

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Механички преносници

Број индекса: 11/2015

Томица Д. Мутавцић

Кинематика удвојеног карданског преносника завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Др Блажа Стојановић, ванр. проф. - ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да:

- прикаже основне информације о карданским преносницима,
- прикаже историјски развој карданских преносника,
- изврши поделу карданских преносника,
- уради кинематску анализу удвојеног карданског преносника и
- изврши прорачун удвојеног карданског преносника.

Препоручена литература:

[1] Стојановић Б., Благојевић М.: *Механички преносници*, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац, 2015.

[2] Танасијевић С.: *Механички преносници*, Југословенско друштво за трибологију, Крагујевац, 1994.

[3] Глигорић Р.: *Механизми пољопривредних машина*, Пољопривредни факултет Универзитета у Новом Саду, Нови Сад, 2015.

Крагујевац, јул 2018.

Ментор:
Др Блажа Стојановић, ванр. проф.

Садржај

1. Увод.....	1
2. Кардански преносници.....	3
2.1 Историја карданских преносника.....	5
2.2 Подела карданских преносника.....	8
3. Неравномерност преноса кретања код Хуковог зглоба	10
4. Удвојени кардански преносник	13
4.1 Кинематика удвојеног карданског преносника	15
5. Прорачун и пројектовање карданског међувратила	21
5.1. Анализа карданског вратила уз помоћ рачунара	25
6. Подмазивање карданских преносника.....	28
7. Закључак	30
8. Литература.....	31

Summary

The subject of this thesis is to show cardan shaft mechanism through features, his pros and cons in utilization process as well as kinematics of the transmission of rotational movement. It is given a short review of a chronological development and division of cardan mechanisms regarding to their designed solutions. The aim of the thesis is to collect all characteristics in solving kinematic problems of non-uniformity of transmissioning rotational movement and kinematics of double cardan mechanism. All equations are suited for calculations and they are empirically checked in researches. Regarding to given conditions, there was calculation of cardan shaft and design of 3D assembly of cardan shaft, as well as example of lubrication of specific cardan mechanism. Computer aided kinematic analysis of cardan shaft to be represented as well.

Keywords: joint, kinematics, cardan shaft, cardan double joint

Резиме

Тема овог рада је да се кардански преносник прикаже кроз карактеристике, његове предности и недостатке у експлоатацији као и кинематика преноса обртног кретања. Дат је и кратак преглед историје развитка и подела карданских преносника у зависности од различитих конструкционих решења. Циљ овог рада је да се на једном месту дају карактеристична поглавља у решавању кинематике проблема неравномерности преноса обртног кретања и кинематике удвојеног карданског преносника. Обрасци су прилагођени за прорачун и емпиријски су проверени у пракси. На основу датих услова одрађени су прорачун и пројектовање 3D склопа карданског вратила као и подмазивање конкретног примера карданског преносника. Кинематска анализа карданског вратила уз помоћ рачунара је такође заступљена.

Кључне речи: удвојени кардански преносник, зглоб, карданско вратило, кинематика

1. Увод

Погонски системи имају веома значајну улогу у машинској индустрији. Захваљујући веома обимним истраживањима и искуствима, данас је могуће извршити оптимални избор погонске машине као и начин њеног прилагођавања радној машини. Зато је потребно изузетно добро познавање конструкционих карактеристика погонских елемената. У савременом машинству у употреби су различите врсте преноса снаге и то: механички, хидраулични, пнеуматски, електрични и њихове различите комбинације. За правилан избор погонске машине потребно је добро познавати утицај појединих погонских елемената на преносне величине, [1].

Пренос механичке енергије од погонске до радне машине врши се посредством трансмисионих вратила, спојница и преносника. За разлику од трансмисионих вратила и спојница, преносницима је могуће вршити и трансформацију броја обртаја, обртног момента, а понекада и смера обртања. Радне машине углавном раде при нижем броју обртаја у односу на погонске, при чему захтевају знатно веће вредности обртних момената. У случају да се користи спороходна погонска машина која већ има обртни момент и број обртаја који одговарају захтевима радне машине, није потребна трансформација поменутих параметара. Међутим, брзоходна погонска машина заједно са преносником снаге има мање димензије, масу и цену у односу на одговарајућу спороходну погонску машину истих радних карактеристика. Такође, понекад је неопходно једном погонском машином погонити више радних машина. Код неких погона код транспортних система, положај оса вратила погонске и радне машине се мења у току експлоатације, као и њихово међусобно растојање. У неким случајевима неопходна је и промена броја обртаја радне машине у самом процесу експлоатације. Из наведених разлога, преносници имају изузетно велику примену у савременој машиноградњи, [1].

Преносници, у општем случају, могу бити:

- једностепени и
- вишестепени.

Посматрајући преносник као целину, разликују се погонско или улазно вратило и гоњено или излазно вратило. Погонско вратило је оно вратило преко кога је преносник везан за погонску машину. Гоњено или излазно вратило је оно вратило преко кога је преносник везан за радну машину.

Према међусобном положају оса улазног и излазног вратила, преносници могу бити са:

- паралелним,
- укрштеним и
- мимоилазним осама вратила.

Паралелне осе улазног и излазног вратила преносника могу бити у хоризонталној и вертикалној или косој равни. Осим тога, поред преносника са једним улазним и једним излазним вратилом, постоје и преносници са више улазних и више излазних вратила.

Од четири начина преноса снаге (механички, хидраулични, електрични и пнеуматски) у пракси највећи значај има механички пренос. Ако се пренос снаге између погонске и радне машине заснива на механичком принципу, онда је реч о механичким преносницима који су свакако и најзаступљенији.

Под основним карактеристикама механичког преносника подразумева се:

- радни преносни однос преносника,
- општа једначина кретања преносника,
- оптерећење преносника (снага, обртни моменти и степен искоришћења) и
- закони промене оптерећења радних органа преносника, режим оптерећења преносника

Поступак избора оговарајућег преносника за конкретну примену није ни мало једноставан и највише зависи од постављених захтева.

У савременој пракси најчешће се користе следећи механички преносници:

- зупчасти,
- ланчани,
- фрикциони,
- каишни,
- зупчасти каишни,
- кардански,
- навојни...

Ако су доминантни захтеви мале димензије, константан преносни однос, велики степен искоришћења, велика издржљивост и трајност у раду, онда су зупчасти преносници свакако у предности у односу на остале типове преносника и најзаступљенији су у пракси. За пренос снаге и кретања између вратила са већим осним растојањем и сталним преносним односом, примењују се зупчасти каишни и ланчани преносници. Ако је међу захтевима наглашен постојан и стабилан рад преносника у случају краткотрајних оптерећења, а да при томе преносни однос не мора бити константан, за већа осна растојања и мање снаге веома велику примену имају каишни преносници. Када се међусобни положај вратила мења у току експлоатације, или се вратила налазе под одређеним углом, примењују се кардански преносници, [1].

Нагли развој карданских механизма и њихова све већа примена настаје са развојем пољопривредног и транспортног машинства. За покретне транспортне и пољопривредне машине, које се при кретању подвргавају знатном трескању и промени положаја појединих својих вратила, била је неопходна уградња таквих механизма који не реагују на промене положаја осе вратила, а при томе добро одржавају експлоатациона својства машине. Развој и примена карданских вратила је, поред осталих техничких достигнућа, остварио тежњу човека да се што више ослободи тешких физичких послова, тј. да га машина замени у свим тим пословима, како би имао више времена за интелектуални и креативно стваралачки рад, [2].

2. Кардански преносници

Кардански преносници преносе обртни момент и кретање између вратила чије се осе налазе под одређеним сталним, или у току времена променљивим углом, дозвољавајући при томе и њихово релативно померање (угаоно или трансляторно). Карданско вратило има велику примену у различитим врстама индустријских и транспортних машина. Елементи карданског вратила су оптерећени комбинованим напрезањем на савијање, увијање, смицање и површински притисак, [1].

Кардански пренос се широко примењује код пољопривредних машина зато што при процесу рада узајамни положај вратила преносног механизма може непрекидно да се мења зависно од рељефа терена или карактера технолошког процеса. Примењују се још и код аутомобила и моторних возила уопштено, машина алатки, код управљачких механизма авиона и хеликоптера, у дрвној и текстилној индустрији..., [1].

Правилно постављање карданских преносника, са аспекта структурног састава, даје могућност веће слободе конструктору при решавању узајамног распореда вратила преносника. Али примена карданских преносника, у неким случајевима, води настајању већих динамичких оптерећења у машинама. Током експлоатације, услед преоптерећења може доћи до различитих видова разарања материјала и лома делова кардана. Најчешћа места лома су у корену крака виљушки, а иницијалне пукотине као почетак разарања најчешће се јављају на крстастој осовини у зони отвора испод мазалице.

Када су у питању моторна возила, у најопштијем случају, кардански преносници се користе за остваривање везе између, [1]:

- мењача степена преноса и погонског моста,
- мењача степена преноса и разделника погона,
- разделника погона и погонског моста,
- погонског моста и погонских точкова, ако је примењено независно вешање точкова,
- погонског моста и управљајућих точкова.

Поред наведених примера примене, кардански преносници се користе код радних возила за повезивање помоћног вратила (тзв. “извода снаге”) са помоћним радним агрегатом који је уграђен на возилу.

