

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Мастер академске студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Индустијски дизајн

Број индекса: 301/2011

Борис М. Ракић

Анализа контактнoг напона трoхoиднoг oзубљeњa гeрoтoрa

мaстeр рaд

Комисија за преглед и одбрану:

1. др Лозица Ивановић - ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог мастер рада кандидат треба да да преглед стања истраживања у области нумеричке анализе ротационих елемената героторских пумпи, као и основне предности истих у односу на друге пумпе. Циљ рада је испитивање у области контактних напона, при чему кандидат треба да изврши нумеричку анализу ових напона геротора за различите вредности угла заокретања спољашњег зупчаника. Такође, потребно је резултате прорачуна графички приказати и извршити поредбену анализу резултата добијених нумеричким и аналитичким прорачуном, а у циљу бољег сагледавања истих.

Препоручена литература:

- [1] **Ивановић Л.:** Идентификација оптималног облика трохоидног профила зупца елемената ротационих пумпи, Докторска дисертација, Универзитет у Крагујевцу, Машински факултет, крагујевац, 2006, UDK: 621.833.6:621.664
- [2] **Девеџић Г.:** CAD/CAM технологије, Машински факултет у Крагујевцу, Центар за интегрисан развој производа и процеса и интелигентне системе (ЦИРПИС), Крагујевац, 2009., ISBN 978-86-86663-40-5
- [3] **Gamez-Montero P. J.:** Caracterizacion Fluidodinamica de una Bomba Oleohidraulica de Engranajes internos generados por Perfiles Trocoidales, Tesis Doctoral, Universitat Politecnica de Catalunya, Terrassa 2004
- [4] **Ivanovic L., Josifović D., Rakić B., Stojanović B. and Ilić A.:** Shape Variations Influence on Load Capacity of Cardan Joint Cross Shaft, The 7th International Symposium KOD 2012, Machine and Industrial Design in Mechanical Engineering, Balatonfüred, Hungary, 2012, 24-26 May, pp. 205-210, ISBN 978-86-7892-399-9

Крагујевац, 18.10.2013.

ментор:

Лозица Ивановић, ванр.проф.

Резиме:

У раду је представљена нумеричка анализа контактних напона ротационих елемената геротора са непокретним осама вратила, при чему је погонски ротор везан за унутрашњи елемент. Геротори су пумпе са трохоидним озубљењем, базиране на кинематском принципу планетарних механизма. У оквиру првог дела рада дате су основне карактеристике, као и принцип рада ових пумпи. Такође, дат је преглед развоја, као и досадашња истраживања у области нумеричке анализе героторских пумпи. У овом делу рада приказане су полазне величине за истраживање у раду. У циљу одређивања максималних напона, у другом делу рада спроведена је нумеричка анализа контактних напона насталих као последица преношења обртног момента са унутрашњег на спољашњи зупчаник. Графички приказ резултата добијених вредности контактних напона прорачунатих нумеричком и аналитичком методом, као и поредбена анализа добијених резултата у циљу бољег сагледавања њихових одступања, дата је у овом делу рада. На крају рада дата су закључна разматрања и правци даљег истраживања у овој области, а у циљу побољшања нумеричких модела ради добијања поузданих резултата, који би били од изузетног значаја за утврђивање напонског стања које влада у конструкцији, за различите угаоне положаје поменутих елемената у току експлоатације.

Кључне речи: героторске пумпе, ротациони елементи, контактни напон, нумеричка анализа

Abstract:

Numerical analysis of contact stress of rotating elements of gerotor with axis shaft fixed, where the drive rotor is attached to the inner element is presented in this paper. Gerotors are pumps with trochoidal gearing, based on the principle of planetary kinematic mechanisms. The main characteristics and the principle of operation of these pumps are presented in the first part of the paper. Also, an overview of development and current research in the field of numerical analysis gerotor pumps. In this part of the paper presents the initial sizes for the research. In order to determine of the maximum stress in the second part of the paper carried out the numerical analysis of contact stress resulting from the transfer of torque from the inner to the outer gear. Graphical presentation of the results of the values of contact stresses calculated numerical and analytical methods, as well as a comparative analysis of the results in order to better insight of their deviations, is given in this part of paper. At the end of the paper concluding remarks and directions for further research in this area, in order to improve the numerical models in order to obtain reliable results, which would be of great importance for determining the stress state of affairs in construction, for different angular positions of these elements in exploitation.

Key words: gerotor pumps, rotating elements, contact stress, numerical analysis

САДРЖАЈ

РЕЗИМЕ	i
САДРЖАЈ	ii
1. УВОД	1
2. СТАЊЕ ИСТРАЖИВАЊА	3
2.1. ПРЕГЛЕД СТАЊА ИСТРАЖИВАЊА	3
2.2. ПРЕДМЕТ ИСТРАЖИВАЊА	4
2.2.1. ПРИНЦИП РАДА ПУМПЕ	4
2.2.2. ПРЕДНОСТИ ГЕРОТОРА	6
3. ЦИЉ И САДРЖАЈ РАДА	8
3.1. ЦИЉ РАДА	8
3.2. САДРЖАЈ РАДА	8
4. АНАЛИТИЧКИ ПРОРАЧУНАТЕ И УСВОЈЕНЕ ВЕЛИЧИНЕ ПОТРЕБНЕ ЗА НУМЕРИЧКИ ПРОРАЧУН	10
4.1. ПРОРАЧУН КООРДИНАТА ТАЧАКА ДОДИРА ЗУПЧАНИКА	10
4.2. УСВОЈЕНЕ ВРЕДНОСТИ АНАЛИТИЧКИ ПРОРАЧУНАТИХ ОБРТНИХ МОМЕНАТА	13
5. ПРОРАЧУН НАПОНА МЕТОДОМ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА (МКЕ)	14
5.1. ОПШТА РАЗМАТРАЊА	14
5.2. ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ МЕТОДЕ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА	15
5.3. ДЕФИНИСАЊЕ ПРОБЛЕМА КОЈИ СЕ РЕШАВА	15
5.4. АНАЛИЗА КОНТАКТНИХ НАПОНА ПРИМЕНОМ МКЕ	17
5.4.1. ГЕОМЕТРИЈСКИ МОДЕЛИ	18
5.4.2. ИЗБОР МАТЕРИЈАЛА	19

5.4.3. ГЕНЕРИСАЊЕ 2D МОДЕЛА	20
5.4.4. ГЕНЕРИСАЊЕ МРЕЖЕ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА 2D МОДЕЛА	21
5.4.5. ГРАНИЧНИ УСЛОВИ НУМЕРИЧКОГ МОДЕЛА	27
5.4.6. ДЕФИНИСАЊЕ КОНТАКТНИХ ОГРАНИЧЕЊА	30
5.4.7. ДЕФИНИСАЊЕ ОПТЕРЕЋЕЊА	32
5.4.8. ДЕФИНИСАЊЕ ПАРАМЕТАРА И ПОКРЕТАЊЕ АНАЛИЗЕ ПРОРАЧУНА	34
6. АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА ПРОРАЧУНА	38
7. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА	47
ЛИТЕРАТУРА	49
ПРИЛОГ I ПРИКАЗ ГЕОМЕТРИЈЕ И БРОЈА ЧВОРОВА У КОНТАКТНИМ ЗОНАМА ЗУПЧАНИКА ОПИСАНЕ У ПОГЛАВЉУ 5.4.3.	51
ПРИЛОГ II ПРИКАЗ МРЕЖЕ 2D КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА У КОНТАКТНИМ ЗОНАМА ЗУПЧАНИКА ОПИСАНЕ У ПОГЛАВЉУ 5.4.4.	56
ПРИЛОГ III ПРИКАЗ РАСПОДЕЛЕ И ВРЕДНОСТИ МАКСИМАЛНИХ КОНТАКТНИХ НАПОНА РОТАЦИОНИХ ЕЛЕМЕНАТА ГЕРОТОРА ТИПА ГП-575 И ГП-375 ОПИСАНИХ У ПОГЛАВЉУ 5.4.5.	61

1

1. УВОД

С обзиром на данашњи тренд брзог развоја производа, пред конструкторе се постављају све већи захтеви како у погледу усавршавања конструкција, тако и у погледу брзине прорачуна, израде технолошке документације и др. Из тог разлога, све више се примењује компјутерска техника и рачунарски програми као што су:

- програми за прорачун напонско-деформационих стања и симулацију радних услова,
- програми за оптимизацију параметара,
- базе података за стандарде, машинске елементе, материјале, алате, ...,
- CAD системи за обликовање и израду конструкционе документације и др.

Одређивање напонско-деформационих стања у појединим елементима машинских конструкција представља важан корак ка побољшању поузданости, како тог елемента, тако и читаве конструкције. У оквиру тога, контактни напони су посебна област изучавања напонског стања машинских елемената, насталих у непосредном додиру два дела, па директно утичу на интензитет хабања, а тиме и на радне карактеристике зупчаника.

Основне компоненте већине машина су зупчаници чији квалитет у знатној мери утиче на трајност и поузданост машине. Примена зупчаника са еволвентним озубљењем поред великих техничких и економских предности има и низ недостатака (релативно мала носивост бокова зубаца и велики контактни напони) што доводи до смањења степена искоришћења.

Применом трохоидног озубљења у савременим конструкцијама може се обезбедити потребан степен искоришћења и радни век, уз минималну тежину и габарите. Трохоидни профили озубљења зупчаника се примењују код циклоредуктора, посебне групе планетарних зупчастих преносника, као и код великог броја ротационих машина различите намене, као што су: ротационе пумпе, ротациони мотори, ротациони компресори и дувалке.

Захваљујући разноврсности примене и могућности реализације великог броја различитих комбинација зупчастих парова са унутрашњим трохоидним озубљењем, од великог је значаја вршити истраживања у области контактних напона ради повећања века и поузданости читаве конструкције. У раду је извршена нумеричка анализа контактних напона ротационих елемената трохоидног профила са унутрашњим озубљењем, применом методе коначних елемената (МКЕ), а затим је приказана поредбена анализа резултата са аналитички усвојеним вредностима напона. Такође, дат је упоредни приказ зависности контактних напона на појединим зупцима у зависности од величине угла заокретања спољашњег зупчаника.

2

2. СТАЊЕ ИСТРАЖИВАЊА

2.1. ПРЕГЛЕД СТАЊА ИСТРАЖИВАЊА

Прве трохоидне машине са спрегнутим обвојницама су припадале ротационим парним моторима, од којих је најпознатији био проналазак Cooley-а (перитрохоида са спољашњом обвојницом) [1]. Касније су Wallinder и Skoog усавршили ротациони мотор код кога је примењен профил хипотрохоиде са унутрашњом обвојницом [1]. Затим су своје конструкције ротационих машина патентирали следећи проналазачи: Umpleby, Gray и Drummond, Marshall, Spand, Renault, Tomas, Sensand, Maillard, Ferro, Wankel и Froede [1].

Упоредо са развојем ротационих мотора одвијао се и развој пумпи са трохоидним озубљењем, базираних на кинематском принципу планетарних механизма познатих под називом ГЕРОТОР. Творцем геротора се може сматрати Myron F. Hill који је свој први проналазак реализовао 1906. године, а затим се 1921. године потпуно посветио развоју геротора. Свој проналазак је патентирао под називом геротор, што је изведено из фразе "GEnerated ROTOR" (Генерисан ротор) и описује математичку процедуру за генерисање перитрохоидног профила унутрашњег зупчаника кружним луком спољашњег профила. Захваљујући томе што спољашњи зупчаник има један зубац више, остварује се ефекат потискивања флуида у току ротације [2].

Colbourne је нумеричком методом дефинисао осам обвојница за сваку трохоиду. Развио је метод за прорачун контактних напона код трохоидних пумпи и анализирао утицај геометријских параметара на смањење максималних напона [3,4].

Shung је извео параметарске једначине за девет обвојница трохоиде и дао детаљну анализу њихових геометријских карактеристика [5], а затим представио метод прорачуна контактних напона код једне врсте трохоидне пумпе [6].

Fabiani и др. су презентovali моделирање и симулацију героторске пумпе за подмазивање мотора са унутрашњим сагоревањем [7].

Gamez је представио анализу геометријских и функционалних карактеристика героторске пумпе. Применом модификоване Colbourne-ове методе прорачунао је контактне напоне и дао је резултате оптималног пројектовања конкретне пумпе. Добијене резултате верификовао је експерименталним путем применом методе фотоеластичности [8,9].

Ивановић је дала методологију за избор оптималног облика трохоидног профила зупца зупчаника примењених код ротационих (героторских) пумпи, као и аналитички прорачун максималних контактних напони ротационих елемената ових пумпи. Описана методологија је илустрована на конкретном примеру пумпе, а добијено решење је предложено као оптимално за дате услове [10]. Такође, презентовала је аналитички модел варирања притиска у коморама геротора са непокретним осама зупчаника, који се користи код мотора, компресора, експандера итд. [11]. Ивановић је извршила генерисање и анализу упаривања профила зупчаника са унутрашњим трохоидним озубљењем [12]. Такође, дала је развој општег математичког модела трохоидног преносника који може бити примењен у геротор пумпама и циклоредукторима, као и геометријску анализу модела и физичког пара спрезања трохоидних пумпи, код којих спољашњи зупчаник има један зубац више од унутрашњег зупчаника [13]. Анализа сила и момената у контакту између зупчаника, као и постизање прецизнијег решења за проблеме који се односе на расподелу оптерећења код трохоидних пумпи са непокретним осама вратила, Ивановић је представила у [14].

2.2. ПРЕДМЕТ ИСТРАЖИВАЊА

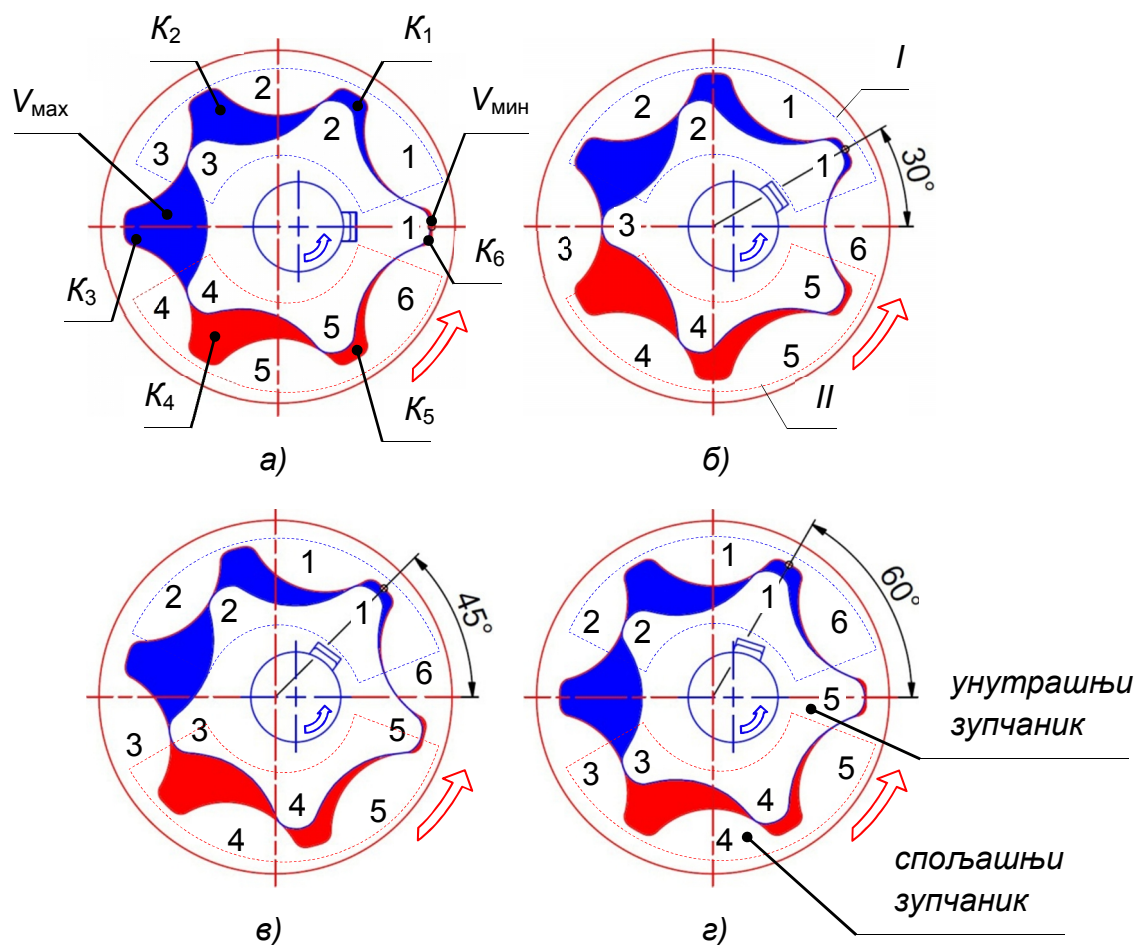
2.2.1. ПРИНЦИП РАДА ПУМПЕ

Унутрашњи зупчаник, услед чврсте везе са погонским вратилом, изводи ротационо кретање у смеру кретања вратила, према слици 2.1, као и спољашњи зупчаник чија угаона брзина зависи од броја зубаца зупчаника.

Кинематска шема расподеле флуида пумпе дата је на слици 2.1. Радне коморе пумпе (K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , K_5 и K_6) представљају простор који се у току ротације унутрашњег зупчаника тренутно формира између профила зубаца унутрашњег и спољашњег зупчаника. У току радног процеса свака комора се периодично налази у усисној зони (последица ротације унутрашњег зупчаника), која је на слици обележена са *I*, или потисној зони, која је на слици обележена са *II*, при чему унутрашњи зупчаник има улогу потискујућег елемента.

У положају приказаном на слици 2.1а), када је у комори K_3 завршена потисна фаза, простор између зубаца се повећао и тиме дошло до формирања

максималне ($V_{\max}$) запремине, после чега следи њена потисна фаза. Истовремено, на другој половини пумпе простор између зубаца се смањило, што је проузроковало формирање коморе K_6 са минималном ($V_{\min}$) запремином, укључујући и потисне и усисне радне коморе пумпе. У току даље ротације одвија се процес усисавања флуида у пумпу, што има за последицу формирање нових усисних комора и повећање њихових запремина.



Слика 2.1. Кинематска шема геротора

На слици 2.1б) и в) приказани су неки од положаја при којима долази до формирања усисних радних комора, као и до постепеног повећавања њихових запремина. Слика 2.1г) дефинише крајњи положај у једном циклусу ротације спољашњег зупчаника пумпе, који се истовремено може посматрати и као почетни положај, после чега долази до непрекидног понављања формирања усисних и потисних радних комора.

У току ротације, обртни момент се преко погонског вратила даље преноси на зупце унутрашњег и спољашњег зупчаника. Геротор је таква конструкција код које су сви зупци и унутрашњег и спољашњег зупчаника истовремено у спреси.

Оптерећење овако изведене конструкције, према слици 2.1, истовремено трпе следећи зупчасти парови: 1-1, 2-2 и 3-3, према слици 2.1а); 1-1 и 2-2, према слици 2.1б) (тзв. мртви положај) и 1-1, 2-2, 5-6, према слици 2.1в) и г) итд., који чине један циклус ротације.

Услед неравномерне расподеле напона на наведеном зупчастим паровима, који могу довести до неравномерног оштећења и хабања зубаца у спреси, као и до смањења века и поузданости елемената геротора, циљ овог рада је одређивање максималних контактних напона зубаца у спреси, као и њихову расподелу, који тренутно преносе оптерећење, а у зависности од угла заокретања спољашњег зупчаника.

2.2.2. ПРЕДНОСТИ ГЕРОТОРА

Захваљујући бројним предностима, данас су геротори заступљени у многим областима индустрије. У следећим корацима наведене су неке од примена геротора [10].

Област примене:

- **ваздухопловство,**
 - ⇒ убризгивање горива,
 - ⇒ подмазивање гасне турбине,
 - ⇒ подмазивање мењача на хеликоптеру,
 - ⇒ авионске расхладне пумпе;
- **моторна возила,**
 - ⇒ трансфер дизел горива,
 - ⇒ подмазивање мотора,
 - ⇒ подмазивање мењача,
 - ⇒ сервоуправљачи,
 - ⇒ хидраулика код кочница;
- **поморски саобраћај,**
 - ⇒ трансфер дизел горива,
 - ⇒ подмазивање парних турбина,
 - ⇒ подмазивање погона крме,
 - ⇒ подмазивање компресора за хлађење;
- **хемијска индустрија,**
 - ⇒ трансфер хемикалија,
 - ⇒ пумпање хемикалија,
 - ⇒ хемијске мерне пумпе,
 - ⇒ хемијске дозирне пумпе.

Предности геротора у односу на зупчасте пумпе са спољашњим озубљењем су:

- мањи број делова зато што се код геротора јавља само једно вратило;
- компактна конструкција са мањим димензијама, чиме се остварује уштеда материјала и обраде, а тиме и нижа цена производа;
- мања бука,
 - код пумпи са цилиндричним зупчаницима промена запремине се одвија брзо, при великој релативној брзини, што доводи до бучног рада, док је код геротора промена запремине постепена, што доводи до равномерног протока и до тихог рада.

Предности геротора у односу на зупчасте пумпе са унутрашњим озубљењем су:

- нижа цена производа,
 - захваљујући особини самоподмазивања код геротора елеминише се потреба за елементом у облику српа, који је карактеристичан за зупчасте пумпе са унутрашњим озубљењем; тиме се добија мањи број елемената, мање димензије и тежина кућишта, чиме се остварује нижа цена израде и мањи трошкови монтаже;
- мања улазна снага, захваљујући мањем спољашњем пречнику и мањем броју зубаца;
- боље кинематске карактеристике,
 - код геротора се осим трења клизања јавља и трење котрљања, што доводи до већег механичког степена искоришћења, а тиме и укупног степена искоришћења;
- боља способност напајања и брже пуњење.

Предности геротора у односу на крилне пумпе су:

- нижа цена производа;
 - у поређењу са крилним пумпама конструкција геротора је много једноставнија, чиме се добија и нижа цена производа;
- бољи рад при већим брзинама и боље заптивање, чиме се остварује већи запремински и механички степен искоришћења;
- мања бука;
- мање хабање и дужи век трајања, што се добија као резултат мале релативне брзине код геротора.

3

3. ЦИЉ И САДРЖАЈ РАДА

3.1. ЦИЉ РАДА

У основна истраживања овог рада, поред симулације кретања елемената геротора, спадају и идентификација и анализа верификованих аналитичких резултата добијених контактних напона применом МКЕ, на појединим зубцима ротационих елемената геротора.

Узимајући у обзир досадашња теоријска разматрања у овој области и могућности примене геротора, основни циљ овог рада има следеће аспекте:

- прецизно дефинисање свих битних параметара и карактеристика геротора,
- детаљна анализа геометријских ограничења,
- креирање модела зупчастих парова геротора са усвојеним ознакама ГП-575 са коефицијентом трохоиде $\lambda=1,575$ и ГП-375 са коефицијентом трохоиде $\lambda=1,375$, применом софтверског пакета *Autodesk Inventor Professional 2014*,
- детаљан поступак структурне анализе модела у циљу одређивања контактних напона применом софтверског пакета *FEMAP v10.3.0*,
- верификација аналитичких резултата МКЕ,
- анализа добијених резултата применом аналитичке методе и МКЕ.

3.2. САДРЖАЈ РАДА

Изложена материја је подељена у седам поглавља. После првог, уводног, следи поглавље у коме је дат преглед стања истраживања и идентификација подручја истраживања. Треће поглавље обухвата дефинисање циља и опис садржаја рада.

Четврто поглавље обухвата прорачун и преглед претходно прорачунатих величина које су коришћене у анализи контактних напона применом нумеричке методе.

У петом поглављу дати су основни принципи примене методе коначних елемената, као и принцип решавања поменутог проблема овом методом. У оквиру овог поглавља дефинисан је проблем и основне карактеристике разматраних геротора и дат детаљан преглед поступка за извођење анализе овом методом. На крају поглавља дат је приказ резултата за геротор типа ГП-575 за његов нулти положај.

У оквиру шестог поглавља приказани су резултати добијених вредности напона и извршена њихова анализа.

У седмом поглављу дата су закључна разматрања о утицајима добијених резултата и указано на даље правце и токове истраживања у овој области.

На крају рада дат је преглед коришћене литературе.

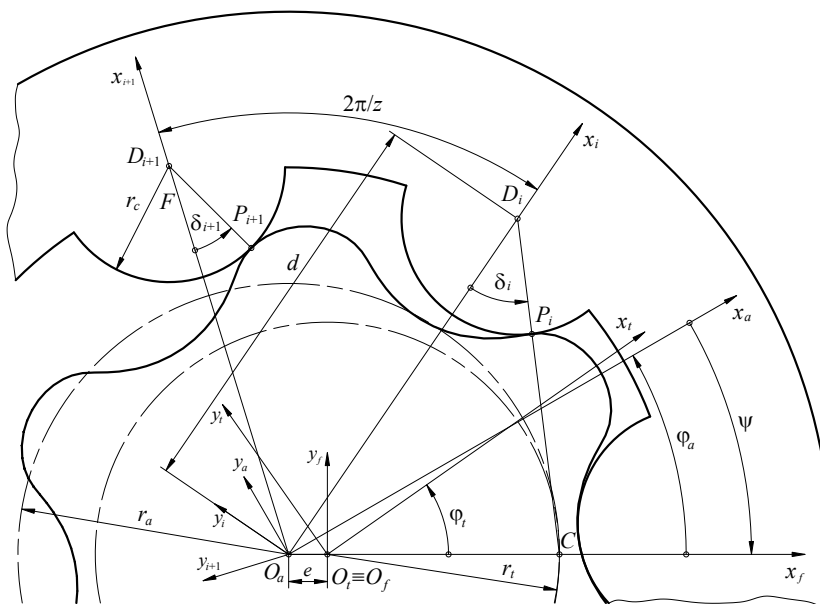
Рад садржи и додатне прилоге који су проистекли из одговарајућих поглавља, а у циљу јаснијег приказа потребних величина. Сваки прилог је дефинисан према одговарајућем броју поглавља.

