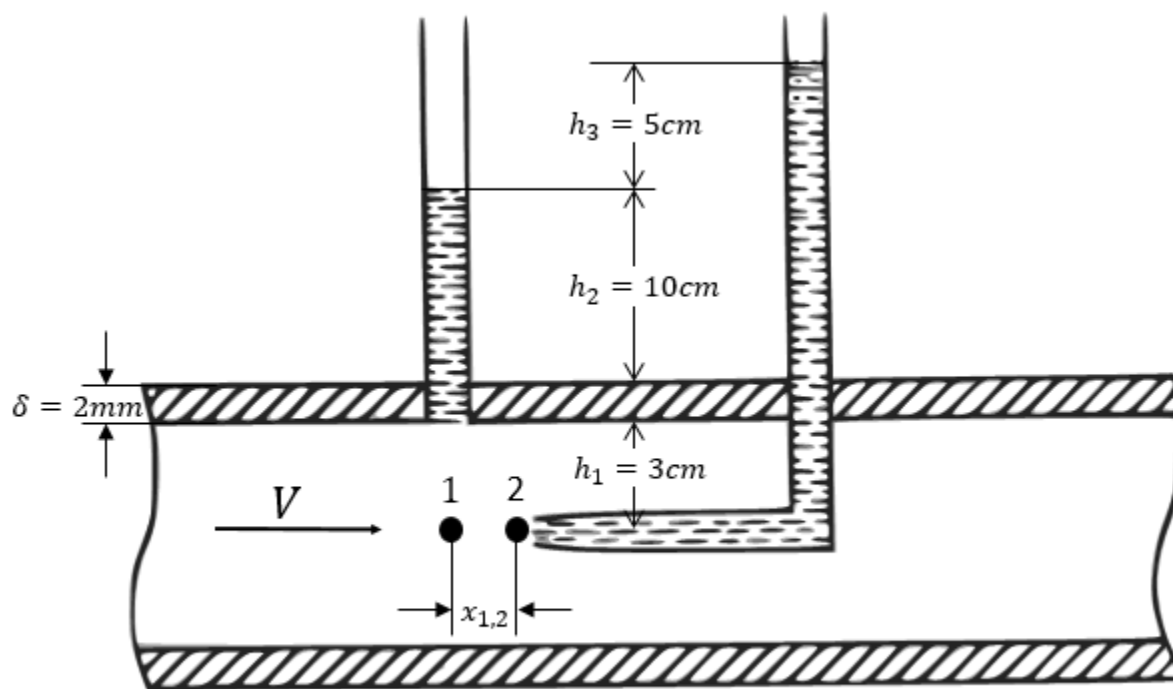


Графикон 3.4. Приказ коефицијента сразмере k за другу млазницу

Графици 3.1 и 3.2 представљају приказ коефицијента сразмере k за две млазнице. На координату се наносе вредности односа пречника рачунате преко растојања H и вредности почетних брзина v_0 . На апсцису се наносе вредности односа пречника млаза течности мерених са дигиталних фотографија. Коефицијент правца праве представља коефицијент сразмере. За прву млазницу пречника 8 *mm* коефицијент сразмере износи 1,26, док за другу млазницу пречника 6 *mm* износи 1,29.

3.2. Питоова цев

Један пример примене Бернулијево једначине је мали уређај за одређивање хоризонталне брзине кретања летелице.



$$x_{1,2} = \text{zanemarljivo}$$

Слика 3.2. Питоова цев [9]

Кроз Питоову цев (слика 3.2.) вода тече непознатом брзином v . Брзине ћемо изразити у тачкама 1 и 2. То су тачке стагнације. Атмосферски притисак не узимамо (исти је са обе стране):

$$p_1 = \rho g(h_1 + \delta + h_2)$$

$$p_2 = \rho g(h_1 + \delta + h_2 + h_3) \Rightarrow p_2 - p_1 = \rho g h_3.$$

(3.10)

Сада можемо написати Бернулијеву једначину за позиције 1 и 2:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$
$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{\rho gh_3}{\rho}.$$
(3.11)

Добија се израз за брзину v_1 , који гласи:

$$v_1 = \sqrt{2gh_3} \approx 1 \frac{m}{s}.$$
(3.12)

3.3. Истицање кроз мале отворе. Торичелијева теорема

Проучавање кретања течности за време истицања кроз отворе од великог је интереса за инжењерску праксу. На пример, пуњења и пражњења танкера, цистерни за гориво, и других покретних или стабилних резервоара, се заснивају на познавању закона о истицању [5].