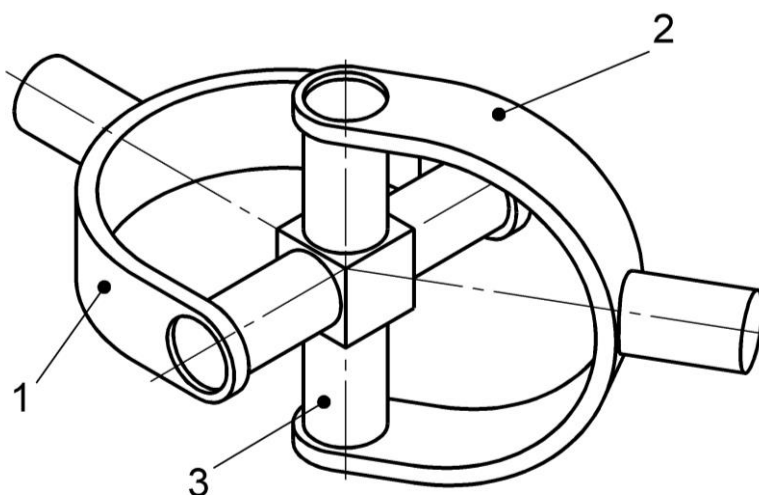
Да би кардански преносник испунио захтеве преноса снаге, без великих губитака, између погонског мотора и радне машине, очекује се, [1]:

- пренос обртног момента без стварања додатних оптерећења у току рада,
- могућност осног померања између вратила,
- висок степен искоришћења,
- поузданост у раду,
- бешумност,
- могућност преноса обртног момента уз једнакост угаоних брзина погонског и гоњеног вратила и то независно од угла између вратила која се спајају,
- одсуство појаве резонанце у опсегу радних брзина,
- минимално трење у свим зглобовима...

Да би се главна карактеристика карданског преносника остварила, постоји зглобна спојница која је саставни део карданског преносника и омогућава спајање вратила чије се осе секу под неким углом. Угао између оса вратила може бити константан или

променљив, а креће се у интервалу од 5° до 30° (теоријски од 0° до 45°). Ова спојница се састоји од два зглоба међусобно постављена под углом од 90° (слика 1). Сваки од ових зглобова појединачно може да се помера у једној равни. Ушице виљушки зглобова (1) и (2) су преко рукаваца спојене са кардановим крстом (3). Виљушке су преко одговарајућих главчина спојене са вратилима, [1].

Карданове спојнице захтевају сразмерно велику тачност израде и монтаже, као и добро подмазивање. Основни недостатак карданове спојнице је неравномерност у преносу обртног момента и угаоне брзине.



Слика 1. Карданова спојница, [1]

Уколико се карданским преносом повезују два механизма или агрегата, који су причвршћени за оквир или каросерију аутомобила, угао између оса вратила обично не прелази $2^\circ - 3^\circ$. Ако се агрегати који се повезују карданским преносом померају заједно са осовинама, угао између појединих вратила може да износи и $15^\circ - 20^\circ$, код аутомобила велике проходности тај угао може да буде и до 30° . Карданским преносом, којим се обезбеђује погон управљајућих точкова, морају да се обезбеде углови заокретања точкова и до 40° , [3].

Код карданских преносника су најбитнији следећи елементи, [4]:

- крста осовина,
- виљушка кардана,
- телескопски део вратила,
- цевно вратило и
- ослонци карданског вратила.

Крста осовина је свакако један од најважнијих делова карданских вратила. У већини случајева димензије и радни век карданског вратила зависе од крстасте осовине. У зависности од врсте карданског механизма, могуће је користити различите варијанте конструкција крстастих осовина.

Краци крстасте осовине су напгнени на:

- савијање,
- смицање и
- површински притисак.

Уколико се због нетачне израде и монтаже радијални зазори у игличастим лежајевима већи од аксијалних, чело рукавца се може ослонити на дно шољице и бити изложено површинском притиску.

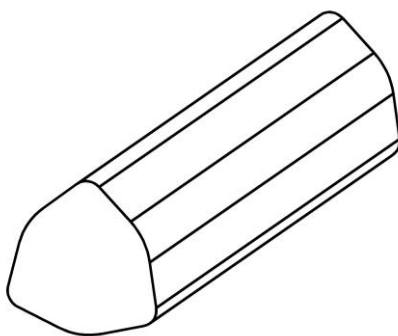
Виљушка кардана, у зависности од начина причвршћивања за суседно вратило, може као завршетак имати чауру или прирубницу. Прирубницом се виљушка везује за спојницу другог вратила, а чаура жљебном везом, варом или неким другим начином.

Краци виљушке су напрегнути на:

- савијање,
- увијање,
- смицање,
- истезање,
- површински притисак.

Свакако доминантна оптерећења су савијање и увијање.

Телескопски део вратила чини ожљебљени профил, који омогућава издужење или скраћење карданског вратила у раду, у одређеним границама. Жљебови телескопског дела вратила могу бити са: правоугаоним, еволвентним и троугаоним профилем зуба (слика 2).



Слика 2. Троугаони профил ожљебљеног дела вратила произвођача “*Cerjak KG*”

Централни део карданског вратила може бити пуни или цевни. Пуно карданско вратило се користи за пренос снаге код помоћних механизма машина, а у случајевима када се не захтева осно померање. Далеко већу примену налазе цевна карданска вратила, која са далеко мањом тежином од пуних вратила, преносе обртни момент.

Ослонци карданског вратила, тј. ослонци крстасте осовине, могу бити:

- клизна лежишта,
- лежајеви са куглицама или
- игличасти лежајеви.

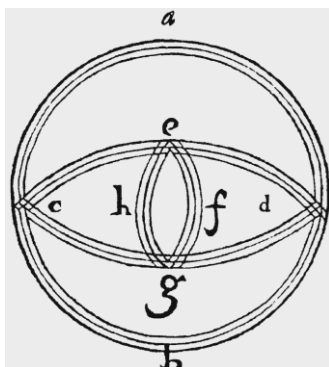
Клизна лежишта се употребљавају при малим брзинама. Као постељица примењује се челична цементирана чаура, пластична чаура или чаура од других материјала.

2.1 Историја карданских преносника

Најстарије информације о зглобовима долазе од Филона из Византије (*Philon of Byzantium*, 230. п.н.е.), који је тај механизам зглобова користио на тамјанским пламеницима са прстеновима. Француски црквени архитекта, Вилард де Хонеркут (*Villard de Honnecourt*, 13. век), је скицирао малу, цилиндричну пећницу која је обешена

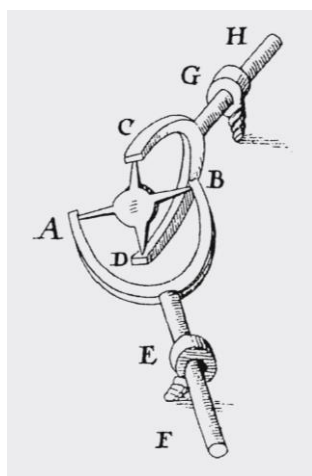
на кружним прстеновима. Око 1500. године, Леонардо да Винчи (*Leonardno da Vinci*, 1452. - 1519.) је конструисао компас који се користио на бродовима, такве конструкције да је монтиран прстеновима како би увек задржао хоризонталан положај независно од љуљања брода, [5].

Окретни карданови прстенови су генерално били познати у Европи кроз извештаје италијанског математичара, доктора и филозофа, Џироламо Кардана (*Girolamo Cardano*, 1501. - 1576.). Џироламо Кардано се такође бавио инжењерством, где је кроз своје књиге приказао механизам који помоћу зглобова спаја два вратила која се налазе под одређеним углом. 1557. године је описао зглобни механизам који је уз помоћ три зглобна прстена, међусобно повезаних под углом од 90° , имао до три степена слободе (слика 3). Овакав зглобни механизам је назван “карданско вешање”, тачније зглоб, који је произашао из истраживања, је добио назив “карданов зглоб”, [5].



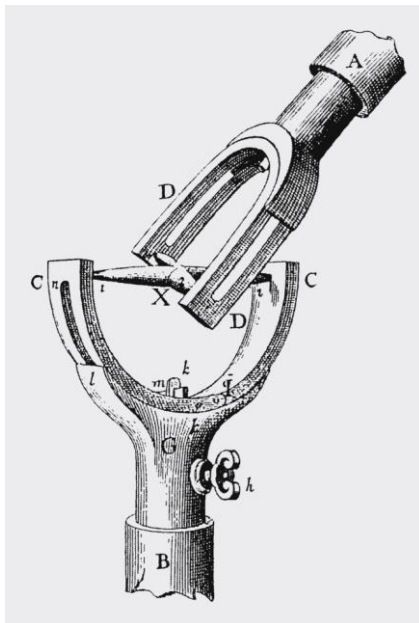
Слика 3. Зглобни механизам са три зглобна прстена, [5]

Потреба за преносом ротационог кретања помоћу угаоног вратила потиче још из 1300. године у конструкцијама торањских часовника. Због саме конструкције торња, механизам часовника и спољашњи део часовника нису увек били на истој оси, тако да се положај преноса ротационог кретања мењао у току рада. Каспар Шкот (*Caspar Schott*, 1608. - 1666.) је 1664. године описао решење проблема преноса ротационог кретања на часовнику Стразбуршке катедрале, која је изграђена 1354. Описао је да пренос кретања може бити побољшан извођењем крста са четири спојнице које су повезивале два вратила са виљушкама на њиховим крајевима (слика 4). Инспирацију је пронашао у необјављеној скрипти “*Chronometria Mechanica Nova*” коју је написао извесни Амикус (*Amicus*), [5].



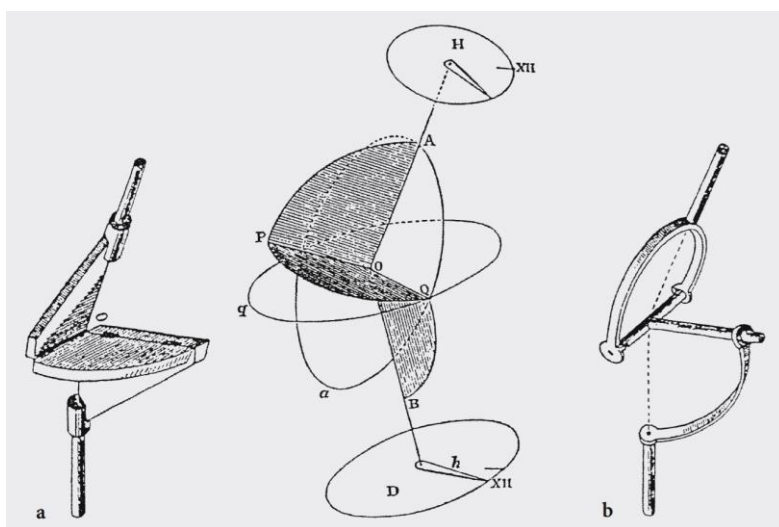
Слика 4. Амикусово (Amicus) извођење зглоба, [5]

Јоханес Хевелиус (*Johannes Hevelius*, 1611. - 1687.) је истраживао о универзалним зглобовима, сличним као код Амикуса. Писао је о зглобовима као о механизму способном за више врста кретања (слика 4).