4

4. АНАЛИТИЧКИ ПРОРАЧУНАТЕ И УСВОЈЕНЕ ВЕЛИЧИНЕ ПОТРЕБНЕ ЗА НУМЕРИЧКИ ПРОРАЧУН

4.1. ПРОРАЧУН КООРДИНАТА ТАЧАКА ДОДИРА ЗУПЧАНИКА

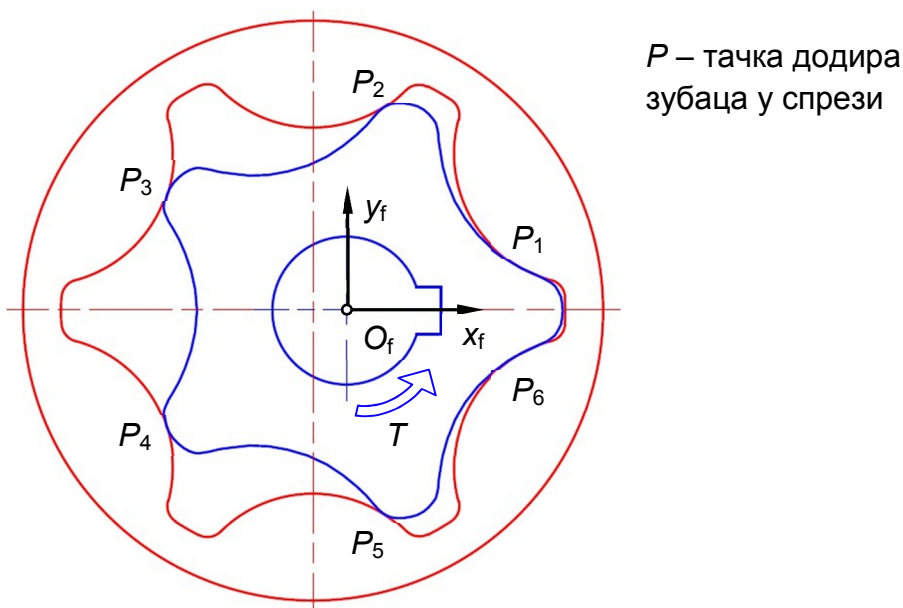
Како је код трохоидног озубљења присутно истовремено спрезање свих зубаца, то је потребно одредити опште једначине координата тачака профила, које се могу применити за све зупце. На слици 4.1 су приказане основне геометријске величине потребне за прорачун, где су:



Слика 4.1. Шематски приказ зупчастог пара трохоидне пумпе и основних геометријских величина [10]

- $x_f O_f y_f$ – непокретни координатни систем везан за средиште унутрашњег зупчаника,
- $x_t O_t y_t$ – координатни систем трохоиде,
- $x_a O_a y_a$ – координатни систем обвојнице,
- e – ексцентрицитет пумпе,
- r_c – полупречник кружног профила зупца спољашњег зупчаника,
- r_t – кинематски круг унутрашњег зупчаника,
- r_a – кинематски круг спољашњег зупчаника,
- C – кинематски пол,
- i – редни број тачке додира,
- δ_i – угао захвата,
- φ_t – угао заокретања унутрашњег зупчаника,
- φ_a – угао заокретања спољашњег зупчаника,
- ψ – референтни угао и
- d – растојање центра кружног профила зупца и средишта спољашњег зупчаника.

При моделирању зубаца, као и за симулацију спрезања, неопходно је извршити нумерисање тачака додира свих спрегнутих зубаца (слика 4.2).



Слика 4.2. Илустрација нумерисања тачака додира зубаца геротора

На основу геометријских величина приказаних на слици 4.1, може се одредити општа једначина координата тачке додира спрегнутих профила у координатном систему трохоиде [10]:

$$\vec{r}_{Pi} = \begin{bmatrix} x_{Pi}^{(t)} \\ y_{Pi}^{(t)} \\ 1 \end{bmatrix} = e \begin{bmatrix} z\lambda \cos \left[\frac{\pi(2i-1)}{z} - \psi \right] - 1 - c \cos \left[\frac{\pi(2i-1)}{z} - \psi + \delta_i \right] \\ z\lambda \sin \left[\frac{\pi(2i-1)}{z} - \psi \right] - c \sin \left[\frac{\pi(2i-1)}{z} - \psi + \delta_i \right] \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где су:

- $\vec{r}_{Pi}$ – вектор положаја i – те тачке додира,
- $x_{Pi}^{(t)}$ – x координата i – те тачке додира,
- $y_{Pi}^{(t)}$ – y координата i – те тачке додира,
- z – број зубаца спољашњег зупчаника,
- λ – коефицијент трохоиде,
- i – редни број тачке додира и
- c – коефицијент полупречника еквилистанте ($c = \frac{r_c}{e}$).

Прорачунате вредности координата тачака додира приказане су у табели 4.1 и 4.2.

Табела 4.1. Координате тачака додира за различите вредности угла φ_a и коефицијента трохоиде $\lambda=1,575$

i	1		2		3		4		5		6	
φ_a [°]	x_{pi} [mm]	y_{pi} [mm]	x_{pi} [mm]	y_{pi} [mm]	x_{pi} [mm]	y_{pi} [mm]	x_{pi} [mm]	y_{pi} [mm]	x_{pi} [mm]	y_{pi} [mm]	x_{pi} [mm]	y_{pi} [mm]
0	19,675	4,056	3,977	21,771	-19,354	12,377	-19,354	-12,377	3,977	-21,771	19,675	-4,056
15	18,8	9,799	-2,717	22,174	-22,174	6,463	-14,908	-17,234	10,249	-19,392	17,858	-0,045
25	16,786	13,535	-7,1	21,339	-23,032	2,182	-11,216	-19,668	13,865	-16,799	16,284	0,366
45	10,249	19,392	-14,908	17,234	-22,174	-6,463	-2,717	-22,174	18,8	-9,799	17,858	0,045
60	3,977	21,771	-19,354	12,377	-19,354	-12,377	3,977	-21,771	19,675	-4,056	19,675	4,056

Табела 4.2. Координате тачака додира за различите вредности угла φ_a и коефицијента трохоиде $\lambda=1,375$

i	1		2		3		4		5		6	
φ_a [°]	x_{pi} [mm]	y_{pi} [mm]	x_{pi} [mm]	y_{pi} [mm]	x_{pi} [mm]	y_{pi} [mm]	x_{pi} [mm]	y_{pi} [mm]	x_{pi} [mm]	y_{pi} [mm]	x_{pi} [mm]	y_{pi} [mm]
0	18,115	1,135	4,711	17,998	-15,58	10,475	-15,58	-10,47	4,711	-18	18,115	-1,135
15	17,609	6,711	-1,116	18,529	-18,03	5,477	-11,72	-14,55	10,178	-15,72	15,277	2,736
25	15,879	10,238	-4,928	17,914	-18,77	1,85	-8,507	-16,57	16,333	-13,29	12,321	1,776
45	10,178	15,717	-11,72	14,55	-18,03	-5,477	-1,116	-18,53	17,609	-6,711	15,277	-2,736
60	4,7109	17,998	-15,58	10,475	-15,58	-10,47	4,711	-18	18,115	-1,135	18,115	1,135

Прорачунате вредности тачака додира даље ће користити за креирање модела и његову припрему за структурну анализу, а у циљу генерисања што квалитетније мреже коначних елемената.

4.2. УСВОЈЕНЕ ВРЕДНОСТИ АНАЛИТИЧКИ ПРОРАЧУНАТИХ ОБРТНИХ МОМЕНАТА

На основу претходно прорачунате аналитичке вредности резултујућег обртног момента, T (обртни момент који се добија као разлика погонског момента и момента од сила притиска флуида које делују на спољашњој површини унутрашњег зупчаника), у табели 4.3 дате су вредности ове величине [10].

Табела 4.3. Усвојене вредности обртних момената

	$\lambda=1,575$	$\lambda=1,375$
φ_a , [°]	T , [Nm]	T , [Nm]
0	0,632	0,621
15	0,290	0,352
25	0,041	0,059
45	0,290	0,352
60	0,632	0,621

5

5. ПРОРАЧУН НАПОНА МЕТОДОМ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА (МКЕ)

5.1. ОПШТА РАЗМАТРАЊА

Машинска конструкција је састављена од много основних елемената који чине функционалну целину. Током интензивног научног развоја створени су многи теоријски и практични модели за анализу, синтезу и испитивање машинских конструкција.

Методe анализе конструкција су истраживачке методе помоћу којих се траже одговори о својствима конструкције. На основу креиране физичке форме машинске конструкције, формирају се упрошћени модели, а затим се бира математички модел за прорачун и анализу. Анализа се изводи теоријско-аналитичком, нумеричком или експерименталном методом.

Основне зависности између геометријских и физичких величина у механици континуума свде се углавном на постављање веза између стања напона и стања деформације и спољашњег оптерећења. Решавање задатка се тако своди на решавање диференцијалних једначина, уз задовољење контурних и почетних услова. Методе структурне анализе машинских конструкција, које се користе за решавање постављених једначина, односно, одређивање потребних параметара, могу се сврстати у две групе: аналитичке и нумеричке. У нумеричке методе за прорачун и анализу структура спадају:

- нумеричко решавање диференцијалних једначина (нумеричко интеграљење, метода коначних разлика...) и
- метода коначних елемената - МКЕ (метода сила, метода померања, мешовита метода, ...).

У зависности од брзине извођења анализе, могу веома рано да се идентификују особине конструкције, односно да се развије више конструктивних варијанти и тако одабере најповољније решење.

5.2. ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ МЕТОДЕ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА

Метод коначних елемената представља нумерички поступак решавања инжењерских проблема и проблема математичке физике. Методом коначних елемената се врши анализа структура, контактни проблеми, рачунају температурна поља, ток флуида, транспорт маса итд.

У највећем броју случајева када анализирана структура има сложену геометрију, када је сложено оптерећење и када су структуре од различитих материјала, није могуће наћи решење аналитичким путем. Аналитичко решење подразумева добијање аналитичких израза за рачунање тражених карактеристика на различитим местима структуре (померање, температура, напон и сл.). За добијање таквих података треба решити диференцијалне или парцијалне диференцијалне једначине, што је могуће урадити само за врло једноставне проблеме. Из тог разлога, користе се нумеричке методе, а једна од њих, најчешће примењивана је МКЕ. Решавање проблема МКЕ своди се на решавање система алгебарских једначина, а добијена решења су приближна и односе се на одређене тачке структуре.

Процес моделирања се састоји у дискретизацији континуума (тела или структуре). Дискретизован модел се састоји од коначних елемената, који су повезани у чворовима (штапни елементи), по граничним заједничким линијама (равански елементи), или заједничким површинама (просторни елементи). При решавању проблема МКЕ, за сваки коначни елемент постављају се једначине, док се њиховом комбинацијом добијају једначине целе структуре. Зависно од врсте проблема који се решава, решавањем поменутих једначина, као резултат добијају се тражене величине које важе за целу структуру. Такође, ова метода пружа могућност брзог поновног извршења процеса анализе после измене било ког детаља у облику дела.

5.3. ДЕФИНИСАЊЕ ПРОБЛЕМА КОЈИ СЕ РЕШАВА МКЕ

У оквиру претходних излагања показано је да је основна идеја примене МКЕ верификација аналитичке методе конципиране за анализу расподеле контактних напона код истовремено спрегнутих парова зубаца. Нумерички модел који се користи за изучавање и праћење одређених величина развијен је у складу са претпоставкама и упрошћењима дефинисаним на основу спроведених теоријских разматрања.

При дефинисању проблема који се решава МКЕ полази се од следећих претпоставки:

- осе зупчаника су непокретне,
- обртно кретање се преноси са унутрашњег на спољашњи зупчаник,
- линијско оптерећење дуж тренутне линије додира зубаца је константно,
- проблем се посматра као статички,
- физичке особине материјала су константне,
- не разматра се термички ефекат,
- не разматра се утицај трења.

5.4. АНАЛИЗА КОНТАКТНИХ НАПОНА ПРИМЕНОМ МКЕ

До потребних података за моделовану структуру зупчаника долази се поступком структурне анализе, уз примену одговарајућег софтверског пакета. У оквиру овог рада, а применом МКЕ, приказана је симулација оптерећења (контактних напона) зупчаника геротора типа ГП-575 и ГП-375, применом софтверског пакета *FEMAP v10.3.0* који је превасходно намењен за структурну анализу.

Структурна анализа по МКЕ одвија се у три главне фазе, и то [17]:

- I. предпроцесна фаза
 - креирање модела (дефинисање геометријског облика),
 - додељивање материјала моделу,
 - генерисање мреже коначних елемената,
 - креирање ограничења,
 - креирање оптерећења (спецификација места положаја и правца дејства);
- II. фаза процесирања
 - прорачун (решавање система алгебарских једначина) и
- III. фаза постпроцесирања
 - приказ добијених резултата прорачуна.

FEMAP v10.3.0

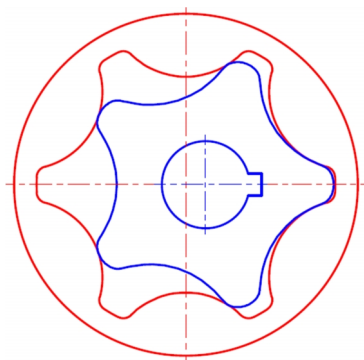
FEMAP је софтверски пакет намењен за моделирање, препроцесирање и постпроцесирање коначним елементима, који омогућава извршавање различитих типова инжењерских анализа (напонских, температурних, динамичких итд.) веома брзо и поуздано, истовремено обезбеђујући бројне погодности приказа резултата истих. Једноставним приступом и интерфејсом са CAD и Microsoft Office алатима, продуктивност у раду је драстично унапређена у поређењу са традиционалним поступцима анализе.

FEMAP обезбеђује аутоматску интеграцију која је неопходна да споји све аспекте анализе. Пружа могућност креирања геометрије, али се може увозити и као CAD геометрија различитих формата.

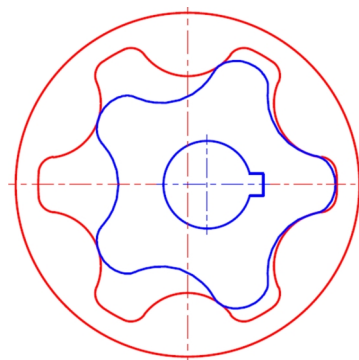
FEMAP располаже моћним и многобројним алатима за генерисање мреже коначних елемената, као и за задавање одговарајућих оптерећења и граничних услова, а у циљу што тачнијег приближавања реалним условима понашања анализираниог модела. Поред осталог, омогућава и експортовање (извоз) улазних фајлова у преко 20 програмских пакета за анализу коначним елементима, као и читање резултата анализе (фаза постпроцесирања). Различити типови алата које поседује веома су погодни за визуелизацију и представљање резултата.

5.4.1. ГЕОМЕТРИЈСКИ МОДЕЛИ

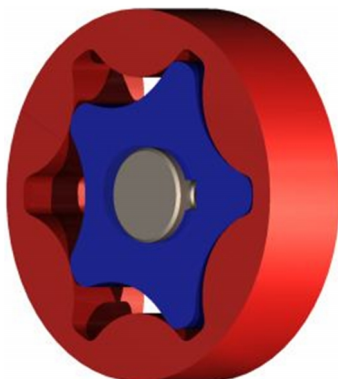
Основни CAD модели који су коришћени у структурној анализи одговарају разматраним типовима геротора. У циљу приказа симулације кретања ротационих елемената геротора, геометријски модели су креирани од елементарних геометријских тела, односно од тзв. геометријских форми (енг. "features") у *PART* модулу *Autodesk Inventor Professional 2014* програмског пакета, у чијем се поступку моделирања пошло од раванске (дводимензионалне, 2D) пројекције, односно раванске скице која у "sketch" окружењу дефинише профил моделске форме. На слици 5.1. приказане су скице и модели оба типа геротора. На наведеним моделима може се уочити помоћно вратило и клин који служе само за реалистични приказ и који у поступку прорачуна и одвијања структурне анализе нису узети у обзир. Пречник овако изведеног вратила је $d=15,8$ mm, са димензијама жлеба за клин $5 \times 1,8 \times 16$ mm и димензијама клина $5 \times 3 \times 16$ mm, према ISO 2491 A стандарду [18]. Димензије жлеба за клин у главчини унутрашњег зупчаника су $b=5$ mm и $t=2,9$ mm, према [19].



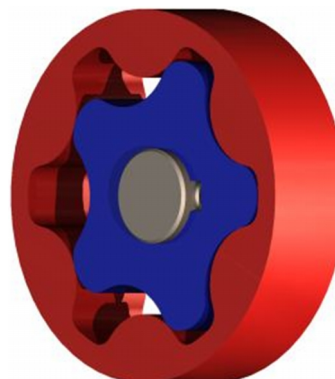
а) Скица – ГП-575



в) Скица – ГП-375



б) Модел – ГП-575



г) Модел – ГП-375

Слика 5.1. Приказ скица и геометријских модела геротора

Анализирани су контактни напони за оба типа геротора (модела пумпи): ГП-575 и ГП-375 и то за различите вредности угла заокретања спољашњег зупчаника (0° , 15° , 25° , 45° и 60°).

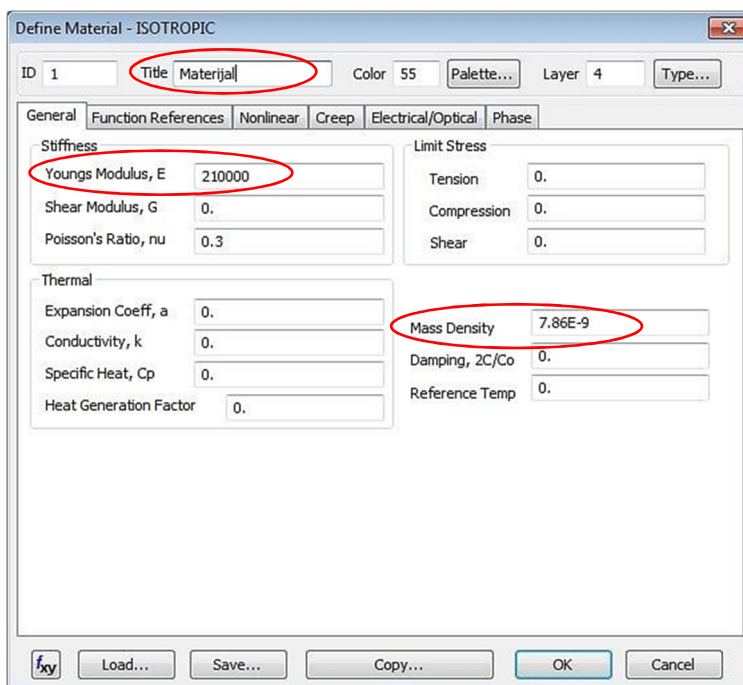
У наставку ће бити детаљно описани сви наведени кораци, уз пратеће слике, за одвијање структурне анализе за један тип геротора, са коефицијентом трохоиде $\lambda=1,575$ и $\psi_a=0^\circ$. Како се ради о равном стању напона по ширини зупчаника, за структурну анализу коришћени су 2D модели.

5.4.2. ИЗБОР МАТЕРИЈАЛА

По увозу одговарајућих скица модела, врши се избор материјала. За све моделе је примењен исти материјал, челик, са следећим карактеристикама:

- Young-ов модул еластичности $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа,
- Poisson-ов коефицијент $\nu=0,3$,
- густина $\rho=7,86 \cdot 10^{-9}$ N/mm³ и
- дозвољени напон $\sigma_d=250$ МПа.

Одабиром опције Model $\Rightarrow$ Material отвара се прозор у коме се врши унос неопходних карактеристика материјала модела, према слици 5.2.

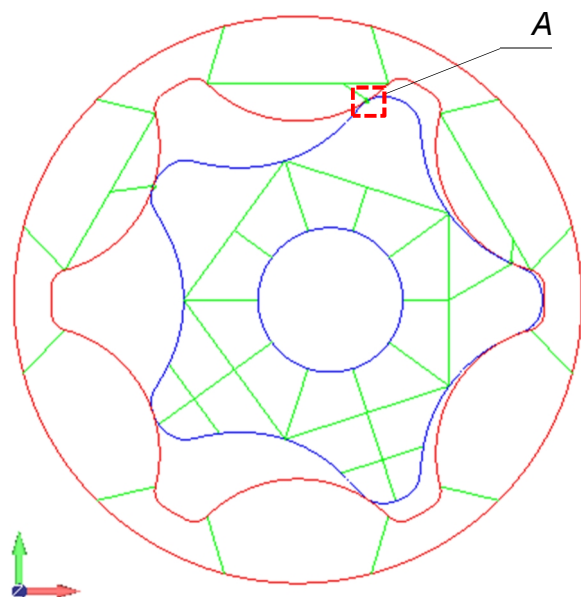


Слика 5.2. Прозор за избор карактеристика материјала

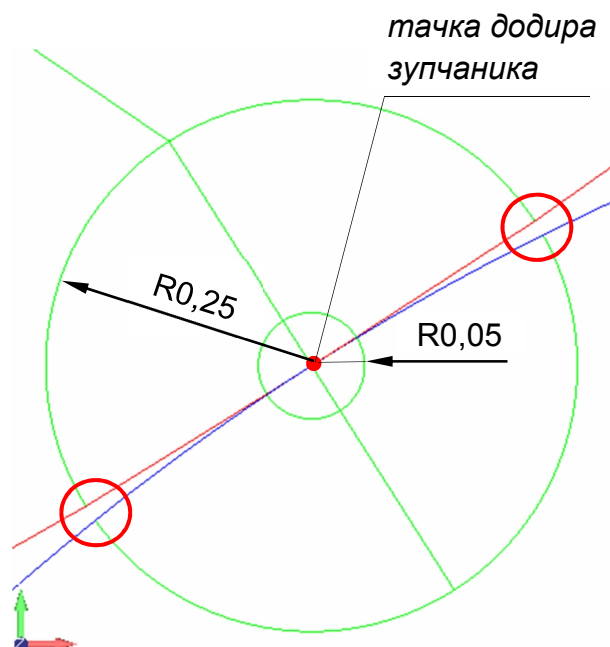
5.4.3. ГЕНЕРИСАЊЕ 2D МОДЕЛА

У првој фази дефинисања 2D модела вршена је регенерација претходно увезене скице модела (скице модела су увезене из *AutoCAD* софтверског пакета у формату "AutoCAD R12/LT2 DXF (*.dxf)") [10]. Под регенерацијом подразумева се накнадно спајање тачака контуре унутрашњег зупчаника помоћу опције *Geometry* ⇒ *Curve - Spline* ⇒ *Points*, како би се приступило креирању неопходних сегмената површине ради генерисања 2D коначних елемената.

У другој фази се приступило дељењу скице модела на мање сегменте ради бољег меширања исте, према слици 5.3, као и дефинисање граница површина свих сегмената модела. Дељење скице је вршено помоћу линија које су добијене спајањем креираних тачака, помоћу опције *Geometry* ⇒ *Curve - From Surface* ⇒ *Point to Point*.



Слика 5.3. Приказ сегмената скице модела

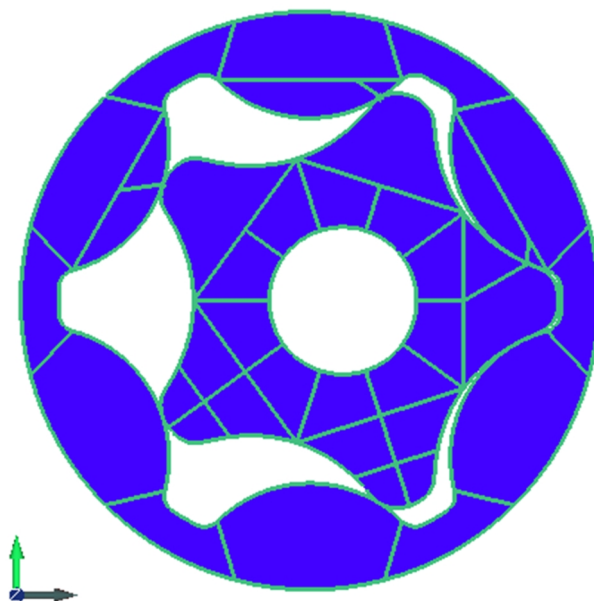


Слика 5.4. Приказ детаља А сегмента скице модела у контактної зони 2

У циљу генерисања квалитетније мреже коначних елемената вршено је додатно дељење скице креирањем кружних лукова на месту контакта (контакт 1, 2 и 3), према слици 5.3. За креирање кружних лукова коришћена је опција *Geometry* ⇒ *Curve - Circle* ⇒ *Center*, чиме се отвара прозор за дефинисање центра, а потом и радијуса кружнице. Као центар кружнице дефинисана је тачка додира зупчаника, док је за радијус унета вредност 0,25, а потом и 0,05. Приказ овако креираних кружних лукова, добијених накнадним одсецањем на местима уоквиреним црвеном линијом (помоћу опције *Modify* ⇒ *Trim*), означен као детаљ А, дат је на слици 5.4.