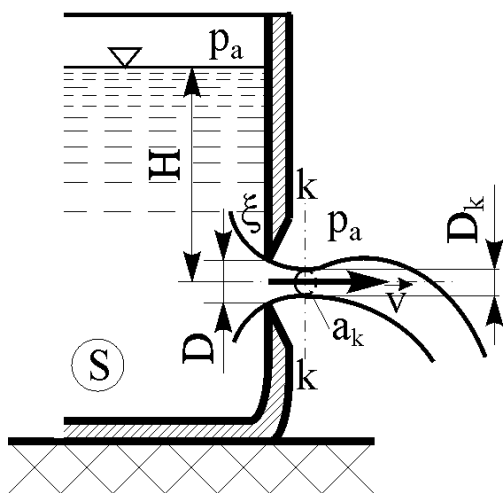
Истицање течности први је проучавао Торичели. Он је извео израз за брзину истицања течности из резервоара у атмосферу кроз мали отвор на дубини H од слободне површине течности:

$$v_t = \sqrt{2gH}.$$
(3.13)

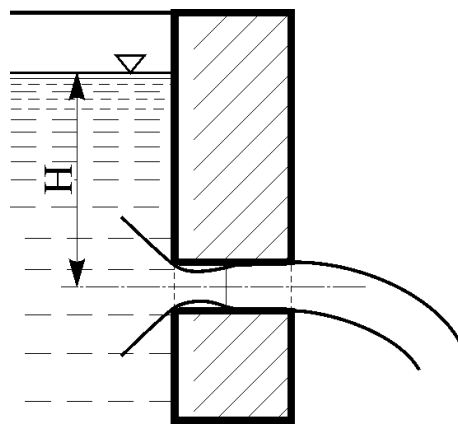
Услови истицања течности кроз отворе могу бити различити. Течност може истичати у атмосферу или у простор у коме се већ налази иста или нека друга течност. То се назива подводно истицање. У оба случаја истицање може да буде при сталном или променљивом нивоу течности. Ти услови веома утичу на брзину истицања, па самим тим и на проток [5].

Истицање је праћено одговарајућим отпорима кретању за чије се савлађивање утроши одређена струјна енергија. При овој врсти кретању губитак енергије је условљен углавном локалним отпором у самом отвору, зато што се трење највише испољава на ивицама отвора [5].

Према дебљини зида у коме се отвори налазе, разликују се отвори у дебелим и танким зидовима. При истицању кроз отворе у танком зиду постоји само локални отпор, услед оштрих ивица отвора. Током истицања кроз отворе у танком и дебелом зиду постоји разлика која настаје искључиво због облика ивица отвора у зиду, а не због дебљине зидова.