Слика 5. Хевелиусово извођење зглоба, [5]

Енглески физичар Роберт Хук (*Robert Hook*, 1635. - 1703.) је 1664. године патентирао механизам који је намењен преносу обртног момента између два вратила која се налазе под извесним углом, овај механизам је добио назив Хуков зглоб (слика 6). Обзиром да је Хук био веома упућен у математику у то време и уз поседовање вештина у решавању практичне кинематике, то је довело до тога да је уочио да универзални зглоб не преноси обртно кретање равномерно, као што је замишљао Каспар Шкот. Хук никада није објавио теорију о овоме, нагађа се да је знао за ову неравномерност у преносу обртног кретања. Гледано са аспекта кинематских карактеристика, кардански преносник и Хуков зглоб се разликују само по конструкцији, намена је иста, [5].



Слика 6. Хуков зглоб, [5]

Кардански преносници су данас јако развијени и имају изузетно високу вредност степена искоришћења.

2.2 Подела карданских преносника

Сви елементи за везивање вратила под углом и међупросторних оса, називају се карданским механизмима, зглобовима или просто карданима, мада по принципу дејства, а такође и по структурним и кинематским својствима се могу разликовати од механизма кардана. У неким машинским гранама (нпр. у металургији), сличне везе се називају универзалним зглобовима.

Област примене карданских преносника, њихова експлоатациона својства, поузданост и трајност у различитим условима, одређени су експлоатационим својствима и конструкционим карактеристикама коришћених карданских преносника.

Кардански преносници се користе у многим гранама машинства као механички преносници снаге, зато их је у првом реду и могуће поделити по њиховим конструкционим могућностима преношења момента. Примена одређене врсте карданских преносника зависи, пре свега, од вредности угаоних брзина повезаних вратила, зато што је није увек могуће уравнотежити центрифугалне силе инерције, које условљавају динамичке процесе у преноснику, [4].

Према кинематским карактеристикама, кардански преносници могу бити:

- синхрони (са константним преносним односом) и
- асинхрони (са променљивим преносним односом).

Синхрони кардански преносници имају једнаке угаоне брзине погонског и гоњеног вратила, без обзира на њихов међусобни положај. Код асинхроних карданских преносника, при константној угаоној брзини погонског вратила, гоњено вратило се обрће периодично променљивим бројем обртаја, [1].

Према механичким својствима, кардански преносници се деле на:

- круте и
- еластичне

Крути кардани су таквог конструкционог решења да допуштају само угаона померања вратила при преносу момента, без осног растојања вратила унутар самог склопа. За разлику од крутих кардана, еластични кардани утичу на фреквенцију осциловања целокупног склопа и поседују способност компензовања осних премештања при преносу снаге, [4].

У зависности од величине угла између оса повезаних вратила, разликују се:

- пуни кардани и
- полукардани.

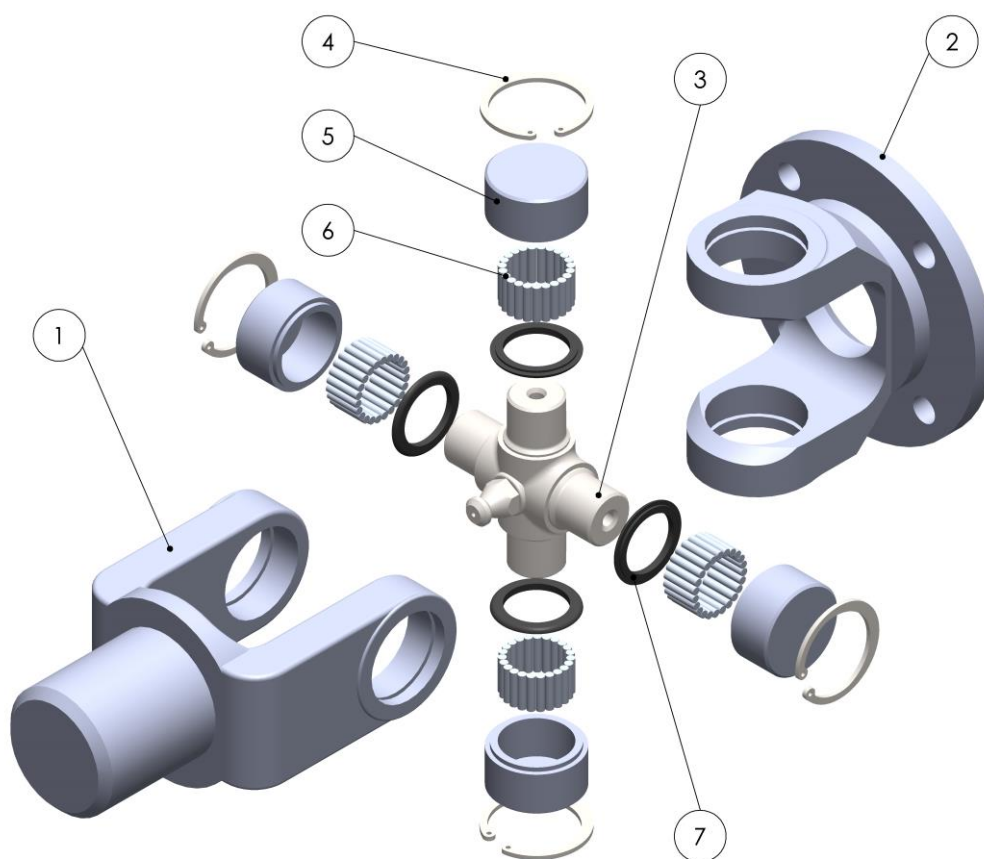
Пуни кардани имају две осе осциловања и обезбеђују пренос снаге при релативно већим угловима између везаних вратила. Ако конструкција пуног кардана допушта осно премештање унутар кардана, тада се он назива универзалним, у супротном је прост. Полукардани немају физичку осу осциловања и допуштају узајамно одступање вратила само под веома малим углом, [4].

Када је у питању примена код теретних возила кардански преносници могу бити:

- затворени и
- отворени

Кардански преносници који преносе обртни момент од мењача степена преноса до погонског моста, могу да поред своје основне функције омогуће и преношење реактивних сила са погонског моста на каросерију возила. Реч је о затвореним карданским преносницима, који поред вратила и спојница садрже и облогу карданског преносника. Отворени кардански преносник се састоји из две карданове спојнице и међувратила променљиве дужине. У овом случају, реактивне силе примају гибњеви. Када је растојање велико, користи се кардански преносник са два међувратила: предњим и задњим. Ово је неопходно, јер би коришћење једног дугачког вратила створило опасност од достизања критичног броја обртаја, [1].

Данас се, у савременим машинским конструкцијама, највише користе кардански преносници са крстастом осовином (слика 7). Састоје се из виљушке погонског и гоњеног вратила (2) и виљушке карданског међувратила (1). Крстасти осовина (3) се преко игличастих лежајева (6) који се налазе у чаурама (5) спајају са виљушкама. Осигурање лежајева се врши уз помоћ ускочника (4), ускочници се монтирају посебним алатом. Подмазивање лежишта се врши помоћу мазалице смештене на крстастој осовини. Како се иглице лежајева не би померале у аксијалном правцу додаје се граничник (7).

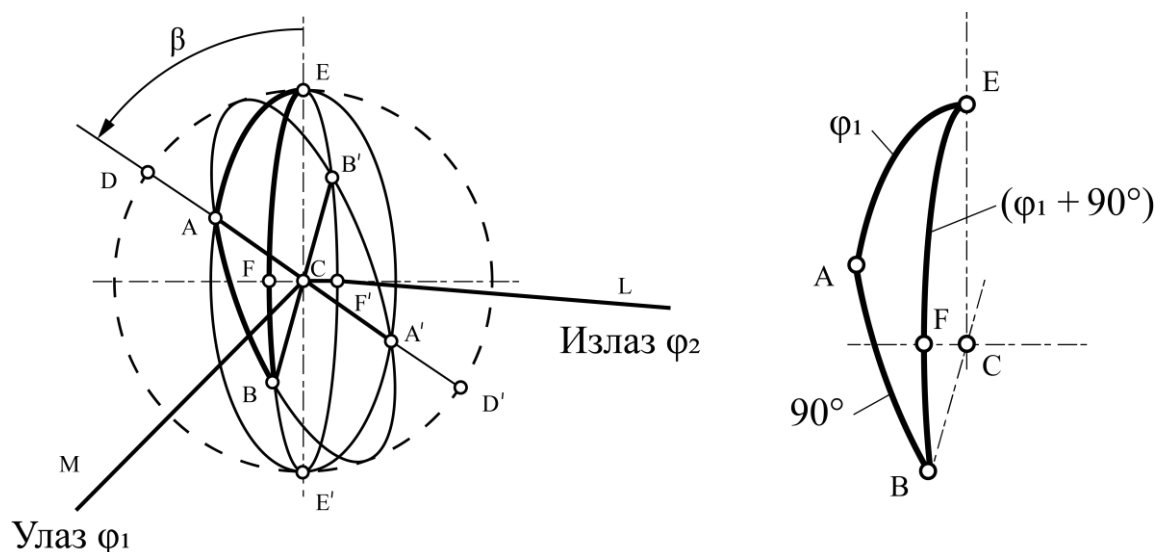


Слика 7. Просторни приказ зглоба код удвојеног карданског преносника

3. Неравномерност преноса кретања код Хуковог зглоба

Основна карактеристика асинхроног карданског преносника је периодична промена разлике углова обртања као и угаоних брзина гоњеног и погонског вратила. Ова вредност је утолико већа уколико је већи радни угао између вратила. Због велике једноставности и знатно ниже цене у односу на синхроне, асинхрони кардански преносници налазе све већу примену у савременој индустрији, а поготово код моторних возила за случај да радни угао не прелази од 20° до 25° , максимално 30° , [1].