У циљу побољшања квалитета мреже у зони контакта (зона унутар кружних лукова) центри ових лукова су спојени са тачком додира зупчаника.

Ради дефинисања површине модела, по креирању појединачних сегмената скице, вршено је дефинисање граница појединачних површина сваког сегмента. До дефинисаних граница површина дошло се помоћу опције Geometry $\Rightarrow$ Boundary Surface $\Rightarrow$ From Curves. Одабиром ове опције отвара се прозор за селектовање граница наведених површина. На слици 5.5 дат је приказ 2D модела са дефинисаним границама појединачних сегмената површина, а самим тим и површине читавог модела.

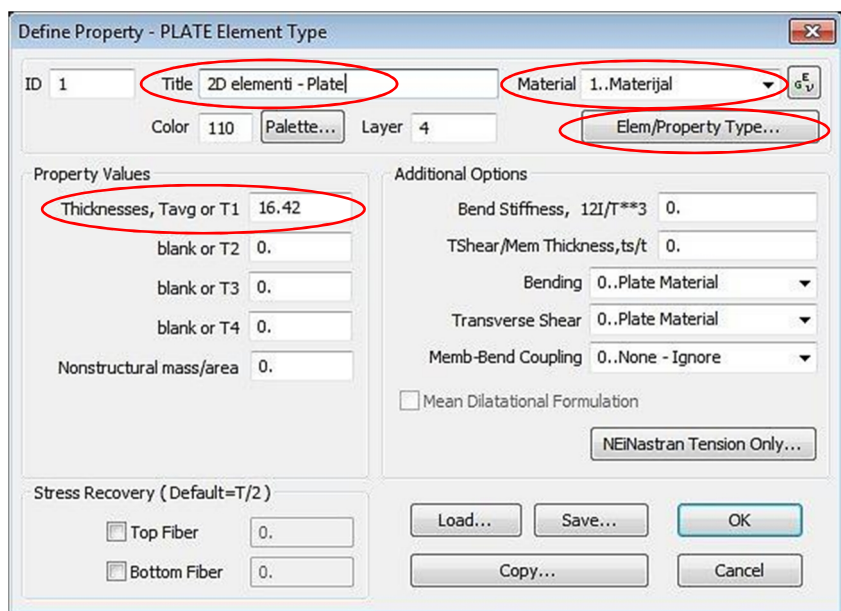


Слика 5.5. Приказ 2D модела

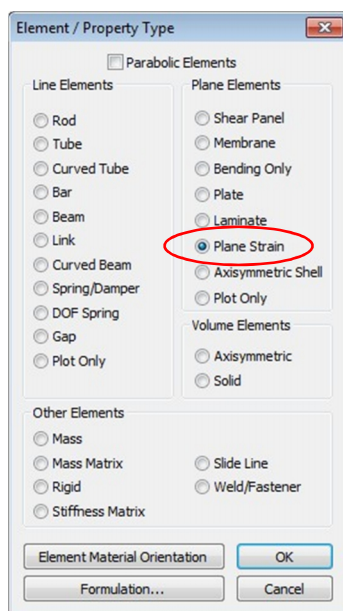
5.4.4. ГЕНЕРИСАЊЕ МРЕЖЕ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА 2D МОДЕЛА

У првој фази припреме нумеричког модела неопходно је дефинисати тип и одговарајуће карактеристике коначног елемента који се користи у поступку генерисања мреже 2D коначних елемената.

Коришћењем опције Model $\Rightarrow$ Property врши се избор типа и задавање основних карактеристика коначног елемента, према слици 5.6.



а) карактеристике коначног елемента

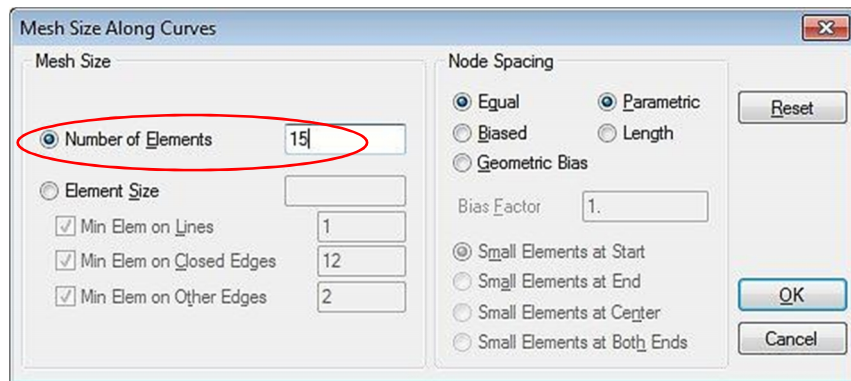


б) тип коначног елемента

Слика 5.6. Приказ прозора за избор карактеристика и типа 2D коначног елемента

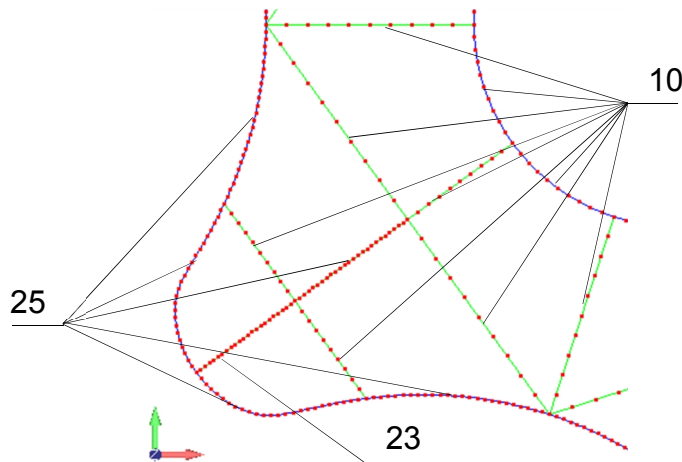
У другој фази врши се дефинисање броја чворова коначних елемената дуж ивица сегмената модела.

Креирање чворова коначних елемената дуж ивица сегмената модела врши се помоћу опције Mesh ⇒ Mesh Control ⇒ Size Along Curve. Коришћењем поменутих опције за креирање чворова и потврдом одабира поменутих линија, отвара се прозор за избор параметара за расподелу и број чворова коначних елемената, према слици 5.7.



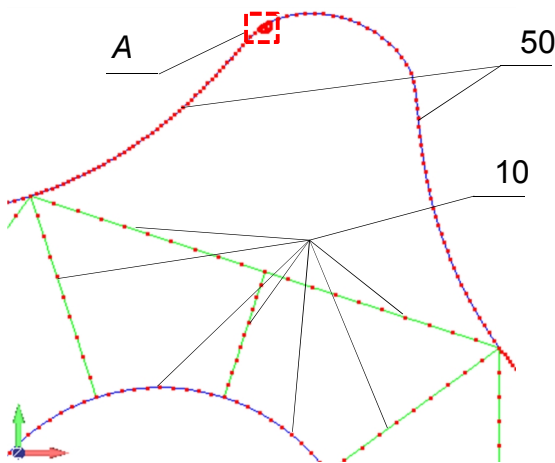
Слика 5.7. Приказ прозора за дефинисање броја чворова коначних елемената на ивицама сегмената модела

На сликама 5.8 и 5.9 дати су прикази броја чворова коначних елемената на слободном зубу (зуб број 4) и погонском зубу (зуб број 2) унутрашњег зупчаника.

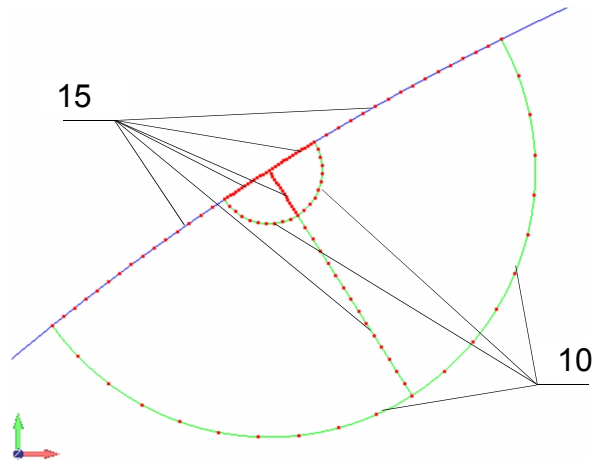


Слика 5.8. Приказ генерисаних чворова на зубу број 4 унутрашњег зупчаника

Промена расподеле чворова коначних елемената се јавља на зубу 1, 2 и 3 и унутрашњег и спољашњег зупчаника. До ове промене долази услед локалног уситњавања мреже коначних елемената у зони додира наведених зуба. На слици 5.9 дат је приказ зоне локалног генерисања чворова коначних елемената.

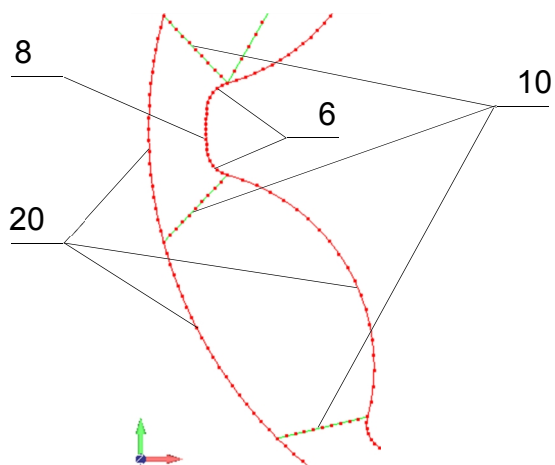


Слика 5.9. Приказ генерисаних чворова на зубу број 2 унутрашњег зупчаника

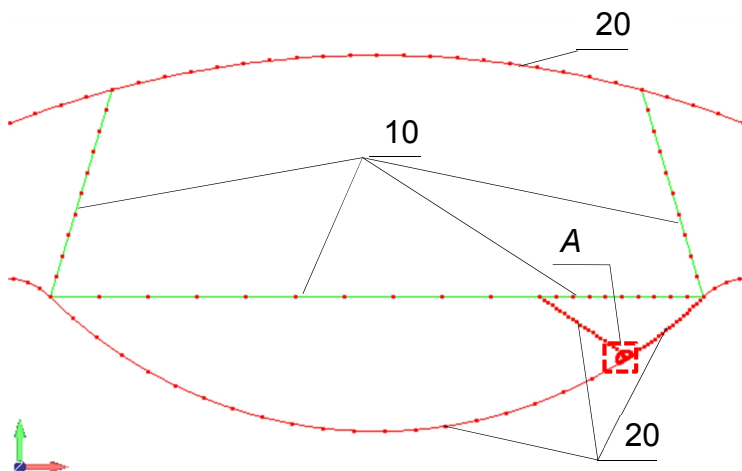


Слика 5.10. Приказ генерисаних чворова у контактної зони 2 унутрашњег зупчаника (деталј А)

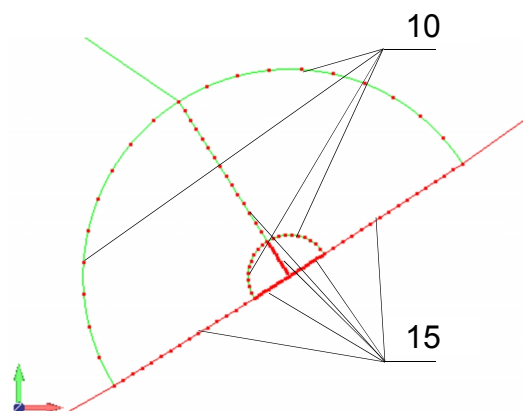
На сликама 5.11 и 5.12 дати су прикази броја чворова коначних елемената на слободном зубу (зуб број 4) и гоњеном зубу (зуб број 2) спољашњег зупчаника.



Слика 5.11. Приказ генерисаних чворова на зубу број 4 спољашњег зупчаника



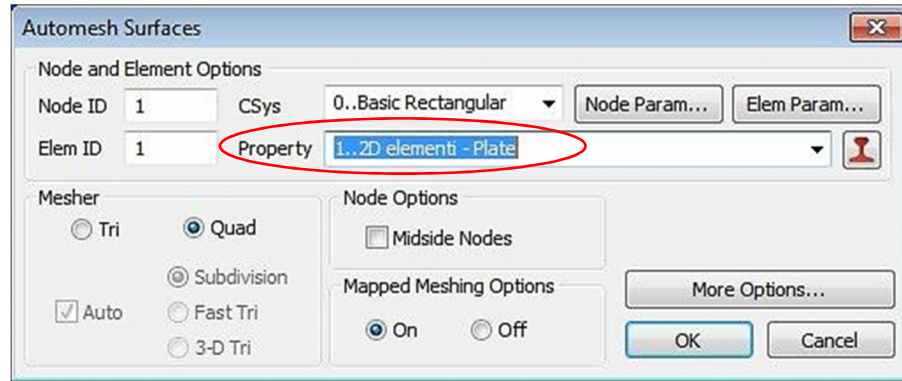
Слика 5.12. Приказ генерисаних чворова на зубу број 2 спољашњег зупчаника



Слика 5.13. Приказ генерисаних чворова у контактної зони 2 спољашњег зупчаника (деталј А)

У трећој фази је вршено генерисање 2D коначних елемената.

Генерисање коначних елемената врши се помоћу опције Mesh $\Rightarrow$ Geometry $\Rightarrow$ Surface. Након одабира жељених површина и потврдом на дугме ОК, отвара се прозор у коме се врши одабир претходно дефинисаног типа коначног елемента, према слици 5.14. Потврдом ове опције врши се аутоматско генерисање коначних елемената на површинама модела. Расподела броја чворова коначних елемената је симетрична за сваки зуб понаособ и унутрашњег и спољашњег зупчаника.



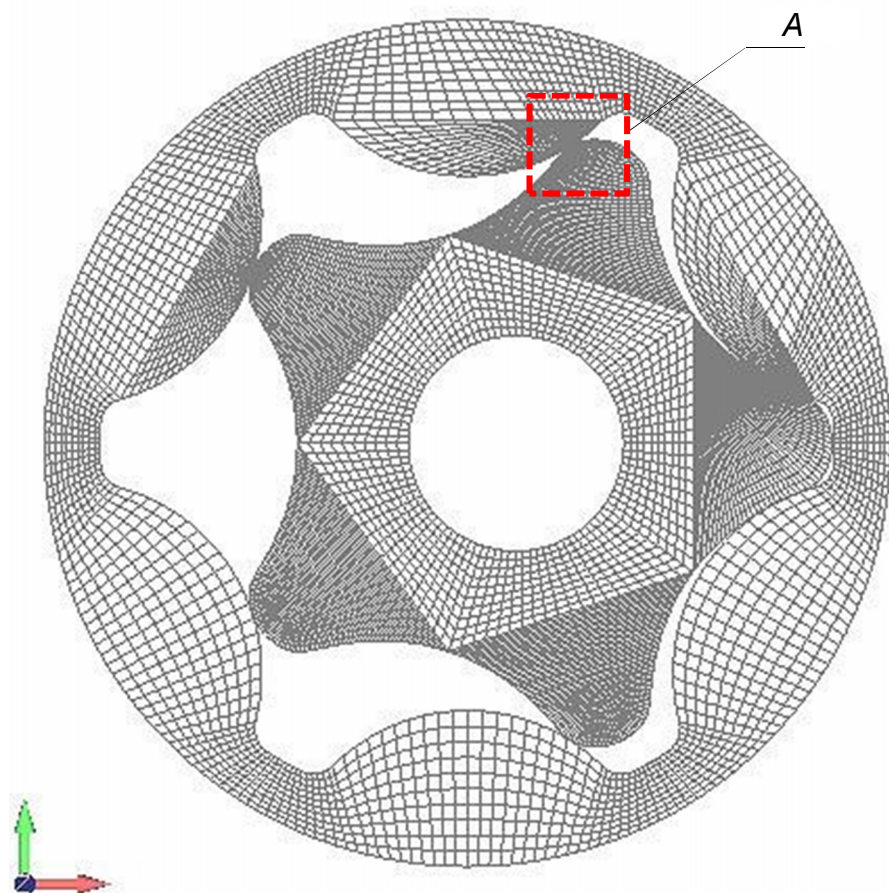
Слика 5.14. Приказ прозора за одабир претходно дефинисаног типа коначног елемента

Бољи приказ геометрије и расподеле броја чворова коначних елемената може се стећи на основу примене на конкретним примерима, датим у Прилогу I на крају рада.

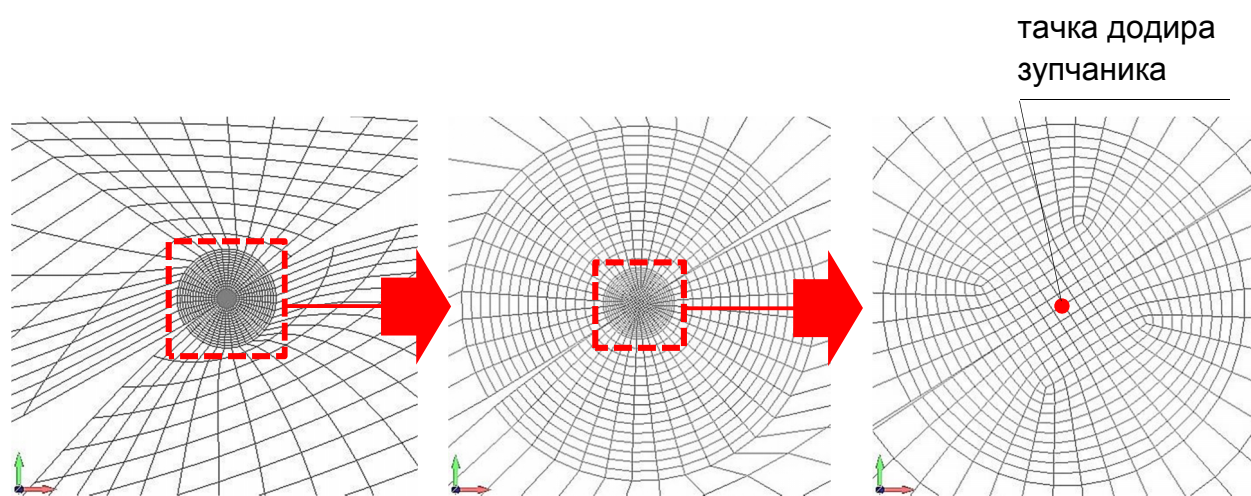
Резултат генерисане мреже 2D модела

На сликама 5.15 и 5.16 дат су визуелни прикази мреже коначних елемената модела и контактне зоне број 2, генерисане на основу претходно креиране скице модела, појединачних сегмената површина модела и дефинисања броја чворова коначних елемената на ивицама сегмената модела.

Бољи приказ мреже коначних елемената и њихове расподеле може се стећи на основу примене на конкретним примерима, датим у Прилогу II на крају рада.



Слика 5.15. Приказ 2D дискретизованог модела

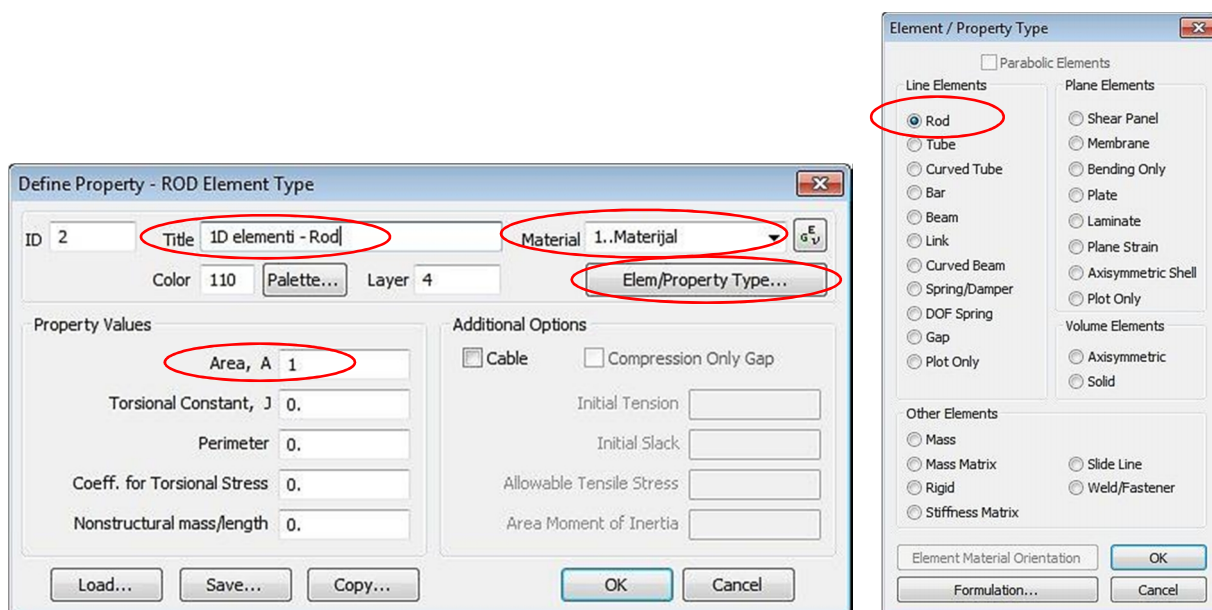


Слика 5.16. Приказ детаља А (контактна зона 2)

5.4.5. ГРАНИЧНИ УСЛОВИ НУМЕРИЧКОГ МОДЕЛА

Гранични услови су дефинисани у складу са теоријским разматрањима код геротора, за унутрашњи и спољашњи зупчаник.

У циљу дефинисања ограничења центра унутрашњег зупчаника потребно је креирати штапне (1D) елементе, произвољног попречног пресека, који повезују центар и чворове на линији главчине унутрашњег зупчаника, према слици 5.22. За креирање ових елемената потребно је дефинисати њихов тип и основне карактеристике (слично као за дефинисање основних карактеристика 2D коначних елемената у претходном поглављу), према слици 5.17.

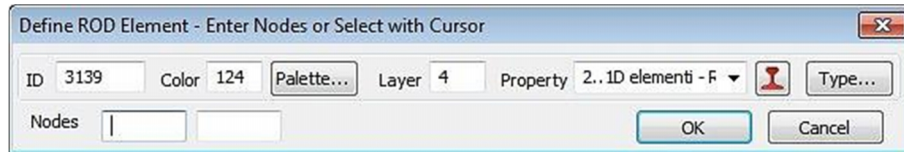


а) карактеристике коначног елемента

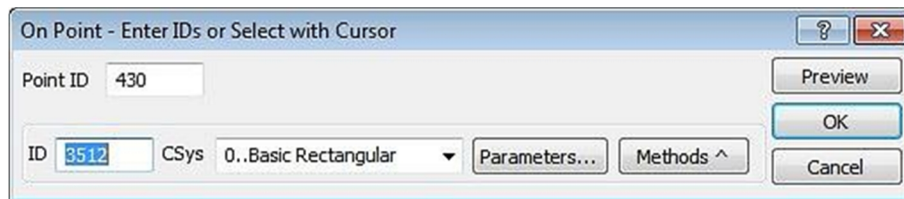
б) тип коначног елемента

Слика 5.17. Приказ прозора за избор карактеристика и типа 1D коначног елемента

Креирање 1D коначних елемената се врши помоћу опције *Model* ⇒ *Element*, при чему се отвара прозор за дефинисање његовог почетног и крајњег чвора (дужина коначног елемента), према слици 5.18. За дефинисање ових чворова потребно је селекувати претходно креирани централни чвор и чвор на поменутој линији главчине, чији се потупак понавља за креирање свих 100 коначних елемената (100 чворова на линији главчине). Креирање централног чвора се врши помоћу опције *Model* ⇒ *Node*, при чему се за тачку на којој се креира чвор селекује централна тачка унутрашњег зупчаника, према слици 5.19.

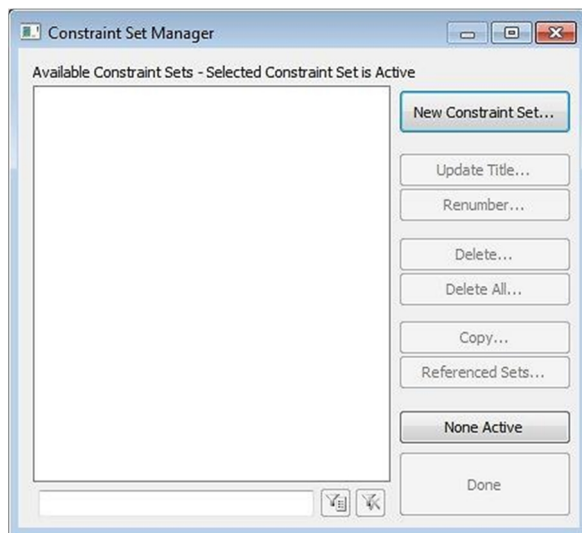


Слика 5.18. Приказ прозора за дефинисање почетног и крајњег чвора 1D коначног елемента

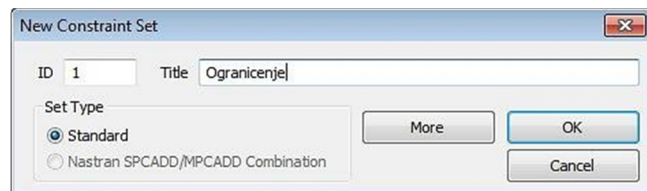


Слика 5.19. Приказ прозора за креирање централног чвора

За дефинисање ограничења потребно је креирати New Constraint Set, коришћењем опције Model $\Rightarrow$ Constraint $\Rightarrow$ Create/Manage Set, где је потребно дефинисати назив "Ogranicenje", према слици 5.20.



