

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Мастер академске студије

Модул: Примењена механика и аутоматско управљање

Предмет: Брза израда прототипова

Број индекса: 415/2017

Страхиња П. Миленковић

**Материјали ојачани влакнима за 3Д
штампу, израда, моделирање
мастер рад**

Комисија за преглед и одбрану:

1. проф. др Ненад Грујовић - ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру мастер рада кандидат треба да овлада техником израде композитних материјала ојачаних влакнима применом FDM метода 3Д штампе. Израдити узорке и епрувете и спровести механичка испитивања. Извршити нумеричку анализу МКЕ модела и упоредити резултате са подацима добијеним експериментом. Описане поступке применити на реализованој реалној структури.

НАПОМЕНА: Дефинисање теме и задатака овог рада је, на основу исказане потребе индустрије, урађено у сарадњи са стручњацима из Института IMW и АММ (Milanović Industries Group – MIND Group).

Препоручена литература:

- [1] Трајановић М., Грујовић Н., Миловановић Ј., Миливојевић В., *Рачунарски подржане брзе производне технологије*, Машински факултет у Крагујевцу, Центар за информационе технологије, 2008
- [2] Којић М., Славковић Р., Живковић М., Грујовић Н., *Метод коначних елемената I*, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2010

Крагујевац, мај 2019

ментор:

др Ненад Грујовић, редовни професор

Садржај

1.	Увод	5
2.	3Д штампа	6
2.1	Стереолитографија – SLA.....	6
2.2	Селективно ласерско синтеровање – SLS	8
2.3	Тродимензионално штампање – 3DP	10
2.4	Моделирање депоновањем истопљеног материјала – FDM.....	11
2.4.1	Параметри FDM штампе	13
3.	Композитни материјали и њихова тродимензионална штампа.....	16
3.1	FDM штампа композитних материјала	17
3.1.1	Штампање на ојачавајућем материјалу	18
3.1.2	Штампање композитних структура једном главом коришћењем посебног филамента	19
3.1.3	Креирање композитне структуре штампом два различита материјала	19
3.1.4	Израда слојевите композитне структуре импрегнацијом континуалног влакна унутар главе штампача.....	20
3.2	Нека решења штампе композитних материјала	21
4.	Експериментална испитивања.....	25
4.1	Израда епрувете.....	25
4.2	Испитивање узорака на затезање	32
5.	Моделирање 3Д структура	36
5.1	Метод коначних елемената	36
5.2	Основни кораци методе коначних елемената.....	36
5.2.1	Дискретизација домена и избор врсте елемената	37
5.2.2	Избор функције померања	38
5.2.3	Дефинисање релација деформација-померање и напон-деформација	39
5.2.4	Рачунање матрице крутости елемената	39
5.2.5	Рачунање глобалне матрице крутости	40
5.2.6	Одређивање померања целе структуре.....	41
5.2.7	Рачунање деформација и напона	41
5.2.8	Интерпретација резултата	41
5.3	Основни 3Д елемент.....	41
5.4	Конститутивне релације за отртотропне материјале	47
5.5	Мори – Танака хомогенизација микрокомпозита	51
6.	Нумеричка анализа	53
7.	Практична примена 3Д композитне штампе.....	57
8.	Закључак.....	60
9.	Литература	61

Материјали ојачани влакнима за 3Д штампу, израда, моделирање

Резиме

У оквиру овог мастер рада представљена је техника израде композитних материјала ојачаних континуалним влакнима применом FDM тродимензионалне штампе. Извршена је израда, па испитивање узорака на затезање, потом нумеричка анализа модела са два материјала и једним, добијеним применом Мори – Танака методе за хомогенизацију композита, ради поређења са експерименталним резултатима. Израђен је и испитан практично примењив модел куке, са и без ојачања. Резултати свих испитивања су показала утицај ојачавајућих влакана на побољшање карактеристика материјала у еластичној зони, док су нумерички прорачуни показали одлично поклапање са експерименталним резултатима.

Кључне речи: ФДМ 3Д штампа, композитни материјали, Мори – Танака, метод коначних елемената, експериментално испитивање

Fiber reinforced 3D printing materials, fabrication, modeling

Abstract

Within this master's work fiber reinforced composite materials fabrication using FDM additive manufacturing method was presented. Fabrication and testing of tensile specimens were conducted. Numerical analysis of two models, one modeled with two materials, and one modeled using Mori – Tanaka composite homogenization method, and its comparison with experimental results. Practically useful hook models, one reinforced, one not, were also fabricated and tested. All experimental results showed greater reinforcement contribution of material mechanical characteristics in elastic zone. Numerical calculations showed very good match with experimental results.

Keywords: FDM 3D printing, composite materials, Mori – Tanaka, finite element method, experimental test

1. Увод

Константни развој индустрије довео је до тога да захтеви постављени пред индустријске материјале постају изазовнији. Овим је индукована потреба да се конвенционални материјали замене савременијим. Тако композитни материјали постају све заступљенији у машинству, авио индустрији, грађевинарству, аутомобилској индустрији итд. Овакви материјали имају као предност велику чврстоћу и јачину у односу на тежину као и ниске трошкове одржавања.

У новије време све већи значај у индустрији представљају брзе производне технологије, а посебно тродимензионална штампа, због својих способности израде делова велике комплексности, кратког времена израде, погодности за модификацију, итд.

Развојем овог вида израде јавила се идеја за комбинацијом брзих производних технологија и композитних материјала, како влакна могу значајно да повећају својства термопластичних материјала. Иако композитни материјали ојачани континуалним влакнима имају боље механичке карактеристике, комерцијално су доступнији композити са исецканим влакнима.

У овом раду ће бити дат преглед основних видова штампе, доступних материјала за адитивне, брзе, производне технологије, а посебан осврт ће бити дат на FDM штампу композитних материјала, ојачаних континуалним композитним материјалима.

Такође биће дата сопствена реализација FDM штампе композитних епрувета за испитивање затезањем уз варирање праваца штампе где ће се испитивањем на затезање утврдити карактеристике како неојачаних тако и ојачаних материјала уз различите смерове штампе.

Након експерименталног испитивања подаци добијени експериментом ће бити употребљени за спровођење нумеричке анализе у програмском пакету *Femap with NX Nastran*, ради верификације резултата.

Такође биће представљен и експериментално испитан један од примера практичне примене оваквих видова израде композитних модела.

2. 3Д штампа

Под брзим производним технологијама се подразумева низ релативно нових, претежно адитивних технолошких поступака који омогућавају директну производњу комплексних физичких објеката користећи као улаз 3Д геометријски модел, добијен из неког CAD софтверског програма или реверзним инжењерингом [1].

Развојем интереса авиокомпанија, производња додавањем материјала, познатија као 3Д штампа постала је горућа тема последњих деценија. Овај вид производње, због својих способности у брзој изради делова са комплексном геометријом, нашао је највећу примену у ауто и авио индустрији. Првенствено овај вид производње се сводио на израду пластичних прототипова разним процесима 3Д штампе, а касније се развија и могућност израде комплексних функционалних делова од материјала попут метала, керамике, па и композита [2].

У табели 1 дат је преглед основних метода које се примењују за 3Д штампу, врсте почетног материјала, начина на који се материјал обрађује и сл.

Табела 1. *Анализа почетног стања материјала и принципа рада процеса 3Д штампе [2]*

Почетно стање материјала	Процес	Припремање материјала	Метод израде слоја	Типични материјали
Филамент	FDM	Топљење у бризгаљци	Континуално екструдирање и таложење	Термопластика, восак
Течност	SLA	Смола у резервоару	Ласерско скенирање	Смоле осетљиве на УЉ зрачење
Прах	SLS	Прах у посуди	Ласерско скенирање	Термопластика, восак, метални прах, керамички прах
Прах	3DP	Прах у посуди	Тачкасто штампање везива	Полимери, метал, керамика

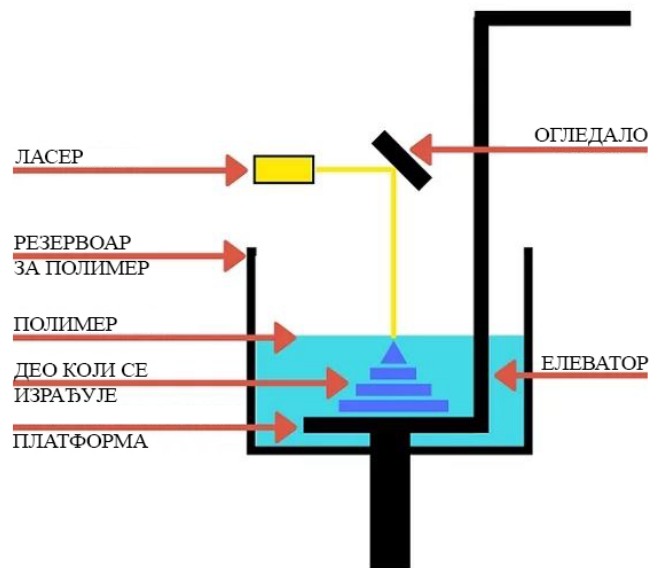
2.1 Стереолитографија – SLA

Стереолитографија је форма адитивне 3Д штампе од материјала у течном облику, у виду фотосензитивних смола које током процеса очвршћавају под дејством ултраљубичасте светлости – фотополимеризацијом [1].

Фотополимеризација представља процес повезивања малих молекула (мономера) у ланце великих молекула (полимера) који се касније везују у све веће ланце, а изазвана је фотохемијским процесом који је последица индукције енергије из извора радијације.

Принцип рада овог, као и већине система за брзу израду прототипова се заснива на слојевитој изради. Најчешће извор енергије за фотополимеризацију је ласерски зрак који скенира радну површину течног мономера.

Главни делови стереолитографске машине су: комора са течним полимером, покретна платформа, изравњивач и огледала за усмеравање УЉ зрака ласера – приказани на слици 1.



Слика 1. Шематски приказ стереолитографије [3]

Овај систем брзо и лако, преко огледала, усмерава фокусирану радијацију одговарајуће снаге и таласне дужине на површину течности у складу са информацијама које се шаљу са рачунара. Овако послата радијација очвршћује површину течности у тачкама које одговарају попречном пресеку комада који се штампа до одређене дубине. За израду наредног слоја платформа са радним делом се спушта на ниже, испод површине течне смоле за дебљину слоја, па поново подиже да доведе свој највиши слој изнад површине смоле. Потом оштрица изравњивача уклања вишак фотополимера, када се платформа поново спушта где ласерски зрак делује на смолу и формира нови слој дела и тако до комплетно формираног комада. На слици 2а је приказан један од SLA штампача, а 2б представља комад одштампан овом методом.



а)



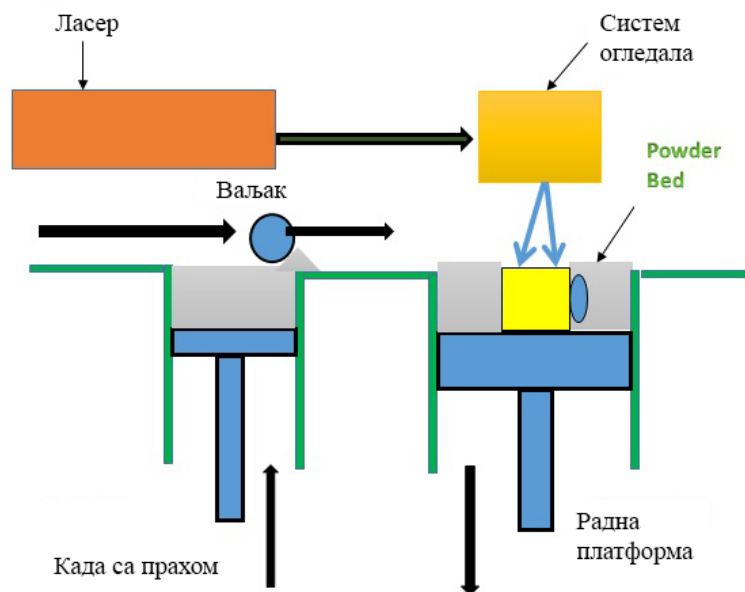
б)

Слика 2. а) SLA штампач [4] б) SLA одштампан комад [4]

Предности ове врсте штампе се огледају у прецизности – најпрецизнија техника израде на тржишту, високог квалитета, са великом могућношћу израде комплексне геометрије са доста детаља. Са друге стране, за штампу је потребно доста времена, делови са препустима и усецима морају да имају ослонце који се израђују заједно са моделом, а касније се уклањају приликом постпроцесирања, смола је крта, није погодна за израду функционалних модела, ограничења се јављају и у одабиру боја, као и у немогућности размене полимера између штампача различитих брендова. Такође, често је потребно накнадно очвршћивати модел у УЉ пећима [3, 1].

2.2 Селективно ласерско синтеровање – SLS

Селективно ласерско синтеровање ради на сличном принципу као и SLA с тим што се при овом начину израде не користе течни полимери већ је изворни материјал у облику праха чија се површина синтерује ласером. За разлику од процеса стереолитографије где се на материјал делује светлосном енергијом ласерског зрака у SLS процесу ласер на честице праха делује својом топлотном енергијом загревајући их тик испод тачке кључања или тик изнад тачке топљења што спаја честице у чврсту форму [1,4]. Како су температуре на које је потребно материјал довести јако високе, тако је и количина енергије која се утроши значајна, па се прибегава предгревању радне коморе помоћним грејачима до температуре нешто испод саме температуре синтеровања. Слика 3 представља шематски приказ принципа рада селективног ласерског синтеровања.



Слика 3. Шематски приказ селективног ласерског синтеровања [3]

Током скенирања радне површине, ласерски зрак загрева само део праха који одговара попречној пресеку дела који се израђује, довољно да се честице истопе и сједине. Потом се када са прахом подиже, ваљак равномерно наноси следећи слој праха и тако до финалног производа. Како висеће елементе модела придржава несинтеровани прах, нема потребе за постављањем носеће структуре. Када је израда дела завршена, део се одстрањује из каде. Слој праха који је остао око дела изолује га и спречава брзо хлађење, овај слој праха је потребно отклонити ручно, или компримованим ваздухом [1].

Предности овог вида штампе су у томе што овако одштампани делови имају добру постојаност услед израде у прецизно контролисаном окружењу, постоји велики избор материјала, нема потребе за израдом ослонаца, нема пуно постпроцесирања или накнадног очвршћавања.

Главни недостатак оваквог једног система је велика потрошња енергије за напајање ласера и грејача за предгревање. Површина готовог дела је слабог квалитета услед велике димензије честица праха [1, 4].

Делови израђени селективним ласерским синтеровањем налазе примену као функционални модели и прототипови, за тестирања или уградњу у склопове, као поликарбонатни шаблони за ливење итд.

На сликама 4а и 4б су приказани SLS штампач и модел одштампан селективним ласерским синтеровањем респективно [3, 4].



а)



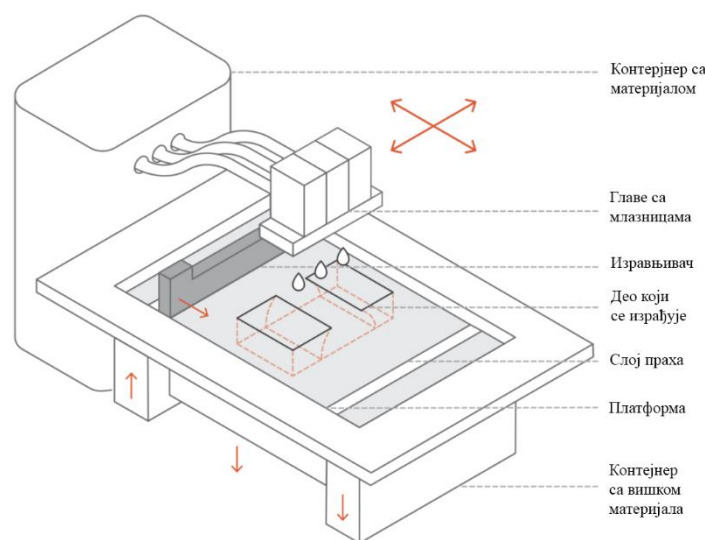
б)

Слика 4. а) SLS штампач [3] б) SLS одштампан комад [4]

2.3 Тродимензионално штампање – 3DP

Ова врста процеса подразумева наношење везивног средства на прах кроз млазницу налик оној код *inkjet* штампача и то на део површине дефинисан моделом који се штампа, односно делу који одговара попречном пресеку на висини чији се слој тренутно израђује [1].

Технологија тродимензионалног штампања је слична SLS технологији јер захтева слој праха на платформи на којој се модел штампа, али за разлику од SLS, које користи ласер за синтеровање праха, код овог система капљице везива, типично пречника од 80 μm , спајају честице праха у униформну структуру [3]. Слика 5 приказује поступак штампања једног слоја.



Слика 5. Шематски приказ 3DP технологије [3]

Као и код SLS овај метод има контејнер са прахом, који се за разлику од SLS методе не предгрева, током целог процеса 3Д штампе, топлота не игра улогу. У првом кораку штампе изравњивач распоређује прах по платформи равно, у танком слоју. Вишак праха бива прикупљен у посебном контејнеру. Потом глава за штампање прелази преко површине праха и испушта капљице везива у тачкама од интереса.

Када се заврши израда првог слоја, читава платформа се спушта за висину једног слоја и нови слој праха се поставља преко њега, понављајући поступак до финалног солида [3]. Након завршене штампе део је у потпуности прекривен прахом и као такав се оставља неко време како би се процес везивања завршио.

За употребе дела у сврхе у којима се захтева већа постојаност потребно је постпроцесирање. Оно се своди на печење у пећима, синтеровање или инфилтрирање модела разним лепковима или металима, најчешће бронзом [1, 3].

Јединствено у свету техника за брзу израду, овакав систем може израђивати и предмете у боји. Наиме, уколико се поставе четири главе са везивним средством цијаноплаве, пурпурно црвене, жуте и беле могуће је добити штампу у пуном спектру боја.

Највећа предност овог начина израде је велика брзина – један од најбржих система ове врсте, велика је примењивост израђених делова у свим видовима индустрије, без отпадног материјала – неискоришћени прах се може поново употребити, могућа је штампа у пуном колору. Такође, нема великих утрошака енергије како није потребно предгревање, нема деформације материјала услед утицаја топлоте.

Недостаци се огледају у томе што су делови знатно слабији и имају ограничења код функционалних модела, као и што модели имају релативно грубу површину без постпроцесирања [1, 3].

На сликама 6а и 6б су приказани тип 3DP штампача као и модел израђен овом техником.

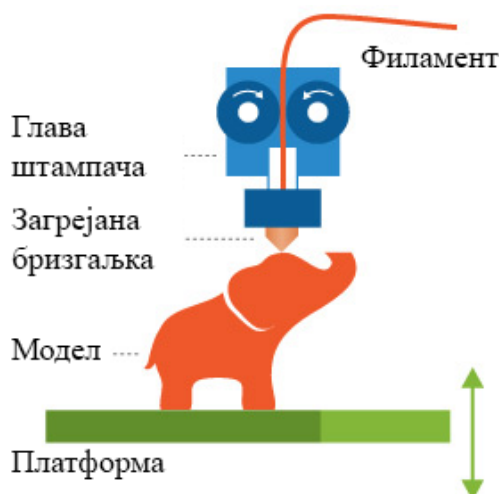


а) б)
Слика 6. а) 3DP штампач [3] б) део израђен 3Д штампом [3]

2.4 Моделирање депоновањем истопљеног материјала – FDM

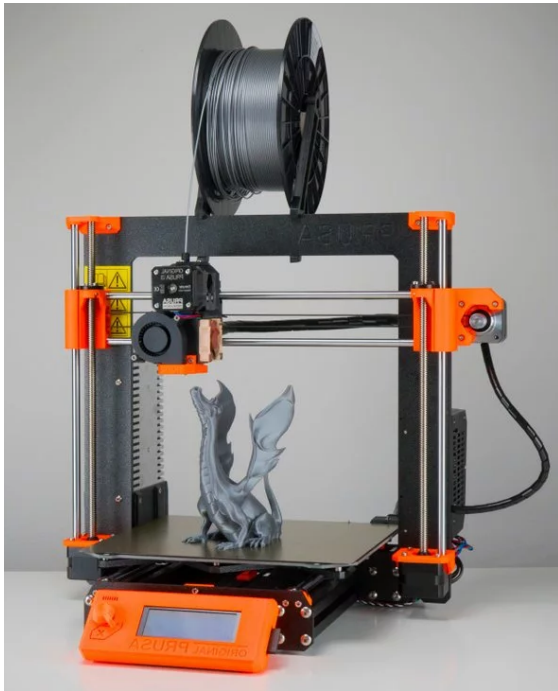
Fused Deposition Modeling – FDM се базира на принципу екструдирања и израђује моделе од чврстог материјала. Овај процес подразумева континуално довођење материјала у чврстом стању у комору за загревање, где се топи, а затим се истискује кроз профилисани отвор – бризгачку.