Виктор Понкелет (*Victor Poncelet*, 1788. - 1867.) је 1824. године доказао, помоћу сферне тригонометрије, да ротационо кретање Хуковог зглоба није равномерно (слика 8).



Слика 8. Шема преноса ротационог кретања Хуковог зглоба, [5]

Нека улазно вратило CM и излазно вратило CL припадају истој равни. Осе ових вратила се налазе под извесним углом β . Раван у којој лежи крстава осовина нормална је на посматрану раван. Референтне тачке крстасти осовине A, B, A', B' крећу се по кружницама на сферној површини K чији су полупречници $AC = BC = A'C = B'C$. Кружна површ $EBE'B'$ управна је на излазно вратило CL , а кружна површ $DAD'A'$ на улазно вратило CM . Угао између поменутих површи $EBE'B'$ и $DAD'A'$ једнак је углу између улазног и излазног вратила β .

Посматра се сферни троугао ABE . Ако се погонско вратило заокрене за угао, гоњено вратило се заокрене за угао φ_2 . На основу косинусне теореме, следи:

$$\cos 90^\circ = \cos \varphi_1 \cdot \cos(90^\circ + \varphi_2) + \sin \varphi_1 \cdot \sin(90^\circ + \varphi_2) \cdot \cos \beta \quad (3.1)$$

Како је $\cos 90^\circ = 0$, следи:

$$0 = \cos \varphi_1 \cdot (-\sin \varphi_2) + \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \beta \quad (3.2)$$

Ако се једначина (3.2) подели са $\sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1$, добија се:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \cos \beta \quad (3.3)$$

или:

$$\varphi_2 = \arctg(\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \cos \beta) \quad (3.4)$$

За случај фазног померања за 90° , односно ако је угао заокретања улазног вратила $\varphi_1 + 90^\circ$, а угао заокретања излазног вратила $\varphi_2 + 90^\circ$, следи:

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 + 90^\circ) = \operatorname{tg}(\varphi_1 + 90^\circ) \cdot \cos\beta \quad (3.5)$$

односно:

$$\operatorname{ctg}\varphi_2 = \operatorname{ctg}\varphi_1 \cdot \cos\beta \quad (3.6)$$

или:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1} \cdot \cos\beta \rightarrow \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\cos\beta} \quad (3.7)$$

Диференцирањем једначине (3.4) по времену t , добија се:

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi_1 \cdot \cos^2\beta} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos^2\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\cos\beta}{\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1 \cdot (1 - \sin^2\beta)} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt}$$

Коначно:

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{\cos\beta}{1 - \sin^2\varphi_1 \cdot \sin^2\beta} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} \quad (3.8)$$

Обзиром да први извод угла заокретања по времену представља угаону брзину односно $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$ и $\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2$, из једначине (3.8) се може добити однос угаоних брзина ω_1 и ω_2 :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos\beta}{1 - \sin^2\varphi_1 \cdot \sin^2\beta} \quad (3.9)$$

Ако се полази од једначине (3.7), добија се:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos\beta}{1 - \cos^2\varphi_1 \cdot \sin^2\beta} \quad (3.10)$$

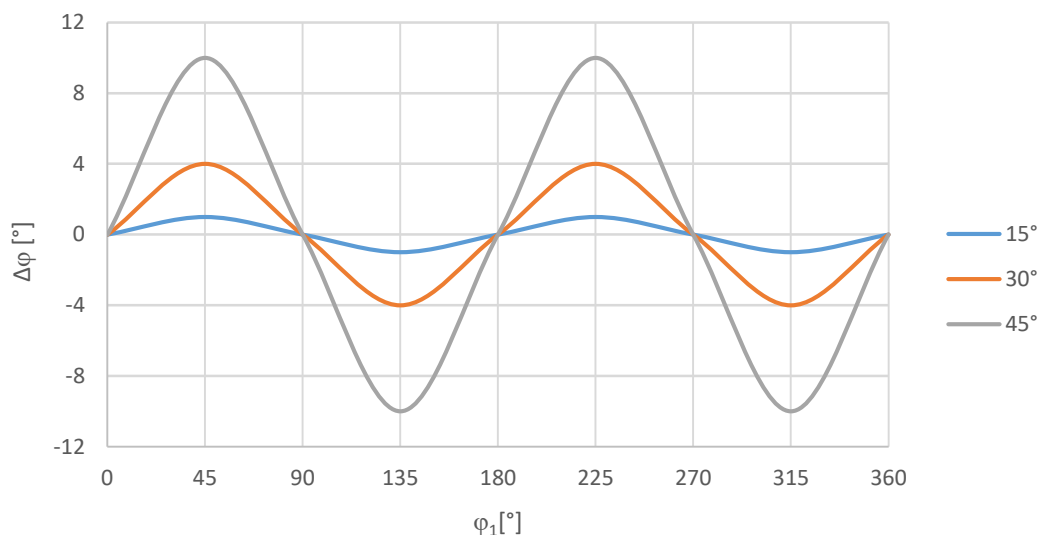
На основу датих једначина, може се израчунати разлика углова заокретања гоњеног и погонског вратила $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

За граничне услове:

$$1. \varphi_2 = 0^\circ, \varphi_1 = 90^\circ \rightarrow \omega_2 = \omega_{2min} = \omega_1 \cdot \cos\beta$$

$$2. \varphi_2 = 90^\circ, \varphi_1 = 180^\circ \rightarrow \omega_2 = \omega_{2max} = \frac{\omega_1}{\cos\beta}$$

Неравномерно обртање гоњеног вратила доводи до појаве вибрација што негативно утиче како на рад самог карданског преносника, тако и на рад целокупног машинског система. Разлика углова заокретања гоњеног и погонског вратила $\Delta\varphi$ се још зове и “грешка кардана”. Са порастом вредности угла између погонског и гоњеног вратила (угла β), повећава се и разлика углова заокретања $\Delta\varphi$ (слика 9), [1].



Слика 9. Зависност разлике углова заокретања гоњеног и погонског вратила $\Delta\varphi$ у функцији угла заокретања погонског вратила φ_1 за различите вредности угла β , [1]

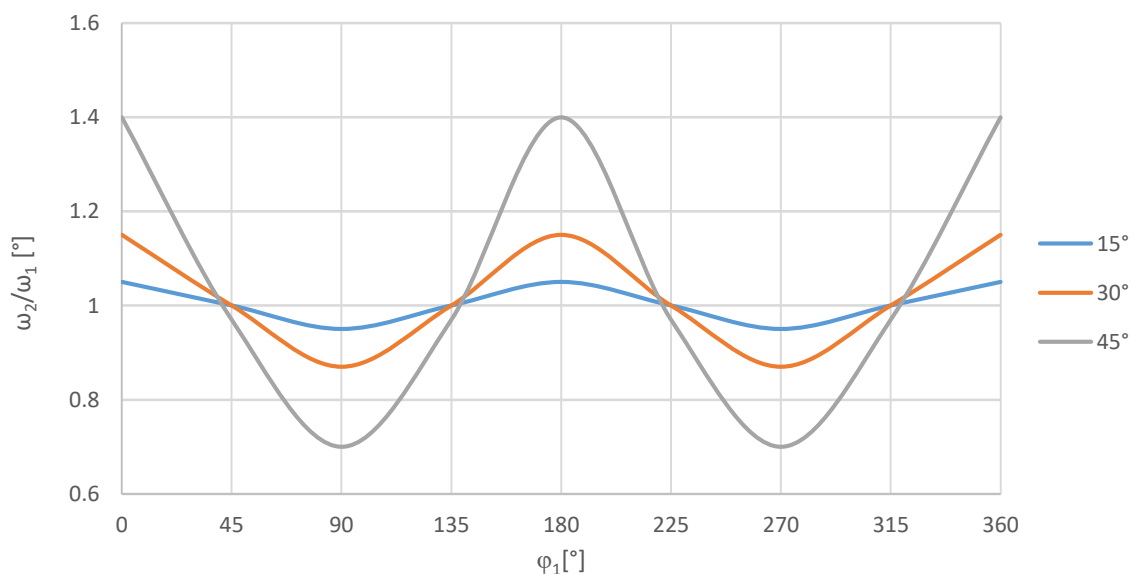
На слици 10 представљена је зависност угаоних брзина гоњеног и погонског вратила $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ у функцији угла заокретања погонског вратила за различите вредности угла међусобног положаја погонског и гоњеног вратила β и то: $\beta = 15^\circ, \beta = 30^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

Други извод угла заокретања по времену представља угаоно убрзање, односно:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{d\omega_1}{dt} = \varepsilon_1 \text{ и } \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2$$

Други извод једначине по времену представља угаоно убрзање гоњеног вратила:

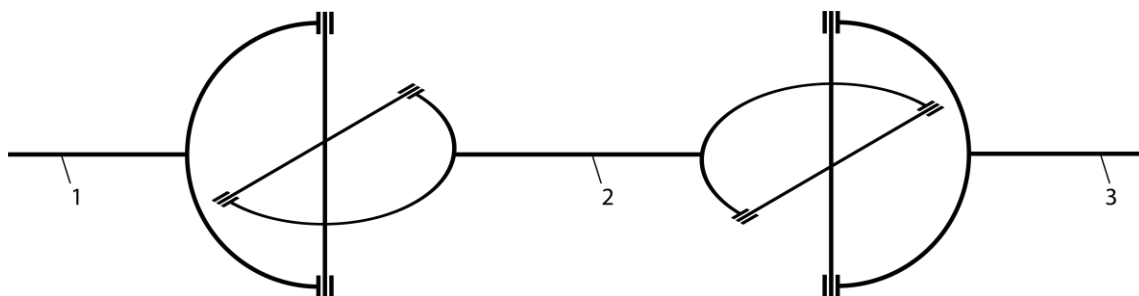
$$\varepsilon_2 = \omega_1^2 \cdot \frac{\cos\beta \cdot \sin^2\beta \cdot \sin(2 \cdot \varphi_1)}{(1 - \sin^2\varphi_1 \cdot \sin^2\beta)^2} \quad (3.11)$$



Слика 10. Зависност односа угаоних брзина гоњеног и погонског вратила $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ у функцији угла заокретања погонског вратила φ_1 за различите вредности угла β , [1]

4. Удвојени кардански преносник

Неравномерно обртање гоњеног вратила изазива додатно динамичко оптерећење преносног система. Ту неравномерност у преносу кретања је могуће отклонити применом два редно везана карданова зглоба, који су један у односу на други постављени под углом од 90° , а између њих се налази међувратило (слика 11). Ова двострука карданова спојница, која се састоји од две просте карданове спојнице повезане међувратилом, назива се *карданско вратило*, [1].