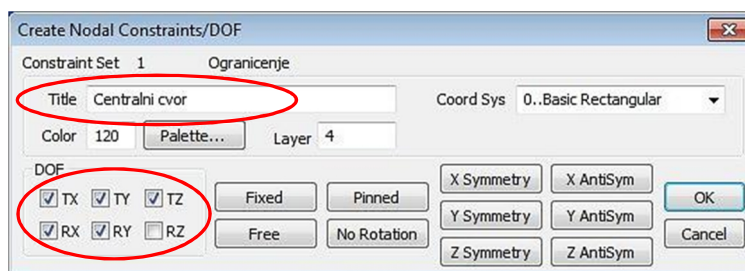
а) сет ограничења



б) назив сета

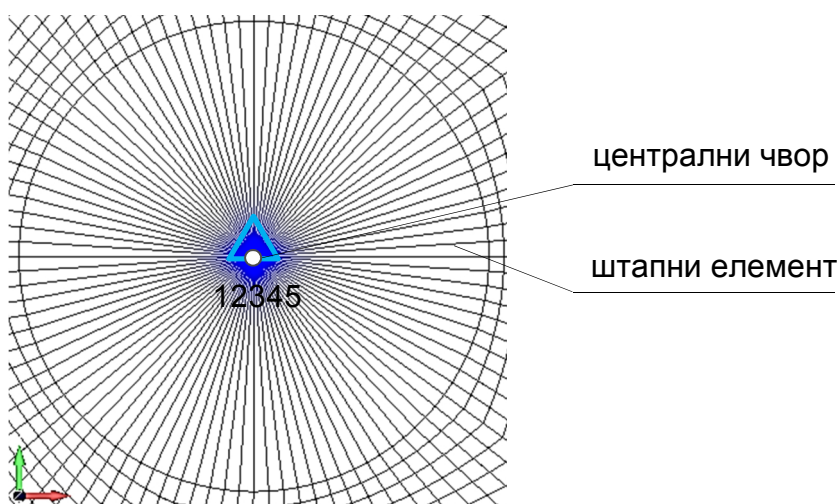
Слика 5.20. Приказ прозора за креирање сета ограничења

Одабиром опције Model $\Rightarrow$ Constraint $\Rightarrow$ Nodal активира се прозор за одабир централног чвора унутрашњег зупчаника. Потврдом селектованог чвора активира се прозор за дефинисање ограничења. У новоотвореном прозору потребно је дефинисати степене слободе поменутог чвора, који представљају забрану translације у свим правцима и ротацију око X и Y осе, према слици 5.21.



Слика 5.21. Приказ прозора за дефинисање ограничења центра унутрашњег зупчаника

На слици 5.22 дат је приказ модела са дефинисаним ограничењем центра унутрашњег зупчаника.



Слика 5.22. Приказ креираних штапних елемената и ограничење центра унутрашњег зупчаника

Ограничење кретања спољашњег зупчаника је представљено преко спољашње контурне линије и представља одузимање свих шест степени слободе кретања чворова који се налазе на тој линији. Дефинисање овог ограничења се спроводи на сличан начин као и претходно ограничење. Одабиром опције за селектовање контурне линије Method ⇒ on Curve, активира се прозор, као на слици 5.16, где је потребно дефинисати назив "Spoljasnji zurcanik" и чекирати све ротације и транслације.

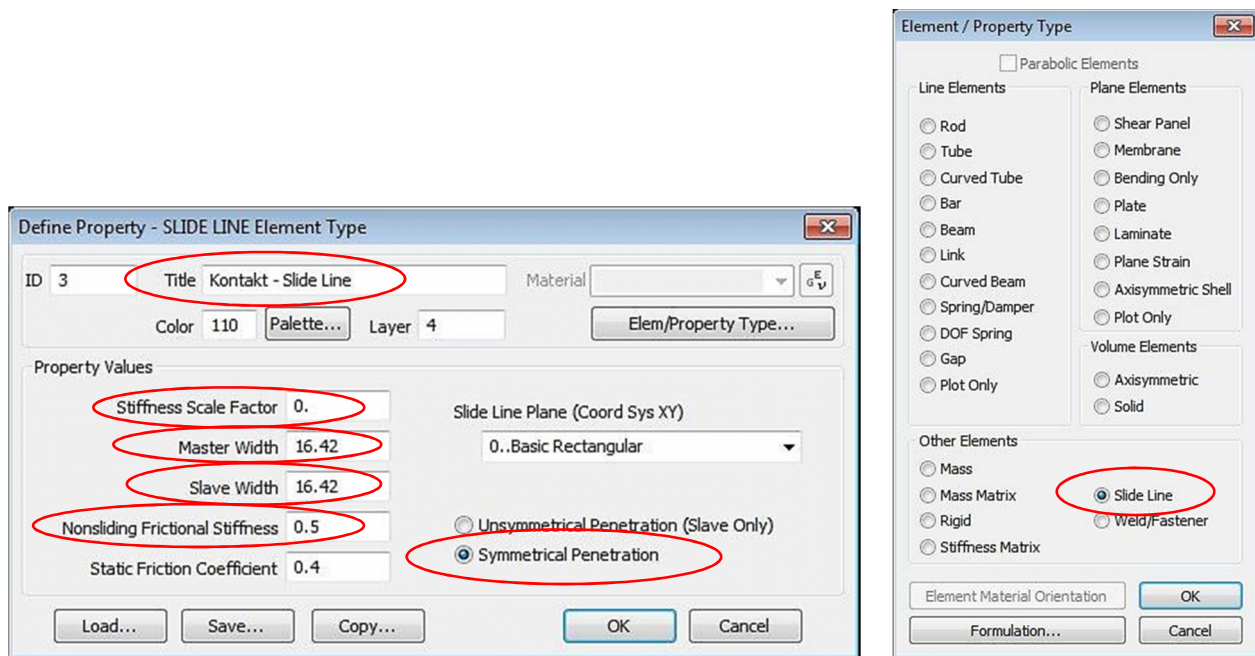
Овим поступком дефинисана су сва потребна ограничења, па је модел спреман за даљи поступак структурне анализе.

5.4.6. ДЕФИНИСАЊЕ КОНТАКТНИХ ОГРАНИЧЕЊА

У циљу дефинисања контактних ограничења унутрашњег и спољашњег зупчаника потребно је дефинисати ограничења на месту додира истих (контакт 1, 2 и 3). Како наведени додири представљају места преношења оптерећења (обртног момента) са унутрашњег на спољашњи зупчаник, ради структурне анализе није неопходно дефинисати контакт 4 и 5.

Како се ради о 2D моделу, контактено ограничење је дефинисано као линијски контакт, чији је поступак дат у наставку текста.

За дефинисање линијског контакта, потребно је пре свега, дефинисати одговарајуће параметре контакта. За дефинисање ових параметара, потребно је одабрати тип коначног елемента, помоћу опције *Model* $\Rightarrow$ *Property* (на сличан начин као и претходни избор типа и параметара 2D и 1D елемената).



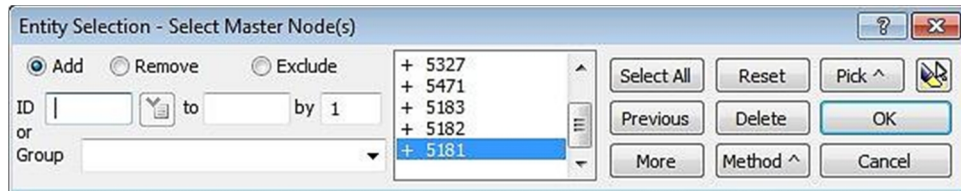
а) карактеристике коначног елемента

б) тип коначног елемента

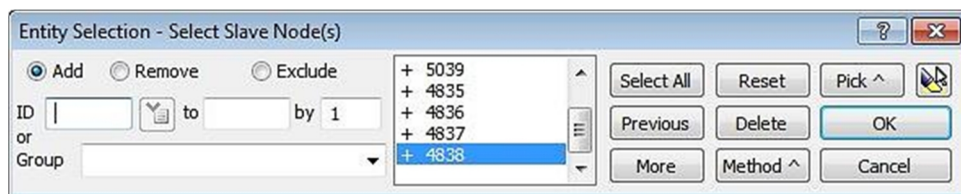
Слика 5.23. Приказ прозора за избор карактеристика и типа "Slide Line" коначног елемента

По дефинисању неопходних параметара, потребно је дефинисати чворове око тачке додира, који би при оптерећењу могли доћи у контакт. За дефинисање контакта, потребно је помоћу опције *Model* $\Rightarrow$ *Element*, за "Master Nodes" одабрати 11 чворова (укључујући и чвор у тачки додира) за унутрашњи зупчаник, према

слици 5.24а), и 11 чворова (такође укључујући и чвор у тачки додира) за спољашњи зупчаник, према слици 5.24б). На слици 5.25 дат је приказ контакта 2, као и чворови који су при томе одабрани и који би могли доћи у контакт. Сличним поступком се дефинишу и друге две контактне зоне.

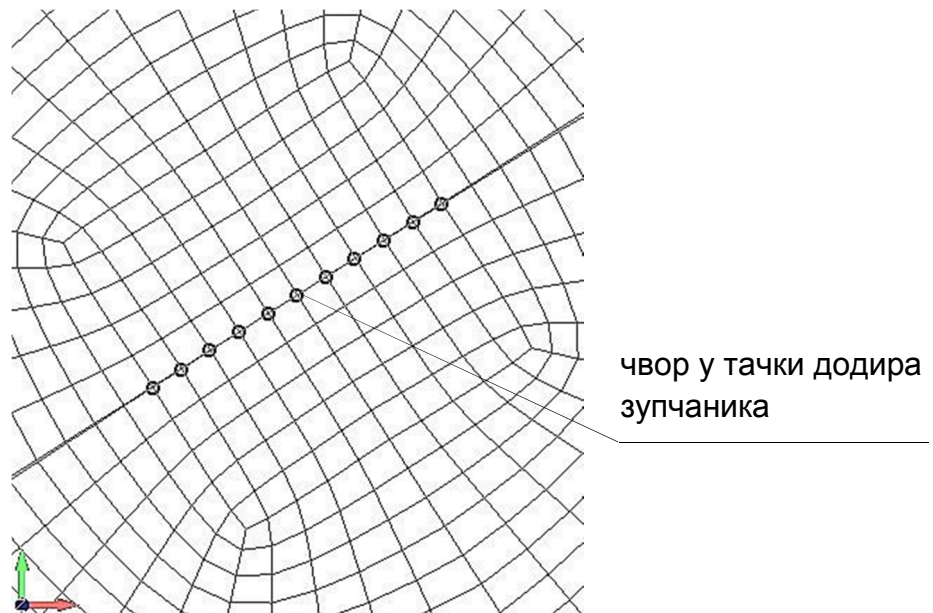


а) "Master Nodes"



б) "Slave Nodes"

Слика 5.24. Приказ прозора за одабир чворова "Slide Line" коначних елемената који могу доћи у контакт



Слика 5.25. Приказ одабраних чворова у контактної зони 2

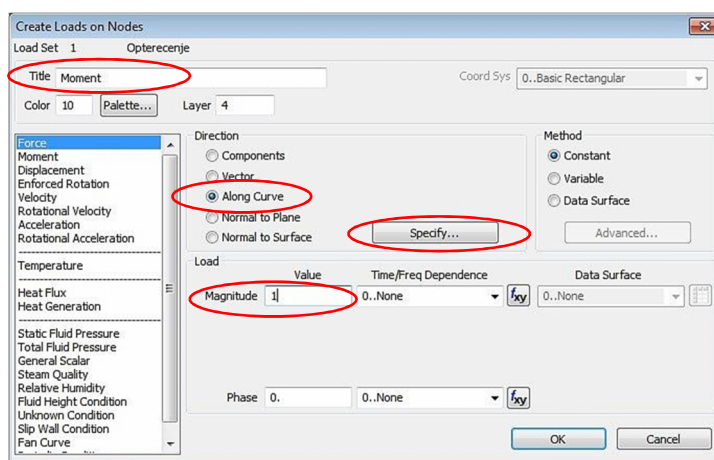
5.4.7. ДЕФИНИСАЊЕ ОПТЕРЕЋЕЊА

Оптерећење зуба унутрашњег и спољашњег зупчаника јавља се као последица преношења обртног момента са погонског вратила на унутрашњи зупчаник.

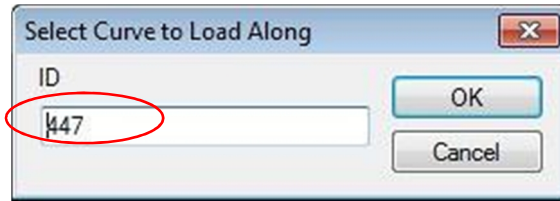
Како се ради о 2D моделу, обртни момент је задат у облику силе за сваки појединачни чвор на линији главчине. За задавање оптерећења потребно је креирати сет оптерећења (слично као и претходно креирани сет ограничења) помоћу опције *Model* ⇒ *Load* ⇒ *Create/Manage Set* и за назив унети "Opterecenje". Задавање сила на чворовима линије главчине се врши помоћу опције *Model* ⇒ *Load* ⇒ *Nodal*. Активирањем ове опције отвара се прозор, према слици 5.26, у коме је потребно унети назив оптерећења, правац дејства сила ("*Along Curve*"), дефинисати правец дејства и вредност силе (за вредност силе унета је вредност 1, док се при каснијем скалирању добила жељена вредност момента).

Активирањем опције "*Specify*" отвара се прозор, према слици 5.27, где је потребно селектовати линију по којој се врши расподела сила у поменутим чворовима, а чији су правци тангенте на селектовану линију. Поступак селектовања линија помоћу поменуте опције, а у циљу дефинисања правца дејства сила, понавља се десет пута, како би се дефинисали правци сила за сваки сегмент линије главчине.

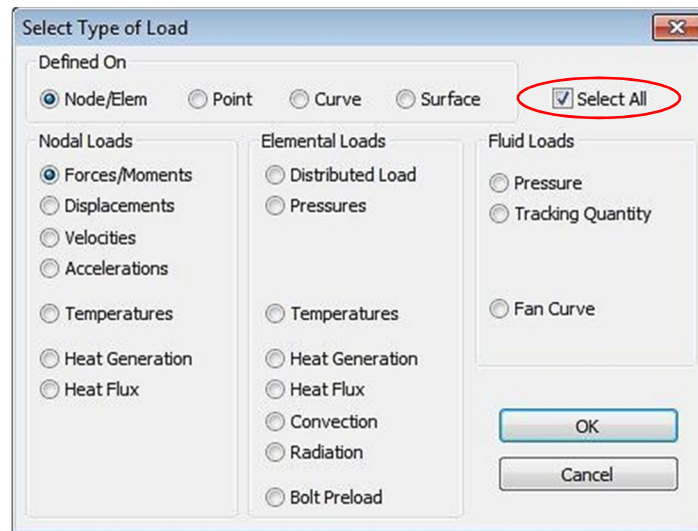
Након провере дефинисаног оптерећења (момента) опцијом *Tools* ⇒ *Check* ⇒ *Sum Forces*, врши се скалирање истог опцијом *Modify* ⇒ *Update Other* ⇒ *Scale Load*. Активирањем ове опције отвара се прозор за избор типа оптерећења, према слици 5.28, у коме је потребно чекирати опцију "*Select All*", и чијом се потврдом отвара прозор, према слици 5.29, у коме је за поље "*Multiply By*" потребно унети вредност фактора скалирања.



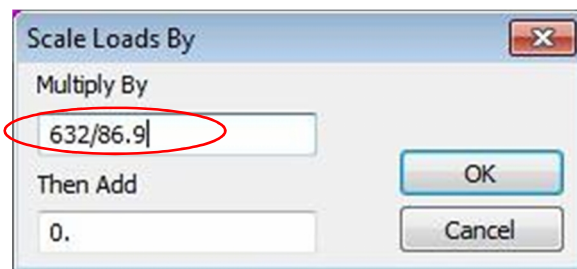
Слика 5.26. Приказ прозора за дефинисање оптерећења



Слика 5.27. Приказ прозора за дефинисање правца дејства оптерећења

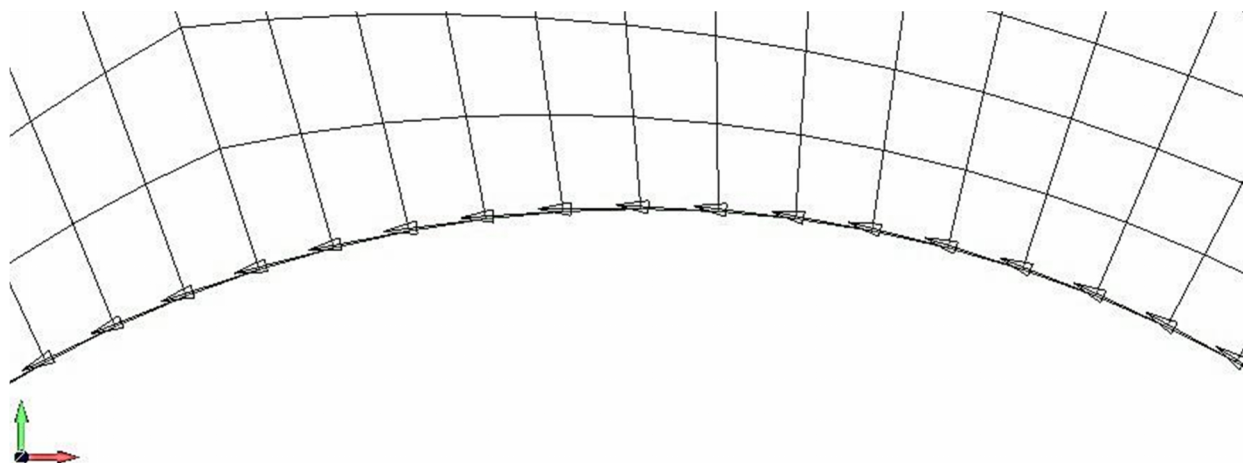


Слика 5.28. Приказ прозора за дефинисање типа оптерећења



Слика 5.29. Приказ прозора за дефинисање фактора скалирања

На слици 5.30 дат је визуелни приказ једог сегмента претходно дефинисаног оптерећења.



Слика 5.30. Приказ сегмента дефинисаног оптерећења

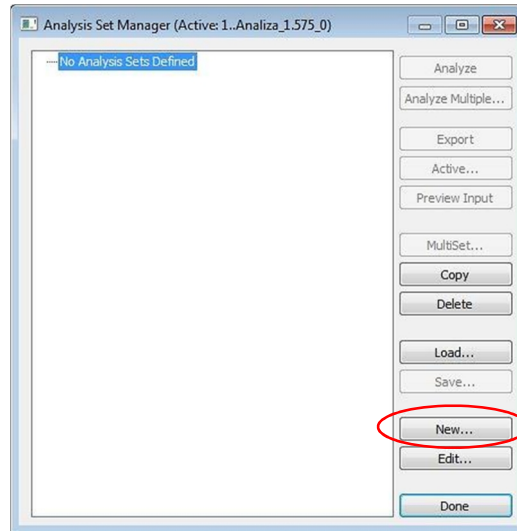
5.4.8. ДЕФИНИСАЊЕ ПАРАМЕТАРА И ПОКРЕТАЊЕ АНАЛИЗЕ ПРОРАЧУНА

Како су испуњени сви захтеви дефинисани у предпроцесној фази, следи фаза процесирања, односно фаза прорачуна и анализе напонског стања модела.

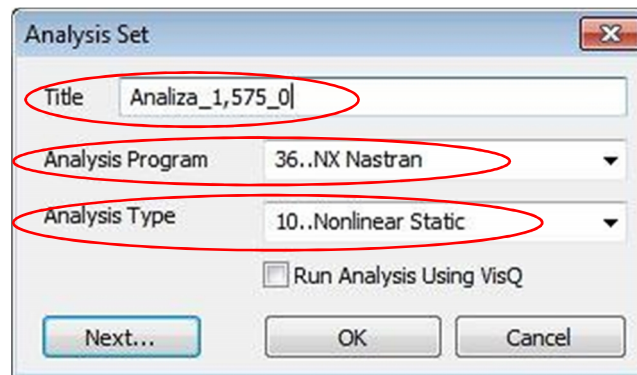
За прорачун и анализу напонског стања користи се софтвер за анализу - *NX Nastran*, који је генерисан у оквиру софтверског пакета *FEMAP v10.3.0*.

У следећим корацима приказан је поступак дефинисања и покретања анализе применом наведеног софтвера.

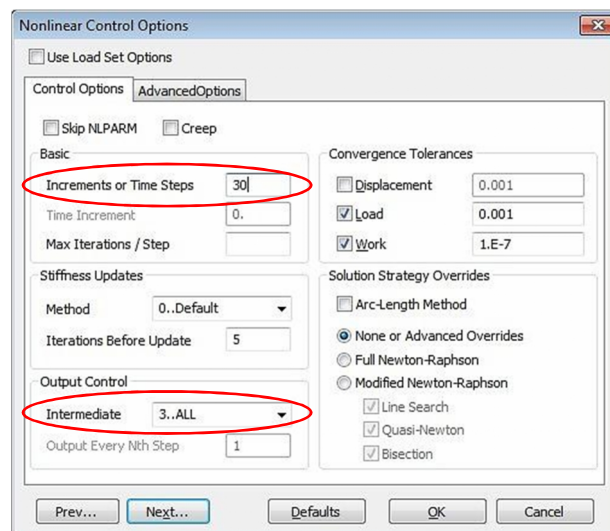
Активирањем опције *Model* $\Rightarrow$ *Analysis* отвара се прозор, према слици 5.31, у коме се даје детаљан приказ свих претходно дефинисаних параметара анализе. Активирањем опције *New*, отвара се прозор за одабир софтвера у коме се врши анализа, тип анализе и назив анализе, према слици 5.32. У новоотвореном прозору за назив анализе унети "Analiza_1,575_0", за софтвер одабрати *NX Nastran* и, с обзиром да се ради о контактної анализи, за тип анализе одабрати *Nonlinear Static*.



Слика 5.31. Приказ прозора за дефинисање сета анализе

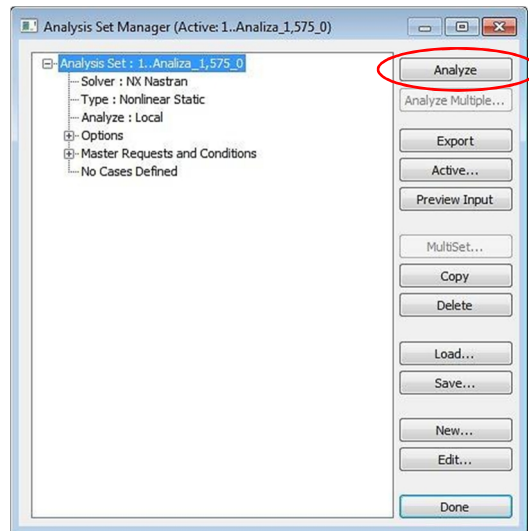


Слика 5.32. Приказ прозора за дефинисање основних параметара анализе



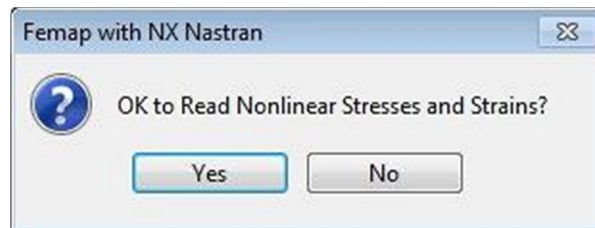
Слика 5.33. Приказ прозора за дефинисање параметара анализе

Како би се дефинисали други потребни параметри анализе, потребно је седам пута активирати опцију *Next*, при чему се отвара прозор, према слици 5.33, у коме је потребно одабрати временски корак и контролу излазних података анализе. Потврдом опције *OK* активира се прозор са дефинисаним параметрима анализе, према слици 5.34. Активирањем опције "*Analyze*" врши се покретање анализе.