Слика 3.3.1. Мали отвор оштрих ивица

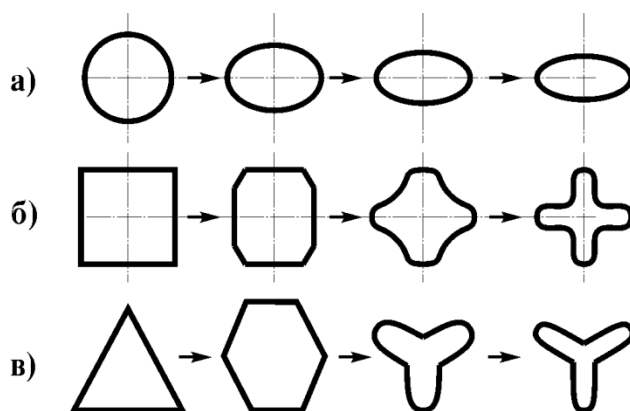


Слика 3.3.2. Мали отвор у дебелом зиду

Делићи течности не могу, при уласку у отвор за време истицања, да нагло скрену за деведесет степени, те зато улазе у отвор под неким углом према површи зида. При томе су трајекторије делића течности у облику кривих линија са великом кривином. Након изласка из отвора кривина трајекторија (односно струјница при устаљеном струјању) се смањује и на извесном растојању од отвора (пресек $k-k$ на слици 3.3.1.) струјнице су међусобно паралелне. Због тога је попречни пресек млаза у близини отвора мањи од попречног пресека самог отвора. Дакле, млаз се непосредно после отвора са оштрим ивицама сужава, а затим пада услед дејства Земљине теже. Ова се појава назива контракцијом млаза [5].

Бернулијева једначина

У случају малих отвора оштрих ивица, највећа контракција млаза се јавља на растојању $D/2$ од унутрашње површи зида суда и да је пречник суженог пресека млаза приближно једнак $D_k = 0,8 D$.



Слика 3.3.3. Инверзија млаза

Коефицијент контракције ψ представља однос површина најужег пресека млаза a_k и пресека отвора a , и за случај кружног отвора има вредност:

$$\psi = \frac{a_k}{a} = \left(\frac{D_k}{D}\right)^2 = \left(\frac{0,8 D}{D}\right)^2 = 0,64. \quad (3.14)$$

Осим контракције (потпуне или делимичне, изражене или неизражене) при истицању долази до једне појаве која се назива инверзијом млаза или преображајем. Само је облик попречног пресека млаза у близини отвора сличан облику самог отвора, убудуће се облик пресека млаза мења. Кружни пресек млаза деформише се у вертикално издужену елипсу (слика 3.3.3. а). Приликом истицању кроз отвор у облику квадрата, млаз добија крстаст облик (слика 3.3.3. б), а млаз у облику троугла деформише се тако, да формира облик трокраке звезде (слика 3.3.3. в) [5].

3.3.1. Истицање течности кроз мале отворе, оштрих ивица при сталном нивоу

Из суда (слика 3.3.1.) истиче течност у атмосферу кроз мали отвор оштрих ивица. Мерења која су спроведена за ову врсту истицања, показала су да је стварна брзина истицања увек мало мања од брзине коју даје Торичелијева формула. Ово неслагање се објашњава вискозношћу течности која доводи до губитка енергије и смањења брзине. Проширена Бернулијева једначина гласи:

$$\frac{p_a}{\rho} + gH = \frac{v^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} + \xi \frac{v^2}{2}, \quad (3.15)$$

ξ – коефицијент отпора, услед оштрих ивица отвора.

Следи:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}} \sqrt{2gH}, \quad (3.16)$$

односно :

$$v = \varphi \sqrt{2gH}. \quad (3.17)$$

Коефицијент φ је дефинисан изразом:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}}, \quad (3.18)$$

и назива се коефицијентом брзине. За воду и кружне отворе овај коефицијент има вредност $\varphi = 0,96 - 0,99$. Најчешће се при прорачунима истицања користи средња вредност овог коефицијента $\varphi = 0,97$. Ако се средња брзина истицања помножи површином а попречног пресека отвора следи:

$$Q' = va = \frac{D^2 \pi}{4} \varphi \sqrt{2gH}. \quad (3.19)$$

Израчунати проток знатно је већи од протока који се налази мерењем. Разлика између израчунатог Q' и стварног протока Q последица је контракције млаза при истицању. Израз за брзину истицања течности односи се на брзину у суженом пресеку k-k млаза површине a_k . Стварни проток при истицању износи [5]:

Бернулијева једначина

$$Q = \varphi a_k \sqrt{2gH} \quad Q = \varphi \psi a \sqrt{2gH} \Rightarrow Q = \mu a \sqrt{2gH}, \quad (3.20)$$

μ – коефицијент протока. За $\psi = 0,64$ и $\varphi = 0,97$ следи :