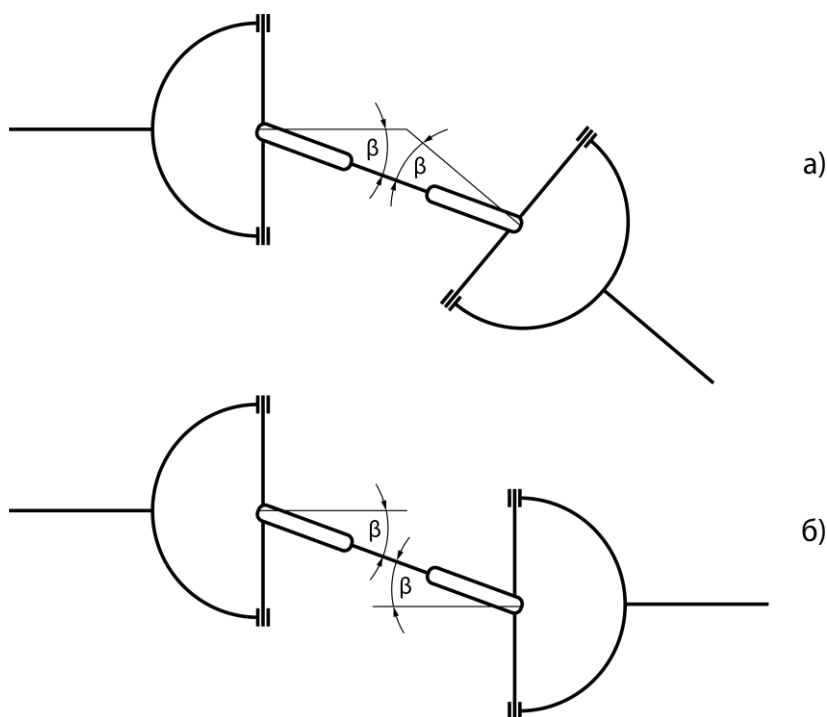


Слика 11. Двострука карданова спојница - карданско вратило, [1]

У пракси се најчешће користе два извођења карданског вратила и то са:

- “W” положајем вратила (слика 12а)
- “Z” положајем вратила (слика 12б)

Применом карданског вратила концепције “W”, повећава се угао преламања просте карданове спојнице, и то са 15° на 30° . Применом карданског вратила концепције “Z”, могуће је преносити обртни момент између два паралелна вратила, чије су осе знатно радијално померене.



Слика 12. Концепције извођења карданског вратила, [1]

За случај да се радијални положај оса вратила у току рада мења користи се телескопско међувратило, такво карданско вратило се зове *телескопско карданско вратило*.

Телескопско међувратило се састоји од два међусобно жлебном везом спојена дела који се подмазују. Телескопска карданска вратила се примењују за пренос великих обртних момената. Карданов крст је преко игличастих лежаја спојен са прирубницом вратила и међувратилом. Игличасти лежаји се обавезно подмазују. Прирубнице вратила се спајају са прирубницама погонског и гоњеног вратила подешеним завртњима, [1].

Код карданских вратила намењених раду у условима високих температура или у прашином загађеној средини, уграђују се специјалне заштитне облоге.

Потпуна синхроност обртања погонског и гоњеног вратила постиже се под следећим условима, [6]:

1. Углови под којима се секу погонско и гоњено вратило са међувратилом морају бити исти, $\beta_1 = \beta_2$
2. Виљушке на међувратилу морају бити у истој равни и да су под углом од 90° на виљушке погонског и гоњеног вратила и
3. Сва три вратила морају лежати у истој равни.

Ако је испуњен први услов да су углови заокретања погонског и гоњеног вратила исти ($\beta_1 = \beta_2$), тада ће се гоњено вратило обртати једнолико као и погонско. Уколико ови углови нису једнаки јавља се исти проблем неравномерности обртања гоњеног вратила, као код вратила са једним зглобом.

Разлика заокретања погонског и гоњеног вратила $\Delta\beta$ једнака је:

$$\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2 \quad (4.1)$$

У случају да је разлика углова заокретања погонског и гоњеног вратила $\Delta\beta$ једнака нули, гоњено вратило ће се обртати једнолико као и погонско. Када је разлика углова $\Delta\beta$ већа од нуле јавља се исти проблем као код једног зглоба, односно гоњено вратило се обрће променљиво у функцији вредности разлике углова. Што је већа вредност разлике углова $\Delta\beta$ то је већа неравномерност обртања гоњеног вратила. Разлика углова може да се креће до 30° , јер преко те вредности неравномерност обртања гоњеног вратила је велика и јавиће се недозвољене инерцијалне силе као код вратила са једним зглобом.

Други услов је конструктивне природе који се може лако испунити и увек су виљушке на међувратилу тако спојене да са виљушкама погонског и гоњеног вратила заклапају угао од 90° .

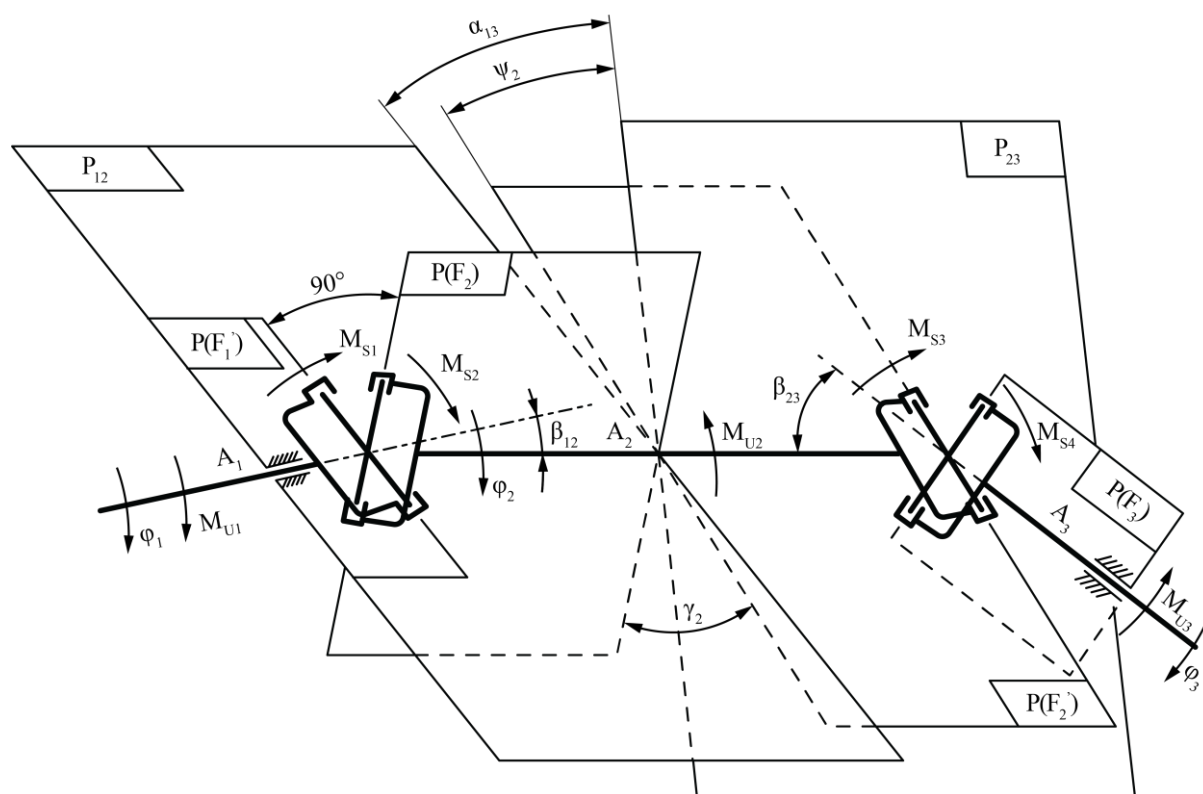
Трећи услов је да осе сва три вратила треба да леже у истој равни. О првом и трећем услову треба водити рачуна при монтажи, јер у случају да нису испуњена, долази до неравномерности обртања гоњеног вратила и појаве инерцијалних сила.

Применом карданског вратила постиже се синхроност само погонског и гоњеног вратила, док је обртање међувратила неравномерно. Инерцијалне силе, које при томе настају, знатно оптерећују зглобове нарочито при већим бројевима обртаја. Ради смањења инерцијалних оптерећења, међувратилу се смањује маса тако што се израђује од цеви различитих попречних пресека. При преношењу обртног момента између укрштених вратила у сваком зглобу настаје наизменично променљив момент савијања, који додатно оптерећује ослонце погонског и гоњеног вратила. Величина овог момента се периодично мења и за угао обртања $\varphi_1 = 90^\circ$ и код “W” и код “Z” распореда, достиже своју максималну вредност. Веће оптерећење ослонаца јавља се код “W” распореда вратила, [1].

4.1 Кинематика удвојеног карданског преносника

Из претходних разматрања, може се закључити да је промена преносног односа главно својство карданског преносника. Највећу примену у машинству имају удвојени кардански преносници. Користећи удвојени кардански механизам могуће је постићи константни преносни однос погонског и гоњеног вратила или неравномерност обртања гоњеног вратила. Међусобна зависност углова обртања погонског и гоњеног вратила удвојеног карданског преносника је функција њиховог положаја у простору, [4].

За разматрање кинематских односа једног удвојеног карданског механизма, чији је положај у простору такав да омогућава анализу различитих могућих положаја који се могу јавити при конструисању, користи се шематски приказ дат на слици 13. Овај шематски приказ је општи модел једног просторног удвојеног карданског преносника. Применом његових основних параметара могуће је прорачунати основне кинематске односе за све положаје удвојеног карданског преносника у простору.