Слика 5.34. Приказ дефинисаних параметара анализе

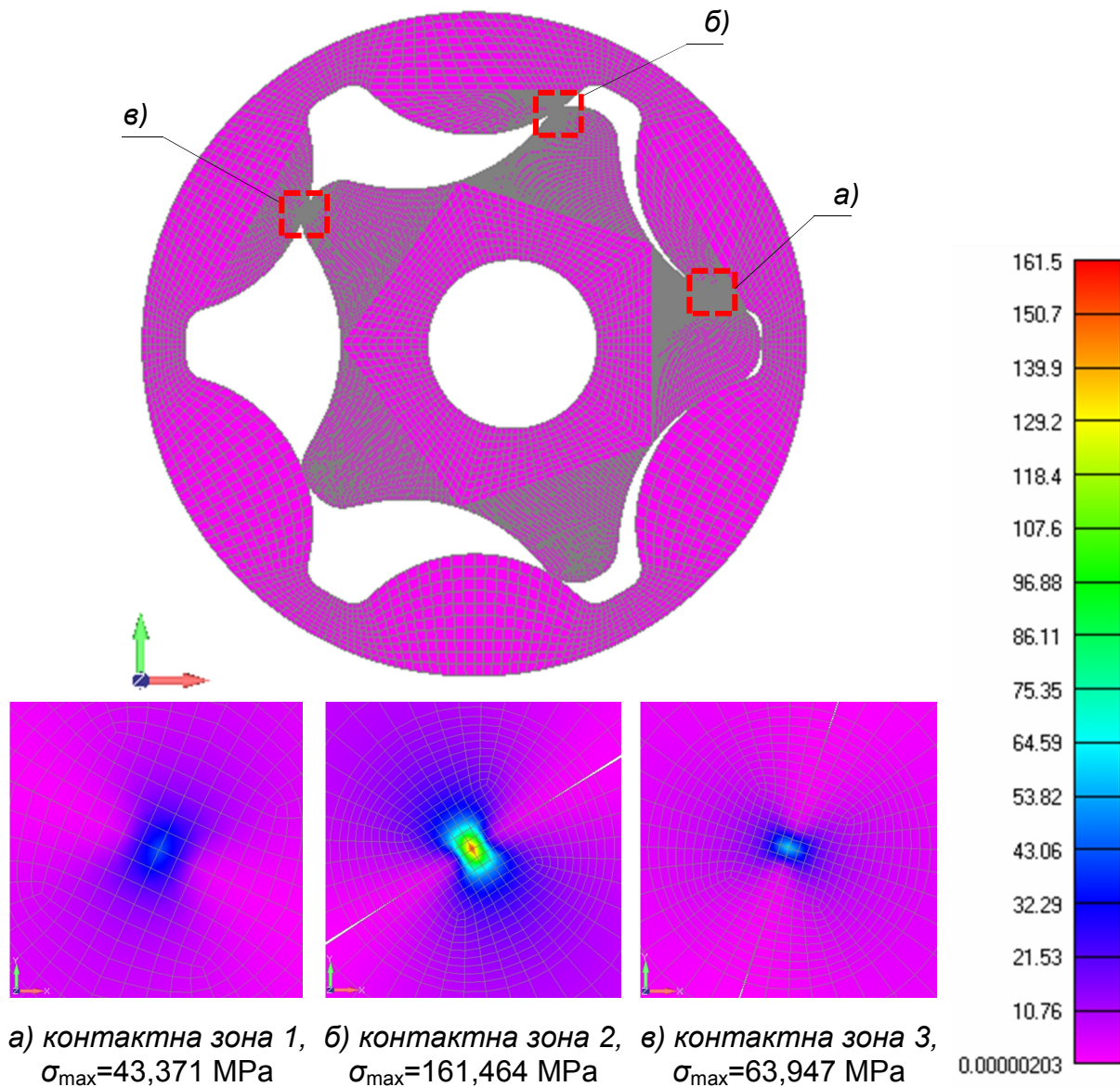
Анализирани модел дефинишу 12878 чворова и 12259 коначних елемената. Како се ради о 2D моделу, због знатно мањег броја чворова у односу на 3D модел са истом величином коначних елемената, анализа једног модела траје релативно кратко и износи 1 минут и 30 секунди. По завршетку анализе неопходно је у аутоматски отвореном прозору, према слици 5.35, потврдити учитавање добијених вредности напона и померања.



Слика 5.35. Приказ аутоматски отвореног прозора за учитавање вредности анализираних величина

Овим поступком завршен је процес анализе, па је даљи ток рада усмерен ка формирању дијаграма ради графичке интерпретације добијених резултата.

У циљу приказа расподеле напона на местима додира зупчаника, на следећој слици дат је визуелни приказ анализираног модела са вредностима резултујућег (VonMises-овог) напона.



Слика 36. Приказ расподеле и вредности максималних напона у контактним зонама за модел ГП-575 и $\varphi_a=0^\circ$

Бољи приказ резултата анализе контактних напона може се стећи на основу примене на конкретним примерима, датим у Прилогу III на крају рада.

6

6. АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА ПРОРАЧУНА

Имајући у виду спроведену процедуру нумеричког прорачуна и добијене вредности максималних напона на местима контакта зупчаника геротора оба типа, анализа ових резултата омогућава добијање јасније слике о напонском стању које влада у конструкцији.

Табела 6.1. Вредности максималних напона прорачунатих аналитичком (σ_n) и нумеричком (σ) методом за $\lambda=1,575$ [10]

φ_a [°]	σ_n 10^6 [Pa]	σ , VonMises Stress 10^6 [Pa]	i
0	37,865	43,371	1
	140,509	161,464	2
	66,723	63,947	3
15	48,184	34,194	1
	84,716	97,281	2
	32,18	32,801	3
25	26,685	23,391	1
	29,775	32,314	2
	7,281	3,327	3
45	102,618	89,934	1
	60,455	39,24	2
	13,214	14,961	6
60	140,509	161,464	1
	66,723	63,947	2
	37,865	43,371	6

Табела 6.2. Вредности максималних напона прорачунатих аналитичком (σ_n) и нумеричком (σ) методом за $\lambda=1,375$

φ_a [°]	σ_n 10^6 [Pa]	σ , VonMises Stress 10^6 [Pa]	i
0	52,872	45,87	1
	117,77	136,434	2
	59,302	47,118	3
15	78,978	40,076	1
	81,254	104,295	2
	33,044	10,026	3
25	43,22	4,164	1
	31,581	6,193	2
	8,168	10,588	3
45	104,129	110,52	1
	57,897	44,195	2
	17,482	20,277	6
60	117,77	136,434	1
	59,302	47,118	2
	52,872	45,87	6

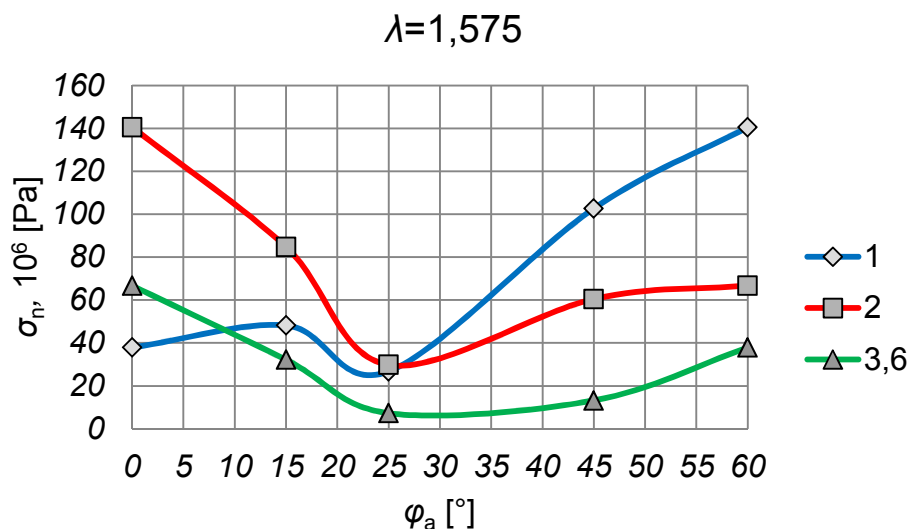
Вредности максималних напона који се јављају на местима контакта 1, 2 и 3 представљају највеће вредности напона које се јављају у конструкцији, па је од

суштинског значаја био њихов прорачун и анализа, а у циљу нумеричке потврде добијених аналитичких вредности напона на овим местима.

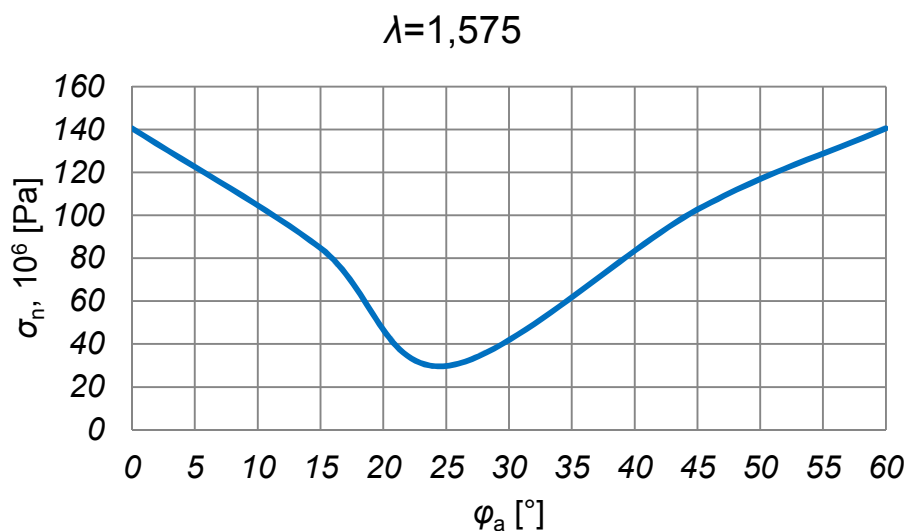
У табелама 6.1 и 6.2 дате су вредности максималних напона прорачунатих аналитичком и нумеричком методом. Приказане вредности напона одговарају различитим вредностима углова заокретања спољашњег зупчаника φ_a и зонама контакта, што има за последицу промену њихове расподеле и вредности. Како вредност напона у контактної зони 2 постепено опада (до угла заокретања $\varphi_a=25^\circ$), тако се и расподела ових напона у контактним зонама 2 и 3 мења. Са повећањем угла заокретања, долази и до промене зуба који су тренитно у спреси и преносе оптерећење, што има за последицу промену контактне зоне све до угла $\varphi_a=60^\circ$.

Графички приказ и анализа резултата прорачуна

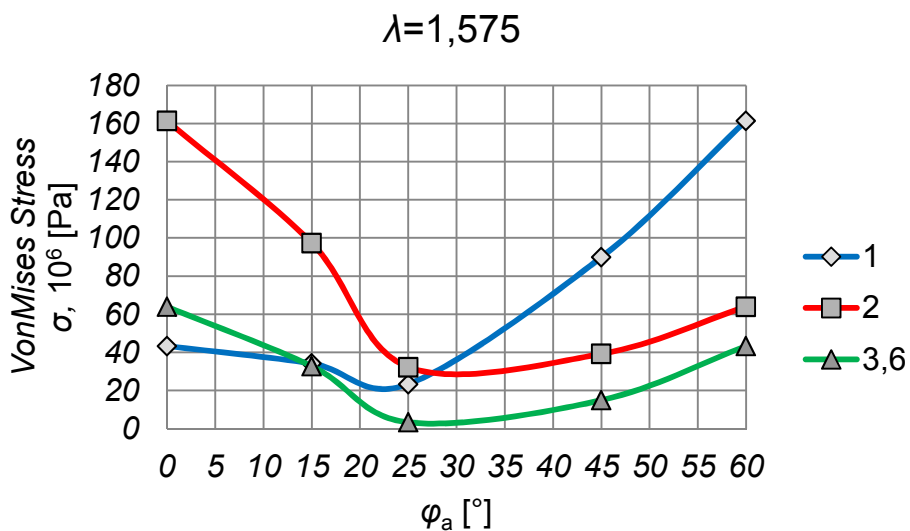
У циљу извођења нумеричког прорачуна, било је неопходно понављање поступка структурне анализе више пута, за различите вредности радног угла φ_a . Анализа је вршена за различите угаоне положаје спољашњег зупчаника, почев од 0° и закључно са 60° (0° , 15° , 25° , 45° и 60°), захваљујући симетричној расподели резултата у односу на положај који одговара једном радном циклусу пумпе. Као резултат нумеричког прорачуна максималних напона приказани су укупни (VonMises-ови) напони. У циљу бољег сагледавања, на сликама 6.1 - 6.4 и 6.6 - 6.9 дати су дијаграмски прикази расподеле и вредности максималних напона у појединим зонама контакта зупчаника за геротор са коефицијентом трохоиде $\lambda=1,575$ и $\lambda=1,375$.



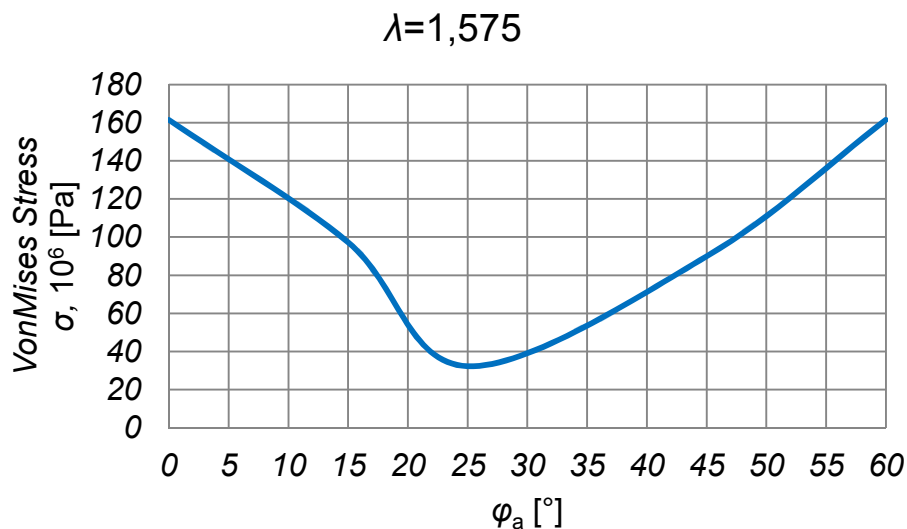
Слика 6.1. Резултат аналитичког прорачуна максималног напона за различите контактне зоне и вредност угла заокретања спољашњег зупчаника



Слика 6.2. Резултат аналитичког прорачуна максималног напона за различите вредности угла заокретања спољашњег зупчаника

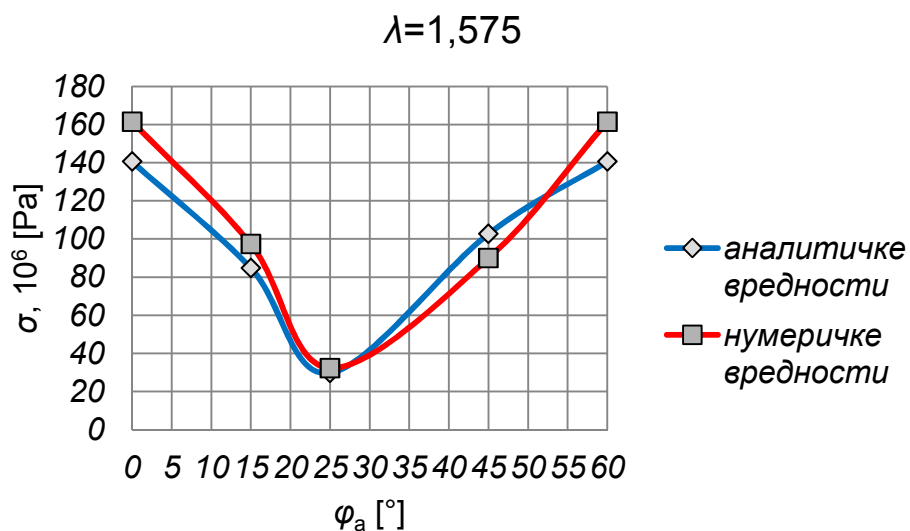


Слика 6.3. Резултат нумеричког прорачуна максималног напона за различите контактне зоне и вредност угла заокретања спољашњег зупчаника

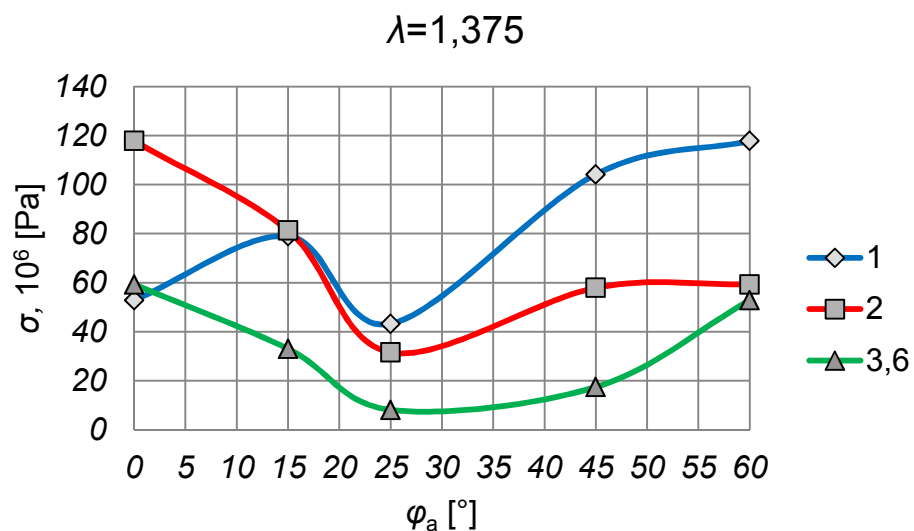


Слика 6.4. Резултат нумеричког прорачуна максималног напона за различите вредности угла заокретања спољашњег зупчаника

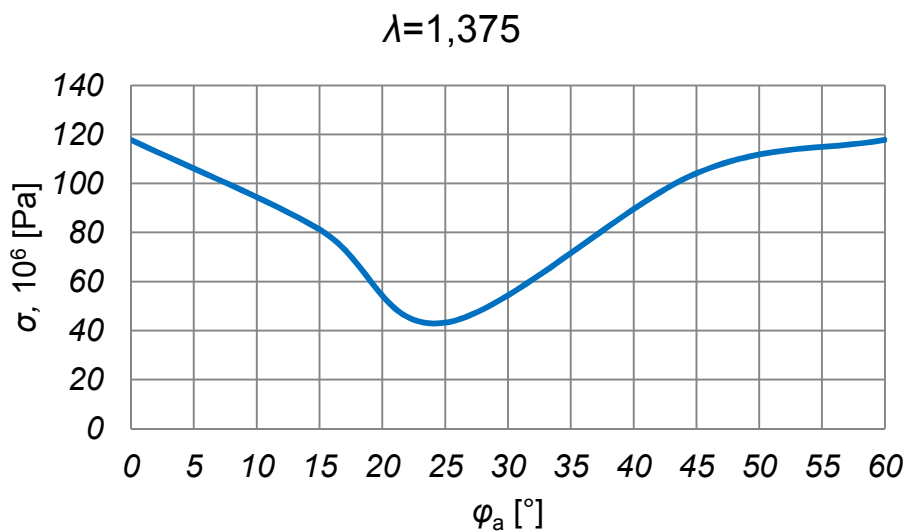
Упоредни приказ резултата добијених аналитичким и нумеричким прорачуном за геротор са коефицијентом трохоиде $\lambda=1,575$, дат је на слици 6.5.



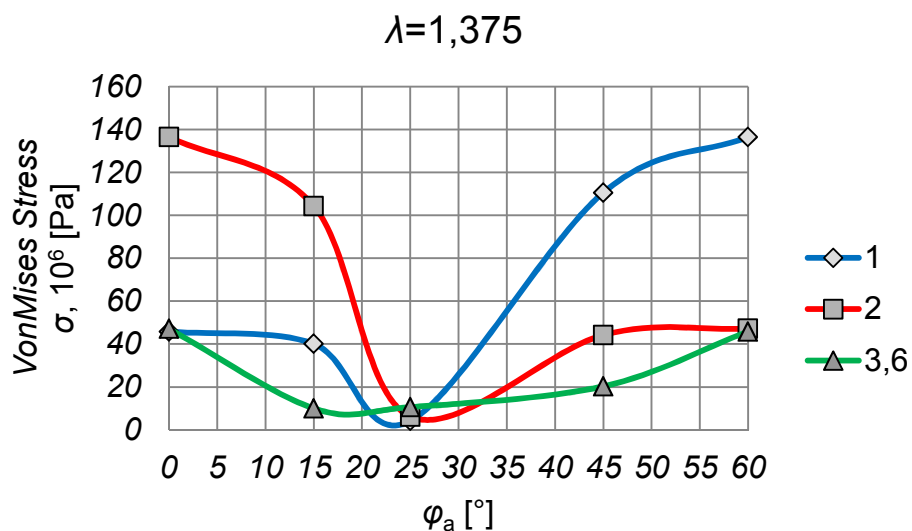
Слика 6.5. Резултат аналитичког и нумеричког прорачуна максималног напона за различите вредности угла заокретања спољашњег зупчаника



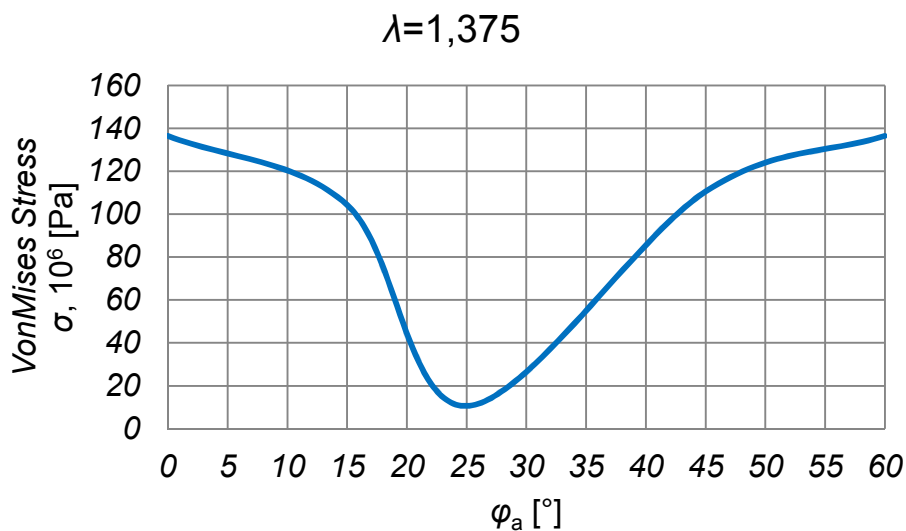
Слика 6.6. Резултат аналитичког прорачуна максималног напона за различите контактне зоне и вредност угла заокретања спољашњег зупчаника



Слика 6.7. Резултат аналитичког прорачуна максималног напона за различите вредности угла заокретања спољашњег зупчаника

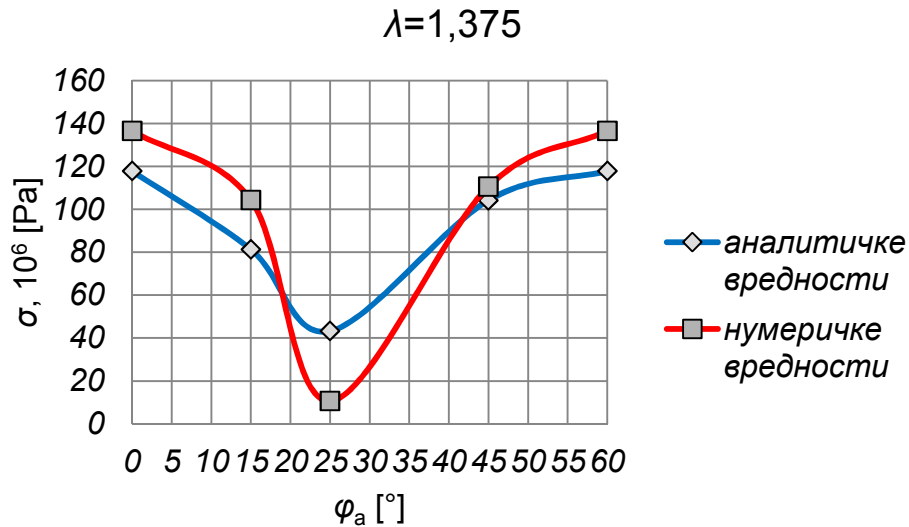


Слика 6.8. Резултат нумеричког прорачуна максималног напона за различите контактне зоне и вредност угла заокретања спољашњег зупчаника



Слика 6.9. Резултат нумеричког прорачуна максималног напона за различите вредности угла заокретања спољашњег зупчаника

Упоредни приказ резултата добијених аналитичким и нумеричким прорачуном за геротор са коефицијентом трохоиде $\lambda=1,375$, дат је на слици 6.10.