Након екструдирања, материјал се хлади и очврсне, тако формирајући слој модела дуж путање главе са бризгачком. Као и код свих адитивних техника брзе израде модел се и овде израђује из низа слојева [1]. На слици 7 је дат шематски приказ рада FDM штампе.



Слика 7. Шематски приказ FDM штампе [3]

Материјал се у виду танких нити уводи у главу са намотаја где се загрева до температуре топљења а онда се убризгава кроз млазницу. Глава се креће унутар контуре попречног пресека који се тренутно израђује при чему се растопљени материјал наноси на платформу или на претходно одштампан слој. Како је атмосфера у комори за штампу испод температуре топљења, материјал очвршћава брзо. Након завршеног једног слоја долази до подешавања растојања између платформе и брызгалке за дебљину слоја. Битно је одржавати константним температуру и брзину брызгалке као и померања између слојева како би површина била што континуалнија [1, 3]. Слика 8. приказује FDM штампач (лево) и комад одштампан овим процесом (десно).



а)



б)

Слика 8. а) FDM штампач [3] б) комад одштампан FDM-ом [3]

Код FDM – а носеће структуре представљају већи проблем него код претходно описаних технологија. Како нема ни течног полимера, а ни праха, потребно је одградити потпорну структуру на сваком месту где је слој који се израђује шири од претходног. Софтвери за управљање FDM поступком су опремљени алгоритмима за генерисање потпора тако да се оствари компромис између њихове носивости и лакоће отклањања [1].

Ово се постиже коришћењем још једне екструзионе главе са кртијим материјалом од примарног, за израду ових потпора, које је касније лако уклонити.

Главне предности FDM технологије су у томе што је могуће израђивати функционалне прототипове са минимумом отпада, уз то, лака је замена материјала јер се они достављају у виду намотане жице (слика 8а.), а нису ни токсични, за разлику од SLA смола, није потребно посточвршћивање. Највећи недостаци су напрезања материјала услед хлађења и непредвидивост тако насталих деформација, процес штампе је сам по себи спор и поседује веома ниску тачност израде [1].

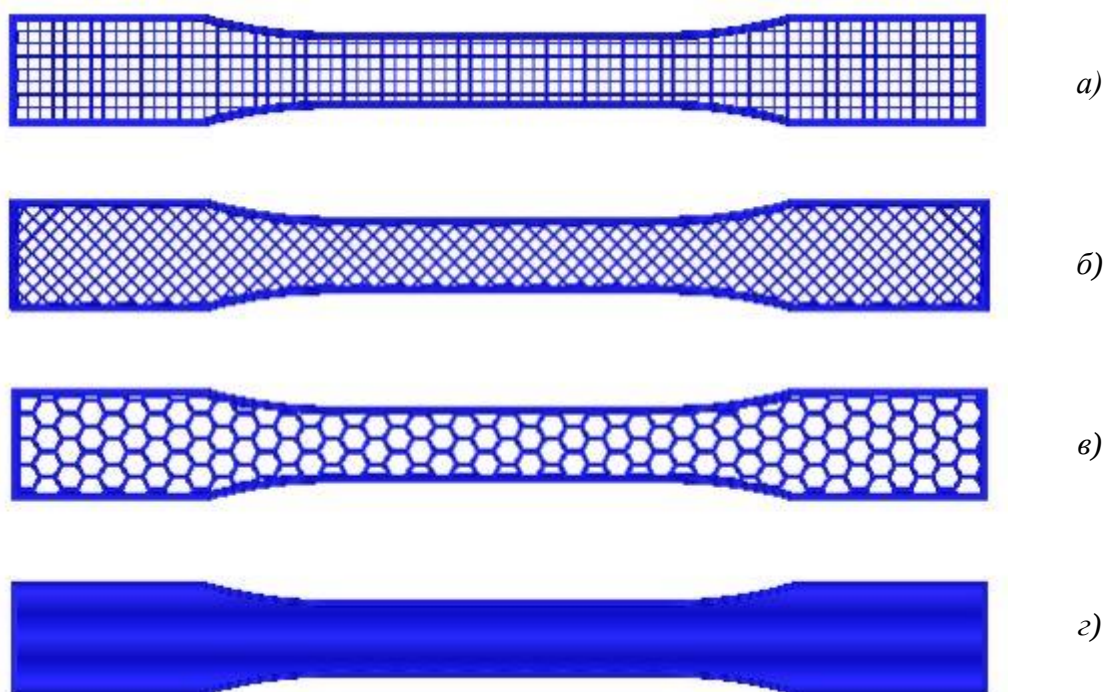
2.4.1 Параметри FDM штампе

Како би се обезбедио жељени квалитет и постојаност штампе потребно је обратити пажњу на неколико параметара у самом софтверу за генерисање G-кода. Од ових параметара зависе механичке карактеристике модела, време штампе, потрошња материјала као и квалитет површине материјала.

2.4.1.1 Утицај попуне (infill)

Одштампани део се може поделити на спољашњи – шкољку и унутрашњи – језгро. Језгро остварује приличан утицај на структурну отпорност и оно се изражава у процентима испуњености унутрашњости модела приликом штампе. Поред процента испуњености треба се осврнути и на шаблон језгра, који може зависити од намене, времена израде, али и личног укуса. Увидом у доступну литературу [5] извело се неколико закључака који зависе од врсте попуне материјала.

Посматрана су четири шаблона језгра, правоугаони, дијамантски, саће и потпуно испуњен материјал. (слика 9)



Слика 9. Типови језгра: а) правоугаони, б) дијамантски, в) саће, г) пун материјал [5]

Овако одштампане епрувете су испитане на затезање, брзином од 5 mm/min [5].

Правоугаони шаблон језгра је једини код ког је линија прелома била паралелна са осом оптерећења. Епрувета је кренула са деформацијом уз спољашњи зид епрувете, а потом постепено, паралелно са осом затезања, затим попречно до друге стране епрувете (слика 10а) [5].

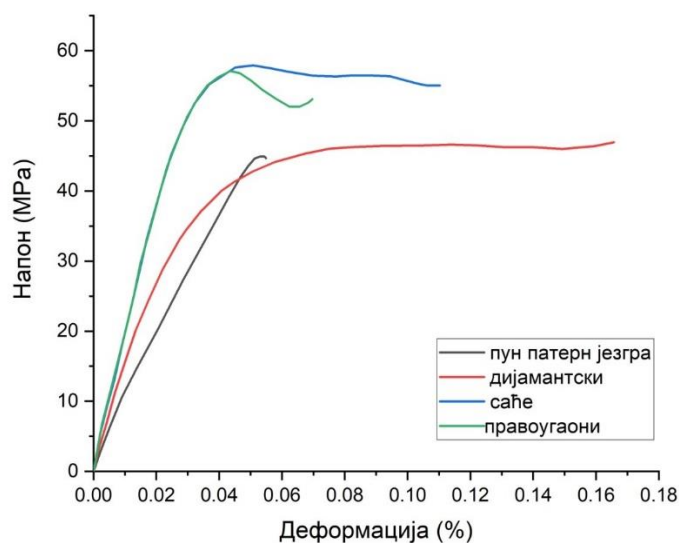


Слика 10. Визуелни прикази преломе епрувете различитих типова језгра: а) правоугаони, б) дијамантски, в) саħе, г) пун материјал [5]

Епрувета са дијамантским шаблоном језгра је претрпела целокупно кривљење где се пукотина ширила наизменично по ширини језгра, пратећи контуру језгра (слика 10б).

Код узорка са језгром облика саħа лом материјала је настао близу средине епрувете, али је настао и много брже, уз релативно праву линију прелома (слика 10в).

Епрувета са 100% испуњеним језгром је показала најправилнији лом (слика 10г) [5].



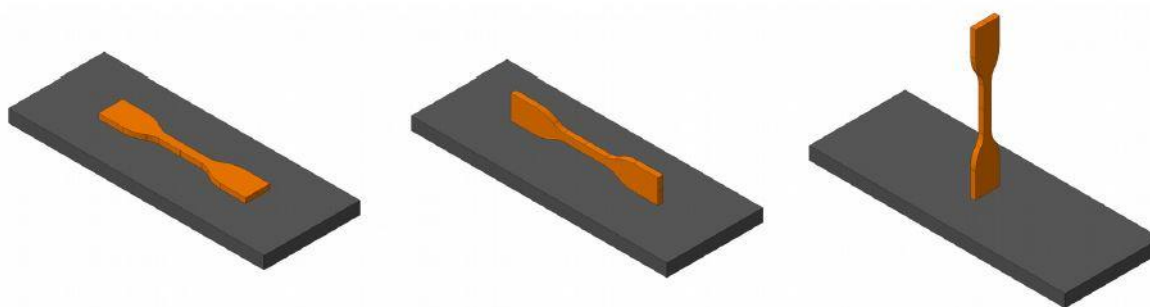
Слика 11. Криве напон-деформација за све типове епрувета [5]

Анализом кривих напон-деформација (слика 11) за све типове језгра дошло се до закључка да дијамантски шаблон испуне трпи највећу деформацију, саће и правоугаони могу да поднесу веће напоне, али су кртији, док пун материјал језгра показује најлошија својства [5].

2.4.1.2 Утицај праваца штампе

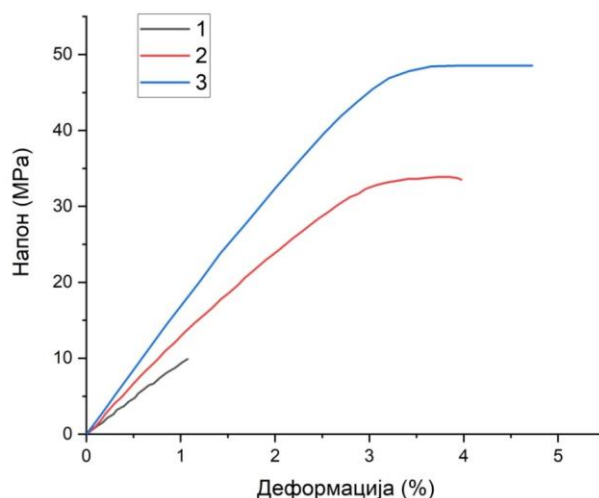
Како на квалитет пластичних модела веома утиче природа процеса, а код FDM штампе се креирање дела врши слој по слој, деловим имају анизотропна својства. Дакле, неопходно је разумети утицај праваца штампе, како би се одабрао најефикаснији, а уједно и правац који даје задовољавајуће механичке карактеристике.

Поређење је, према литератури [6] извршено штампањем епрувета у три оријентације (слика 12): лицем ка горе, бочном страном ка горе и усправно. Како би био изолован утицај праваца штампе, све епрувете су штампане истим параметрима у смислу температуре, попуне, висине слоја и брзине штампања [6]



Слика 12. Оријентација модела - лицем ка горе(лево), бочна страна ка горе (средина) и усправно(десно) [6]

Овако добијени узорци испитани су на затезање, константном брзином од 2 mm/min. [6]. Поређење резултата показује да узорци добијени штампањем бочном страном ка горе имају 45% већу затезну чврстоћу (49.25 МПа) у односу на узорке који су штампани лицем на горе (33.83 МПа) и приближно 4 пута већу вредност у односу на усправно штампане узорке [6]. На слици 13 приказане упоредно су криве напон-деформација за епрувете све три оријентације израде.



Слика 13. Криве напон-деформација узорка штампаних: 1 - усправно, 2 – лицем ка горе, 3 - бочна страна ка горе [6]

3. Композитни материјали и њихова тродимензионална штампа

Многе савремене технологије захтевају материјале са комбинацијом својстава коју немају ни легуре, ни керамички материјали, ни полимери. Као пример могу да се наведу компоненте авионских конструкција, где се од материјала захтева мала густина, велика чврстоћа и велика крутост. Оваква својства поседују *композитни материјали* (композити), који представљају комбинацију два или више материјала са различитим својствима у микро и/или макроскопској размери. Композитни материјали представљају посебну врсту материјала сачињену у циљу побољшања квалитета и механичких особина већ постојећих материјала, спајањем два постојећа материјала у један, нов, са бољим физичким особинама од својих компонената.

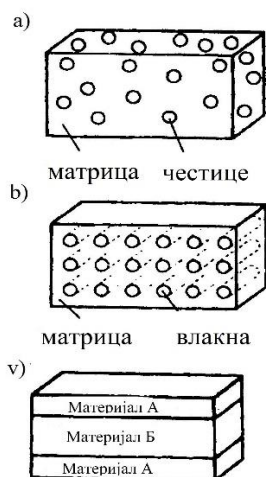
Предности композита у односу на класичне конструкционе материјале јесуу томе што се делови од композита могу пројектовати тако да величина појединих пресека или њихова јачина одговара оптерећењу у тим пресецима. При изради композита драгоцену су сазнања од градњи природних сложених материјала (нпр. дрвета) [7].

Сама израда композитних материјала нема за циљ само побољшање физичких својстава попут чврстоће, модула еластичности, жилавости, температурне постојаности, отпорности према корозији и хабању, већ и побољшање транспортних, складишних, отпадних својстава што као коначан резултат има побољшану економску исплативост.

У основи, композитни материјали се састоје из *основе (матрице)* и *материјала за ојачавање (ојачивача)*. Матрица која повезује ојачивач у заједничку структуру обично је од термореактивних смола (епоксидне, полиестарске, фенолне), а ојачавајуа влакна могу бити: стаклена, угљенична, арамидна, борна или од неких других материјала као што су дрво, камен и сл [7].

Уобичајена је подела композитних материјала на три различита типа [8]:

- Композити са укључцима – честицама (честице од једне врсте материјала а матрица од друге) – слика 14а
- Влакнасти композити (влакна направљена од једне врсте материјала а матрица од друге) – слика 14б
- Ламинати (направљени од слојева различитих материјала који подразумевају и претходна два типа композита) – слика 14в

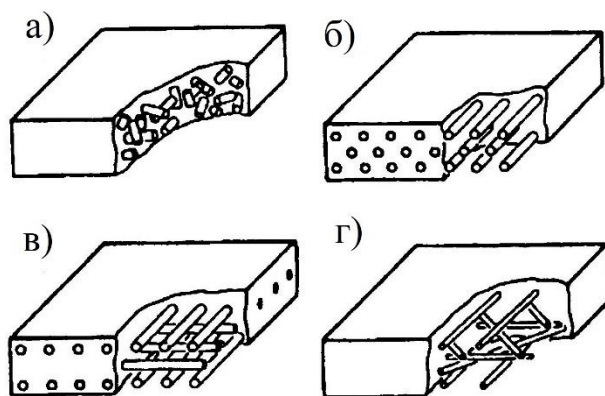


Слика 14. Типови композитних материјала

а) ојачани честицама,
б) ојачани влакнима,
в) ламинатни [9]

Ако су честице распоређене равномерно, композити ојачани честицама су *изотропни*. Композити ојачани влакнима су по правилу *анизотропни*, док су ламинатни композити увек *анизотропни*.

Код композита ојачаних влакнима разликујемо више видова оријентације и дужине влакана (слика 15): композити са произвољном оријентацијом влакана се понашају изотропно, али је ефекат ојачавања мали. Композити којима се влакна простиру у једном правцу, нпр. оплате авиона у авио индустрији, епоксидне смоле у грађевинарству, испуњавају захтеве у погледу чврстоће и крутости ако оптерећење делује у правцу влакана, али су ова својства лоша у правцима управним на правац влакана. Како би се постигла оптимална својства у више праваца, користе се слојеви за различитом оријентацијом влакана [9].



Слика 15. Различита влакна: а) кратка, произвольно оријентисана, б) дуга, у једном правцу, в) дуга у два међусобно управна правца, г) дуга, произвольно оријентисана [9]

Све бржим развојем адитивних технологија израде јавила се идеја и за укључивањем композитних материјала у ове процесе.

3.1 FDM штампа композитних материјала

Једна од метода за унапређење механичких карактеристика чисто термопластичних материјала је ојачати пластичну матрицу другачијим материјалима попут угљеничких влакана чиме се добијају *CFRP – Carbon Fiber Reinforced polymer* композити. FDM има доста предности као процес за рад са композитних материјала пре свега због могућности употребе више бризгаљки за различитим материјалима, као и због мале цене и велике брзине штампе. Једна од мана је што улазни материјал мора да буде у облику филамента како би екструдирање било могуће. Такође, материјали за израду материце су ограничени на термопластичне услед специфичних захтева на пољу вискозности – довољно велике за структурну чврстоћу, довољно ниске за екструдирање [2].

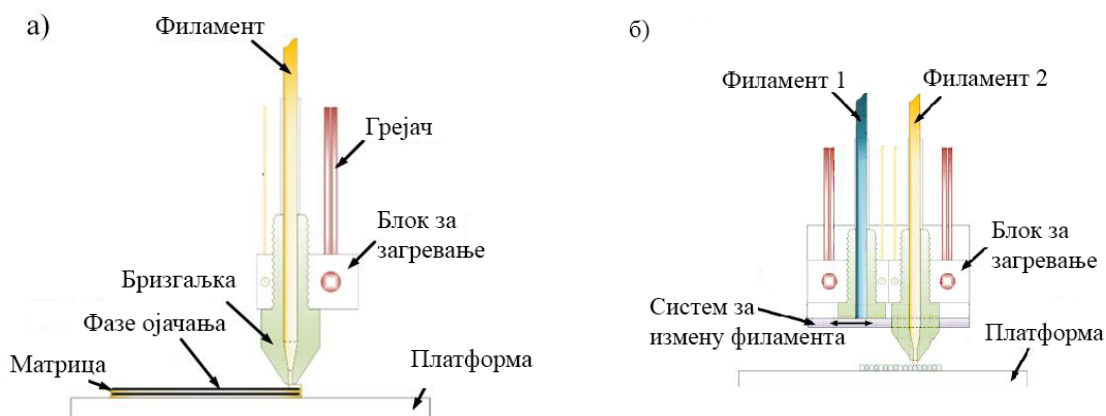
Могуће је поделити методе штампе композитних материјала или мултиматеријалних структура према врсти главе за штампање – слика 16.

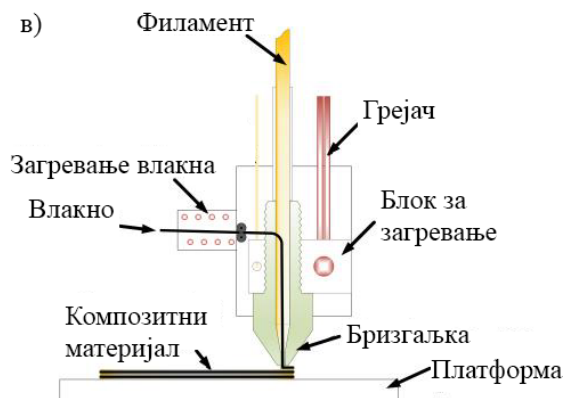


Слика 16. Шематски приказ поделе FDM штампе композита према врсти главе штампача [10]

3.1.1 Штампање на ојачавајућем материјалу

Израда композитне структуре помоћу једне главе штампача на ојачавајућем материјалу (слика 17а) је метод сличан креирању мултиматеријалних структура. Композитни материјали се добијају у процесу из више етапа, где број етапа зависи од броја ојачавајућих слојева у финалном елементу. Свака фаза штампе подразумева одабир раздвојне плоче, што дозвољава заустављање штампе и постављање ојачавајућег слоја у штампачу [10].