Слика 13. Шематски приказ удвојеног карданског преносника, [4]

За разматрање се, најчешће, користе удвојени кардански преносник са различитим вредностима фазних углова, односно различитим вредностима углова између равни погонске виљушке и равни вратила удвојеног карданског преносника. Фазни угао првог зглоба је $\psi_1 = 0$, тј. раван погонске виљушке $P(F'_1)$ се поклапа са равни погонског вратила P_{12} . Фазни угао другог зглоба је различит од нуле и износи ψ_2 , а то је у ствари угао између равни погонске виљушке другог зглоба $P(F'_2)$ и равни гоњеног вратила P_{23} . Угао између равни гоњеног вратила другог зглоба $P(F_3)$ и равни погонске виљушке $P(F'_1)$, обележава се са ψ_3 . Са α_{13} означава се угао између равни P_{12} и P_{23} , које су у ствари равни погонског и гоњеног вратила ($A_1 - A_2$ и $A_2 - A_3$). Пошто је ово општи модел удвојеног карданског преносника уводи се и претпоставка да су равни виљушки међувратила постављене под углом γ_2 .

Са слике 13, фазни угао γ_2 се може одредити као:

$$\psi_2 = \frac{\pi}{2} - (\gamma_2 + \alpha_{13})$$

$$tg\psi_2 = tg\left[\frac{\pi}{2} - (\gamma_2 + \alpha_{13})\right] = ctg(\gamma_2 + \alpha_{13}) \quad (4.1)$$

Користећи основни кинематски закон простог карданског преносника (3.7), могуће је извести основне кинематске зависности између погонског и гоњеног вратила удвојеног карданског пренисника.

За почетак се могу користити везе:

$$tg\varphi_2 = \frac{tg\varphi_1}{\cos\beta_{12}}$$

$$tg(\varphi_2 + \psi_3) = \frac{tg(\varphi_2 + \psi_2)}{\cos\beta_{23}}$$

$$tg\psi_3 = \frac{tg\psi_2}{\cos\beta_{23}} \quad (4.2)$$

Елиминисањем величина φ_2 и ψ_3 из ових једначина, добија се израз за одређивање угла окретања гоњеног вратила ψ_3 при познатом углу φ_1 :

$$tg(\varphi_3 + \psi_3) \cdot \cos\beta_{23} = tg(\varphi_2 + \psi_2)$$

$$\frac{\sin(\varphi_3 + \psi_3) \cdot \cos\beta_{23}}{\cos(\varphi_3 + \psi_3)} = \frac{\sin(\varphi_2 + \psi_2)}{\cos(\varphi_2 + \psi_2)}$$

$$\frac{\sin\varphi_3 \cdot \cos\psi_3 + \cos\varphi_3 \cdot \sin\psi_3}{\cos\varphi_3 \cdot \sin\psi_3 - \sin\varphi_3 \cdot \cos\psi_3} \cdot \cos\beta_{23} = \frac{\sin\varphi_2 \cdot \cos\psi_2 + \cos\varphi_2 \cdot \sin\psi_2}{\cos\varphi_2 \cdot \sin\psi_2 - \sin\varphi_2 \cdot \cos\psi_2}$$

Множењем леве стране претходне једначине са:

$$\frac{\cos\varphi_3 \cdot \cos\psi_3}{\cos\varphi_3 \cdot \cos\psi_3}$$

и десне са:

$$\frac{\cos\varphi_2 \cdot \cos\psi_2}{\cos\varphi_2 \cdot \cos\psi_2}$$

проиилази:

$$\frac{tg\varphi_3 + tg\psi_3}{1 - tg\varphi_3 \cdot tg\psi_3} \cdot \cos\beta_{23} = \frac{tg\varphi_2 + tg\psi_2}{1 - tg\varphi_2 \cdot tg\psi_2}$$

Након сређивања следи:

$$tg\varphi_3 = \frac{tg\varphi_2 + tg\psi_2 - tg\varphi_3 \cdot \cos\beta_{23} \cdot (1 - tg\varphi_2 \cdot tg\psi_2)}{\cos\beta_{23} \cdot (1 - tg\varphi_2 \cdot tg\psi_2) + tg\varphi_2 \cdot tg\psi_3 + tg\varphi_3 \cdot tg\psi_2} \quad (4.3)$$

Коришћењем основног кинематског закона карданског механизма, једначина 4.3 се може написати и у облику:

$$tg\varphi_3 = \frac{\frac{tg\varphi_1}{\cos\beta_{12}} + tg\psi_2 - \frac{tg\psi_2 \cdot \cos\beta_{23}}{\cos\beta_{23}} \cdot \left(1 - \frac{tg\varphi_1 \cdot tg\psi_2}{\cos\beta_{12}}\right)}{\cos\beta_{23} \cdot \left(1 - \frac{tg\varphi_1 \cdot tg\psi_2}{\cos\beta_{12}}\right) + \frac{tg\varphi_1 \cdot tg\psi_2}{\cos\beta_{12} \cdot \cos\beta_{23}} + \frac{tg^2\psi_2}{\cos\beta_{23}}} =$$

$$= \frac{\cos\beta_{23} \cdot (1 + tg^2\psi_2) \cdot tg\varphi_1}{\cos\beta_{12} \cdot (\cos^2\beta_{23} + tg^2\psi_2) + \sin^2\beta_{23} \cdot tg\psi_2 \cdot tg\varphi_1} \quad (4.4)$$

За $\psi_2 = 90^\circ$ израз 4.4 прелази у неодређени облик ∞/∞ , јер $tg90^\circ \rightarrow \infty$. Израз 4.4 добија други облик ако се бројилац и именилац помноже са $ctg^2\psi_2$:

$$tg\varphi_3 = \frac{\cos\beta_{23} \cdot (1 + tg^2\psi_2) \cdot tg\varphi_1}{\cos\beta_{12} \cdot (\cos^2\beta_{23} + tg^2\psi_2) + \sin^2\beta_{23} \cdot tg\psi_2 \cdot tg\varphi_1} \cdot \frac{ctg^2\psi_2}{ctg^2\psi_2} =$$

$$= \frac{\cos\beta_{23} \cdot (1 + ctg^2\psi_2) \cdot tg\varphi_1}{\cos\beta_{12} \cdot (\cos^2\beta_{23} + ctg^2\psi_2 + 1) + \sin^2\beta_{23} \cdot ctg\psi_2 \cdot tg\varphi_1} \quad (4.5)$$

Заменом једначине 4.1 у једначине 4.4 и 4.5 добијају се коначни изрази за везе између углова обртања гоњеног и погонског вратила удвојеног карданског преносника:

$$tg\varphi_3 = \frac{\cos\beta_{23} \cdot [1 + ctg^2(\gamma_2 + \alpha_{13})] \cdot tg\varphi_1}{\cos\beta_{12} \cdot [\cos^2\beta_{23} + ctg^2(\gamma_2 + \alpha_{13})] + \sin^2\beta_{23} \cdot ctg(\gamma_2 + \alpha_{13}) \cdot tg\varphi_1} \quad (4.6)$$

$$tg\varphi_3 = \frac{\cos\beta_{23} \cdot [1 + tg^2(\gamma_2 + \alpha_{13})] \cdot tg\varphi_1}{\cos\beta_{12} \cdot [\cos^2\beta_{23} + tg^2(\gamma_2 + \alpha_{13}) + 1] + \sin^2\beta_{23} \cdot tg(\gamma_2 + \alpha_{13}) \cdot tg\varphi_1} \quad (4.7)$$

Једначина 4.6 је универзална и може се користити за одређивање узајамног односа између углова обртања погонског и гоњеног вратила удвојеног карданског механизма при било ком просторном распореду вратила и при било ком углу заокретања међувратила. У случају да је збир углова γ_2 и α_{13} једнак нули, корисно је користити једначину 4.7.

При произвољном фазном углу првог карданског преносника $\psi_1 \neq 0$, фазни угао другог механизма одређен је релацијом:

$$\psi_2 = \frac{\pi}{2} - (\gamma_2 + \alpha_{13}) + arctg\left(\frac{tg\psi_1}{\cos\beta_{12}}\right) \quad (4.8)$$

За детаљну анализу једначине 4.6 погодно је њене поједине делове заменити новим величинама, као:

$$\begin{aligned} \cos\beta_{23} \cdot [1 + ctg(\gamma_2 + \alpha_{13})] &= A, \\ \cos\beta_{12} \cdot [\cos^2\beta_{23} + ctg^2(\gamma_2 + \alpha_{13})] &= B, \\ \sin^2\beta_{23} \cdot ctg^2(\gamma_2 + \alpha_{13}) &= C. \end{aligned} \quad (4.9)$$

У том случају једначина 4.6 добија облик:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_3 &= \frac{A \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}{B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1} \\ \varphi_3 &= \operatorname{arctg} \left(\frac{A \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}{B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

и представља основну кинематску зависност удвојеног карданског преносника, из које је могуће извести и све остале кинематске карактеристике.