Слика 6.10. Резултат аналитичког и нумеричког прорачуна максималног напона за различите вредности угла заокретања спољашњег зупчаника

Приказане вредности напона добијених нумеричком и аналитичком методом за оба типа геротора су сличног тока промене, што указује на добро усвојен модел елемената геротора и ток нумеричког прорачуна. У циљу сагледавања одступања ових напона, применом и нумеричке и аналитичке методе, вршена је поредбена анализа резултата базирана на вредностима релативног одступања, изражених у %, израчунатих према следећем обрасцу:

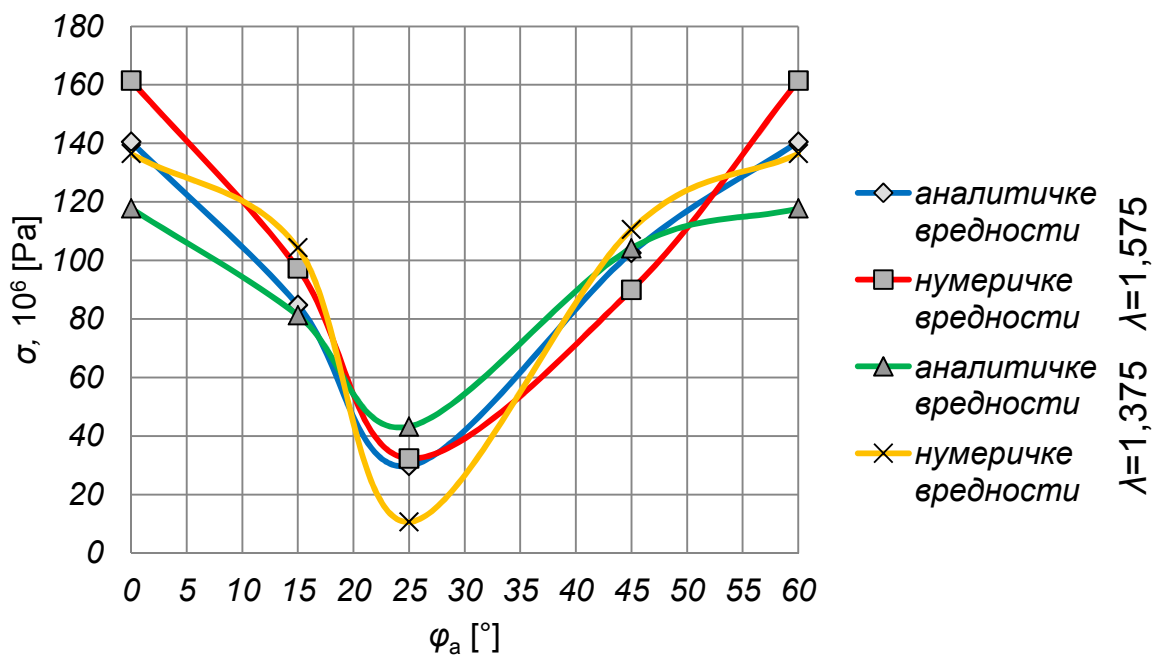
$$\Delta\sigma = \frac{|\sigma - \sigma^*|}{\sigma^*} 100 \text{ [\%]} \quad (2)$$

где су:

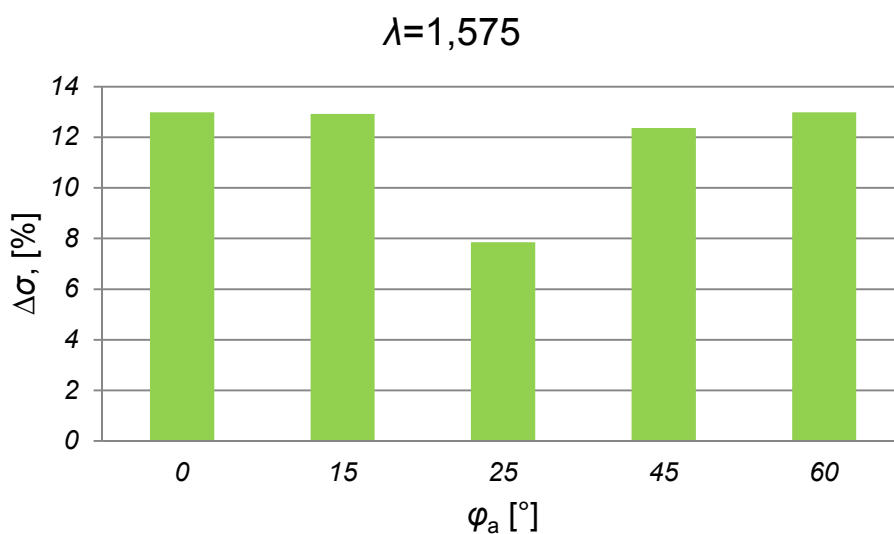
- $\Delta\sigma$ релативно одступање анализиране величине,
- σ већа вредност напона (добијена аналитичком или нумеричком методом) и
- σ^* мања вредност напона.

На сликама 6.12 и 6.13 дати су упоредни прикази одступања максималних напона добијених нумеричком методом у односу на аналитички израчунате вредности.

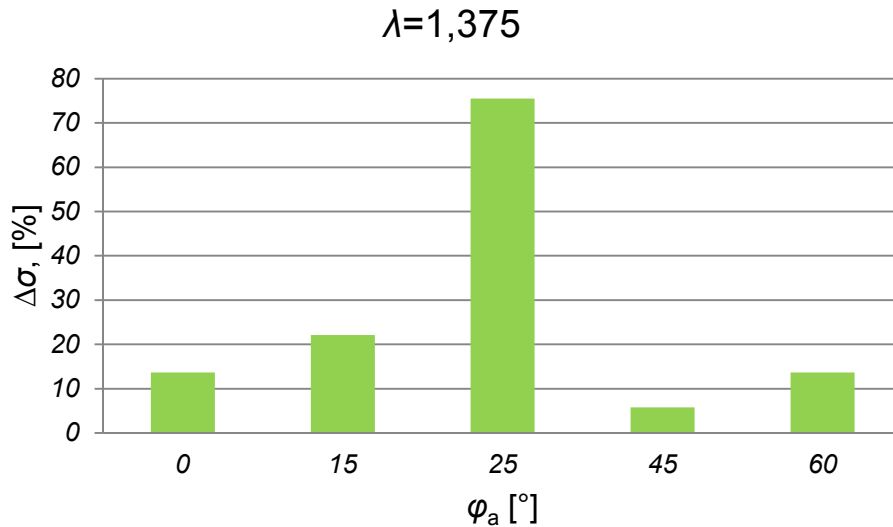
Упоредне вредности максималних напона, за оба типа геротора, добијене аналитичким и нумеричким прорачуном, приказане су на слици 6.11.



Слика 6.11. Резултат аналитичког и нумеричког прорачуна максималног напона у зависности од угла заокретања спољашњег зупчаника



Слика 6.12. Процентуална одступања максималног напона за различите вредности угла заокретања спољашњег зупчаника и $\lambda=1,575$



Слика 6.13. Процентуална одступања максималног напона за различите вредности угла заокретања спољашњег зупчаника и $\lambda=1,375$

Релативна одступања максималних напона, применом аналитичког и нумеричког прорачуна, модела са истом величином коначних елемената за оба типа геротора, које одговарају различитим вредностима угла заокретања спољашњег зупчаника, јасно указују на то да је нумерички прорачун поуздан за неке вредности углова заокретања (0° , 15° , 45° и 60°), док као последица различитог облика површине око тачке додира настаје знатно одступање вредности ових напона за вредност угла заокретања $\varphi_a=25^\circ$. Како вредност нумерички прорачунатог максималног напона одступа само за претходно наведени угао, овим приказом може се закључити да израчунавање напона нумеричком методом незнатно одступа од аналитички прорачунате вредности, тј. да су напони у границама дозвољених. Будући да су тако мала одступања, ова метода даје поуздане резултате који потврђују ниже вредности контактних напона прорачунатих аналитичком методом, а који одговарају геротору типа ГП-375 и може се поуздано применити за израчунавање напона када су у питању сложенији машински елементи.

7. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

На основу спроведене анализе резултата могу се извести следећи општи закључци:

- Дијаграми напона, добијени путем аналитичког и нумеричког прорачуна, приближно су истог тока промене, што значи да су за нумеричку анализу усвојени добри модели, па се самим тим исти могу искористити за даља проучавања и анализе у оквиру ове проблематике, а у циљу смањења укупних напона.
- Вредности максималних напона добијене путем нумеричког прорачуна веће су од вредности истих напона добијених аналитичким прорачуном.
- Максималне вредности напона јављају се у положају који одговара углу $\varphi_a=0^\circ$ и $\varphi_a=60^\circ$.

На основу изведених закључака може се константовати да и аналитичка и нумеричка метода дају задовољавајуће резултате потребне за анализу осетљивости напона с обзиром на промену улазних параметара. Посебна пажња треба се посветити проучавању проблематике кретања и положају унутрашњег и спољашњег зупчаника у току експлоатације, који знатно утиче на промену оптерећења а самим тим и контактних напона, услед којих може да дође до: хабања елемената, њиховог оштећења, смањења радног века, поузданости, ...

У раду је показано да развијени савремени приступ решавању проблема носивости елемената геротора даје добре резултате и велике могућности за истраживање у области повећања носивости ових пумпи. Једна од метода која при израчунавању напона узима у обзир и евентуалне промене облика јесте метода коначних елемената. Из тог разлога предмет истраживања овог рада био је формирање нумеричког модела за анализу промене напона који настају за

различите облике унутрашњег зупчаника геротора, а при статичким оптерећењима.

Утицај промене максималног напона који се јавља на елементима геротора знатно утиче на промену истог у појединим зонама. Спроведене анализе омогућавају прецизније конструисање и обликовање елемената разматраних геротора и представљају превентиву од евентуалног оштећења и хабања елемената геротора у експлоатацији под дејством максималних радних притисака и критичних углова заокретања, $\varphi_a=0^\circ$ и $\varphi_a=60^\circ$.

Такође, овом анализом у примењеном софтверском пакету, уз детаљно објашњене кораке генерисања и анализе модела, пружа се могућност савладавања истог за неке друге проблеме који се баве методом коначних елемената.

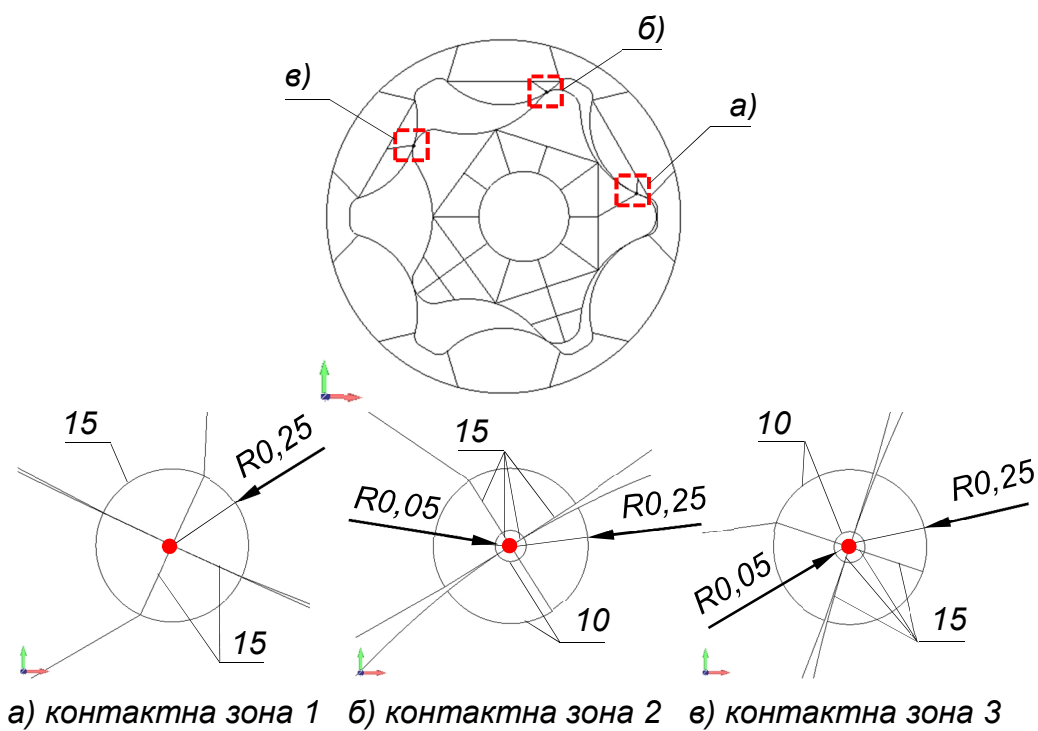
Даљи ток анализе овог рада би могао бити у смеру измена различитих параметара анализе, генерисања коначних елемената другог типа, утицај њихове величине на резултате прорачуна итд., али и анализе и утицај хабања елемената, динамичке анализе и анализе замора материјала.

ЛИТЕРАТУРА

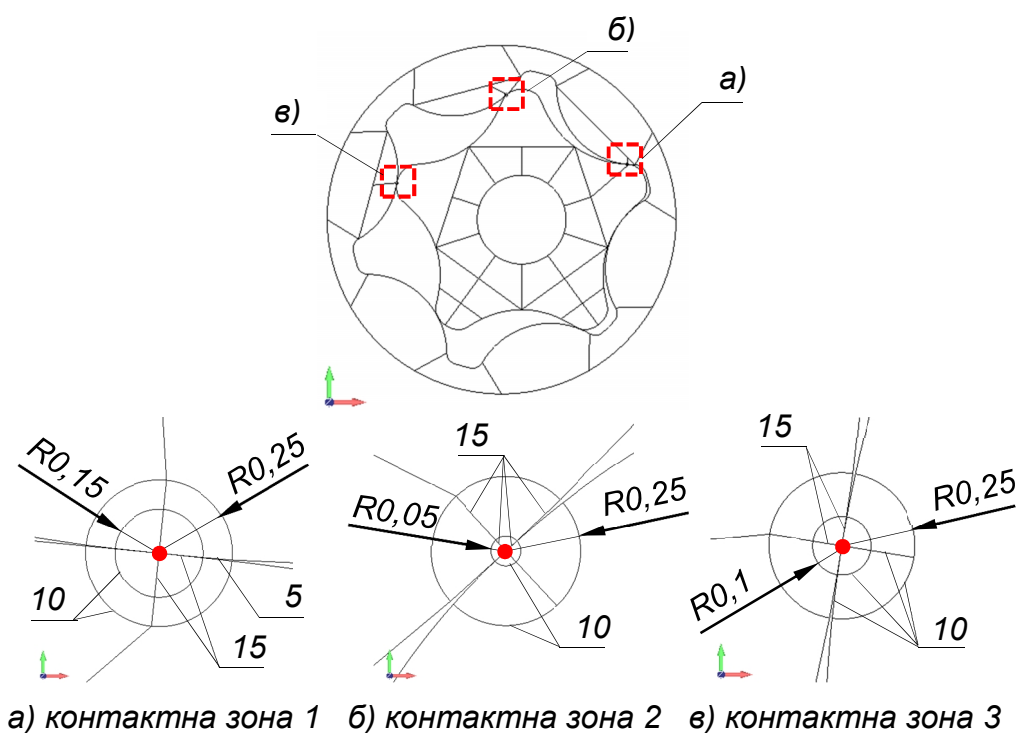
- [1] **Акатов Е. И., Бологов В. С., Горбатый В. К., Ячевский Г. Л.:** Судовые роторные двигатели, Судостроение, Ленинград, 1967.
- [2] Prospekti firmi: PPT Hidraulika, Danfoss, Nichols Portland Company, Hydraulic Products Incorporated, CATIA Version 5 Release 7 Documentation
- [3] **Colbourne J. R.:** The Geometry of Trochoid Envelopes and Their Application in Rotary Pumps, Mechanism and Machine Theory, 1974, Vol.9, pp. 421-435
- [4] **Colbourne J. R.:** Reduction of the Contact Stress in Internal Gear Pumps, Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, November 1976, 1296-1300
- [5] **Shung J. B., Pennock G. R.:** Geometry for Trochoidal-Type Machines With Conjugate Envelopes, Mechanism and Machine Theory, 1994, Vol.29, No.1, pp. 25-42
- [6] **Shung J. B., Pennock G. R.:** The Direct Contact Problem in a Trochoidal-Type Machines, Mechanism and Machine Theory, 1994, Vol.29, No.5, pp. 673-689
- [7] **Fabiani M., Mancò S., Nervegna N., Rundo M., Armenio G., Pachetti C., Trichilo R.:** Modelling and Simulation of Gerotor Gearing in Lubricating Oil Pumps, SAE paper, 99P-464
- [8] **Gamez-Montero P. J.:** Caracterizacion Fluidodinamica de una Bomba Oleohidraulica de Engranajes internos generados por Perfiles Trocoidales, Tesis Doctoral, Universitat Politecnica de Catalunya, Terrassa 2004
- [9] **Gamez-Montero P. J., Codina Macià E.:** Fluid Dynamic Behaviour of an Internal Rotary Pump Generated by Trochoidal Profiles, Proc. of 1st FPNI-PhD Symposium, Hamburg, 2000, pp. 33-47
- [10] **Ивановић Л.:** Идентификација оптималног облика трохоидног профила зупца елемената ротационих пумпи, Докторска дисертација, Универзитет у Крагујевцу, Машински факултет, крагујевац, 2006, UDK: 621.833.6:621.664
- [11] **Ivanović L., Josifović D., Ilić A. and Stojanović B.:** Analytical Model of the Pressure Variation in The Gerotor Pump Chambers, Technics Technologies Education Management/TTEM, 2013, Vol.8, No.1, pp. 323-331
- [12] **Ivanović L., Josifović D. and Ilić A.:** Modelling of Trochoidal Gearing at the Gerotor Pump, Mechanisms and Machine Science, 2013, Vol.13, pp. 553-562
- [13] **Ivanović L., Devedžić G., Ćuković S. and Mirić N.:** Modelling of the Meshing of Trochoidal Profiles With Clearances, Journal of Mechanics Design, April 2012, Vol.134, No.4, pp. 041003-1/041003-9

- [14] **Ivanović L., Blagojević M., Devedžić G. and Assoul Y.:** Analytical and Numerical Analysis of Load Gerotor Pumps, Scientific Technical Review, 2010, Vol.60, No.1, pp. 33-38
- [15] **Kwon S., Kim M. and Shin J.:** Analytical Wear Model of a Gerotor Pump Without Hydrodynamic Effect, Journal of advanced Mechanical Design, Systems and Manufacturing, 2008, Vol.2, No.2, pp. 230-237
- [16] **Девеџић Г.:** CAD/CAM технологије, Машински факултет у Крагујевцу, Центар за интегрисан развој производа и процеса и интелигентне системе (ЦИРПИС), Крагујевац, 2009., ISBN 978-86-86663-40-5
- [17] **Ivanovic L., Josifović D., Rakić B., Stojanović B. and Ilić A.:** Shape Variations Influence on Load Capacity of Cardan Joint Cross Shaft, The 7th International Symposium KOD 2012, Machine and Industrial Design in Mechanical Engineering, Balatonfüred, Hungary, 2012, 24-26 May, pp. 205-210, ISBN 978-86-7892-399-9
- [18] Autodesk Inventor Professional 2014, Content Center.
site: <http://students.autodesk.com>, downloaded software – 1 July, 2013.
- [19] **Николић В.:** Машински елементи; Теорија, Прорачун, Примери; Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2004., ISBN 86-80581-62-3

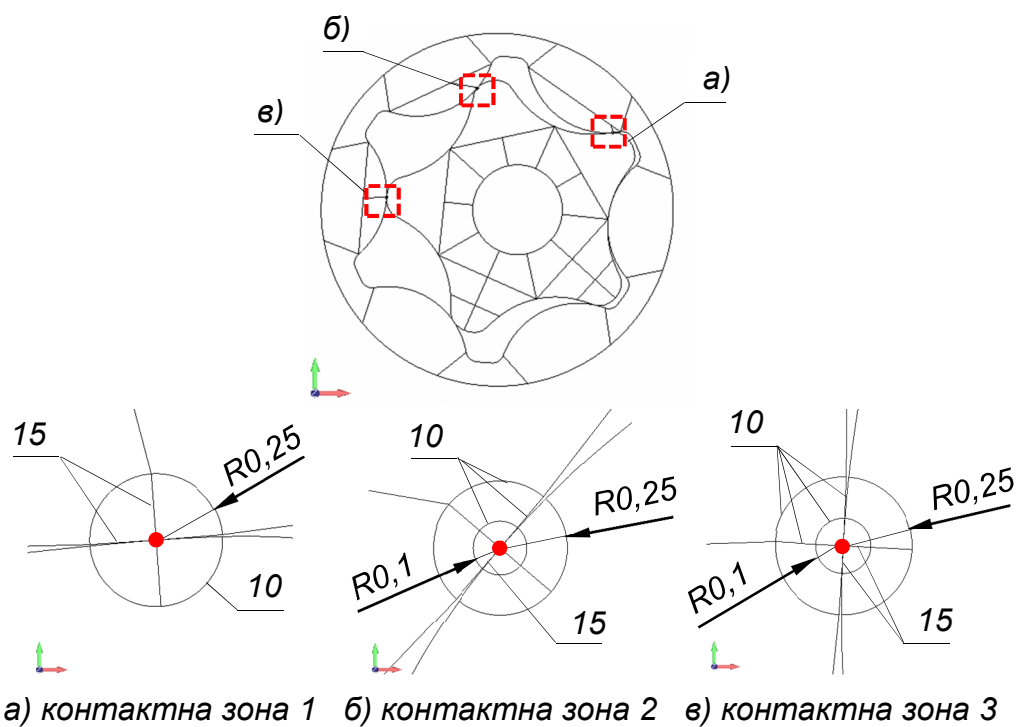
**ПРИЛОГ I. ПРИКАЗ ГЕОМЕТРИЈЕ И БРОЈА ЧВОРОВА У
КОНТАКТНИМ ЗОНАМА ЗУПЧАНИКА ОПИСАНЕ У
ПОГЛАВЉУ 5.4.3.**



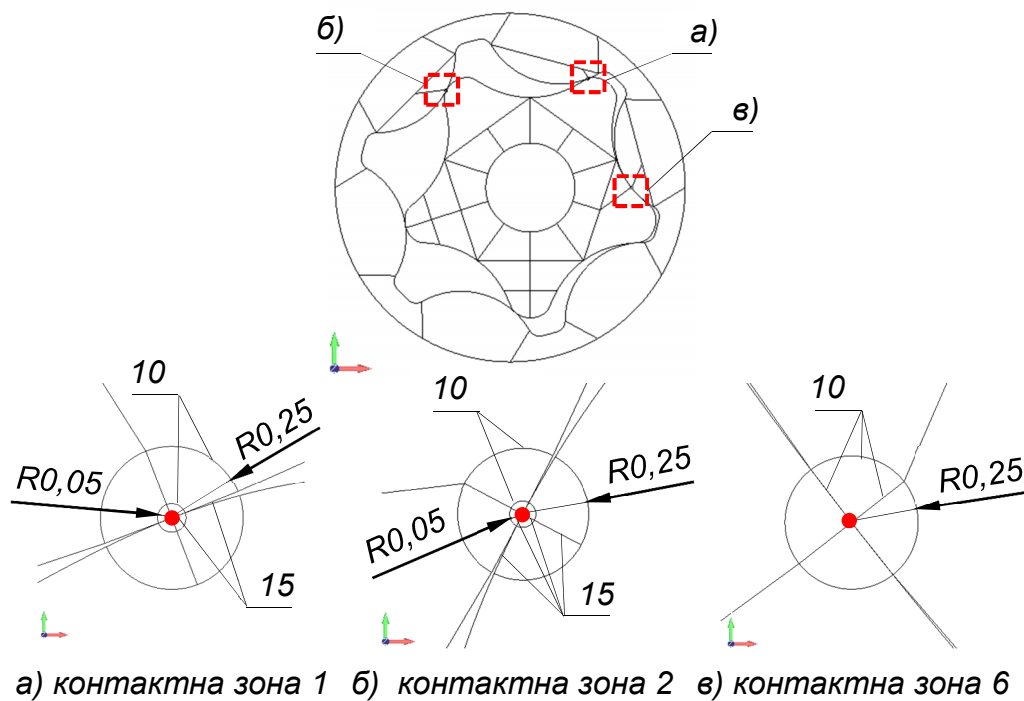
Слика 1. Приказ геометрије и броја чворова у контактним зонама за модел ГП-575 и $\varphi_a = 0^\circ$



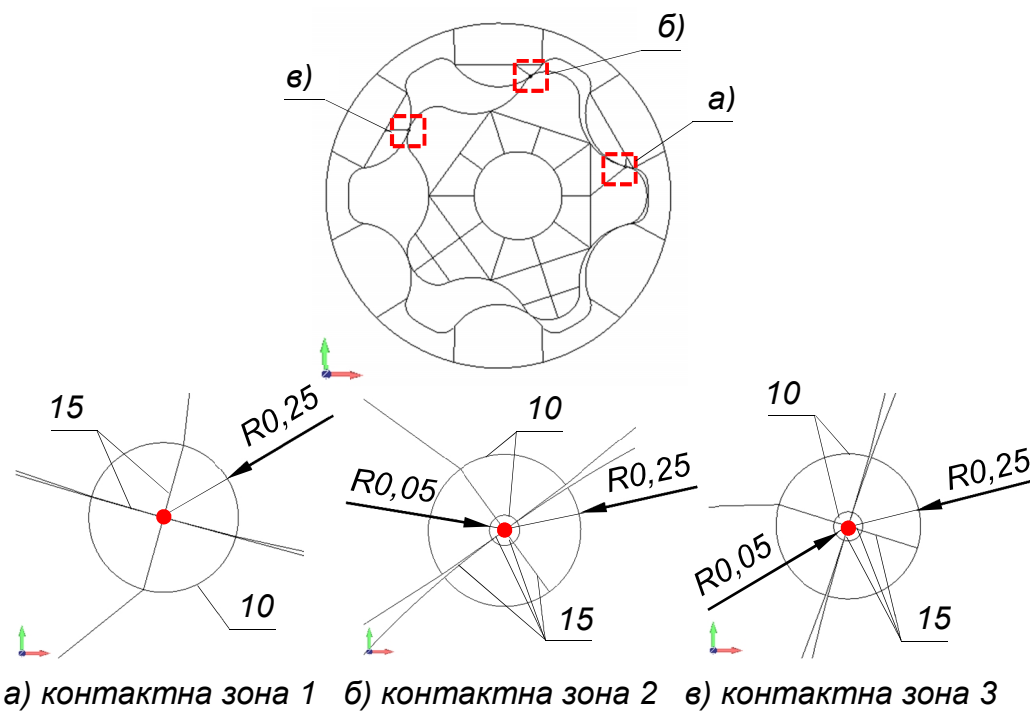
Слика 2. Приказ геометрије и броја чворова у контактним зонама за модел ГП-575 и $\varphi_a = 15^\circ$