Слика 17. *Израда композитних структура а) једном главом на ојачавајућем материјалу; б) штампа два материјала; в) импрегнација унутар главе [10]*

Мане овог вида израде подразумевају ограничења везана за дебљину индивидуалних слојева ојачавајућег материјала у композиту. Могуће је доћи до деформација материјала уколико је ојачавајући слој превише дебео. Такође велика мана је појава поделе модела у делове подељене паралелним равнима, као и потребе за управљањем главом штампача и њеним заустављањем како би се додали елементи. Технолошки проблем представља наставак штампе без губитака у континуитету материјала. Прегледом литературе установљена је просечна дебљина ојачавајућег слоја од око 0,5 mm- [10].

3.1.2 Штампане композитних структура једном главом коришћењем посебног филамента

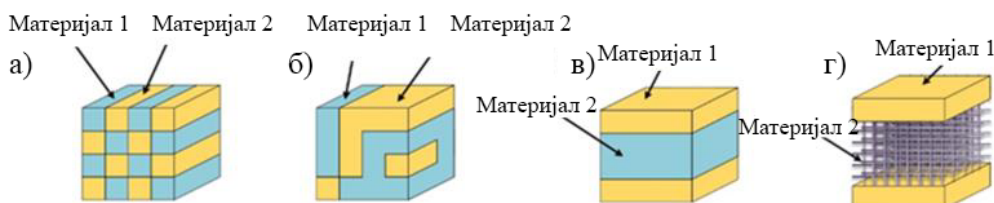
Израда композита једном главом штампача користи другачије филаменте од традиционалне FDM технологије штампе која поред полимерног материјала садржи и адитиве: микросфере, честице стакла или угљеничког влакна итд.

Највеће ограничење ове методе је сама доступност таквог материјала. Могућа је набавка унапред припремљених филамената, али тржиште нуди ограничен квантитет таквих производа. Композитни филаменти могу да се произведу самосталним екструдирањем уз обраћање пажње на брзину екструдирања – већа брзина, мањи пречник филамента, као и на величину честица и њихов запремински удео у филаменту. Уколико су честице превелике или имају велики запремински удео, може доћи до блокаде тока кроз главу чиме би се изазвао дефект у штампаним деловима.

3.1.3 Креирање композитне структуре штампом два различита материјала

На слици 17б се налази шематски приказ израде композитне структуре коришћењем два материјала. Овај процес је напреднија, али све примењивија метода тродимензионалне штампе. Могуће је извести помоћу једне главе штампача са две главе штампача или са једном главом и системом за замену филамената.

Овај метод подразумева наизменично наношење различитих материјала у једном процесу штампе. Предност се огледа у томе што је могуће контролисати својства готовог производа још у процесу дизајна и израде, јер је могуће изградити било коју композитну структуру (слика 18).



Слика 18. Примери штампе двоструких материјала а-б) наизменична дистрибуција материјала в) слојевита структура композита г) скелетна структура [10]

Ограничавајући фактори могу потећи од немогућности лаког преласка са једног материјала на други, по фрагментима, у конфигурисању самог G – кода, као и од захтева за употребом материјала сличних термалних карактеристика.

Уколико се израда композита врши депоновањем материјала у слојевима, онда се примењује техника којом се прво наноси слој једног, па слој другог, па потом поново слој првог материјала итд. (слика 18в). На слици 18г је приказана још једна форма израде композита у слојевима, овај пут када је један од материјала скелетна структура, а не солид као код претходно описане технике. Најзаступљеније скелетне структуре подразумевају хексагоналне, квадратне или хелије облика саћа [10].

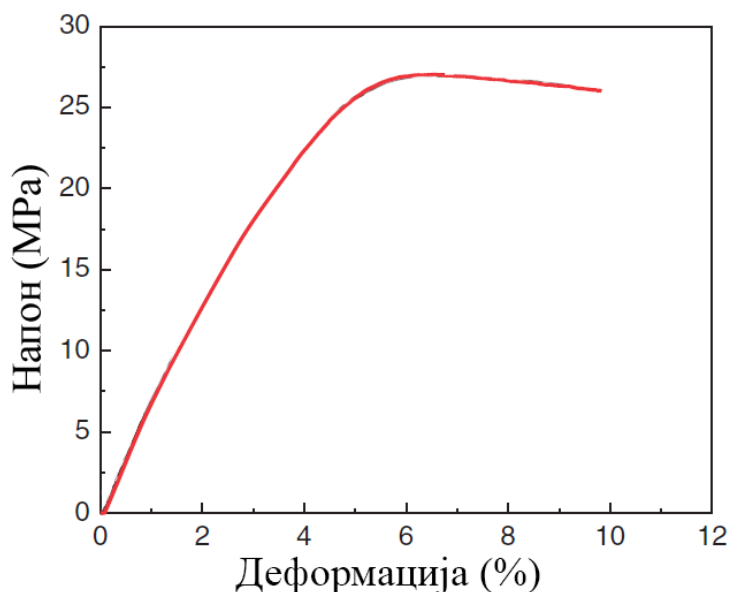
3.1.4 Израда слојевите композитне структуре импрегнацијом континуалног влакна унутар главе штампача

Слика 17в представља израду континуалних композита импрегнацијом унутар главе штампача. Материјал филамента, као материјал матрице и континуално ојачавајуће влакно се одвојено уводе у главу штампача. Како би се обезбедила импрегнација влакна термопластичним материјалом, пре уласка у главу, ојачивач се загрева. Услед кретања филамента, влакна се аутоматски увлаче у главу. Филамент се спаја са ојачивачем унутар главе. Потом је процес сличан традиционалном FDM процесу [10].

3.2 Нека решења штампе композитних материјала

Увидом у публиковане студије које се баве овом тематиком, можемо извести закључак да је ово веома популарна и слабо истражена тема, те да има простора за даља унапређења и напредак на овом пољу.

Нинг и сарадници [11] су користили FDM машину за адитивно креирање CFRP узорка филаментом (*FilaBot Co. Montpellier, САД*) пречника 1,75 mm који поседује комадиће угљеничних влакана масеног удела од 5% у матрици од ABS пластике. Одштампана је стандардна епрувета која је касније испитивана на затезање, чији је дијаграм истезања дат сликом 19.



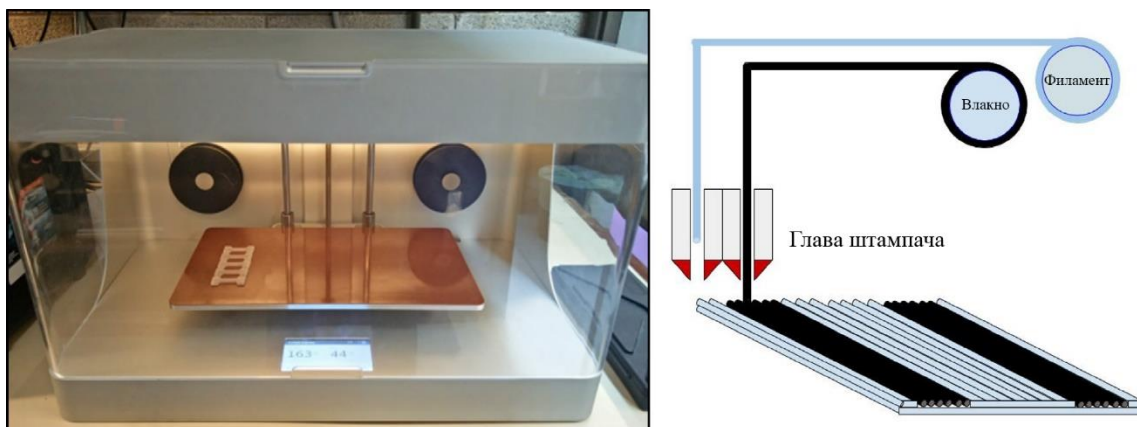
Слика 19. Дијаграм истезања за епрувету од FilaBot материјала [11]

Током испитивања праћени су следећи елементи [11]:

- смер штампе слојева, комбиновано је [0, 90] као и [-45, 45],
– углови штампе [0, 90] су показали значајно већу затезну чврстоћу, Јангов моду и границу еластичности од [-45, 45] узорка.
- брзина штампе, односно брзина кретања брызгалке релативно на платформу, од чега зависи запремина екструдираниог филамента као и геометрија попречног пресека узорка
– установљена је оптимална брзина од 25 mm/s јер доводи до највећих средњих вредности својстава од интереса, које опадају са повећањем брзине услед мање интеракције и мањег везивања између влакана
- температура брызгалке – утиче на течљивост и карактеристике очвршћавања екструдираниог филамента
– сва затезна својства су прво расла, а потом опадала са превојном тачком од 220 °C услед слабијих веза на нижим температурама, а порознијем материјали на вишим
- дебљина слоја
– Затезна чврстоћа, Јангов моду и граница еластичности су показале највеће вредности за дебљину слоја од 0.15 mm

Диксон и сарадници [12], су вршили тестове на штампаним епруветама код којих је матрица израђена од најлона а као ојачивачи су коришћена влакна од стакла, угљеника

и Кевлара. Штампач, влакна, као и филамент су обезбеђени од стране фирме *Markforged* (слика 20 - лево). Такође израђена је и епрувета од чистог најлона, без ојачивача. Штампа је вршена из две етапе, са две различите главе штампача, од којих једна врши полагање матрице док друга поставља ојачивач (слика 20 - десно).



Слика 20. *Штампач Markforged Mark One – лево и шематски приказ принципа рада - десно*
[12]

Коришћене су две орјентације влакана – концентрична (слика 21а) и изотропна (слика 21б), уз напомену да за карбонска влакна, због природе влакана није било могуће извести изотропну орјентацију. Шематски приказ попречног пресека узорка је приказан на слици 21в, где се виде слојеви од чистог најлона (бело) и ојачивача (црно).



Слика 21. Шематски прикази штампне узорака а) концентрична орјентација б) изотропна орјентација в) попречни пресек [12]

Израђене епрувете, приказане на слици 22 (лево пре тестирања, десно након) су потом тестиране на затезање.



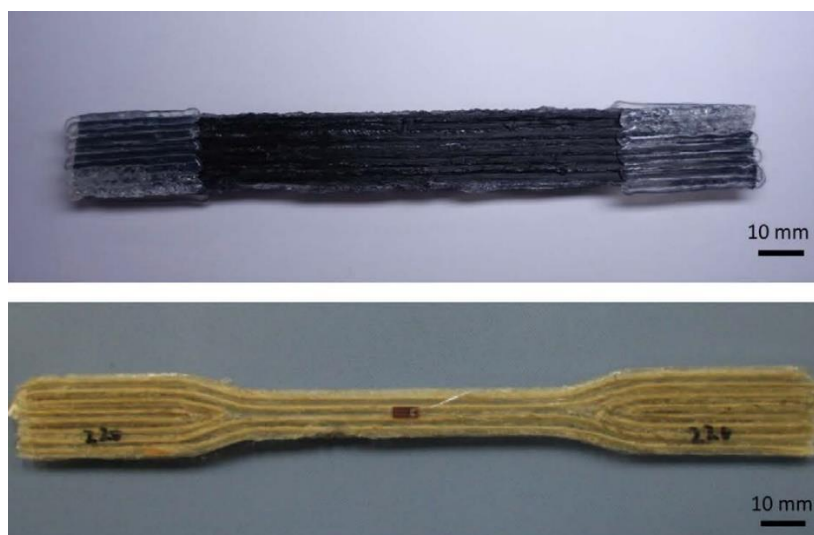
Слика 22. Епрувете за испитивање на затезање, пре испитивања (лево) и након (десно) [12]

Једино је епрувета од чистог најлона показала дуктилни лом материјала, док су остале испољиле крто кидање, али са знатно већом затезном чврстоћом. Такође, концентрични начин ојачања је показао већу затезну чврстоћу од изотропног, код стаклених и влакана од Кевлара, како за угљеник није било могуће извршити поређење.

Поређењем затезних чврстоћа концентричног ојачања сва три типа влакана долази се до закључка: Карбонско влакно > Стаклено влакно > Влакно од Кевлара.

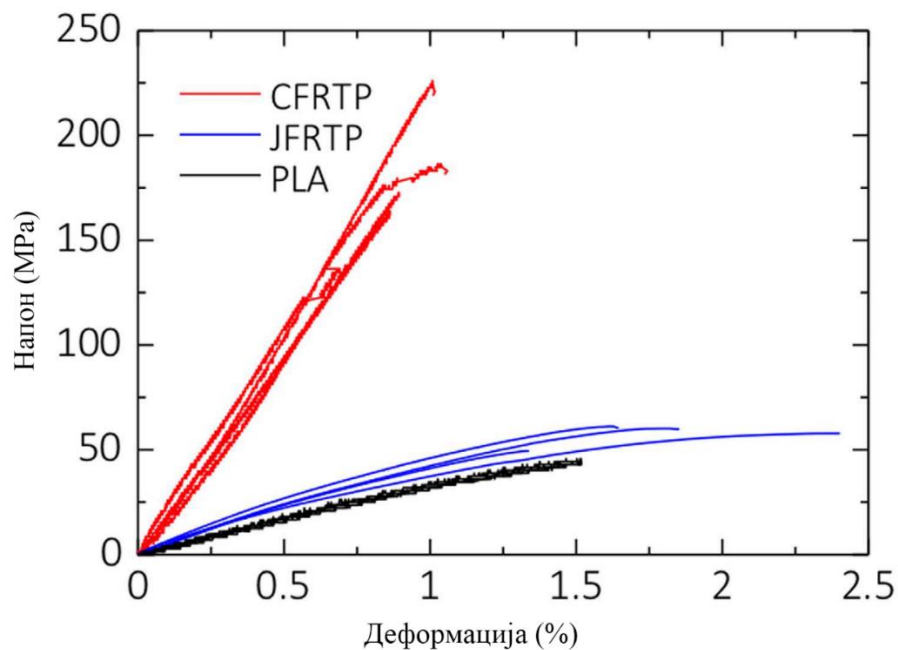
Мацузаки и сарадници [13] су развили јединствену методу дуалне екструзије, дизајнирањем и израдом посебне, нове, главе за штампу (слика 17). Принцип рада њиховог решења се заснива на импрегнацији филамента влакном за ојачање у самој глави штампача где се термопластични филамент и ојачавајуће влакно у главу доводе одвојено. Ојачивач се загрева пре уласка у бризгаљку како би се обезбедило боље везивање влакна са термопластичном смолом. Филамент се кроз бризгаљку води степ мотором, док за ојачавајућа влакна није потребан погон, јер се крећу аутоматски, гоњени филаментом.

Филамент се топи у бризгаљки спајајући се са ојачавајућим влакнима. Овако добијена смеша је спремна за наношење на предгрејаној платформи за фабрикацију композита слој по слој. За ојачавање су коришћена влакна од угљеника и јуте (слика 23), материјал филамента је био PLA (polylactic acid).



Слика 23. Епрувете израђене FDM методом са импрегнацијом у бризгаљци са ојачивачима од угљеника (горе) и јуте (доле) [13]

Узорци ојачани влакнима угљеника (CFRTP) су показали повећање затезне чврстоће од 435% у односу на изворни PLA узорак, док су они ојачани влакнима јуте (JFRTF) показали повећање затезне чврстоће од 134% (слика 24).



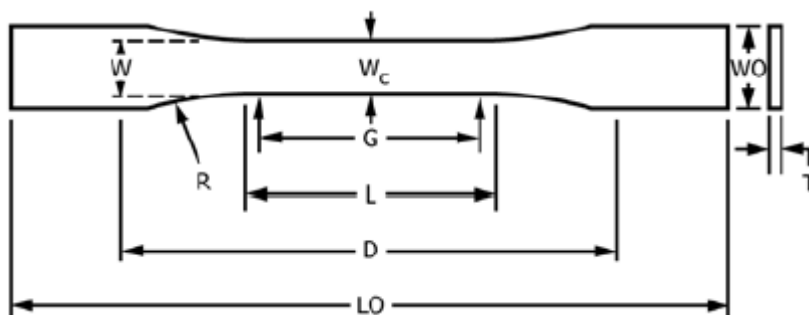
Слика 24. Дијаграм напон – деформација за узорке ојачане угљеником – CFRTP; јутом – JFRTF и без ојачања - PLA) [13]

4. Експериментална испитивања

Након обраде наведене литературе одлучено је да се изврши сопствени покушај штампе епрувете композитним материјалом у Центру за информационе технологије (ЦИТ) Факултета инжењерских наука, Универзитета у Крагујевцу. Услед најбоље исплативости одабран је принцип штампе са ручним уношењем континуалних влакана у слојеве епрувете. За реализацију ове идеје коришћен је штампач *Wanhao Duplicator i3 Plus*, са филаментом од полилакталне киселине (PLA).

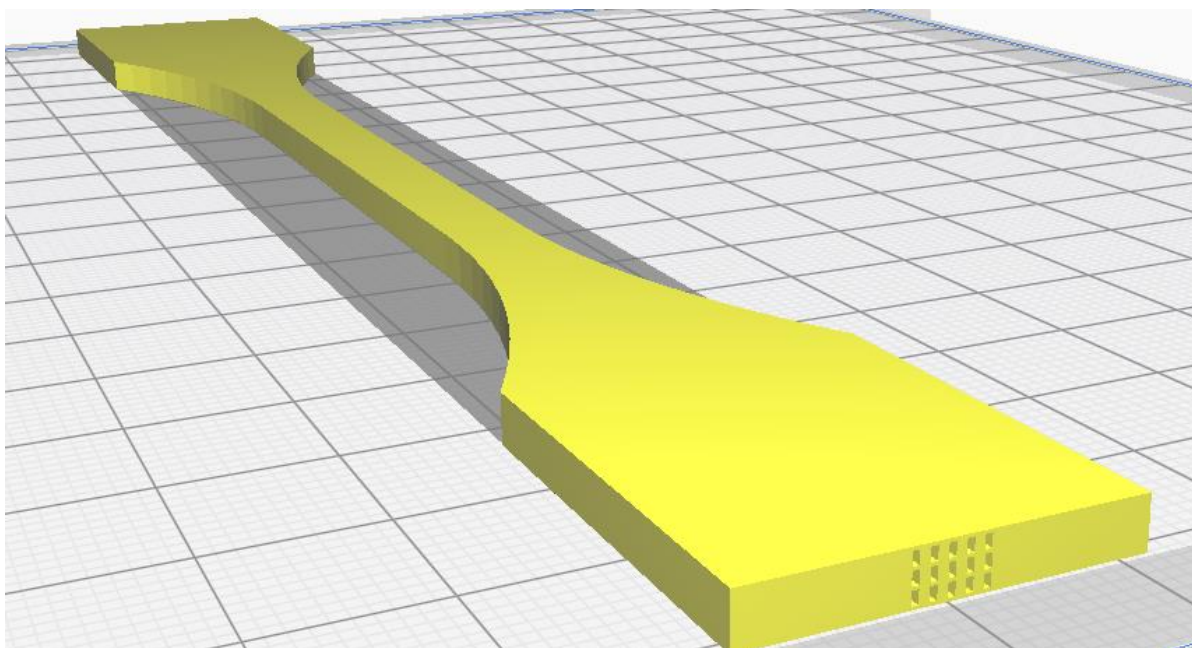
4.1 Израда епрувете

Најпре је направљен модел епрувете по угледу на епрувету из Диксоновог рада [12], а сагласно америчком стандарду за методе тестирања затезних својстава пластика *ASTM D638* [14], узет је тип II епрувете, димензија 183x23x3,4 mm (слика 25).