Диференцирањем једначине 4.10 по времену, добија се израз за угаону брзину гоњеног вратила:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_3 &= \frac{A \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}{B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1} / \frac{d}{dt} \\ \omega_3 &= \frac{A \cdot B \cdot \omega_1}{\cos^2 \varphi_1 \cdot [(B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2 + A^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1]} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из једначине за угаону брзину гоњеног вратила (4.11) добија се израз за преносни однос у облику:

$$i_{31} = \frac{A \cdot B}{\cos^2 \varphi_1 \cdot [(B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2 + A^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1]} = \frac{\omega_3}{\omega_1} \quad (4.12)$$

Диференцирањем једначине угаоне брзине гоњеног вратила (4.11) по времену, добија се једначина убрзања:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{A \cdot B \cdot \omega_1}{\cos^2 \varphi_1 \cdot [(B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2 + A^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1]} / \frac{d}{dt}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{A \cdot B \cdot \varepsilon_1}{\cos^2 \varphi_1 \cdot [(B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2 + A^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1]} - \\ &\quad - \frac{A \cdot B \cdot \omega_1 \cdot \frac{d}{dt} [\cos^2 \varphi_1 \cdot ((B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2 + A^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1)]}{\cos^4 \varphi_1 \cdot [(B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2 + A^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1]^2}, \\ \varepsilon_3 &= i_{31} \cdot \varepsilon_1 + i_{31}^2 \cdot \{ \sin 2\varphi_1 \cdot [(B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2 + A^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1] - \\ &\quad - 2C \cdot (B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1) - 2A^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 \} \cdot \frac{\omega_1^2}{A \cdot B} \end{aligned} \quad (4.13)$$

За $\omega_1 = \text{const}$, $\varepsilon_1 = 0$ па израз постаје:

$$\varepsilon_3 = i_{31}^2 \{ \sin 2\varphi_1 \cdot [(B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2 + A^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1] - 2C(B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1) - 2A^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 \} \cdot \frac{\omega_1^2}{A \cdot B}$$

Једначине 4.6, 4.10, 4.11, 4.12 и 4.13 у потпуности дефинишу кинематику удвојеног карданског преносника. Наведене једначине су променљиве за све случајеве распореда вратила у простору и за било који угао заокретања виљушки међувратила.

Код многих машина (аутомобила, трактора, пољопривредних машина, машина алатки и др.), угао између оса вратила се непрекидно мења у процесу рада карданског преносника.

У таквим случајевима, кинематски параметри гоњеног вратила су функција двеју променљивих:

- угла обртања погонског вратила φ_1 и
- угла β између оса вратила, било да је реч о простом или удвојеном механизму.

Оправдано је најпре разматрати кинематику простог карданског механизма, код кога је $\varphi_1 = f_1(t)$ и $\beta_{12} = f_2(t)$. Диференцирањем једначине 3.7 по времену добија се:

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{\frac{d\varphi_2}{dt} + tg\beta_{12} \cdot \cos^2\varphi_1 \cdot tg \frac{d\beta_{12}}{dt}}{\left(1 + \frac{tg^2\varphi_1}{\cos^2\beta_{12}}\right) \cdot \cos\beta_{12} \cdot \cos^2\varphi_1} \quad (4.14)$$

После неопходног сређивања израз за угаону брзину гоњеног вратила добија облик:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 + \frac{1}{2} tg\beta_{12} \cdot \sin 2\varphi_1 \cdot \frac{d\beta_{12}}{dt}}{\cos\beta_{12} \cdot (1 + tg^2\varphi_1 \cdot \sin^2\varphi_1)} \quad (4.15)$$

Диференцирањем једначине 4.15 по времену и занемаривањем малих вредности за $tg^4\beta_{12}$ и $tg^3\beta_{12}/\cos^2\beta_{12}$, добија се израз за одређивање угаоног убрзања:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = & \frac{\varepsilon_1}{\cos\beta_{12} \cdot (1 + tg^2\beta_{12} \cdot \sin^2\varphi_1)} - \frac{tg^2\beta_{12} \cdot \sin 2\varphi_1}{\cos\beta_{12} \cdot (1 + tg^2\beta_{12} \cdot \sin^2\varphi_1)} \omega_1^2 + \\ & + \frac{tg\beta_{12} \cdot \sin 2\varphi_1}{2\cos\beta_{12} \cdot (1 + tg^2\beta_{12} \cdot \sin^2\varphi_1)} \cdot \ddot{\beta}_{12} + \frac{\sin 2\varphi_1}{\cos^5\beta_{12} \cdot (1 + tg^2\beta_{12} \cdot \sin^2\varphi_1)} \cdot (\dot{\beta}_{12})^2 - \\ & - \frac{tg^2\beta_{12} + tg\beta_{12} \cdot \sin 2\varphi_1 - tg\beta_{12} \cdot \cos^2\beta_{12} \cdot \cos 2\varphi_1}{\cos^3\beta_{12} \cdot (1 + tg^2\beta_{12} \cdot \sin^2\varphi_1)^2} \cdot \omega_1 \cdot \dot{\beta}_{12} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Анализа једначине 4.16 показује да присуство променљивог угла у многоне условљава изразе за кинематске параметре, чак и простог карданског механизма.

За практичну примену изведених једначина неопходна су извесна упрошћења. Како је, у већини случајева, апсолутна величина измене угла β_{12} релативно мала ($\beta_{12} \leq 20^\circ$), за мање брзине промене угла ($d\beta_{12}/dt \leq \omega_1$), у кинематског анализи карданског преносника могуће је ограничити се на средње вредности β_{12} и коначну измену ($\Delta\beta_{12}/\Delta t$). При $d\beta_{12}/dt \leq (0,1 \dots 0,2)\omega_1$ утицај променљивог угла β_{12} могуће је занемарити. Само при већим брзинама измене β_{12} ($d\beta_{12}/dt \leq \omega_1$), кинематску анализу карданског преносника треба вршити по једначинама 4.15 и 4.16.

У случају удвојеног карданског преносника кинематска анализа постаје знатно сложенија, а изрази за кинематске параметре доста компликованији. За свестрану анализу, неопходна је примена рачунара. Како би извођење једног општег модела и универзалних једначина добило неки једноставнији облик користи се неколико општих напомена.

За извођење универзалних једначина неопходно је поћи од једначине општег модела (4.6), код које је $\varphi_1 = f_1(t)$, $\beta_{12} = f_2(t)$ и $\beta_{23} = f_3(t)$. Диференцирањем наведене једначине по времену:

$$tg\varphi_3 = \frac{A \cdot tg\varphi_1}{B + C \cdot tg\varphi_1} \bigg/ \cdot \frac{d}{dt}$$

добија се израз за угаону брзину (ω_3) гоњеног вратила. Након сређивања израз добија коначан облик:

$$\omega_3 = \frac{A \cdot B \cdot \omega_1}{\cos^2 \varphi_1 \cdot [(B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2 + A^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1]} + \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot (\dot{A}B - A\dot{B})}{(B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2 + A^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1} + \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 \cdot (\dot{A}C - A\dot{C})}{(B + C \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2 + A^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1} \quad (4.17)$$

Динамичка оптерећења у механизму одређују се угаоним убрзањем гоњеног вратила, које се може одредити диференцирањем изрази за угаону брзину.

При свеобухватној анализи кинематских односа удвојеног карданског механизма са променљивим угловима између оса вратила, посебан проблем представља познавање закона измене угла β_{12} и β_{23} . Треба имати у виду да код низа машина, закон измене угла може бити и стохастичке природе. У таквим случајевима, целисходно је снимање измене угла, коме се уз то даје и математичка интерпретација. Са тако добијеним математичким изразом закона измене угла β , могућа је кинематска анализа удвојеног карданског преносника са променљивим угловима између оса вратила, [4].

5. Прорачун и пројектовање карданског међувратила

Задатак: Потребно је димензионисати карданско вратило из услова да напон савијања крстасте осовине не прелази $\sigma_{doz} = 40 \text{ MPa}$, као и да:

- нагиб карданског вратила буде $\beta = 8^\circ$,
- број обртаја вратила износи $n_{kv} = 900 \text{ min}^{-1}$,
- снага на вратилу износи $P_{kv} = 5 \text{ kW}$ и
- дужина вратила не прелази 200 mm.

Ако се полази од познатих података, могу се израчунати обртни момент погонског вратила и максимални обртни момент гоњеног вратила, и то као:

$$T_1 = \frac{9550 \cdot P_{kv}}{n_{kv}} = \frac{9550 \cdot 5}{900} = 53,056 \text{ Nm}$$

$$T_{2max} = \frac{T_1}{\cos\beta} = \frac{53,056}{\cos 8^\circ} = 53,577 \text{ Nm}$$

Претпоставка је да ће карданско вратило са ознаком ST-02.065x188 задовољити потребан услов за дужину вратила. Познато нам је из услова да се прорачун врши према напону на савијање крстасте осовине, па се из тог разлога усваја кореспондентна крстава осовина типа К.065 (табела 1) и усвајају следеће димензије:

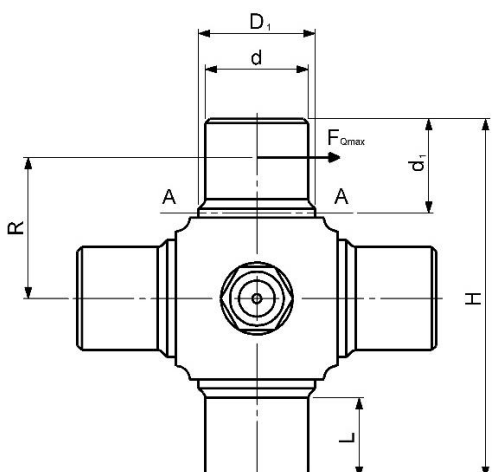
$$d = 11,5 \text{ mm}$$

$$D_1 = d + (1 + 2) \text{ mm} = 11,5 + 1,5 = 13 \text{ mm}$$

$$h_1 = 11 \text{ mm}$$

$$L = 8 \text{ mm}$$

Табела 1. Димензије крстасте осовине у mm, [1]

				
	d	H	h_1	L
<i>Тип К.065</i>	11,5	40	11	8

где су:

- d - пречник рукавца крстасте осовине,
- D_1 - пречник рукавца крстасте осовине на месту критичног пресека,
- h_1 - растојање од чела рукавца крстасте осовине до критичног пресека "А-А" и
- L - дужина рукавца (иглице лежаја).