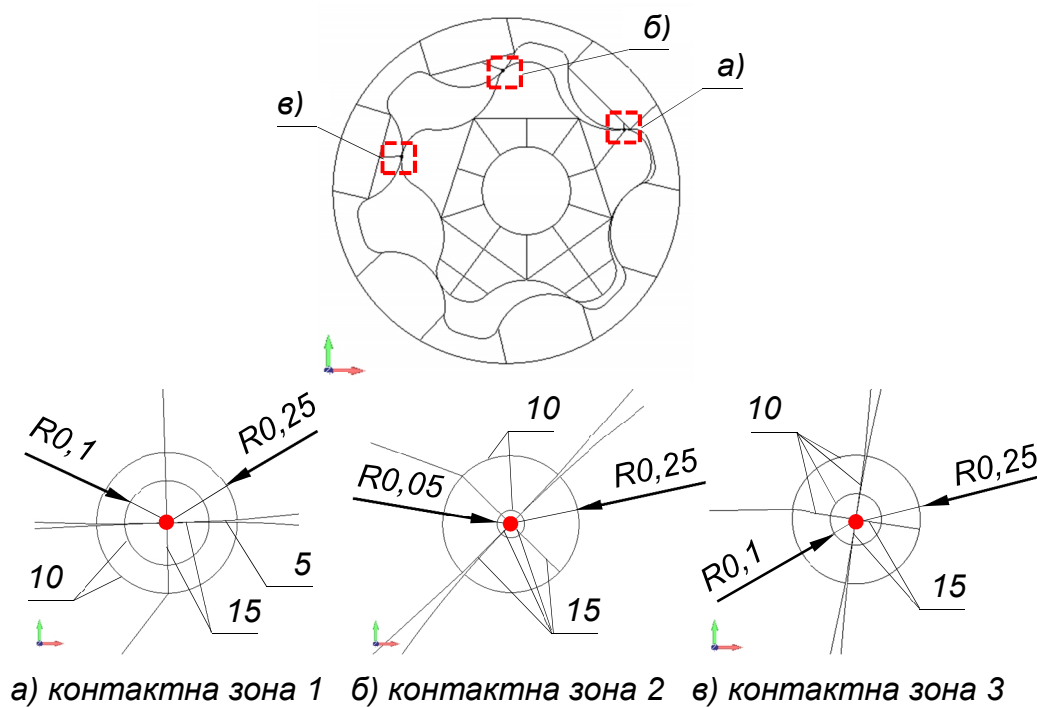
Слика 3. Приказ геометрије и броја чворова у контактним зонама за модел ГП-575 и $\varphi_a = 25^\circ$



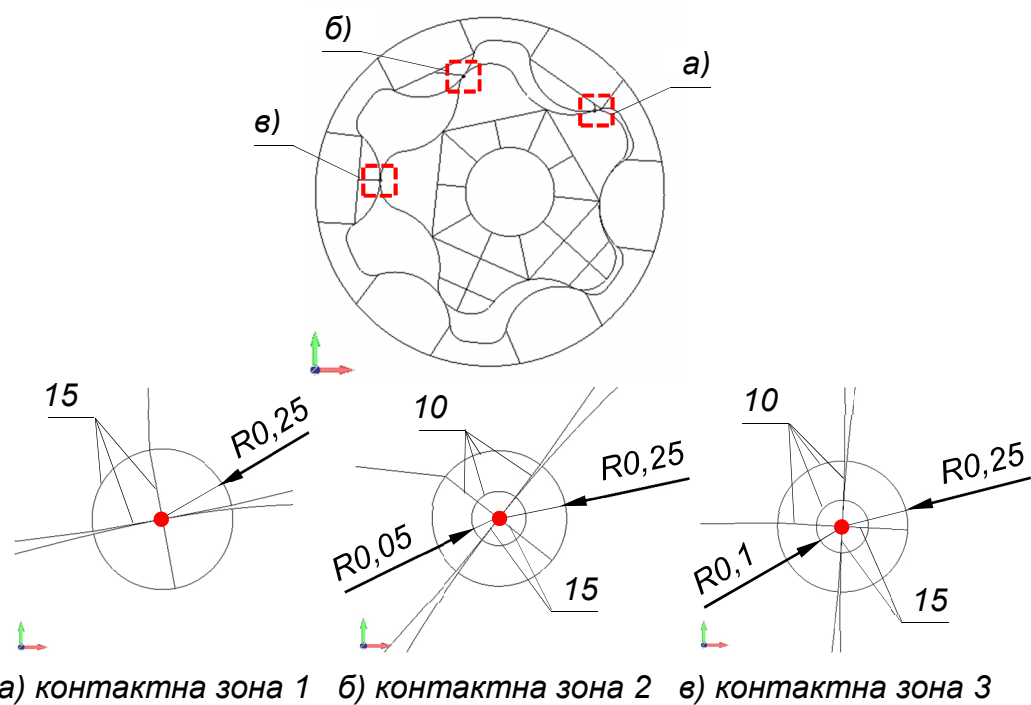
Слика 4. Приказ геометрије и броја чворова у контактним зонама за модел ГП-575 и $\varphi_a = 45^\circ$



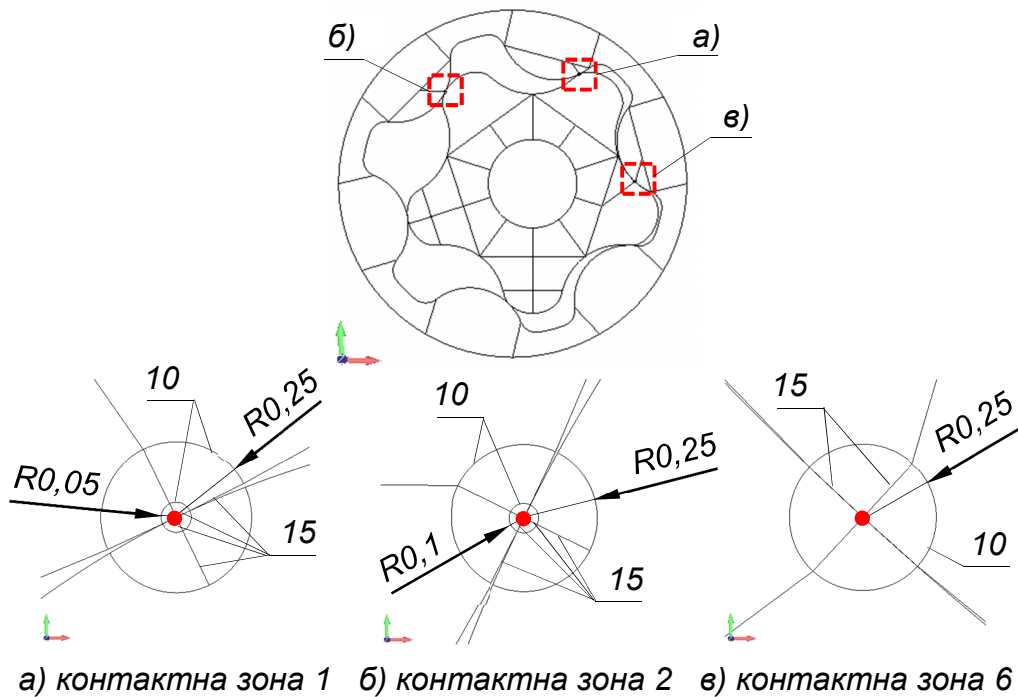
Слика 5. Приказ геометрије и броја чворова у контактним зонама за модел ГП-375 и $\varphi_a = 0^\circ$



Слика 6. Приказ геометрије и броја чворова у контактним зонама за модел ГП-375 и $\varphi_a = 15^\circ$

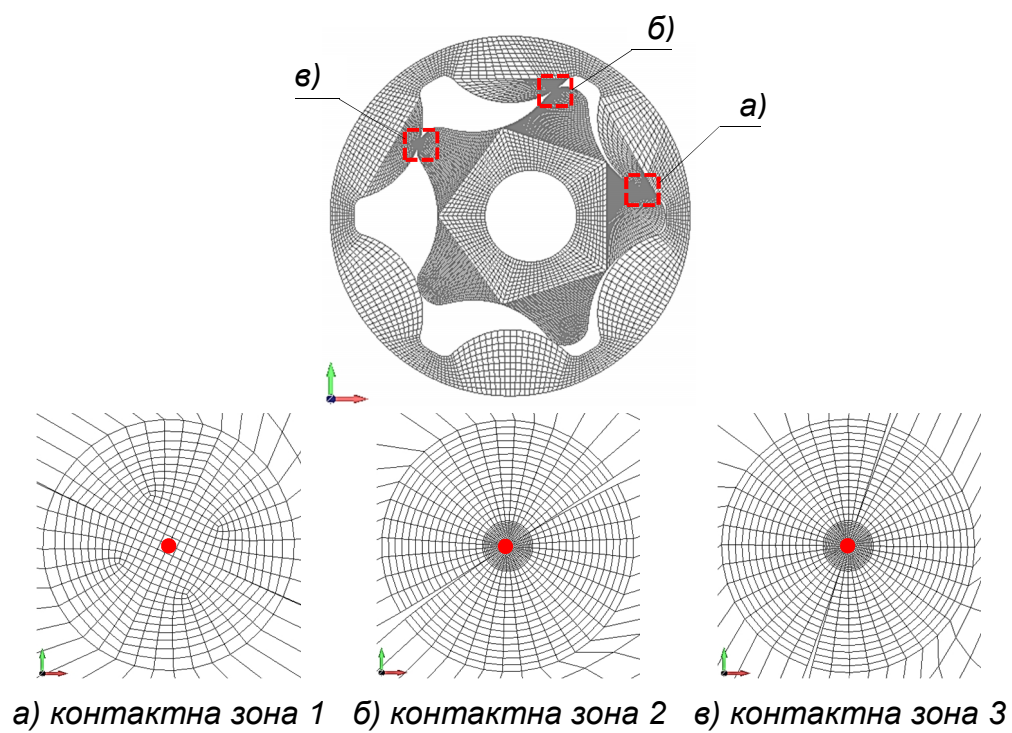


Слика 7. Приказ геометрије и броја чворова у контактним зонама за модел ГП-375 и $\varphi_a = 25^\circ$

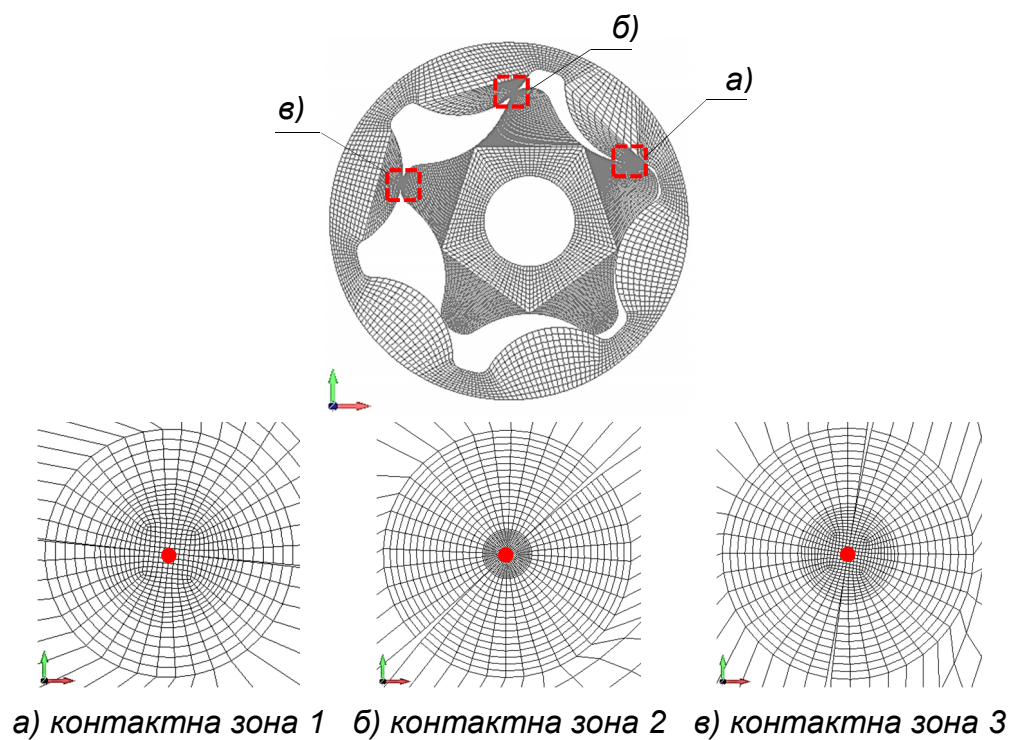


Слика 8. Приказ геометрије и броја чворова у контактним зонама за модел ГП-375 и $\varphi_a = 45^\circ$

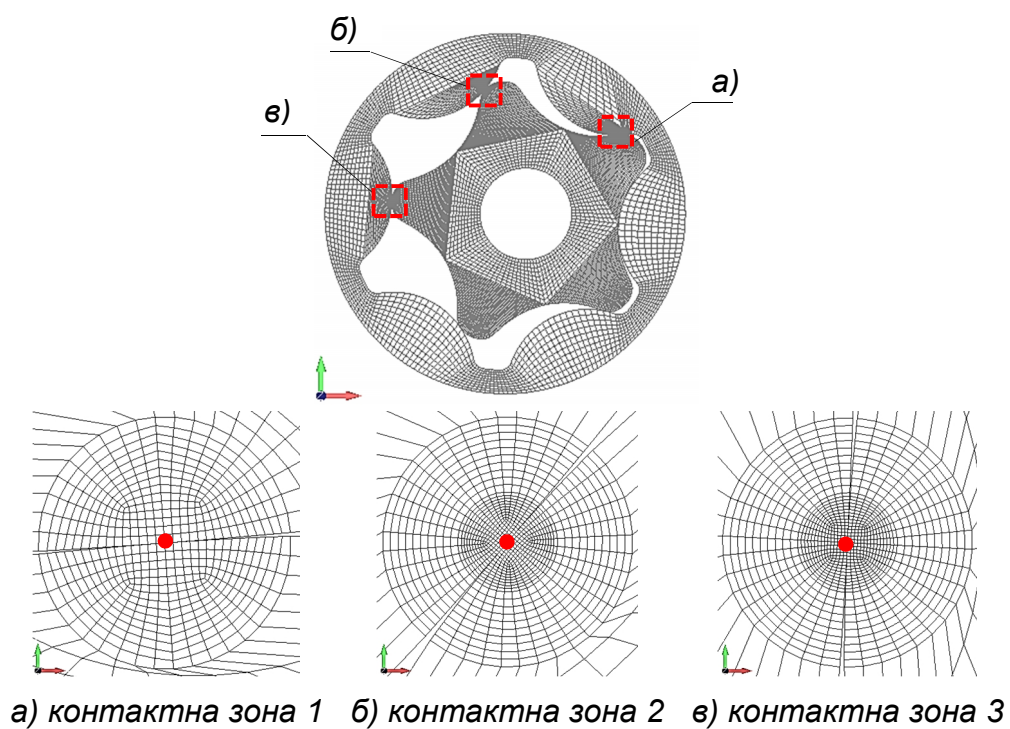
**ПРИЛОГ II. ПРИКАЗ МРЕЖЕ 2D КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА У
КОНТАКТНИМ ЗОНАМА ЗУПЧАНИКА ОПИСАНЕ У
ПОГЛАВЉУ 5.4.4.**



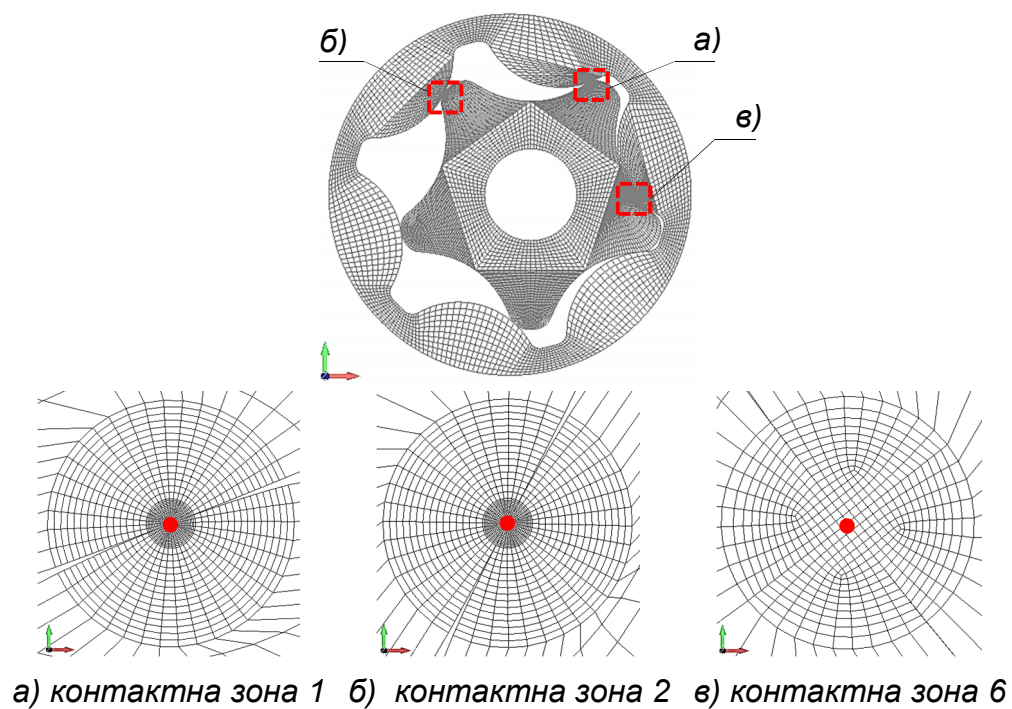
Слика 9. Приказ мреже коначних елемената у контактним зонама за модел ГП-575 и $\varphi_a = 0^\circ$



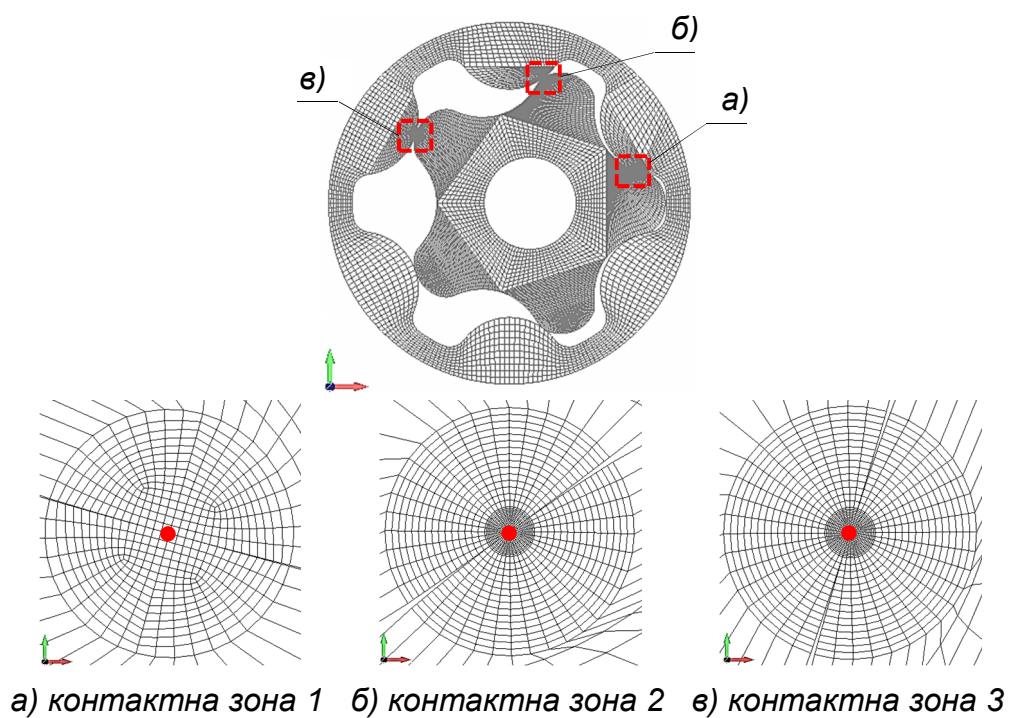
Слика 10. Приказ мреже коначних елемената у контактним зонама за модел ГП-575 и $\varphi_a = 15^\circ$



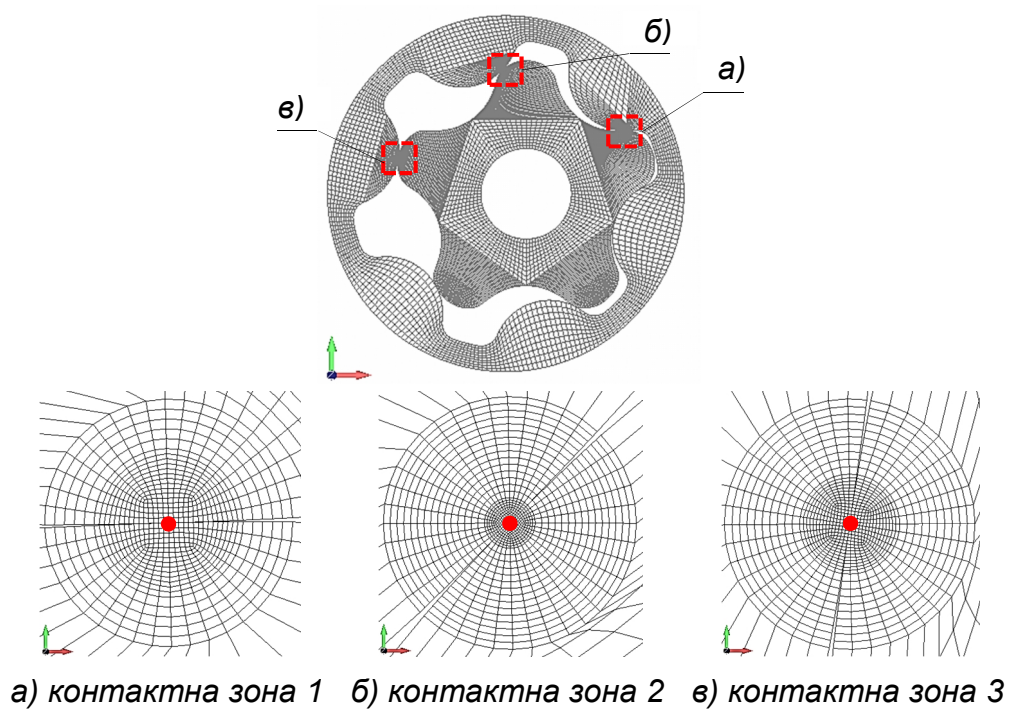
Слика 11. Приказ мреже коначних елемената у контактним зонама за модел ГП-575 и $\varphi_a = 25^\circ$



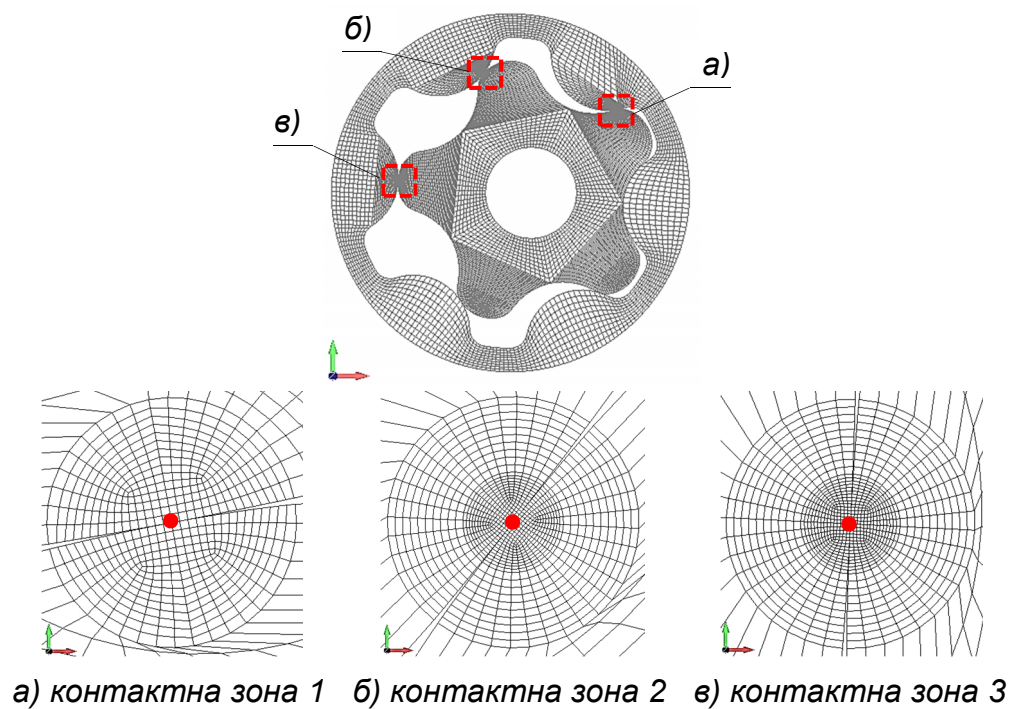
Слика 12. Приказ мреже коначних елемената у контактним зонама за модел ГП-575 и $\varphi_a = 45^\circ$