Слика 25. Димензије епрувете за штампу: $T=3,4\text{ mm}$; $LO=183\text{ mm}$; $WO=23\text{ mm}$; $W=6\text{ mm}$; $L=57\text{ mm}$; $G=50\text{ mm}$; $D=135\text{ mm}$; $R=76\text{ mm}$ [14]

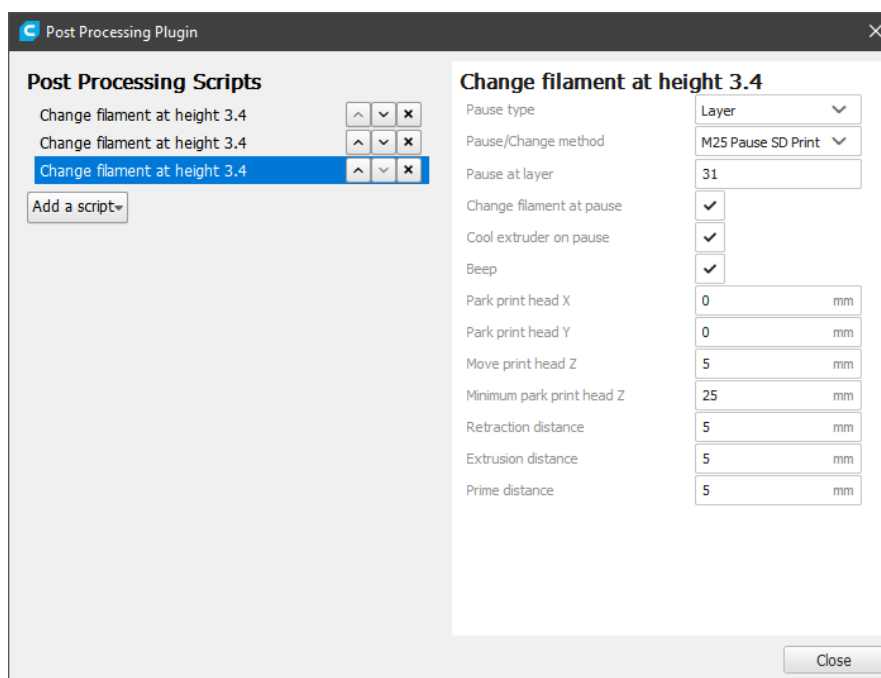
Након израде тродимензионалног CAD модела саме епрувете на њој су урађени и тунели, правоугаоног попречног пресека ширине 0,3 и висине 0,6 mm, у које је планирано да се у самом процесу штампе дода ојачавајуће влакно. Овако одрађен модел је извезен у STL фајл који се може видети на слици 26.



Слика 26. STL модел епрувете припремљен за штампу [13]

Потом је било потребно припремити модел за штампу, односно извести G – по коме ће управљачки програм штампача моћи да реализује штампу. За ову операцију је коришћен софтвер *Ultimaker Cura 4.1.0* [15]. Кроз овај софтвер је могуће у потпуности подесити све параметре штампе, како оне основне (брзину кретања главе, температуру бризгальке, температуру подлоге, брзину изласка материјала итд.), тако и напредније опције као што је на пример угао наношења материјала. За параметре штампе су узети стандардни параметри за PLA (bed temp. 50 °C, extruder temp. 210 °C). Такође, као предмет испитивања је узета у обзир и оријентација штампе, тако да ће бити поређени смерови [0, 90], где се штампа врши по уздужној и попречној оси и [45, 135] у чијем случају се глава штампача креће дијагонално, под угловима од 45 и 135 степени у односу на аксијалну осу епрувете.

Такође потребно је да се штампа заустави после нанетог одређеног броја слојева како би се ојачавајуће влакно додало ручно. За ово је коришћен Plug-in у софтверу који у сам G код убацује команду *M25 pause at height* [16] која поставља главу штампача у жељени положај и ту паузира штампу, параметри овог plugin-а за 31. слој су дати на слици 27.



Слика 27. Параметри потпрограма за паузирање штампе

За тачку коју глава заузима приликом паузе узете су координате (0,0) у x-y равни, јер је то координатни почетак координатног система штампача одакле је наставак штампе најсигурнији јер се тако избегавају могуће грешке услед мануелног уношења ојачавајућих нити.

У листингу испод је дата фракција кода коју имплементира претходно описана скрипта:

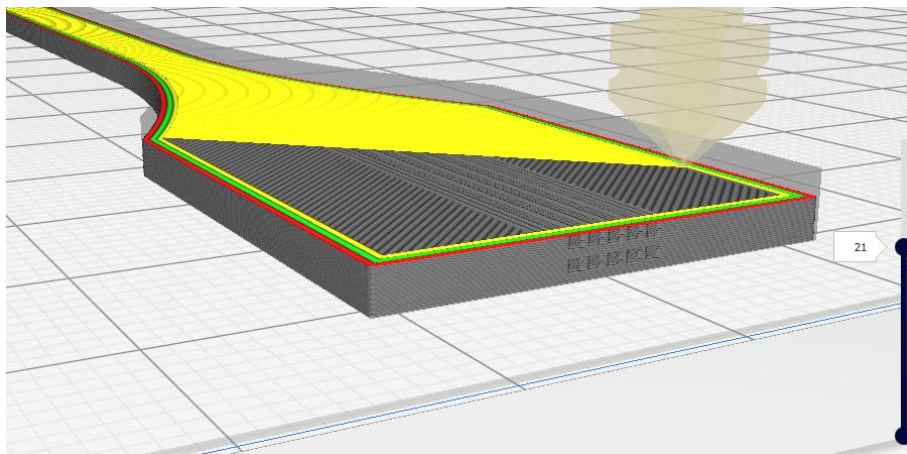
```
;added code by post processing
;script: ChangeAtHeight.py
;current z: 2.100000
M83 ;Set extruder to relative mode
G1 E-5.000000 F2400 ;Retract
G1 Z25.000000 F3000 ;Move head up
G1 X0.000000 Y0.000000 F3000 ;Move head away
M104 S0 ;Turn off extruder heat
M117 Press Continue...
M400 ;Wait for buffer to clear
M300 ;Beep
M25 ; Pause
G91 ;Set to relative position mode
G1 X-0.1 Y-0.1 Z-0.1 ; Lock motors
G1 X0.1 Y0.1 Z0.1 ; Lock motors
```

Наведени код представља паузу на почетку 21. слоја, где прво повлачи филамент 5 mm (E-5.000000) како би се избегло цурење материјала, потом подиже главу за 25 mm, поставља је у координатни почетак x-y равни и закључава моторе. Штампа се наставља притиском на дугме *Continue* (слика 28.) на дисплеју штампача када се извршавање кода наставља од тачке у којој је претходно паузирано.



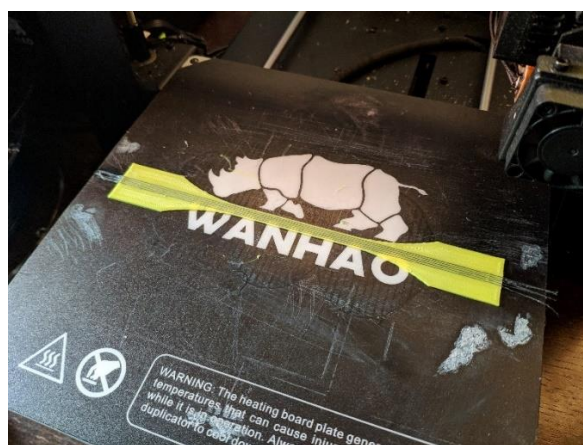
Слика 28. Управљачко окружење штампача

Подешено је да се пауза врши на 11., 21. и 31. слоју јер су то слојеви у којима се покривају направљени канали (слика 29). Епрувета је одштампана из укупно 34 слоја.



Слика 29. Симулација израде 21. слоја на чијем почетку се штампна паузира

Након извршене припреме у софтверском пакету *Ultimaker Cura* може се извести G-код и започети штампу епрувете. Након покретања штампе, штампач по завршеном загревању главе и подлоге аутоматски врши штампу до тренутка када наилази на прву команду за паузу када главу поставља у позицију (0,0) тако да обезбеђује адекватан прилаз одштампаном комаду ради убацивања ојачавајућег влакна. Демонстрација је одрађена најобичнијим шиваћим концем. Уметање конца у први низ канала је приказан на слици 30.



Слика 30. Уметнут први слој конца

Конац је пре увођења у канале импрегнирам лепком за папир у стик, чиме се поспешује везивање конца за одштампани модел и избегава евентуално померање конца при наставку штампе, такође конац је овим лепком причвршћен и за саму платформу штампача.

Након постављања конца, штампа је настављена до следеће паузе, када је поступак поновљен и тако за сва три слоја ојачивача. Коначно добијена епрувета је приказана на слици 31.



Слика 31. Коначно одштампани модел

Након изведене демонстрације шивањим концем приступило се реализацији епрувете ојачане влакнима рибарске монофиламентне струне од флуорокарбона пречника 0,145 mm.

Поступак увођења нити у канале епрувете је идентичан као код претходно описане епрувете и описан је на сликама 32а,б,в.



а) штампач у паузи



б) постављање нити

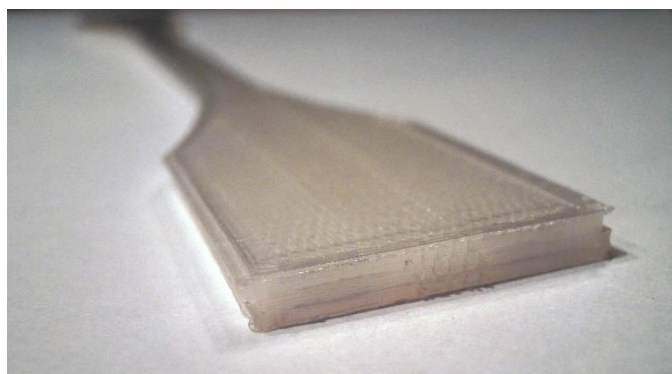
Слика 32. Израда епрувете са флуорокарбонским ојачањем



в) коначна
епрувета

Слика 32. *Израда
епрувете са
флуорокарбонским
ојачањем*

Током самог процеса израде епрувете потребно је било обратити пажњу на људски фактор код мануелног уношења ојачања јер услед необазривости може доћи до малих померања радне плоче, коју штампач самостално не може да региструје и исправи па се штампа неће наставити у адекватној координати и доћи ће до физичке аномалије одштапаног дела.



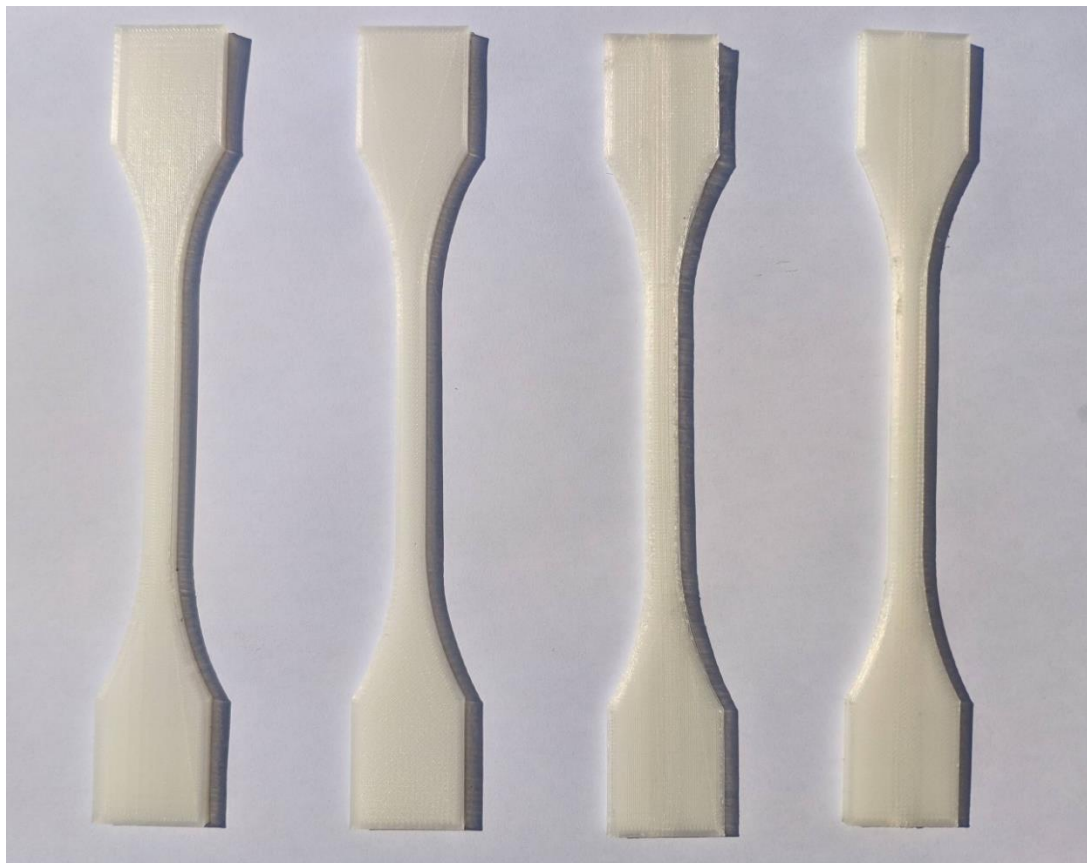
Слика 33. *Грешка на моделу услед померања радне плоче*

На слици 33 се види утицај померене радне плоче на сам физички модел. Услед померања плоче дошло је до измештања равни епрувете па се штампање није наставило у предвиђеним тачкама. Како би се ово избегло потребно је водити рачуна приликом постављања ојачања на помераје плоче, па уколико до њих дође вратити плочу у почетни положај. Оваква грешка је имала директан утицај на одабир координата у које се измешта глава штампача током паузе, због чега су одабране $(0,0)$ x и y координате, јер је то координатни почетак апсолутног координатног система штампача.

Идеално решење би било када би се G-кодом дефинисало да по наставку штампе након паузе штампач изврши нулирање координатног система, па потом настави са процесом.

Такође, у случају епрувете са оријентацијом $[0,90]$ може доћи до повлачења ојачавајућих нити при наставку штампе јер се код овог облика глава штампача креће низ канале у које су постављене нити. Ово се може избећи сигурнијим утврђивањем нити лепком, као и снижавањем брзине штампе покривајућег слоја.

Коначно, за потребе испитивања израђене су две епрувете за сваки од наведених случајева како би се испитала поновљивост резултата (слика 34)



а) пун материјал
[45,135]

б) пун материјал
[0,90]

в) са ојачањем
[45,135]

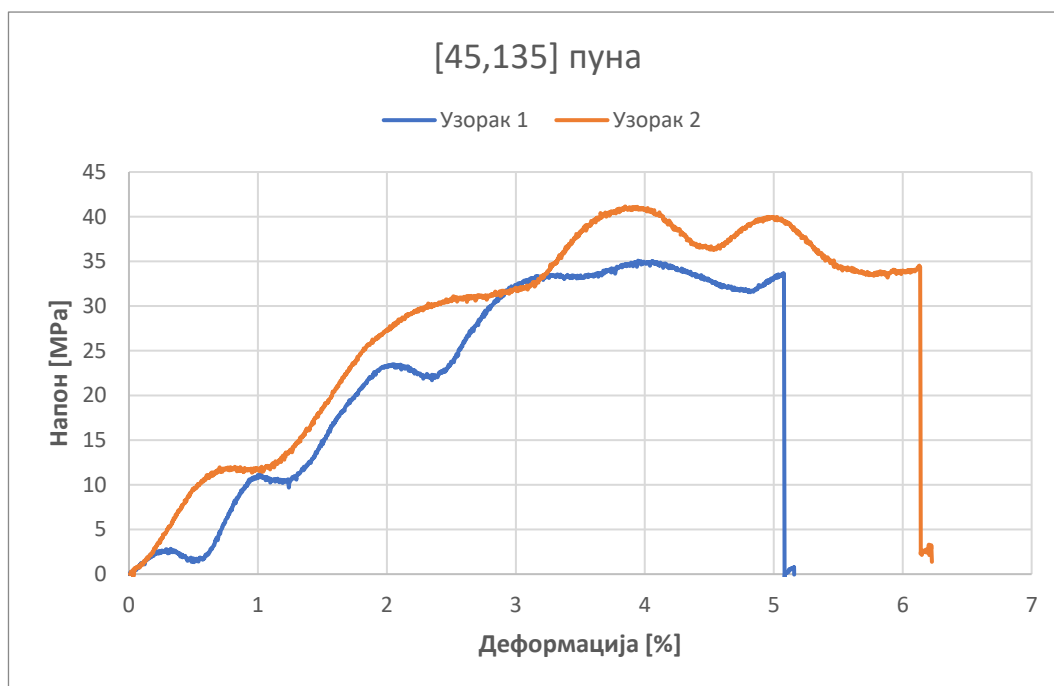
г) са ојачањем
[0,90]

Слика 34. Одштампани узорци за испитивање

4.2 Испитивање узорака на затезање

Узорци су испитани на једноосном систему за испитивање - кидалици Shimadzu ENF-EV101K3-070-0A, Јапан, која поседује давач силе од 100 kN. Задато је константно померање од 1 mm/min. Ова брзина је одабрана како би се изазвао отказ материјала између 30 s и 5 min испитивања, како је у складу са [14]. Праћено је оптерећење и померање, испитано је укупно осам узорака, по два за сваки случај ојачања и правца штампе.

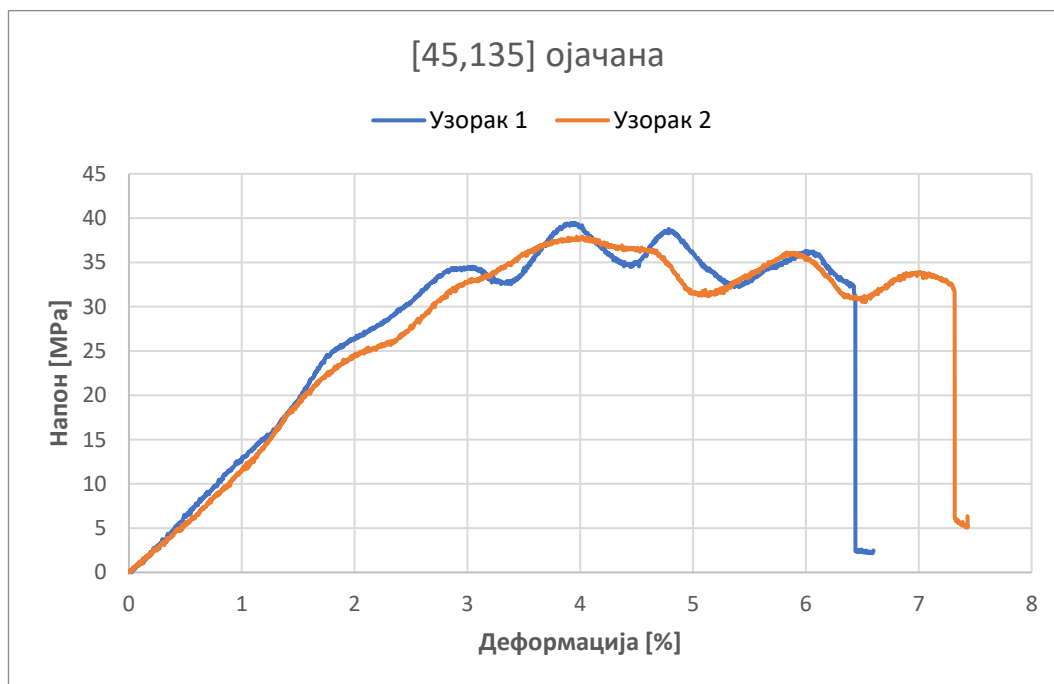
На слици 35 је приказан дијаграм напон-деформација за епрувете од пуног материјала, одштампане оријентацијом [45,135]



Слика 35. Дијаграм напон – деформација пуне епрувете [45,135]

Како се са дијаграма може видети оба узорка су показала слично понашање, уз разлику да је узорак 2 показао нешто бољу еластичност, односно да је издржао веће померање.