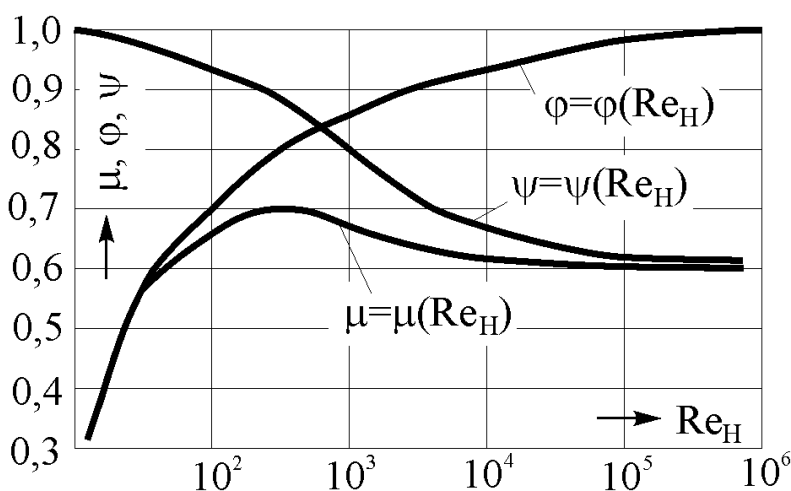
$$\mu = \varphi \psi = 0,97 \cdot 0,64 \approx 0,62. \quad (3.21)$$

Стварни проток је за 38 % мањи од протока који се добија када се попречни пресек отвора помножи са теоријском брзином истицања, одређеном Торичелијевом формулом. Одступање је последица контракције млаза и вискозности течности. Прецизно спроведени експерименти показали су да коефицијенти брзине контракције и протока зависе у првом реду од врсте и величине отвора, а затим и од Re броја. На слици (3.3.4.) је графички приказана зависност ових коефицијената од Re броја дефинисаног као:

$$Re_H = \frac{v_t \cdot D}{u} = \frac{D \cdot \sqrt{2gH}}{u}, \quad (3.22)$$

за кружне отворе.

При $Re_H > 100\,000$, сва три коефицијента су константна. Зато се за мање вискозне течности (воду, бензин, керозин) може сматрати да су ови коефицијенти константни и да износе: $\varphi = 0,97$, $\psi = 0,64$ и $\mu = 0,62$.



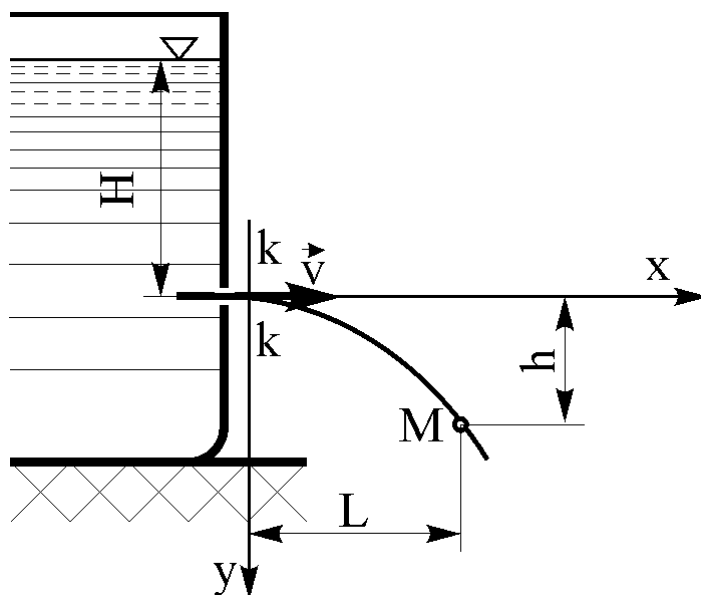
Слика 3.3.4. Зависност коеф. од Re броја [5]

Бернулијева једначина

Мерењем протока Q , површине отвора a и висине течности H може се израчунати овај коефицијент према обрасцу:

$$\mu = \frac{Q}{a\sqrt{2gH}} \quad (3.23)$$

На основу овога може се закључити да μ опада када H расте, да μ опада када a расте, и μ зависи од облика отвора.