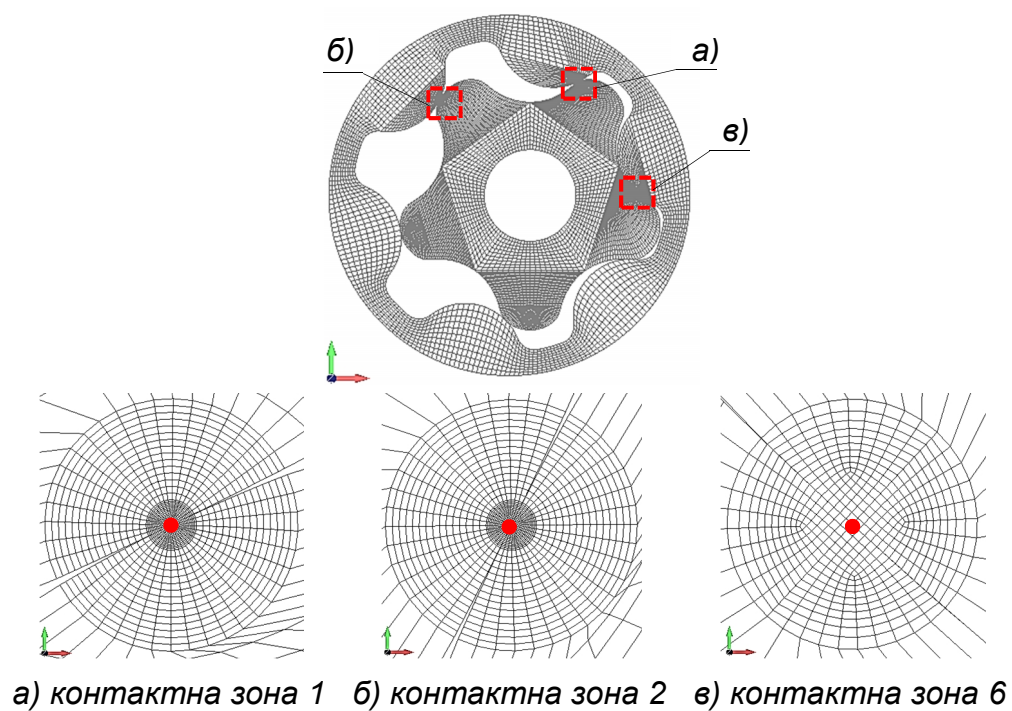
Слика 13. Приказ мреже коначних елемената у контактним зонама за модел ГП-375 и $\varphi_a = 0^\circ$



Слика 14. Приказ мреже коначних елемената у контактним зонама за модел ГП-375 и $\varphi_a = 15^\circ$

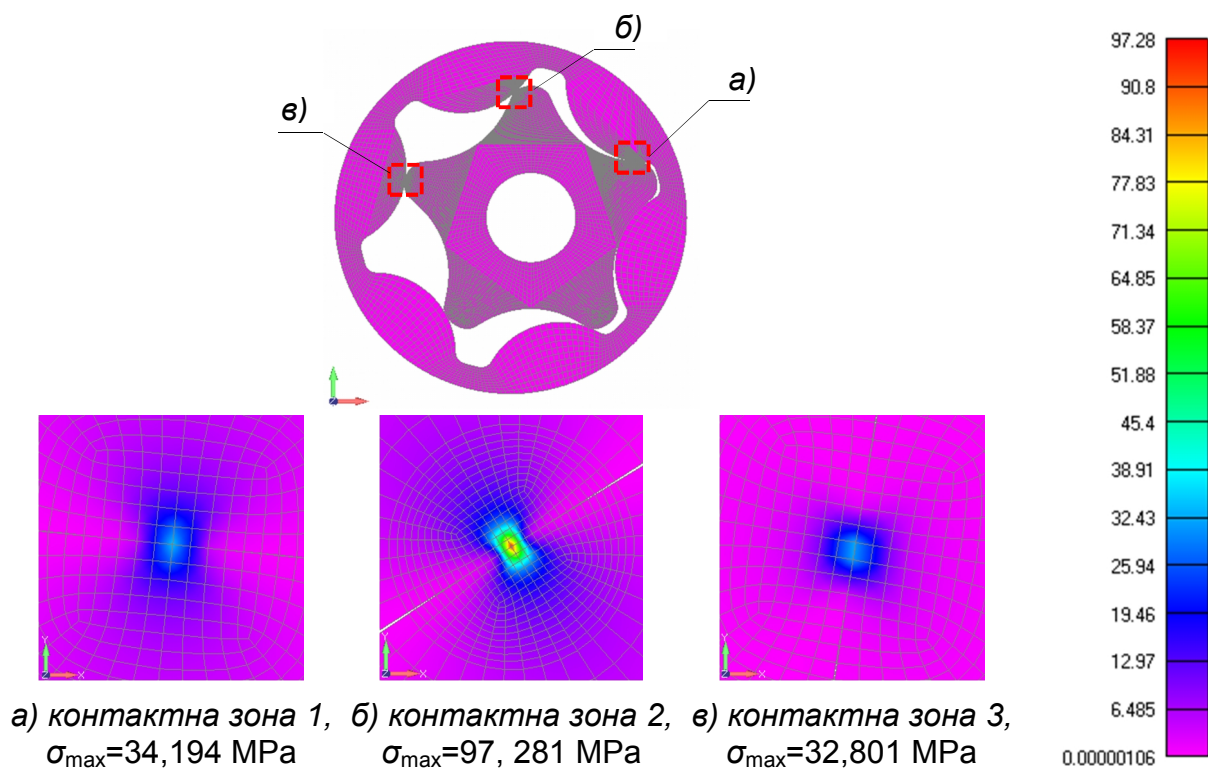


Слика 15. Приказ мреже коначних елемената у контактним зонама за модел ГП-375 и $\varphi_a = 25^\circ$

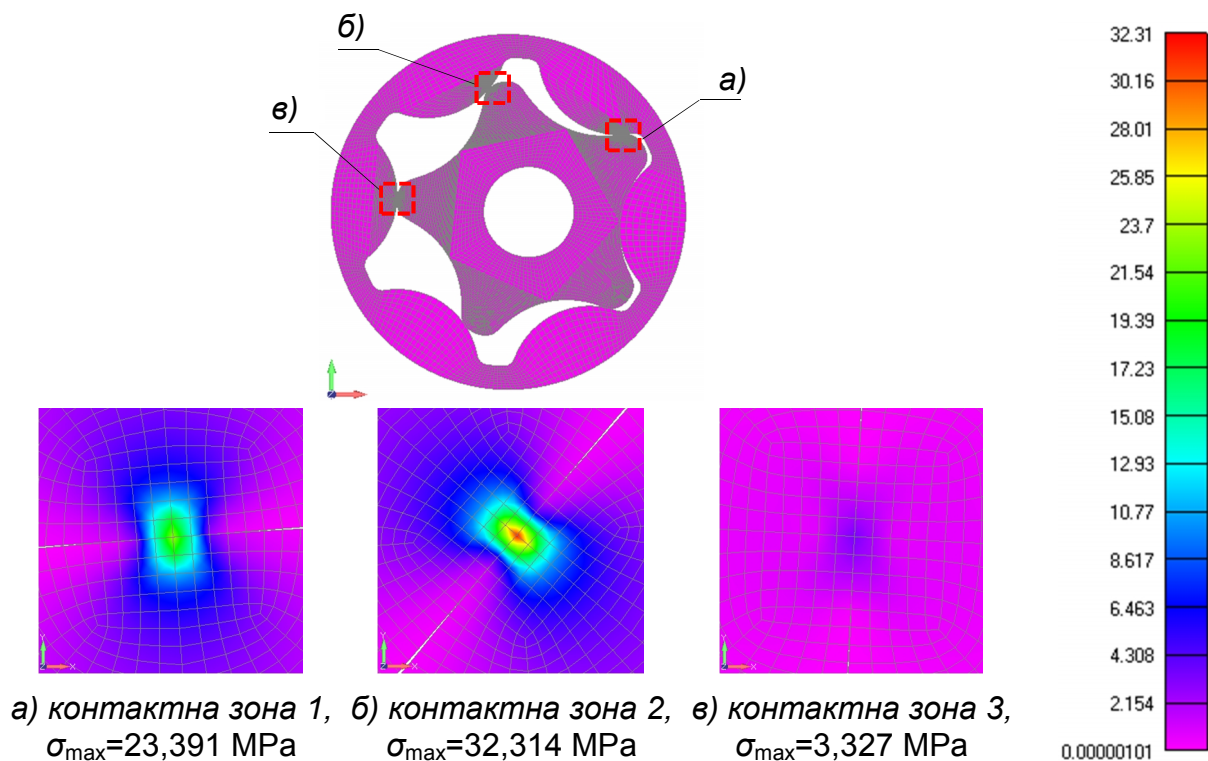


Слика 16. Приказ мреже коначних елемената у контактним зонама за модел ГП-375 и $\varphi_a = 45^\circ$

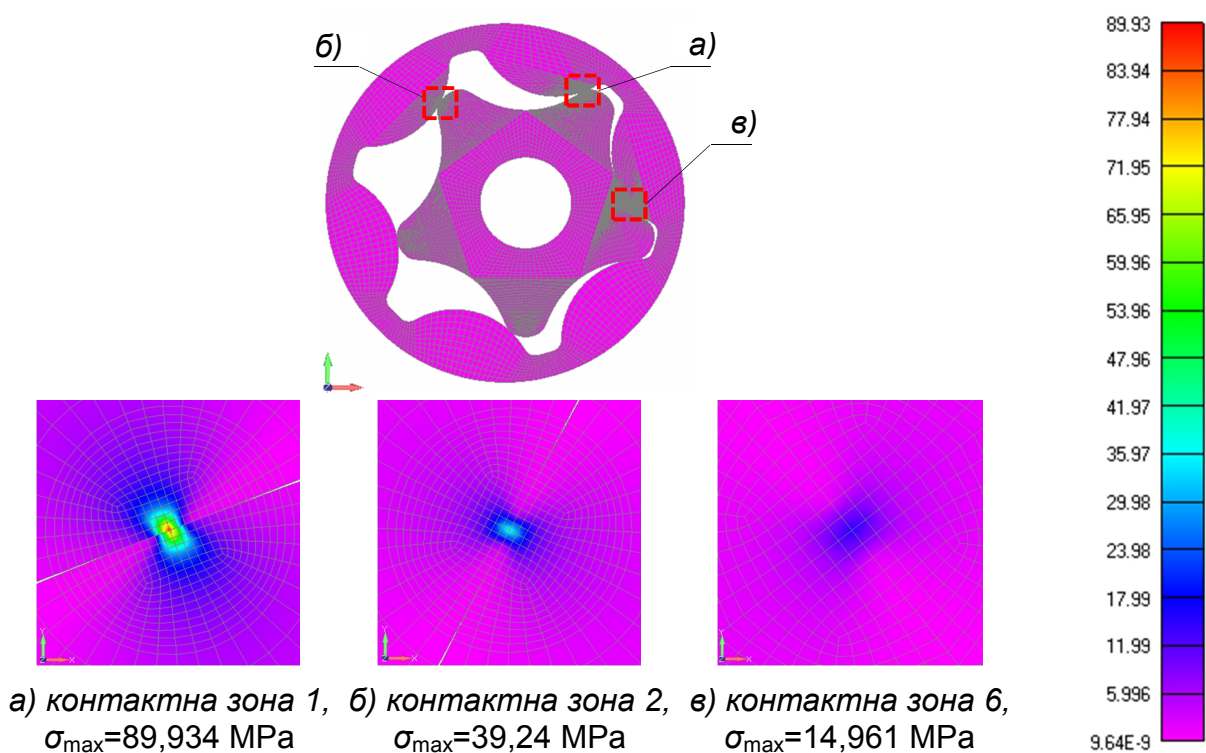
**ПРИЛОГ III. ПРИКАЗ РАСПОДЕЛЕ И ВРЕДНОСТИ
МАКСИМАЛНИХ КОНТАКТНИХ НАПОНА РОТАЦИОНИХ
ЕЛЕМЕНАТА ГЕРОТОРА ТИПА
ГП-575 И ГП-375
ОПИСАНИХ У ПОГЛАВЉУ 5.4.5**



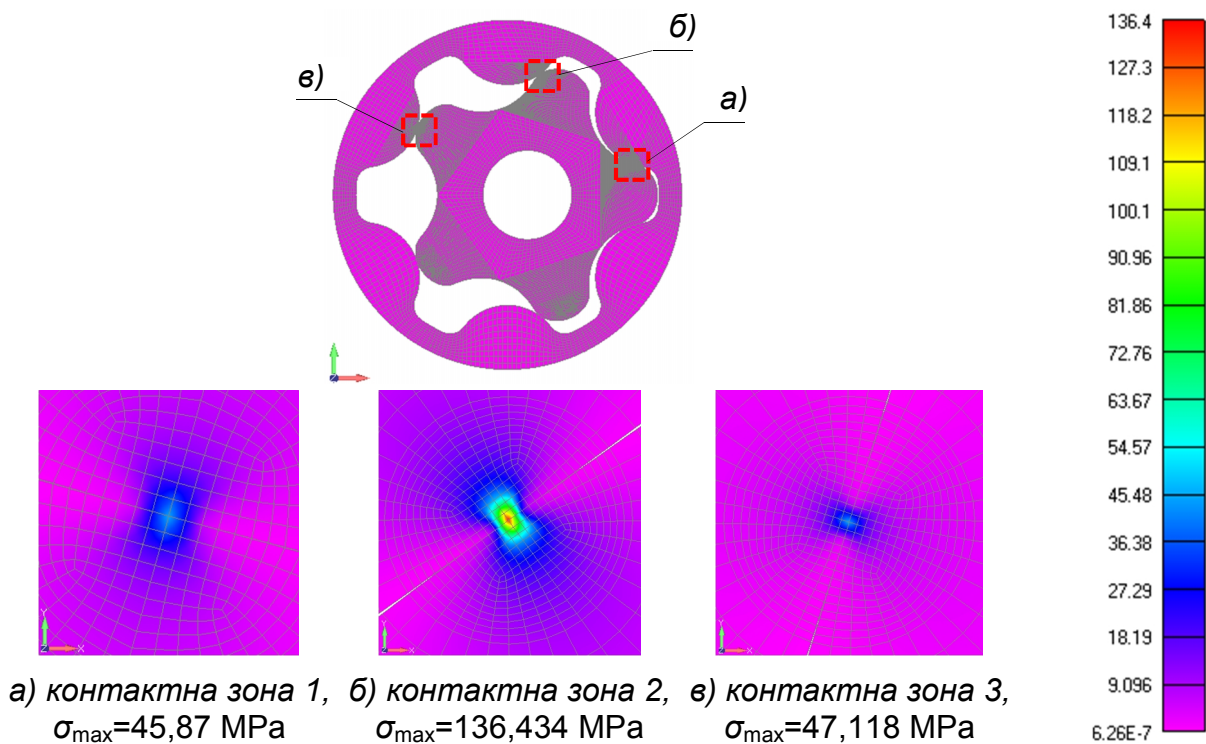
Слика 15. Приказ расподеле и вредности максималних напона у контактним зонама за модел ГП-575 и $\varphi_a=15^\circ$



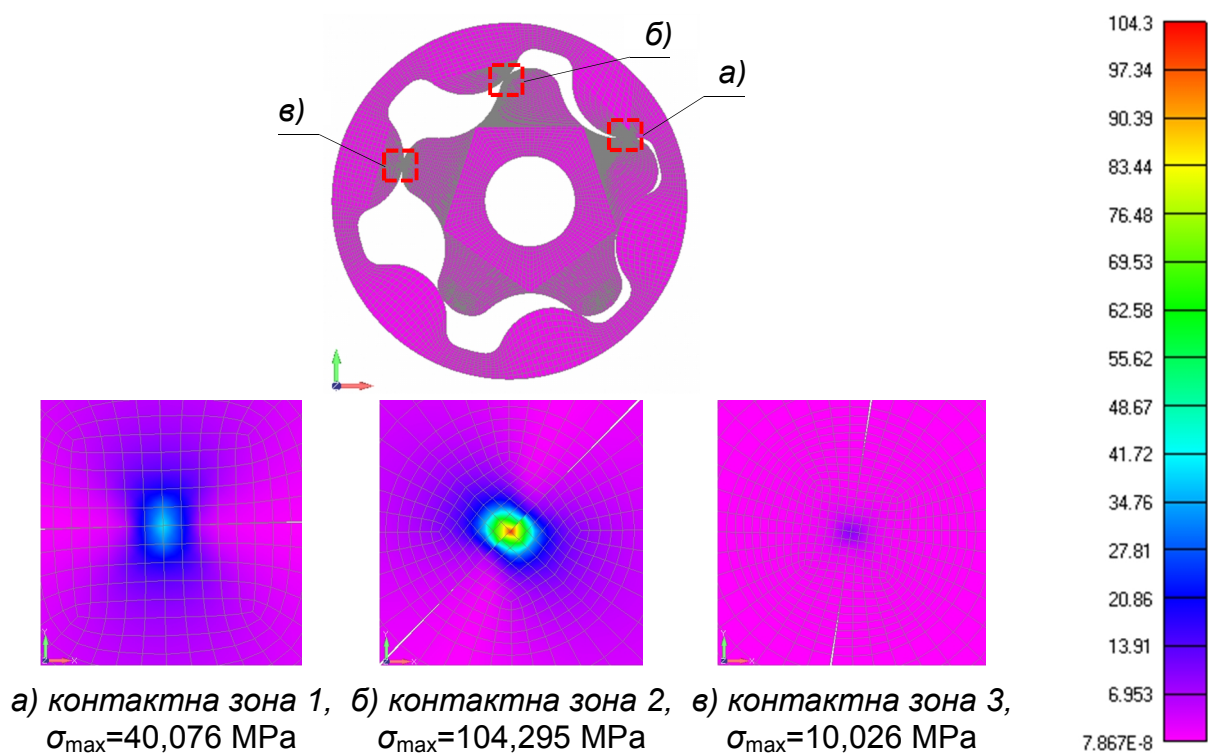
Слика 16. Приказ расподеле и вредности максималних напона у контактним зонама за модел ГП-575 и $\varphi_a=25^\circ$



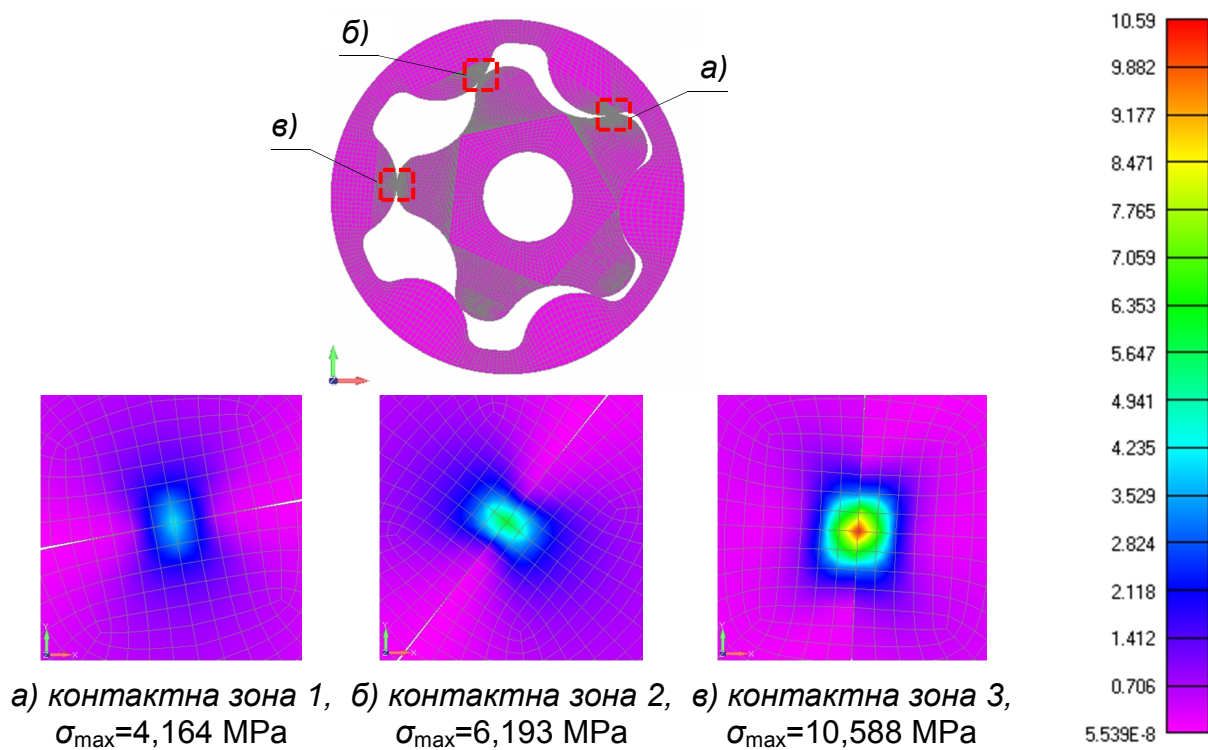
Слика 17. Приказ расподеле и вредности максималних напона у контактним зонама за модел ГП-575 и $\varphi_a=45^\circ$



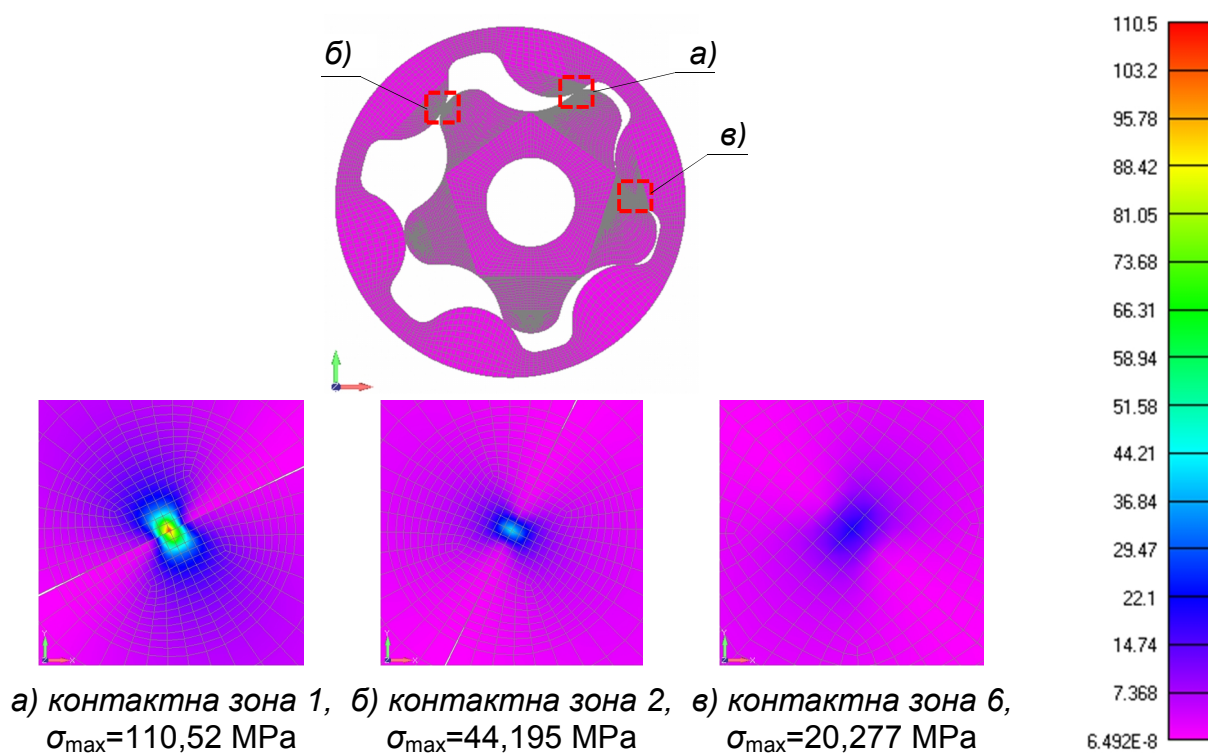
Слика 18. Приказ расподеле и вредности максималних напона у контактним зонама за модел ГП-375 и $\varphi_a=0^\circ$



Слика 19. Приказ расподеле и вредности максималних напона у контактним зонама за модел ГП-375 и $\varphi_a=15^\circ$



Слика 20. Приказ расподеле и вредности максималних напона у контактним зонама за модел ГП-375 и $\varphi_a=25^\circ$



Слика 21. Приказ расподеле и вредности максималних напона у контактним зонама за модел ГП-375 и $\varphi_a=45^\circ$