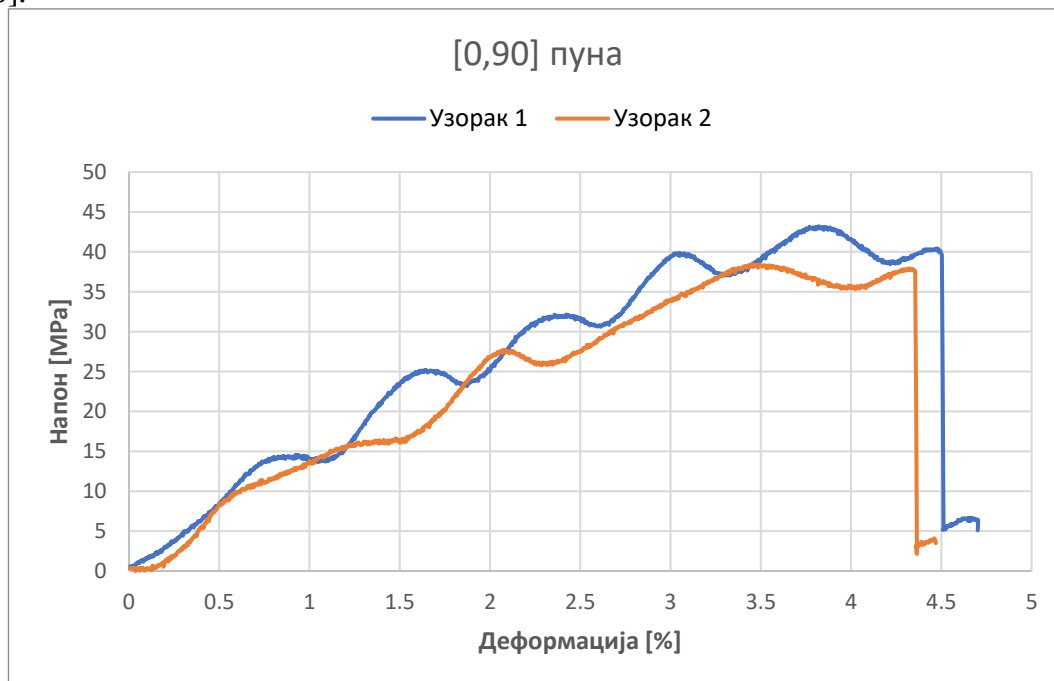
Дијаграм напон-деформација је за епрувету са истом оријентацијом штампе, а ојачану влакнима приказан на слици 36.



Слика 36. Дијаграм напон – деформација епрувете [45,135]

Као и у претходном случају, понашања узорака су сродна, при чему се види да се код узорка 2 јавља веће издужење при лому епрувете.

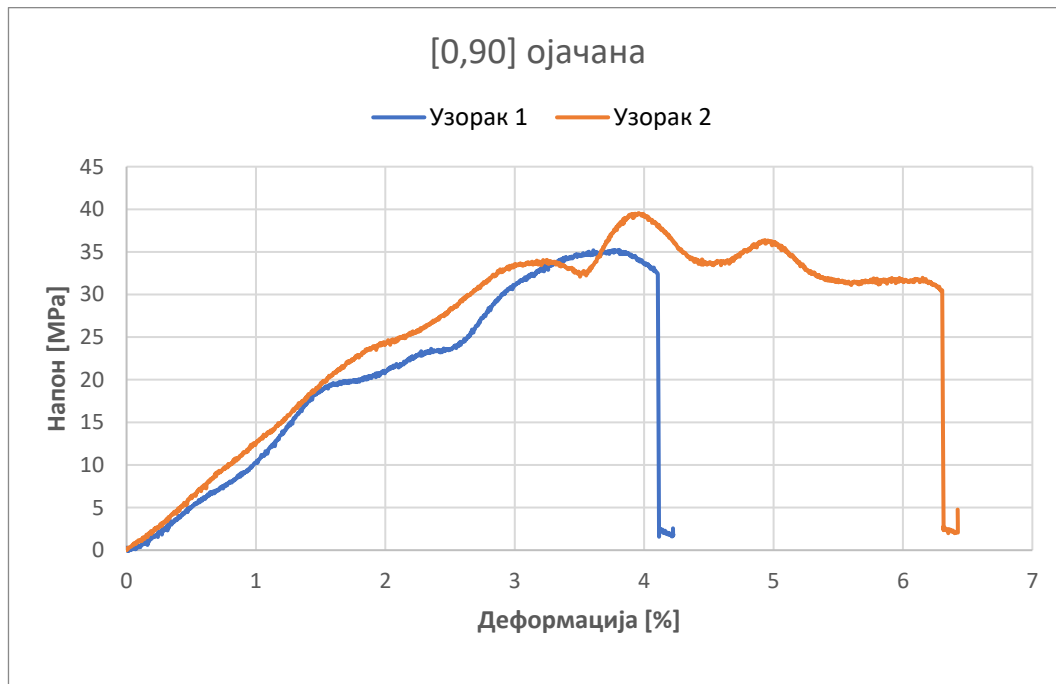
Слика 37 представља понашање епрувета без ојачања, са оријентацијом штампе [0,90].



Слика 37. Дијаграм напон – деформација пуне епрувете [0,90]

У овом случају епрувете су испољиле скоро идентично понашање.

На слици 38 се налази дијаграм напон-деформација узорка ојачане епрувете, а штампане са оријентацијом [0,90].

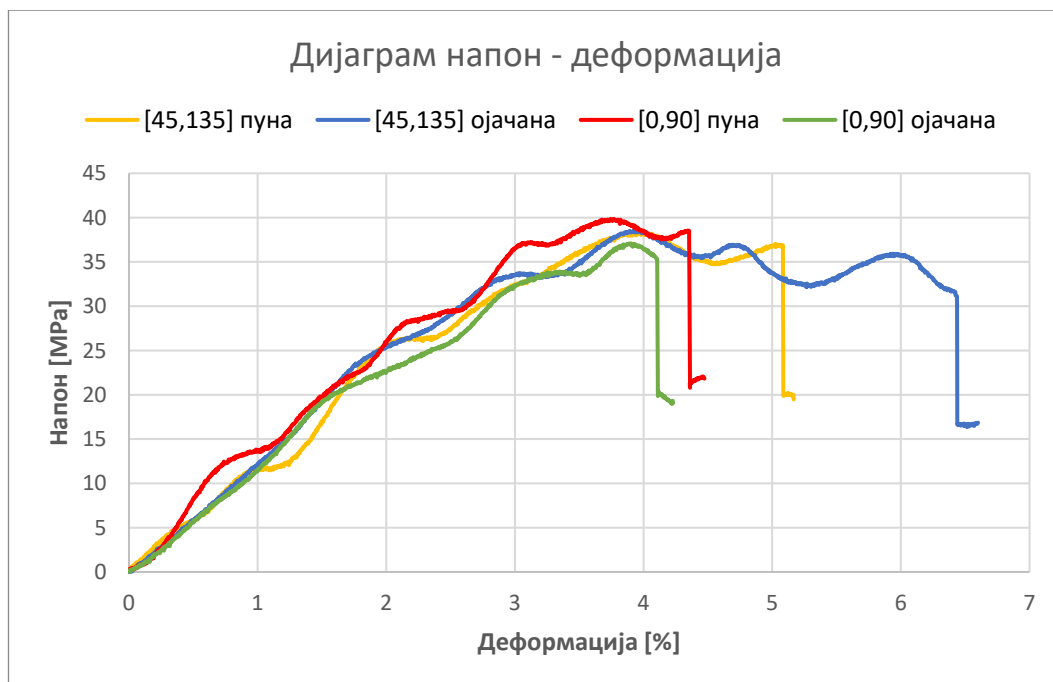


Слика 37. Дијаграм сила – померање ојачане епрувете [0,90]

Код ојачане [0,90] се јавило знатно веће издужење при лому код узорка 2, док је затезна чврстоћа скоро идентична.

Идеални сценарио би био када би се радило са више узорка сваког типа епрувете, али због временских ограничења и скромних могућности саме технологије штампе, то биће предмет даљих истраживања.

Слика 38 представља упоредни дијаграм осредњених кривих напон-деформација за све типове епрувета.



Слика 38. Дијаграм сила – померање средњих вредности свих епрувета

Из приложеног можемо закључити да се највећа деформација прим лому јавља код ојачане [45,135] епрувета, око 6%, више од своје неојачане варијанте. Поређењем епрувета са различитим оријентацијама штампе долази се до констатације да боље карактеристике даје оријентација [45,135] слично резултатима добијених у литератури [5]. Ојачане епрувете су истрпеле мање деформације од неојачаних, и то [0,90] епрувета показује најлошије карактеристике – до оваквих резултата долази највероватније због недостатака технологије ојачавања епрувета, јер се то обавља ручно и велики је простор за грешку приликом манипулације. Такође, како су, из истог разлога, предвиђени канали за смештај влакана два пута шири, а четири пута виши од самог пречника влакна, не долази до идеалног налегања материјала на влакно па материјал остаје порозан, а самим тим и слабији, чиме се постиже контра ефекат у односу на оно што смо желели постићи.

Међутим, област криве важења Хуковог закона показује већу линеарност, чиме се може закључити да ојачане епрувете имају бољу еластичност у овој области, у односу на своје неојачане парове.

Треба напоменути и да је код неојачаних епрувета дошло до потпуног одвајања материјала док је, како се испитивање на кидалици зауставља услед наглог пада силе, код композитних кидане престало услед лома матрице, али не и влакана – носивост композита је свакако нарушена (слика 39).



Слика 39. Епрувете након испитивања на затезање, са лева на десно: [45,135] пун материјал; [45,135] ојачана; [0,90] ојачана; [0,90] пун материјал;

5. Моделирање 3Д структура

5.1 Метод коначних елемената

Метод коначних елемената представља нумерички поступак решавања инжењерских проблема и проблема математичке физике. Методом коначних елемената врши се анализа структура, рачунају се температурна поља, ток флуида, транспорт маса итд. [17].

Основна идеја анализе методом коначних елемената је моделирање проблема подразумевајући да је просторни домен проблема подељен на поддомене на које се примењују општа знања и искуства из механике континуума и нумеричке математике. Поддомени о којима је реч терминолошки се означавају као коначни елементи [18].

У највећем броју случајева када анализирана структура има сложену геометрију, када је сложено оптерећење и када су структуре од различитих материјала, није могуће наћи решење у аналитичком облику. Аналитичко решење подразумева добивање аналитичких израза за рачунање тражених карактеристика на различитим местима структуре (померање, температура, оптерећења и сл.). За добијање таквих података треба решавати диференцијалне или парцијалне диференцијалне једначине. То је могуће урадити само за врло једноставне проблеме. За сложене геометрије и сложена оптерећења потребно је користити нумеричке методе, најчешће метод коначних елемената. Решавање проблема методом коначних елемената своди се на решавање система алгебарских једначина [17].

Добијена решења су приближна и односе се на одређене тачке структуре. Процес моделирања састоји се у дискретизацији континуума (тела или структуре). Такав модел састоји се од коначних елемената, који су повезани у чворовима (штапни елементи), по граничним заједничким линијама (равански елементи), или заједничким површинама (просторни елементи). За сваки коначни елемент постављају се једначине, а њиховом комбинацијом добијају се једначине целе структуре.

Зависно од врсте проблема који се решава, добијају се решења одговарајућих величина. Тако у случају рачунања напонско-деформационог стања структуре, резултати су померања сваког чвора структуре и напони унутар сваког елемента. У проблемима који се не односе на структурну анализу, непознате у чворовима могу бити неке друге физичке величине (нпр. температура).

5.2 Основни кораци методе коначних елемената

Инжењерски проблеми могу бити структурни или неструктурни (пренос топлоте или ток флуида). У структурној анализи циљ је да се одреде померања и оптерећења у целој структури. Постоје два основна приступа у методи коначних елемената. Први је метод сила или метод флексибилности и метод померања или метод крутости [17].

У методи сила, основне непознате величине које се анализирају јесу силе. Да би се добиле једначине структуре прво се постављају једначине равнотеже. Резултат је систем алгебарских једначина у којима су непознате величине силе које се из једначина одређују.

Код другог приступа, метод померања или метод крутости, основне непознате су померања у чворовима. За постизање услова компатибилности код решавања конкретних проблема тражи се да су елементи повезани у чворовима, дуж страница или одговарајућих површина пре и после деловања оптерећења. Основне једначине структуре дефинишу померање чворова, а користе се једначине равнотеже и веза између сила и померања [17].

Од два поменута приступа већу примену нашао је други метод, метод померања, и и његова формулација слична је за многе структурне проблеме.

У методи коначних елемената користе се модели структура у којима су међусобно повезани сви елементи који се зову коначни елементи. Сваком елементу се задаје функција померања. Сви елементи су повезани директно или индиректно, укључујући чворове и/или заједничке граничне линије елемената и/или заједничке површине.

На основу познатих вредности напона и деформација у једном чвору и елементу могу се одредити напони и деформације за било који други чвор и елемент структуре која се анализира и чије су карактеристике материјала и оптерећења већ познате.

Моделирање методом коначних елемената врши се дискретизацијом структуре на одговарајући број коначних елемената, задавањем врсте елемената који ће се користити у анализи, дефинисањем оптерећења, граничних услова и ослонаца [17].

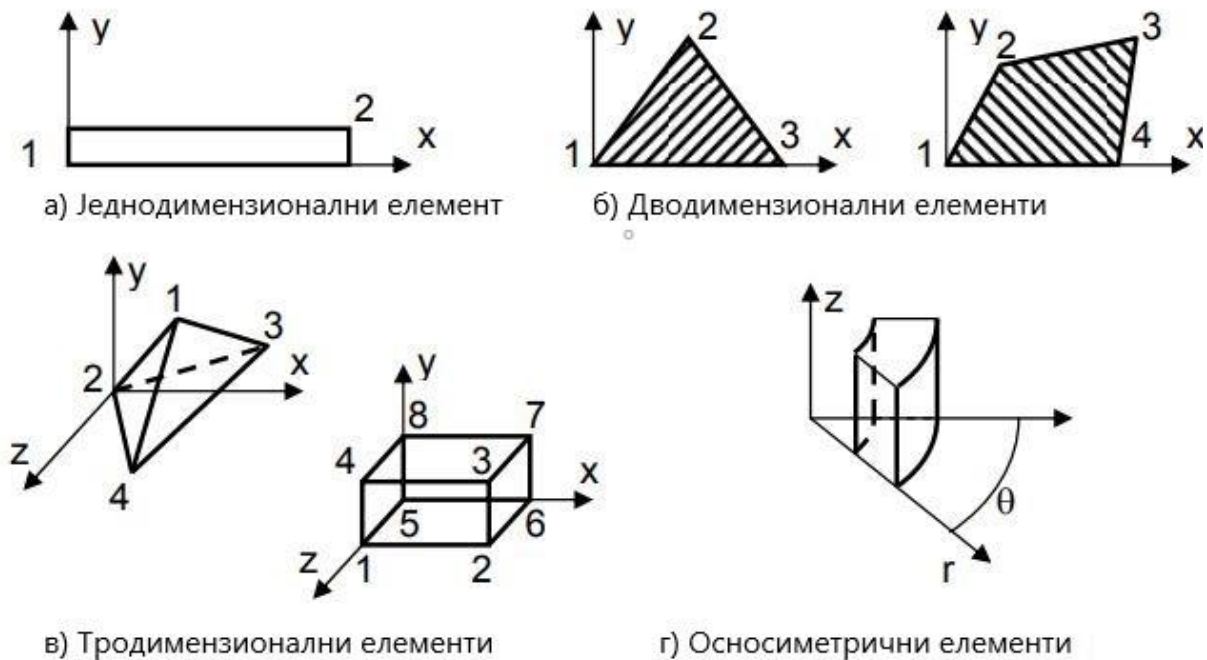
5.2.1 Дискретизација домена и избор врсте елемената

Метод коначних елемената заснива се на физичкој дискретизацији посматраног домена. Зависно од врсте проблема, треба изабрати одговарајућу врсту коначних елемената, нпр. решеткаста структура се дискретизује на линијске елементе, плоча се може поделити на површинске елементе облика троугла или правоугаоника [18].

Основа за анализу конструкције представља поддомен. Поддомен је део структуре (домена) и назива се коначним елементом. Коначни елемент је коначних димензија, због тога су једначине које описују стање појединих коначних елемената алгебарске једначине. То значи да се посматрана структура, која има бесконачно много степени слободе, може поделити на коначан број елемената са коначним бројем степени слободе [17].

Број, величина и тип коначних елемената одређују се узимајући у обзир жељену тачност резултата. Елементи морају бити довољно мале величине да дају употребљиве резултате, али и довољно велики како би се избегли проблеми који се могу јавити код модела са великим бројем елемената. Мале димензије елемената су у општем случају пожељни тамо где се резултати брзо мењају тј. у подручју геометријских промена (радијуси, отвори, места концентрације напона и сл.). Елементи великих димензија се користе тамо где су геометријске промене мале или где их уопште нема. Данас, сви софтвери који се користе методом коначних елемената имају опцију аутоматског генерисања мреже коначних елемената у претпроцесорском делу програма [17].

Приликом одабира коначног елемента прво треба узети у обзир да ли је проблем једнодимензионалан, дводимензионалан или тродимензионалан. Ако се ради о просторним или раванским решеткама онда се користе линијски или једнодимензионални елементи. Ако је проблем равански користе се дводимензионални равански елементи, а ако је проблем просторни користе се тродимензионални елементи [17]. На слици 39. приказани су основни облици елемената.



Слика 39. Основни типови коначних елемената [17]

Конструкције које се дискретизују линијским елементима-штаповима су решетке. Попречни пресек штапа постоји и сматра се константним. Најједноставнији линијски елемент је линеарни елемент са два чвора, по један на сваком крају, слика 21а). Елементи вишег реда имају три или више чворова и то су квадратни или кубни елементи [17]. Линијски елементи су најједноставнији и на њима је најлакше показати основни концепт методе коначних елемената [17].

Основни дводимензионални или равански елементи трпе оптерећење које делује у равни елемената. Најједноставнији дводимензионални елементи имају чворове само у врховима. Може се рећи да су то линеарни елементи са равним странама. Постоје и елементи вишег реда са чворовима на срединама страница. Такви елементи имају закривљене странице. Елементи могу бити константне или промењиве дебљине [17].

Најчешћи тродимензионални елементи су тетраедар и хексаедар. Користе се у проблемима где је потребно анализирати просторно напонско стање. Основни тродимензионални елементи имају чворове у угловима и равне странице (слика 39в)). Постоје и елементи вишег реда са чворовима на срединама страница и/или кривим површинама [17].

Осносиметрични елементи (слика 39г)) добија се ротацијом троугла или четвороугла за 360° око фиксне осе постављене у равни елемента. Овај тип елемената се користи у случајевима када су геометрија и оптерећење осносиметрични.

5.2.2 Избор функције померања

Избор функције померања врши се за сваки елемент. Функција је дефинисана унутар елемента и користи вредности израчунате у чворовима. За функције померања бирају се линеарни, квадратни и кубни полиноми [17].

Полиноми се користе као функције зато што су једноставни за рад и примену у методи коначних елемената. Функције су непознате величине у чворовима. За 2Д проблеме непознате величине су функције координата x и y . Функције су тако одабране, да се помоћу методе коначних елемената мора остварити континуитет померања унутар

тела тј. између свих елемената у чворовима, дуж страница и површина. Након избора функције померања успоставља се веза између деформација и померања као и веза између напона и деформација [17].