Слика 3.3.5. Домет млаза [5]

За отворе разног облика, при истој вредности површине, μ је најмање за круг, па за квадрат, а највеће за правоугаоник. При већем односу ширине према висини правоугаоника, μ је веће. Ако се, при истицању течности у атмосферу, занемари отпор ваздуха, онда се при релативно мањим брзинама млаза може одредити његов дOMET L . Неопходно је да се из параметарских једначина путање млаза:

$$x = vt \text{ и } y = \frac{gt^2}{2}, \quad (3.24)$$

искључи време t .

Бернулијева једначина

При томе, користи се и израз:

$$v = \varphi \sqrt{2gH}. \quad (3.25)$$

Решавањем се добија следеће:

$$t = \frac{x}{v}, \quad y = \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v^2}$$

$$2yv^2 = gx^2$$

$$2y \cdot (\varphi \sqrt{2gH})^2 = gx^2$$

$$2y \cdot \varphi^2 \cdot 2gH = gx^2$$

$$4gHy\varphi^2 = gx^2$$

$$x^2 = 4Hy\varphi^2.$$

(3.26)

Ако се замене и координате тачке М (слика 3.3.5.), а оне су $x = L$, $y = h$, коначно добијамо домет млаза L :

$$4Hh\varphi^2 = L^2$$

$$L = \sqrt{4Hh\varphi^2}$$

$$L = 2\varphi\sqrt{Hh}.$$

(3.27)

Закључак

Реч флуиди односи се на заједнички назив за гасове и течности. Гасови и течности се по многим особинама разликују од чврстих тела, између осталог и по лакој покретљивости својих делића. Поред међусобне сличности, течности и гасови имају и значајне разлике. Једна од најизраженијих разлика је и промена запремине приликом промене притиска.

На основу наведеног, Данијел Бернули, швајцарски математичар, поставио је формулу која повезује параметре савшеног флуида при кретању, а то су притисак, густина и брзина. Овом формулом се дефинише расподела притисака флуида дуж једне струјне цеви. До ње се долази применом закона одржања енергије на случају стационарног протицања савшеног флуида кроз струјну цев променљивог попречног пресека.

При стационарном протицању савшеног флуида кроз струјну цев збир статичког, динамичког и хидростатичког (висинског) притиска, остаје константан. Бернулијева једначина важи за уске струјне цеви, па се у том случају може сматрати да брзине v_1 и v_2 и висине h_1 и h_2 одговарају тачкама које се налазе на истој струјној линији.

Постоји неколико облика ове једначине који описују разне облике протока флуида. Као најједноставнији облик Бернулијеве једначине истиче се онај када густина флуида може да се посматра као непроменљива. У раду је наглашена и једначина за проток флуида када густина не може да буде узета као константна (нестишљив флуид).

Постоји доста занимљивих примера примене Бернулијеве једначине, а свакако је у раду представљено њих пар, како би се приближило на који начин се користи ова једначина и који резултати се добијају.

Литература

- [1] Lick, D. W., The remarkable Bernoulli family, The Mathematics Teacher, 62 (5), 1969, стр. 401-409.
- [2] Богдановић, Б., *Провера Бернулијеве једначине анализом облика млаза течности*, завршни рад, ПМФ, Нови Сад, 2018.
- [3] <https://prekucavanje.files.wordpress.com/2012/10/bernulijeva-jednacina-sk.pdf>
(Приступљено: 20.10.2019.)
- [4] Диванефендић, К., *Бернулијева једначина*, завршни рад, ПМФ, Ниш, 2014.
- [5] Обровић, Б., *Механика флуида*, Факултет инжењерских наука, Крагујевац, 2007.
- [6] <https://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/bern.html> (Приступљено: 20.10.2019.)
- [7] Жижић, Б., *Курс опште физике*, Грађевинска књига, Београд, 1988.
- [8] Протић З., Недељковић М., *Пумпе и вентилатори – проблеми, решења, теорија*, Едиција: *Механика флуида и Хидрауличне машине*, Машински факултет, Београд, 2006.
- [9] <http://www.tf.uns.ac.rs/~obera/files/Mehanika%20Fluida%20-%205.ppsx>
(Приступљено: 10.12.2019.)