5.2.3 Дефинисање релација деформација-померање и напон-деформација

Уколико је проблем једнодимензионалан, тј. постоји деформација само у једном правцу, нпр. у x правцу, тада је деформација ϵ_x и она је повезана са померањем u у x правцу. Веза померања и деформација дата је изразом:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (1)$$

Једначина (1) важи за мале деформације. Између напона и деформација такође постоје релације које се зову конститутивне релације. Једна од најједноставнијих је Хуков закон. За једнодимензионални проблем веза напона и деформација је:

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \quad (2)$$

где је: σ_x - напон у x правцу

E - модул еластичности

5.2.4 Рачунање матрице крутости елемената

Након дефинисања релација датих у претходна три корака поставља се матрица крутости. У почетку су се матрице крутости и једначине елемената одређивале на основу утицајних коефицијената крутости. Након тога су развијено више метода за одређивање матрица крутости.

5.2.4.1 Директни равнотежни метод (енг. Direct Finite Element Method)

Матрица крутости повезује силе у чворовима елемената и померања чворова елемената. Она се добија из услова равнотеже сила за сваки разматрани елемент. Директни приступ у рачунању матрице крутости добар је само у случају једнодимензионалних елемената [17].

5.2.4.2 Варијационе методе (енг. Variational Finite Element Methods)

Варијационе методе се заснивају на принципу стационарности. Приликом анализирања проблема механике чврстог тела овај принцип је идентичан принципу минимума потенцијалне енергије. Варијационе методе се могу користити и за елементе сложене геометрије. Овим методама се могу одредити и матрице крутости елемената неструктурних проблема [17].

5.2.4.3 Метод тежинског резидуала (енг. **Methods of Weighed Residuals**)

Метод тежинског резидуала се заснива на диференцијалним једначинама разматраног проблема. Метод се користи тамо где није могуће одредити функцију или у проблемима у којима функција уопште не постоји. На основу методе тежинског резидуала добијају се једначине које описују понашање елемената [17]. У матричном облику то су:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\{f\} = [k]\{d\} \quad (4)$$

где је: $\{f\}$ - вектор сила у чворовима елемената

$\{d\}$ - вектор померања чворова елемената

$[k]$ - матрица крутости елемената

5.2.4.4 Метод енергетског баланса (енг. **Energy Balance Finite Element Methods**)

Заснивају се на балансу различитих врста енергија. Користе се у термостатичкој и термодинамичкој анализи континуума [17].

5.2.5 Рачунање глобалне матрице крутости

Матрице крутости и једначине коначних елемената добијају се применом неке методе претходно наведене у кораку 4. Израчунате матрице крутости појединих коначних елемената се сабирају ради формирања укупне матрице крутости структуре. Приликом рачунања глобалне матрице треба поштовати концепт континуитета или компатибилности који захтева да структура задржи непрекидност [17].

Глобална једначина структуре у матричној форми је:

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (5)$$

где је: $\{F\}$ - вектор сила у глобалном координатном систему

$[K]$ - глобална матрица крутости

$\{d\}$ - вектор познатих и непознатих померања свих чворова структуре

Глобална матрица крутости $[K]$ је сингуларна матрица јер је њена детерминанта једнака нули. Проблем сингуларитета матрице решава се увођењем одговарајућих граничних услова (ограничења и ослонци), тако да структура задржи постојеће место и да се не креће као круто тело [17].

5.2.6 Одређивање померања целе структуре

Матрична једначина структуре-конструкције у коју су унесени гранични услови представља спрегнути систем алгебарских једначина у облику:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2n} \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (6)$$

где је n укупан број непознатих степени слободe. Једначине се могу решити Гаусовом методом елиминације. Основне непознате су померања у чворовима. То је прва величина која се одређује методом коначних елемената [17].

5.2.7 Рачунање деформација и напона

Напони и деформације су непознате величине које се одређују у структурној анализи. Померања се рачунају у кораку 6, након тога коришћењем везе између деформација-померања и напона-деформација која су дате у изразима (1) и (2) израчунају се деформације и напони [17].

5.2.8 Интерпретација резултата

Закључак сваке анализе се своди на одређивање тачног места деловања највећих напона и деформација. На основу познавања напонско-деформационог стања, доносе се одлуке о дизајну структура [17].

5.3 Основни 3Д елемент

3Д коначни елемент се користи за моделирање тродимензионалних тела општег облика (3Д континуума). Овај елемент може имати различит број чворова. Уобичајени број чворова се креће од 8 до 21. Овим елементом се могу формирати просторни облици као што су просторна призма, тетраедар или четворострана пирамида [18].

Побољшање резултата добијених моделирањем 3Д елементима са осам чворова, у случају општих услова деформисања, може се постићи увођењем корективних функција за поље деформације у елементу, помоћу тзв. инкомпатибилних померања. Овакви елементи се зову побољшани 3Д елементи [18].

Интерполације геометрије и померања су:

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = HX \quad (7)$$

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} = HU \quad (8)$$

где је интерполациона матрица H :

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & \dots & h_N & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & \dots & 0 & h_N & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & \dots & 0 & 0 & h_N \end{bmatrix} \quad (9)$$

и вектори координата чворова X и померања чворова U ,

$$X^T = [X_1^1 X_2^1 X_3^1 X_1^2 X_2^2 X_3^2 \dots X_1^N X_2^N X_3^N] \quad (10)$$

$$U^T = [U_1^1 U_2^1 U_3^1 U_1^2 U_2^2 U_3^2 \dots U_1^N U_2^N U_3^N] \quad (11)$$

Једначине (7) и (8) се могу написати у компонентном облику као:

$$x_i = \sum_{k=1}^N h_k X_i^k \quad i = 1, 2, 3 \quad (12)$$

$$x_i = \sum_{k=1}^N h_k X_i^k \quad i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

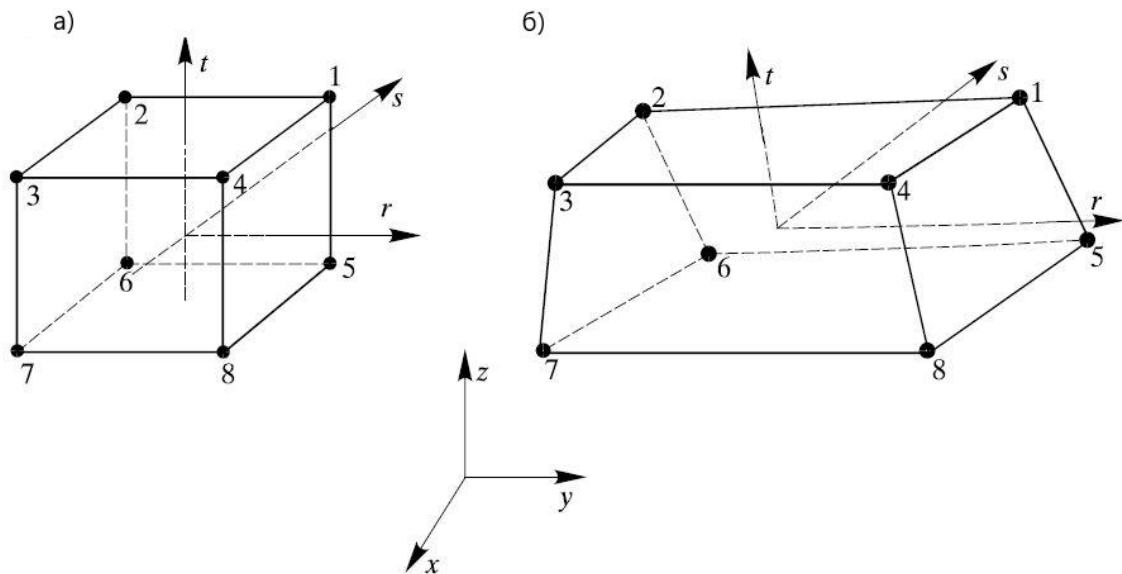
где $i=1$ одговара оси x , $i=2$ оси y , а $i=3$ оси z . За случај коначног елемента са 8 чворова, интерполационе функције су:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t) & h_5 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t) \\ h_2 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t) & h_6 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) \\ h_3 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t) & h_7 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) \\ h_4 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t) & h_8 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t) \end{aligned} \quad (14)$$

Односно

$$h_i(r, s, t) = \frac{1}{8}(1+rr_i)(1+ss_i)(1+tt_i) \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (15)$$

Функције $h_i(r, s, t)$ су линеарне по r, s, t и зато се овај елемент зове линеаран. Његове површи су, како се види на слици 40, равни у физичком простору. Елемент се из x, y, z простора пресликава на коцку чије су координате чворова r_i, s_i, t_i једнаке ± 1 . Приликом нумерисања чворова потребно је користити усвојени редослед, како би се очувало једнозначно пресликавање и десна оријентација природног система r, s, t . На слици 22 приказани су 3Д коначни елементи са 8 чворова у Природном и Декартовом координатном систему [18].



Слика 40. 3Д коначни елементи са 8 чворова; а) Природни координатни систем r, s, t , б) Декартов координатни систем x, y, z (физички простор) [18]

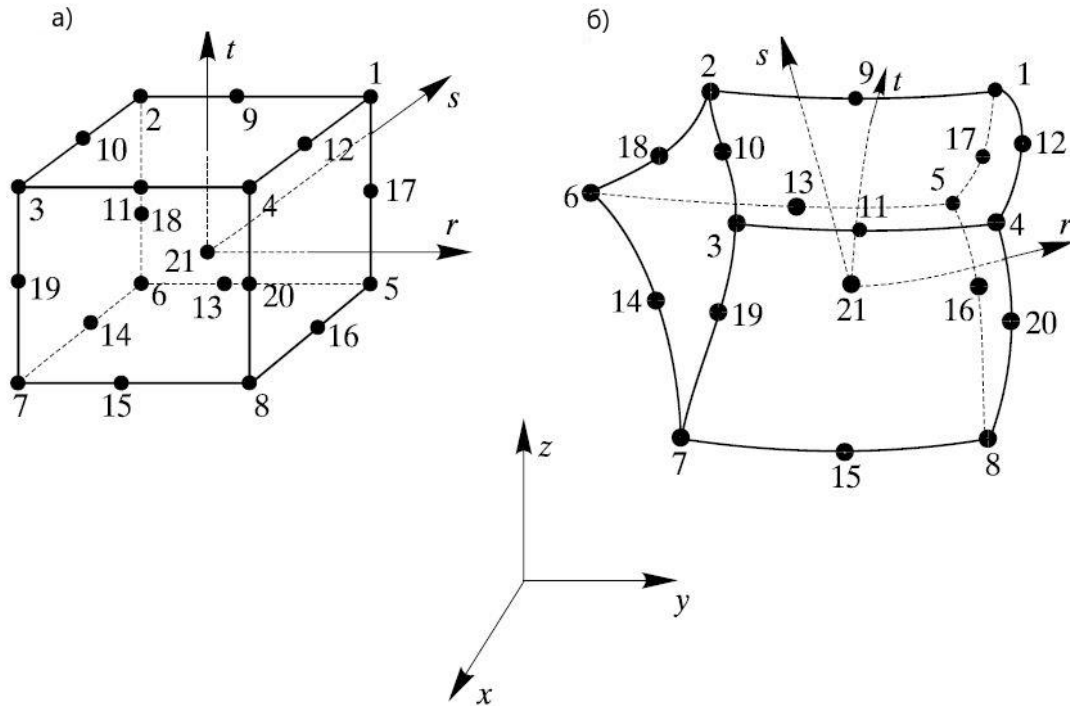
Вредности природних координата у чворовима елемента приказаних на слици 40а) приказане су у табели 2.

Табела 2. Вредности природних координата у чворовима елемента

Чвор	r_i	s_i	t_i
1	+1	+1	+1
2	-1	+1	+1
3	-1	-1	+1
4	+1	-1	+1
5	+1	+1	-1
6	-1	+1	-1
7	-1	-1	-1
8	+1	-1	-1

За моделирање кривих површи могу се користити 3Д елементи са више од 8 чворова. Површи елемента могу бити закривљене, а елемент се пресликава на коцку чији угаони чворови имају координате ± 1 у природном координатном систему r, s, t .

Међучворови имају по једну природну координату једнаку нули, док се чвор 21 налази у координатном почетку координатном систему [18]. На слици 41. приказан је 3Д елемент са 21 чвором.



Слика 41. 3Д коначни елемент са 21 чвором; а) Природни координатни систем r, s, t , б) Декартов координатни систем x, y, z (физички простор) [18]

Уколико се користи коначни елемент са 21 чвором са нумерацијом приказаној на слици 41, интерполационе функције h_i се могу изразити у облику:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= g_1 - \frac{1}{2}(g_9 + g_{12} + g_{17}) & h_5 &= g_5 - \frac{1}{2}(g_{13} + g_{16} + g_{17}) \\
 h_2 &= g_2 - \frac{1}{2}(g_9 + g_{10} + g_{18}) & h_6 &= g_6 - \frac{1}{2}(g_{13} + g_{14} + g_{18}) \\
 h_3 &= g_3 - \frac{1}{2}(g_{10} + g_{11} + g_{19}) & h_7 &= g_7 - \frac{1}{2}(g_{14} + g_{15} + g_{19}) \\
 h_4 &= g_4 - \frac{1}{2}(g_{11} + g_{12} + g_{20}) & h_8 &= g_8 - \frac{1}{2}(g_{15} + g_{16} + g_{20}) \\
 h_k &= g_k & k &= 9, 10, \dots, 20 \\
 h_k &= 0 & \text{ако чвор не постоји}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Функције g_i одређене су једначинама:

$$g_k = G(r, r_k)G(s, s_k)G(t, t_k)$$

$$G(\beta, \beta_k) = \frac{1}{2}(1 + \beta_k \beta) \quad \text{за } \beta_k = \pm 1 \quad \beta = r, s, t \quad (17)$$

$$G(\beta, \beta_k) = 1 - \beta^2 \quad \text{за } \beta_k = 0$$

Основне интерполационе функције за угаоне чворове су одређене једначинама (14) и (15). Оне се коригују интерполационим функцијама суседних међучворова и интерполациона функција h_{21} је одређена као:

$$h_i(r, s, t) = \frac{1}{8}(1 + rr_i)(1 + ss_i)(1 + tt_i) \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (18)$$

$$h_{21} = (1 - r^2)(1 - s^2)(1 - t^2) \quad (19)$$

У случају постојања чвора 21, интерполационе функције h_i дате једначином (16) се коригују :

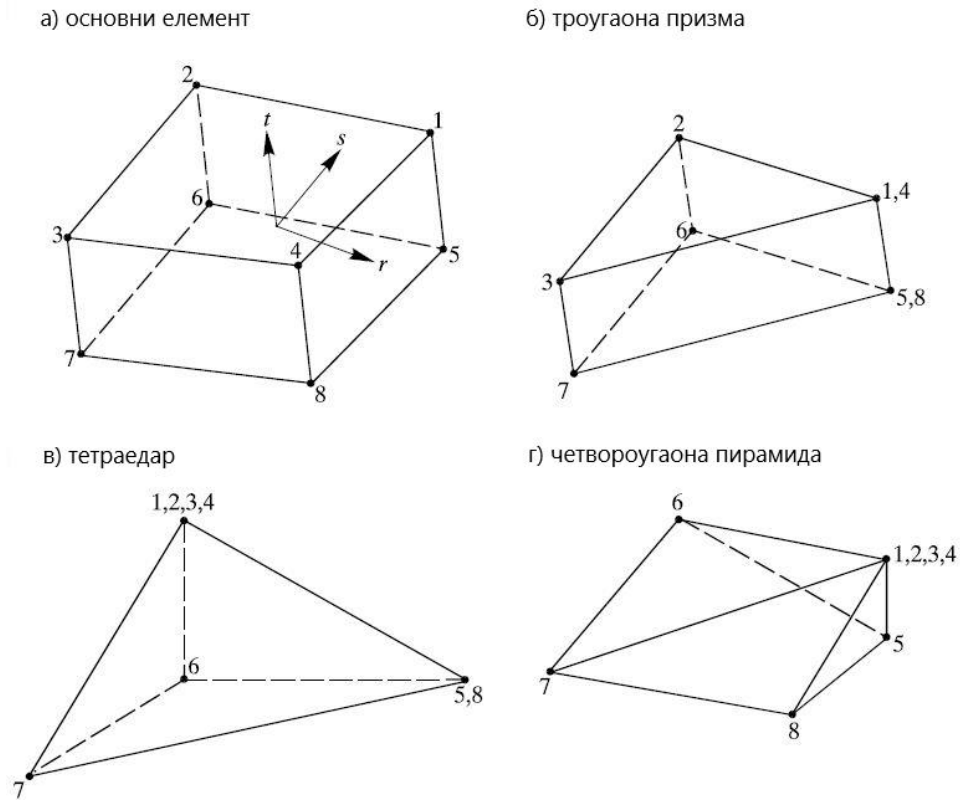
$$h_k = \bar{h}_k - \frac{1}{8}h_{21} \quad k = 1, 2, \dots, 8 \quad (20)$$

$$h_k = \bar{h}_k - \frac{1}{4}h_{21} \quad k = 9, 10, \dots, 20$$

где је $\bar{h}_k$ – интерполациона функција одређена једначином (16)

Елементи вишег реда дају тачније резултате за опште случајеве поља деформације и напона, и сложене геометријске облике тела. Моделирање помоћу таквих елемената је сложеније па се користе линеарни елементи, са гушћом мрежом. У практичном моделирању је погодно коришћење 3Д коначних елемената облика који се могу извести из основног 3Д елемента. То су обично линеарни 3Д елементи облика троугаоне призме, тетраедра и четворостране пирамиде [18].

3Д коначни елементи облика троугаоне призме, тетраедра и четворостране пирамиде добијени су поклапањем одговарајућих чворова основног елемента. Приликом генерисања ових елемената треба узети у обзир поклапање одговарајућих слојева [18]. На слици 42. приказан је основни 3Д елемент и изведени 3Д коначни елементи.



Слика 42. Дегенерисани 3Д елементи [18]

Као што је приказано на слици 42.б), коначни елемент облика троугаоне призме добија се поклапањем чворова 1 и 4, и 5 и 8. Заменом $X_i^4 = X_i^1$ и $X_i^8 = X_i^5$ у једначину (12) добија се једначина:

$$x_i = h_1^* X_i^1 + h_2 X_i^2 + h_3 X_i^3 + h_5^* X_i^5 + h_6 X_i^6 + h_7 X_i^7 \quad (21)$$

при чему су

$$\begin{aligned} h_1^* &= h_1 + h_5 = \frac{1}{4}(1+r)(1+t) \\ h_5^* &= h_5 + h_8 = \frac{1}{4}(1+r)(1-t) \end{aligned} \quad (22)$$

док су остале интерполационе функције h_k непромењене.

На исти начин за тетраедар на слици 42.в) добијамо само четири интерполационе функције, од којих су h_6 и h_7 непромењене, а кориговане функције су h_1^* и h_5^* . Интерполационе функције су дате као:

$$h_1^* = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{1}{2}(1 + t) \quad (23)$$

$$h_5^* = h_5 + h_8$$

За случај четвороугаоне пирамиде приказане на слици 42.г), постоји само пет чворова. Интерполациона функција h_1^* је одређена као и код тетраедра, а функције h_5, h_6, h_7, h_8 остају непромењене у односу на основни 3Д елемент.

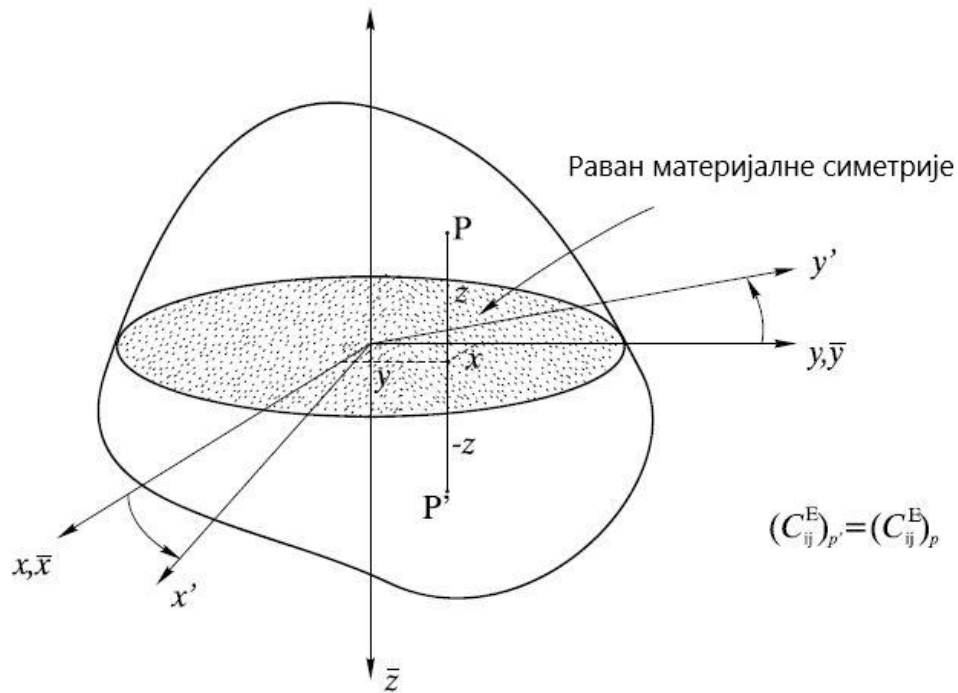
5.4 Конститутивне релације за ортротропне материјале

Адитивном производњом се добијају делови са ортротропним карактеристикама, што значи да модел има различите механичке карактеристике за различите правце.

Дефинисање ортротропног материјала полази од конститутивне матрице за анизотропне материјале, која садржи 21 међусобно различит коефицијент, дата је у облику:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \text{симетрично} & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Ортотропни материјали поседују три ортогоналне равни материјалне симетрије у свакој тачки материјала [18]. Како би одредили конститутивну матрицу за ортротропне материјале потребно је прво разумети утицај материјалне симетрије на коефицијенте унутар матрице. На слици 43. приказана је материјална симетрија у ху равни.



Слика 43. Материјална симетрија [18]

Уколико је xy раван симетрије, коефицијенти C_{ij} у тачки P са координатама (x, y, z) су једнаки коефицијентима у тачки P' са координатама $(x, y, -z)$. Битно је напоменути да материјална симетрија није повезана са симетријом геометрије или напонско-деформационим стањем.

На слици 43. су дефинисана два координатна система и то xyz и $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, при чему се осе $x, \bar{x}$ и $y, \bar{y}$ поклапају, а оса $\bar{z}$ је усмерена у негативном смеру осе z .

Водећи се конвенцијом о знацима за напоне и деформације, може се написати:

$$\bar{\sigma}_{xz} = -\sigma_{xz} \quad (25)$$

$$\bar{\sigma}_{yz} = -\sigma_{yz}$$

и

$$\bar{\gamma}_{xz} = -\gamma_{xz} \quad (26)$$

$$\bar{\gamma}_{yz} = -\gamma_{yz}$$

док су остале компоненте исте у оба координатна система.

Користећи конститутивне релације може се написати:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} = C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} + C_{14}\gamma_{xy} + C_{15}\gamma_{yz} + C_{16}\gamma_{xz} \quad (27)$$

Према условима материјалне симетрије, $\bar{C}_{ij} = C_{ij}$ и према једначини (26) може се написати:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} = C_{11}\bar{e}_{xx} + C_{12}\bar{e}_{yy} + C_{13}\bar{e}_{zz} + C_{14}\bar{\gamma}_{xy} + C_{15}\bar{\gamma}_{yz} + C_{16}\bar{\gamma}_{xz} \quad (28)$$

Уколико се једначина (28) замени у једначину (27) добија се:

$$2C_{15}\gamma_{xz} + 2C_{16}\gamma_{yz} = 0 \quad (30)$$

Ова једначина мора да буде задовољена за произвољне деформације γ_{xz} , γ_{yz} само ако је задовољен услов:

$$C_{15} = C_{16} = 0$$

Ако се напишу једначине (27) и (28) за друга два нормална напона σ_{yy} , σ_{zz} и смичући напон σ_{xy} добијају се и следећи услови:

$$\begin{aligned} C_{25} &= C_{26} = 0 \\ C_{35} &= C_{36} = 0 \\ C_{45} &= C_{46} = 0 \end{aligned}$$

Уколико се примене дати услови, конститутивна матрица (24) има следећи облик:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{симетрично} & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Отротропни материјал поседује три ортогоналне равни симетрије, може да се покаже, аналогно претходном поступку, да је конститутивна матрица следећег облика:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{симетрично} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Према матрици (32) постоји 9 независних материјалних константи за ортотропан материјал. Уколико осе материјалне симетрије означимо са a , b , c , матрица флексибилности изражена преко материјалних константи има следећи облик:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_a} & -\frac{\nu_{ba}}{E_b} & -\frac{\nu_{ca}}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{ab}}{E_a} & \frac{1}{E_b} & -\frac{\nu_{bc}}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{ac}}{E_a} & -\frac{\nu_{bc}}{E_b} & \frac{1}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{ab}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{bc}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{ac}} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Где су E_a , E_b , E_c - модули еластичности за материјалне осе a , b , c

ν_{ij} – Поасонови коефицијенти за одговарајуће осе

Матрица флексибилности је симетрична, пошто је материјал хипереластичан, тако да следеће релације морају бити задовољене:

$$\frac{\nu_{ab}}{E_a} = \frac{\nu_{ba}}{E_b}$$

$$\frac{\nu_{ac}}{E_a} = \frac{\nu_{ca}}{E_c}$$

$$\frac{\nu_{bc}}{E_b} = \frac{\nu_{cb}}{E_c}$$

Када се узму у обзир претходне релације, матрица садржи девет независних материјалних константи. Коефицијенте конститутивне матрице се могу изразити помоћу инжењерских материјалних константи. Након инвертовања матрице флексибилности (33) добијају се изрази:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{1 - \nu_{bc}\nu_{cb}}{E_b E_c D} & C_{44} &= G_{ab} \\
 C_{12} &= \frac{\nu_{ba} + \nu_{ca}\nu_{bc}}{E_b E_c D} & C_{55} &= G_{ac} \\
 C_{13} &= \frac{\nu_{ca} + \nu_{ba}\nu_{cb}}{E_b E_c D} & C_{66} &= G_{bc} \\
 C_{22} &= \frac{1 - \nu_{ac}\nu_{ca}}{E_a E_c D} & C_{23} &= \frac{\nu_{cb} + \nu_{ab}\nu_{ca}}{E_a E_c D} \\
 C_{33} &= \frac{1 - \nu_{ab}\nu_{ba}}{E_b E_a D}
 \end{aligned} \tag{34}$$

где је детерминанта матрице – $D = \frac{1 - \nu_{ab}\nu_{ba} - \nu_{ac}\nu_{ca} - \nu_{bc}\nu_{cb} - 2\nu_{ba}\nu_{ac}\nu_{cb}}{E_a E_b E_c}$

5.5 Мори – Танака хомогенизација микрокомпозита

Како композити показују различите фазе, различитих механичких и физичких својстава, микроструктурне карактеристике оваквих материјала могу бити моделиране са изотропним понашањем, али у реалности исказују анизотропност услед различитих својстава унутар једне структуре. Анизотропни материјални модели су доступни за линеарну еластичност док се у нелинеарности појављују ограничења на ортотропне материјалне моделе, који не могу да представе физику свих хетерогених материјала. Циљ микромеханике је да предвиди анизотропно понашање хетерогеног материјала на основу геометрије и својстава индивидуалних фаза, а усмерено ка хомогенизацији. Једна од аналитичких метода микромеханике континуума је Мори – Танака метод [19].

За хомогенизацију композита и одређивање ефективних механичких карактеристика Мори – Танака методом потребно је поставити улазне параметре који карактеришу матрицу и укључке. То су Поасонов коефицијент, моду еластичности и запремински удео сваког од материјала. Добијене ефективне карактеристике се могу потврдити стандардним механичким испитивањима, попут затезања и сл. [19].

На основу Ешелби решења, укупни напон индукован појавом сопствених напона је униформан.

Може се дефинисати тензор S четвртог реда који представља однос ограниченог напона унутар укључака са својим сопственим напоном [19]:

$$\varepsilon = S\varepsilon^* \tag{35}$$

Где је S Ешелбијев тензор четвртог реда, који зависи од материјалних карактеристика и облика укључка (цилиндар или сфера) и гласи:

$$S = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2S_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{2323} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Ефективни модул захтева дефинисање тензора концентрације напона A . Израз за тензор концентрације напона се може дефинисати као:

$$A_r = T_r \left(\sum_{r=0}^N C_r T_r \right)^{-1} \quad (37)$$

$$A_0 = \frac{1}{C_0} \left(I - \sum_{r=1}^N C_r T_r \right)^{-1} \quad (38)$$

тензор ефективне крутости се добија из израза тензора концентрације као:

$$L = \sum_{r=0}^N C_r L_r A_r \quad (39)$$

Узимајући изотропни тензор крутости могуће је добити ефективне вредности као:

$$\lambda_{ef} = L_{12} \quad (40)$$

$$\mu_{ef} = \frac{1}{2} (L_{11} - L_{12}) \quad (41)$$

$$E_{ef} = \frac{\mu_{ef} (3\lambda_{ef} + 2\mu_{ef})}{\lambda_{ef} + \mu_{ef}} \quad (42)$$

$$\nu_{ef} = \frac{\lambda_{ef}}{2(\lambda_{ef} + \mu_{ef})} \quad (43)$$

$$\kappa_{ef} = \frac{3\lambda_{ef} + 2\mu_{ef}}{3} \quad (44)$$

Циљ је био добити ефективне вредности хомогенизованог материјала на основу карактеристика матрице и укључка добијених експериментално и из литературе [20] применом упрошћене Мори – Танака методе. Улазне карактеристике материјала су дате у табели 3:

Табела 3. Улазне и излазне материјалне карактеристике

Материјалне константе	E (GPa)	ν	c
Матрица	3,5	0,35	0,9835
Влакно	2,45	0,34	0,0165
Ефективне вредности	2,511	0,35	1

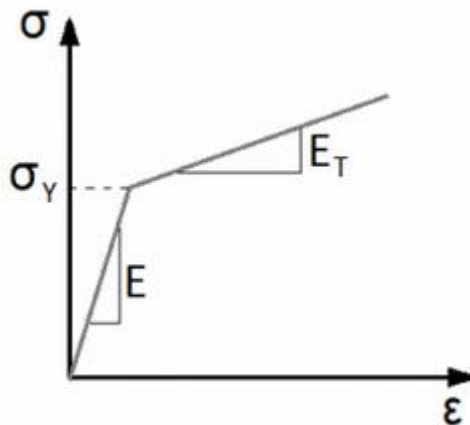
6. Нумеричка анализа

У овом раду је спроведена нумеричка анализа проблема како би се нумерички верификовала експериментална испитивања 3Д штампаних композита.. Анализа је вршена методом коначних елемената софтвером *Femap with Nx Nastran*.

Како није могуће опонашати праву природу материјала одлучено је да се спроведе еласто-пластична анализа коришћењем вон Мизесовог критеријума течења где је потребно унети напон на граници течења (одређен експериментално) и модул пластичности који се рачуна на основу тангентног напона E_T као:

$$H = \frac{E_T}{\left(1 - \frac{E_T}{E}\right)} \quad (6.1)$$

чиме се апроксимира еласто-пластично понашање материјала (слика 44)

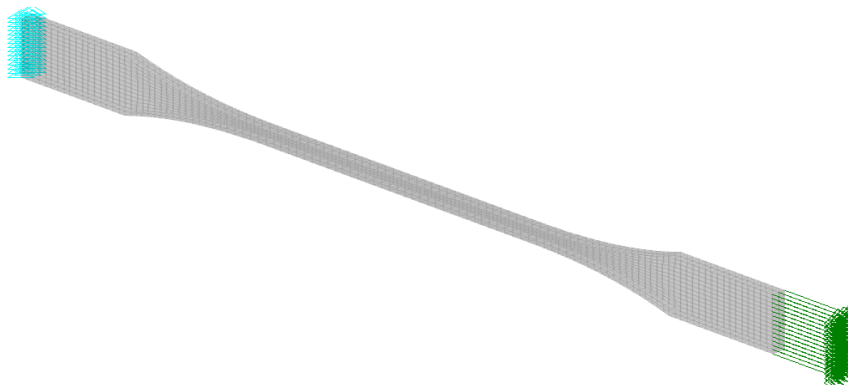


Слика 44. Билинеарна зависност напон - деформација [21]

Услед сложености прорачуна и временског ограничења одабрано је да се нумерички прорачуни спроведу само за случај ојачане [45,135] епрувете, па су вредности тангентног напона рачунате са криве напон – деформација за овај случај, са дијаграма са слике 38.

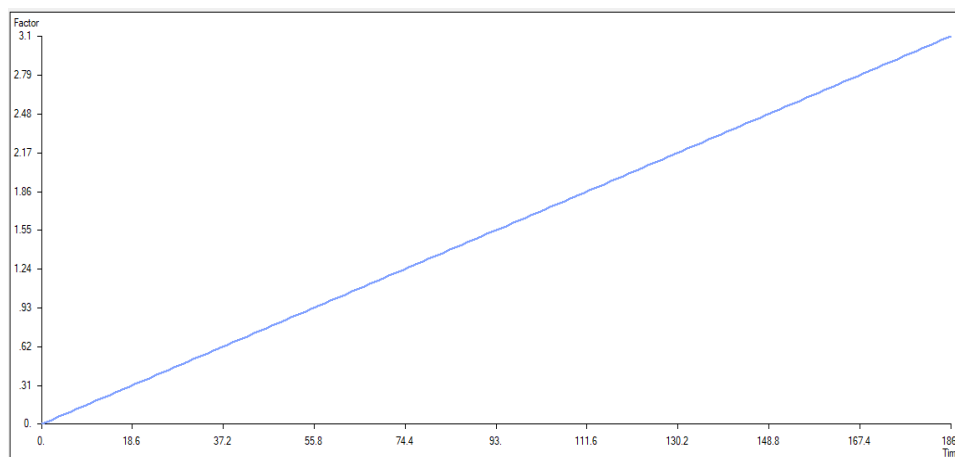
Добијен је модул пластичности од 1185,77 МПа, на граници течења од 35 МПа за ојачану епрувету, док је из литературе [20] преузет модул пластичности за ојачивач, а за материјал матрице израчунат са криве за епрувету [45, 135] од пуног материјала и износи 454 МПа, на граници течења од 25 МПа.

Увежен је CAD модел епрувете и задата су ограничења таква да су померања на једном крају епрувете фиксирана, док се на другом крају епрувете задају померања. На слици 45 су плавом бојом приказана ограничења, а зеленом оптерећења у виду померања.



Слика 45. Задата ограничења и оптерећења на моделу

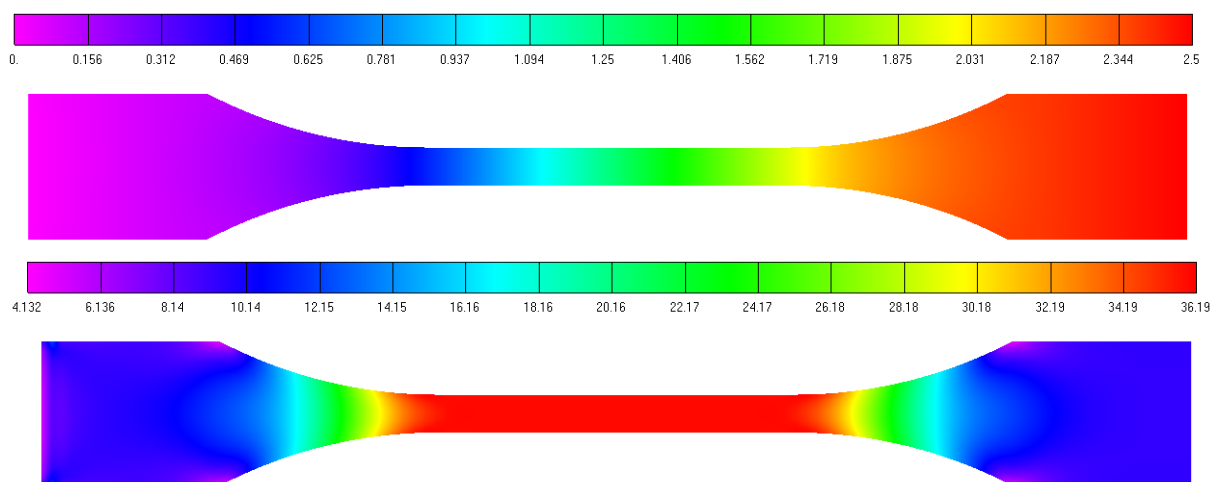
Померање је задато преко временске функције увежене са кидалице (слика 46):



Слика 46. Временска функција оптерећења

Анализи су подвргнута два модела епрувете: од хомогенизованог материјала добијеног Мори – Танака методом, објашњеном у претходном поглављу, као и задавањем карактеристика два одвојена материјала и моделирањем влакана дуж епрувете.

Нумерички модел се састоји од 3.080 осмочворних 3Д елемената, 4.995 чворова, са ограничењима и оптерећењима као слици 45. Прорачун нелинеарном статичком анализом даје вредности напона и померања као на слици 47.

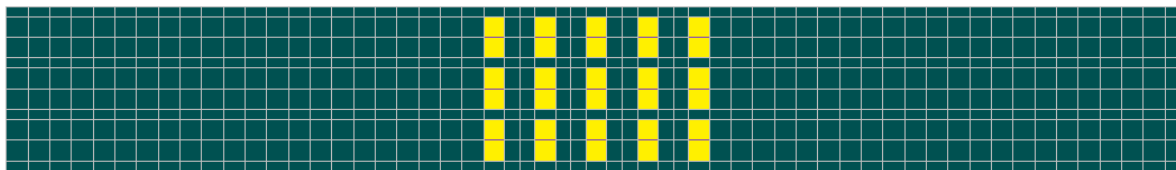


Слика 47. Нумерички резултати за померања (горе) и напона (доле) хомогене епрувете

Највећи напони (36,19 МПа) се јављају у мерној зони епрувете, како је и предвиђено геометријом, а што је и експериментом показано, док су максимална померања (2,5 mm) на страници епрувете на којој је задато оптерећење.

Након нумеричке анализе епрувете од хомогенизованог материјала извршена је и анализа модела са ојачавајућим влакнима, односно модел са два материјала. Како се модел састоји од два материјала, од којих је један значајно мањих димензија, било је неопходно при моделирању ускладити величине елемената што је довело до повећања броја елемената у односу на претходни модел, чиме је и сама нумеричка симулација постала захтевнија.

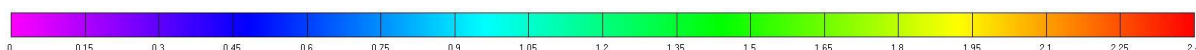
На слици 48. је приказана мрежа на челу модела где је представљено усложњавање ради усклађивања величине елемената.



Слика 48. Усложњавање мреже

Жутом бојом су означени елементи који представљају струне, док зелена представља основни материјал.

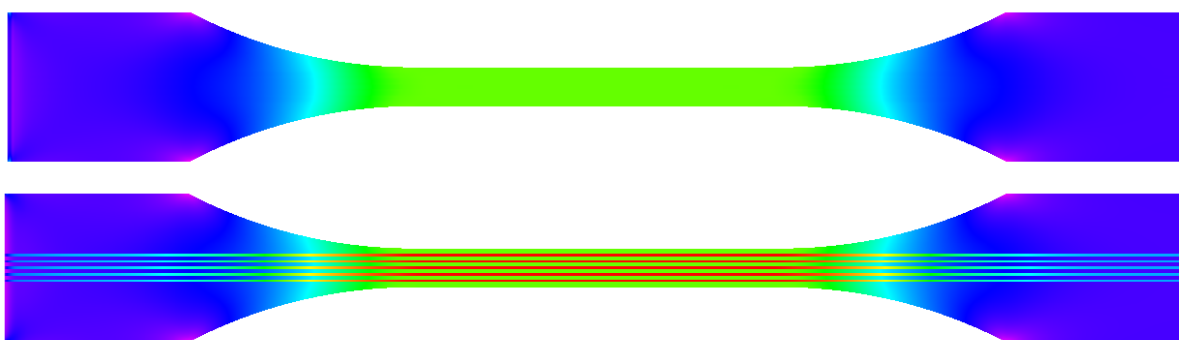
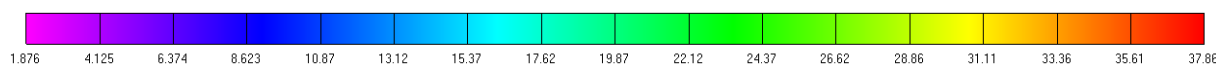
Овај модел се састоји од 171.880 елемената и 194.766 чворова. Ограничења и оптерећења су задата исто као и у претходном случају. На слици 49 су приказана померања:



Слика 49. Нумерички резултати за померања епрувете од два материјала

Као и у претходном случају, померања су максимална (2,4 mm) на оптерећеној страни епрувете.

На слици 50 су приказани напони модела са два материјала.

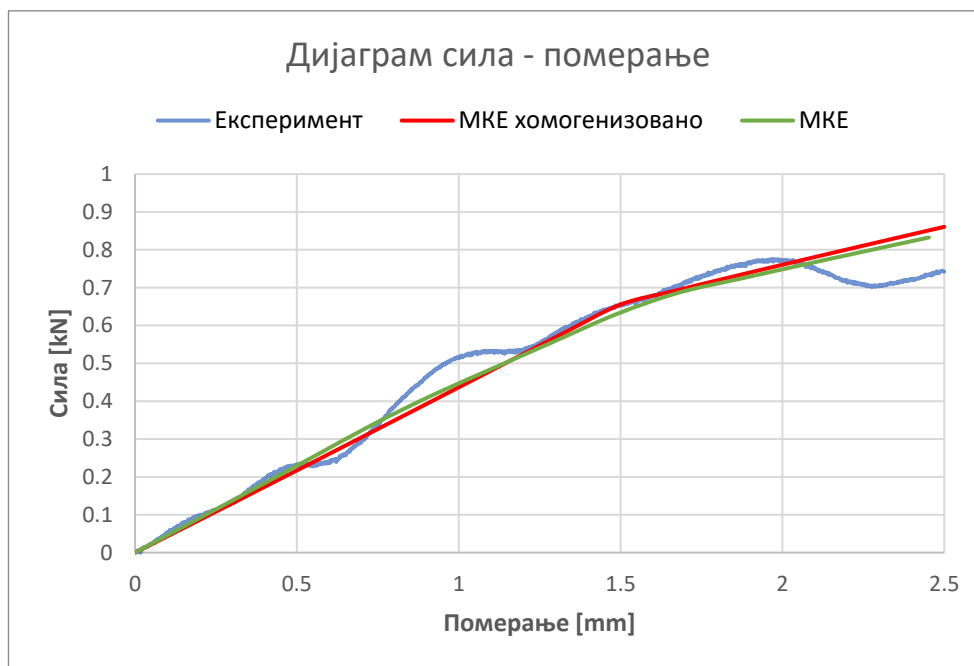


Слика 50. Нумерички резултати за напоне епрувете од два материјала – горе пун модел;
доле хоризонтални пресек

Максимални напони (37,86 MPa) јављају се унутар модела, на самим влакнима, не на његовој површини, што је уочљиво на хоризонталном пресеку на слици 50, доле, и што говори да су влакна носиоци оптерећења.

На слици 51. приказано је поређење експерименталних и нумеричких резултата добијених коришћењем карактеристика два материјала, као и својстава материјала добијених хомогенизацијом, употребом Мори – Танака методе.

Треба напоменути да је, због сложености мреже, услед повећања броја елемената код модела са два материјала ради веродостојности резултата, време трајања прорачуна знатно продужено, а због скромних техничких могућности и временских ограничења, нумеричком анализом приказан само један случај епрувете – [45,135] ојачане влакнима.



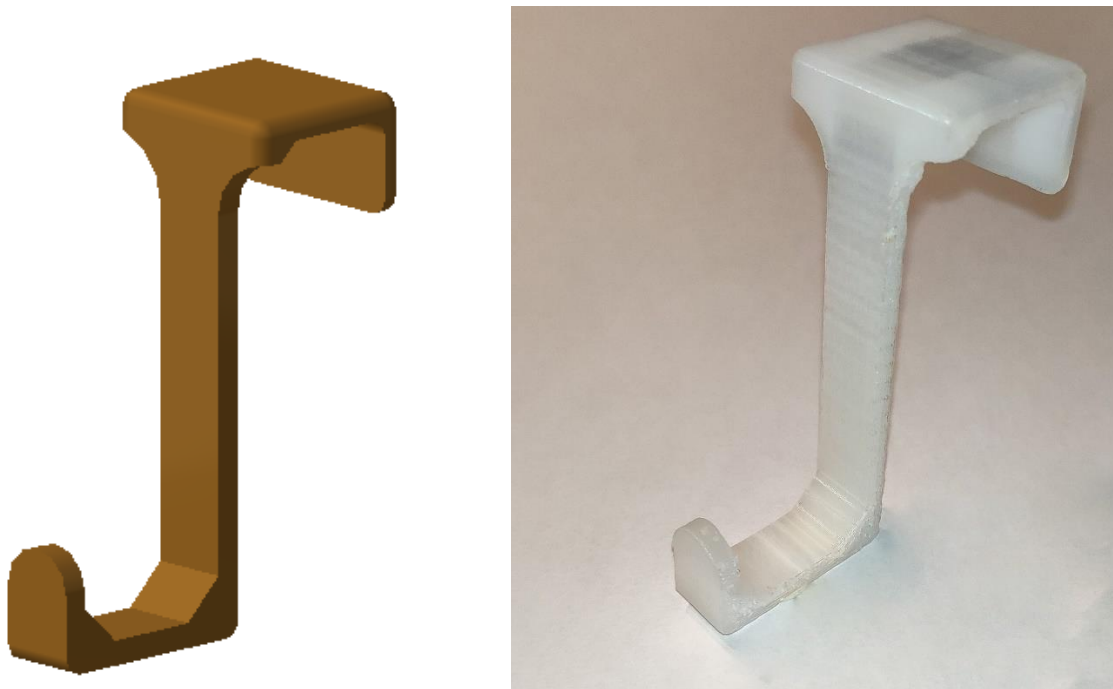
Слика 51. Упоредни дијаграм сила – померање за експеримент и нумеричке анализе

Како је на слици приказано, резултати нумеричке анализе имају одлично поклапање са експерименталним резултатима..

7. Практична примена 3Д композитне штампе

Након извршених испитивања материјала експериментално и нумерички, било је потребно извршити експерименталну верификацију дела израђеног 3Д штампом како би се потврдила примењивост у пракси, у реалним захтевима свакодневнице.

Одабран је модел куке различите намене, приказане на слици 52 (а – CAD модел, б – модел израђен 3Д штампом).

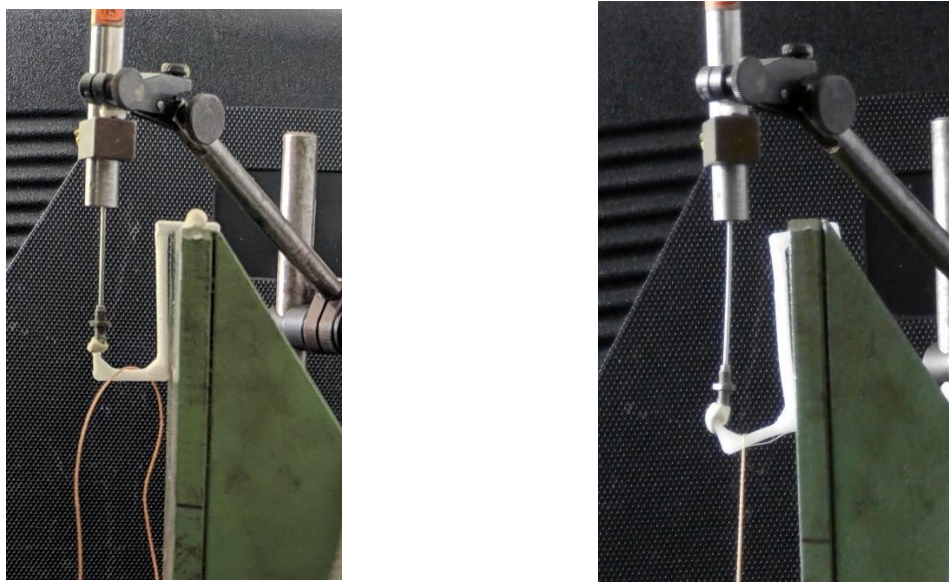


Слика 52. CAD модел куке (лево) и модел израђен 3Д штампом (десно)

Као и код епрувета, урађен је један модел са, један без ојачања. Поступак ојачавања модела је идентичан као код епрувета. Кука је ојачана са пет нити целом дужином вертикалног и хоризонталног, носећег дела.

Оба модела су подвргнута испитивањима носивости у лабораторијским условима у просторијама *Лотрич* лабораторије за метрологију. Вршена су мерења хода као и силе (слика 52), до лома материјала.

За мерење силе употребљен је давач HBM U2A са мерним тракама везаним у пун Винстонов мост, температурно компензован, са опсегом мерења до 500 N. Мерење померања вршено је индуктивним давачем HBM W10. Ова два мерна елемента су повезана у HBM Spider8 мерни мост који у себи обједињује појачавач и А/Д конвертор. Мерни мост је, на крају, повезан са РС рачунаром на коме је за аквизицију података коришћен софтверски пакет HBM CatMan 3.2.



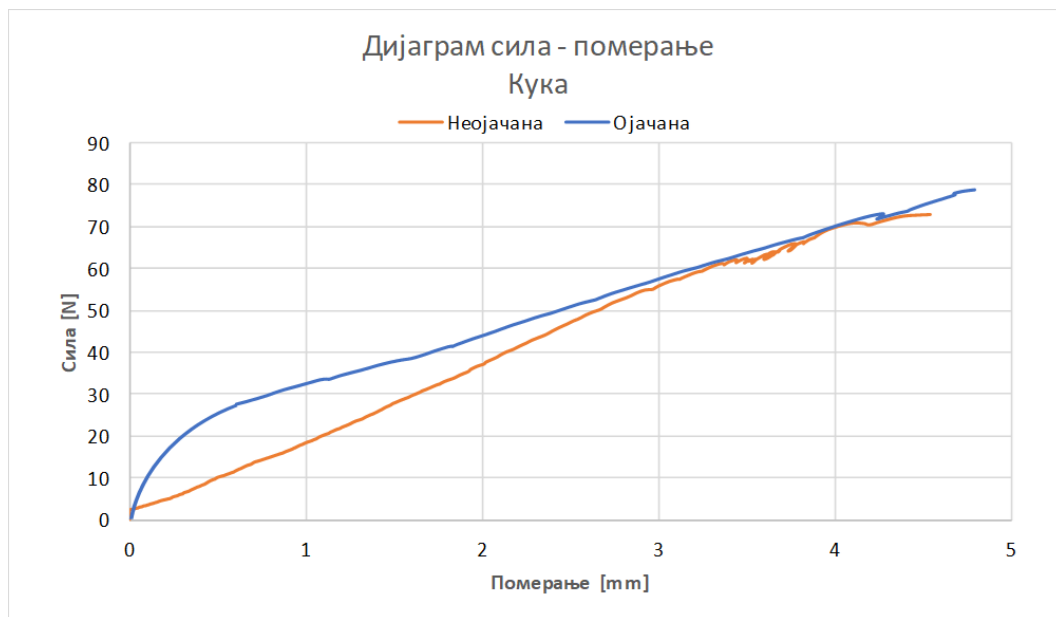
Слика 53. Испитивање носивости куке

Приликом експерименталног испитивања природа лома се разликује код два модела (слика 54). Код ојачаног модела дошло је до раслојавања како у спојевима два материјала тако и на местима споја два слоја истог материјала. Такође дошло је и до извлачења влакана из материјала. Модел без ојачања је показао само деламинацију између два слоја.



Слика 54. Лом материјала код ојачане (лево) и неојачане (десно) куке

Дијаграм сила – померање за обе куке је дат на слици 55.



Слика 55. Дијаграм сила – померање за одштампане куке

Како се са дијаграма може прочитати, кука са ојачањем је показала већу носивост, односно истрпела је већу силу (80 N), за приближно исто померање. Што потврђује полазну претпоставку да се композитним материјалима могу побољшати карактеристике полазног материјала.

8. Закључак

Композитни материјали су све заступљенији у машинству, авио индустрији, грађевинарству, аутомобилској индустрији итд. Највећа предност ових материјала је велика чврстоћа и јачина у односу на тежину.

Под брзим производним технологијама се подразумева низ релативно нових, претежно адитивних технолошких поступака који омогућавају директну производњу комплексних физичких објеката користећи као улаз 3Д геометријски модел, добијен из неког САД софтверског програма.

У овом раду је приказана синергија двеју технологија будућности – композитних материјала и тродимензионалне штампе, како би се омогућила брза, а прецизна израда, сложених конструкција, од којих се захтева велика постојаност. Извршен је преглед и подела композитних материјала. Објашњени су најзаступљенији видови адитивне брзе израде објеката, врсте штампе, типови материјала као и области примене. Дат је преглед неких различитих решења штампања композитних материјала, као и резултата добијених тим решењима. Одакле је могуће видети да постоји интересовање и идеја за разрадом оваквих принципа функционисања адитивне производње.

Извршена је самостална израда композитних епрувета на FDM штампачу, ојачаних најпре шиваћим концем, а по утврђеној технологији и флуорокарбонском рибарском струном. Направљене су епрувете и различитих оријентација штампе [0, 90] и [45, 135] како би се упоредио утицај оријентације међусобно, као и утицај ојачања на обе врсте оријентације, на механичке карактеристике материјала.

Узорци су испитани на затезање и установљена су побољшања карактеристика у еластичној зони материјала, у смислу боље линеарности. Такође, боље карактеристике је показала епрувета одштампана [45, 135] оријентацијом, односно најбоље карактеристике ојачана епрувета, са овом оријентацијом.

Након експерименталног испитивања, добијени резултати су унети у софтверски пакет *Femap* и извршене су две нумеричке анализе. Прва са хомогенизованим материјалом Мори – Танака методом за хомогенизацију микрокомпозита, а друга са својствима оба материјала – матрице и ојачивача. Добијена су одлична подударана експеримента и нумерике.

Последња фаза овог рада је била израда конкретног модела који се може примењивати у свакодневној пракси – куке различите намене. Одрађена су два узорка – један ојачан, један не и испитивана експериментално до лома материјала. Добијени су задовољавајући резултати – композитна кука је показала бољу носивост од куке одрађене чисто 3Д штампом.

Како су ово веома младе и технологије које се брзо развијају још увек нису довољно истражене, што оставља простора за дубље и детаљније студије на ову тему, али несумњиво је да ће њихова примена узети све већи мах и учинити их неизоставним сегментом реализације идеја и креирања готових производа.

9. Литература

- [1] Трајановић М., Грујовић Н., Миловановић Ј., Миливојевић В., *Рачунарски подржане брзе производне технологије*, Машински факултет у Крагујевцу, Центар за информационе технологије, 2008
- [2] Yasa, E., & Ersoy, K. (2018). *Additive Manufacturing of Polymer Matrix Composites. Aircraft Technology*. doi:10.5772/intechopen.75628
- [3] Интернет страница all3dp.com, приступљено јун 2019.
- [4] Интернет страница manufactur3dmag.com, приступљено јун 2019.
- [5] Harpool, T. D., *Observing the effects of infill shapes on the tensile characteristics of 3D printed plastic parts*, мастер рад, Department of Mechanical Engineering and the faculty of the Graduate School of Wichita State University, 2014
- [6] Slavković V., Grujović N., Dišić A., Radovanović A., *Influence of Annealing and Printing Directions on Mechanical Properties of PLA Shape Memory Polymer Produced by Fused Deposition Modeling*, Conference: 6th International Congress of Serbian Society of Mechanics, Tara Mountain, 2007
- [7] Јовановић М., Адамовић Д., Лазић В., Ратковић Н., *Машински материјали*, Универзитет у Крагујевцу, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2003
- [8] Стевановић М, *Влакнима ојачани полимерни композити*, Партедон, Београд, 2002
- [9] Интернет страница: <https://ironlady003.wordpress.com/2014/05/12/kompozitni-materijali/> приступљено фебруар 2019.
- [10] Bryll, K., Piesowicz, E., Szymański, P., Ślaczka, W., & Pijanowski, M. (2018). *Polymer Composite Manufacturing by FDM 3D Printing Technology. MATEC Web of Conferences*, 237, 02006. doi:10.1051/matecconf/201823702006
- [11] Ning, F., Cong, W., Hu, Y., & Wang, H. (2016). *Additive manufacturing of carbon fiber-reinforced plastic composites using fused deposition modeling: Effects of process parameters on tensile properties. Journal of Composite Materials*, 51(4), 451–462. doi:10.1177/0021998316646169
- [12] Dickson, A. N., Barry, J. N., McDonnell, K. A., & Dowling, D. P. (2017). *Fabrication of continuous carbon, glass and Kevlar fibre reinforced polymer composites using additive manufacturing. Additive Manufacturing*, 16, 146–152. doi:10.1016/j.addma.2017.06.004
- [13] Matsuzaki, R., Ueda, M., Namiki, M., Jeong, T.-K., Asahara, H., Horiguchi, K., ... Hirano, Y. (2016). *Three-dimensional printing of continuous-fiber composites by in-nozzle impregnation. Scientific Reports*, 6(1). doi:10.1038/srep23058
- [14] ASTM D638 *Standard Test Method for Tensile Properties of Plastics*
- [15] Интернет страница софтвера Ultimaker Cura <https://ultimaker.com/software/ultimaker-cura>, приступљено август 2019.
- [16] *Change at height.py Cura plugin* <https://www.thingiverse.com/thing:2077884> приступљено јул 2019.

- [17] Замировић – Узуновић Н., Лемеш С. *Метод коначних елемената*, Дом штампе, Зеница, 2002
- [18] Којић М., Славковић Р., Живковић М., Грујовић Н., *Метод коначних елемената I*, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2010.
- [19] Slavković V., Palić N., Sharma V., Grujović N., Živić F. *Mori – Tanaka method in characterisation of composite structures*, зборник радова 16th International Conference on Tribology, Kragujevac, 2019, стр. 84 – 89, ISSN: 2620 – 2832
- [20] Srivastava, A., Maiti, P., Kumar, D., & Parkash, O. (2014). *Mechanical and dielectric properties of CaCu₃Ti₄O₁₂ and La doped CaCu₃Ti₄O₁₂ poly (vinylidene fluoride) composites*. *Composites Science and Technology*, 93, 83–89. doi: 10.1016/j.compscitech.2013.12.025
- [21] Интернет страница: <https://enterfea.com/4-main-nonlinear-material-models-nx-nastran-version/> приступљено: октобар 2019.