Након тога се може израчунати отпорни момент крстасте осовине и максимална вредност обимне силе на виљушци гоњеног вратила, према следећим једначинама:

$$W = \frac{\pi \cdot D_1^3}{32} = \frac{\pi \cdot 13^3}{32} = 215,69 \text{ } mm$$

$$F_{Qmax} = \frac{T_{2max}}{2 \cdot R} = \frac{53,577}{2 \cdot 35} = 765,385 \text{ } N$$

где је:

- $2R$ - растојање између оса лежишта виљушке

Максимална вредност напона на савијање је:

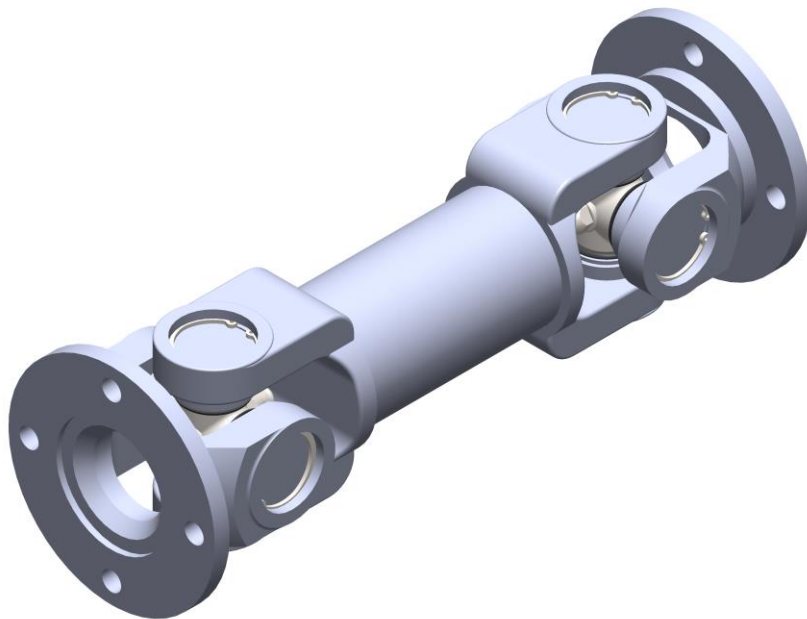
$$\sigma_{max} = \frac{F_{Qmax} \cdot l}{W} = \frac{765,385 \cdot 7}{215,69} = 24,83 \text{ } MPa < \sigma_{doz} = 40 \text{ } MPa$$

где је:

- l - крак дејства силе F_{Qmax} , који се рачуна као:

$$l = h_1 - \frac{1}{2}L = 11 - \frac{1}{2}8 = 7 \text{ } mm$$

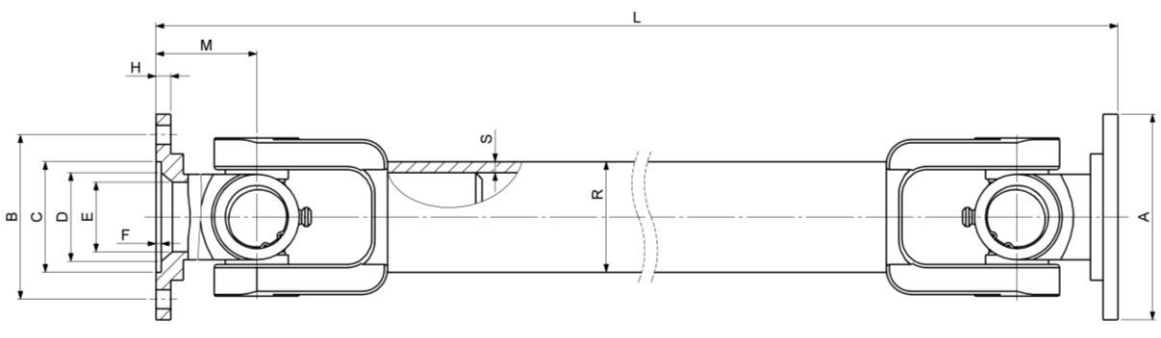
Изглед усвојеног карданског међувратила у изометрији приказан је на слици 14.



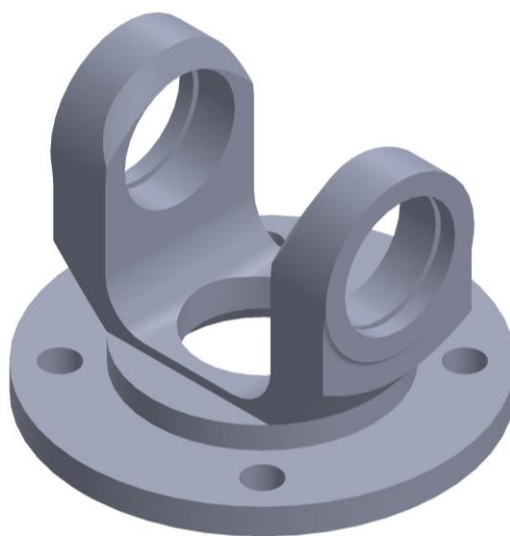
Слика 14. Изометријски приказ склопа карданског међувратила

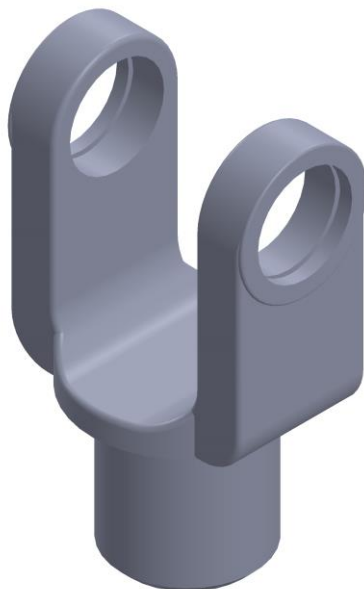
Димензије карданског међувратила су приказане у табели 2.

Табела 2. Димензије карданског вратила без телескопа у mm, ST-02.065x188, [1]

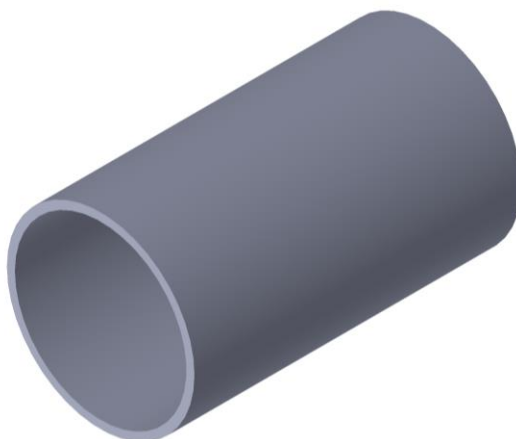
								
Tun 065	A	$B \pm 0,1$	C H7	D	E	F	G	H
	65	52	35	28	22	1,7	3	4,7
	I	J ¹⁾	K	L ²⁾	M	N ³⁾	R	S
	39	58	6	188	32	4	35	1,5
НАПОМЕНЕ: 1) круг ротације, 2) најмања могућа дужина ове изведбе, 3) број рупа на прирубници								

Изометријски приказ саставних елемената карданског вратила, су приказане на сликама 15, 16, 17, 18, 19 и 20. Софтвер који је коришћен за моделирање свих елемената носи назив "SolidWorks 2013". У прилогу А се налази склопни цртеж карданског вратила ознаке ST-02.065x188.

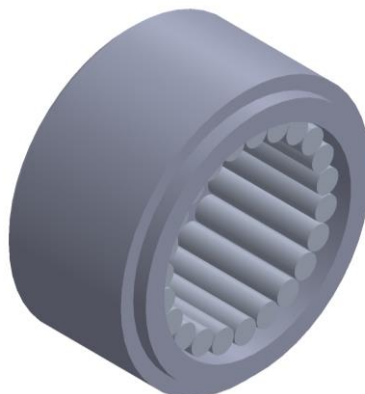
**Слика 15.** Виљушка погонског или гоњеног вратила



Слика 16. Вилушка карданског вратила



Слика 17. Цевни део вратила



Слика 18. Игличасти лежај



Слика 19. Ускочник

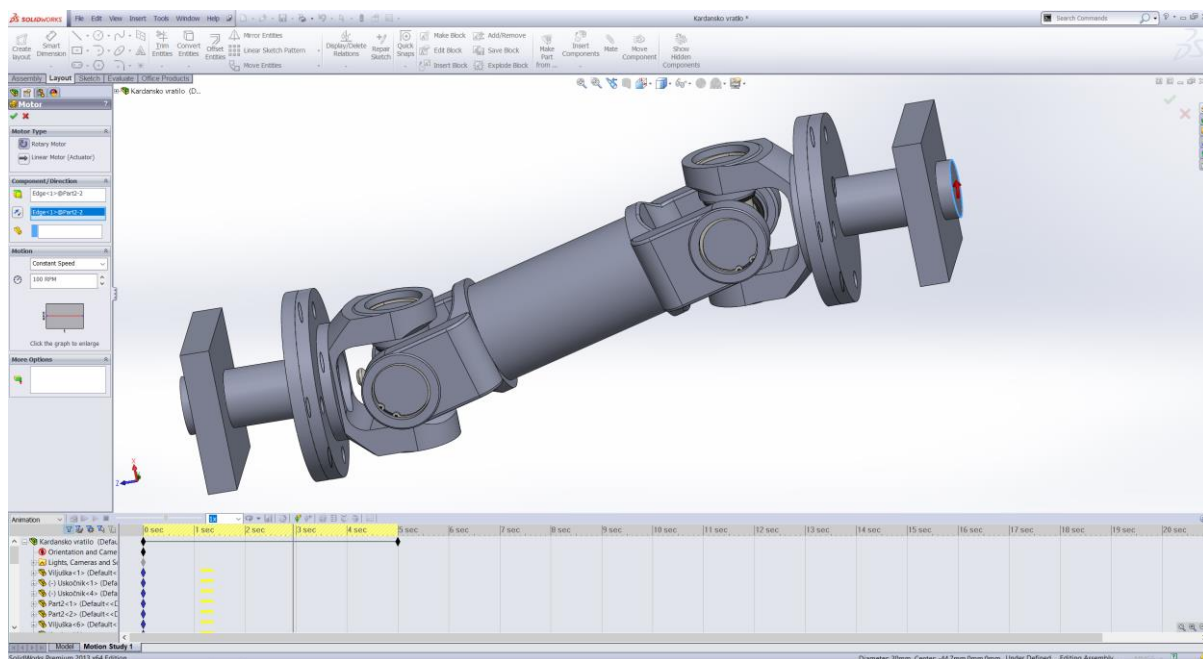


Слика 20. Граничник

5.1. Анализа карданског вратила уз помоћ рачунара

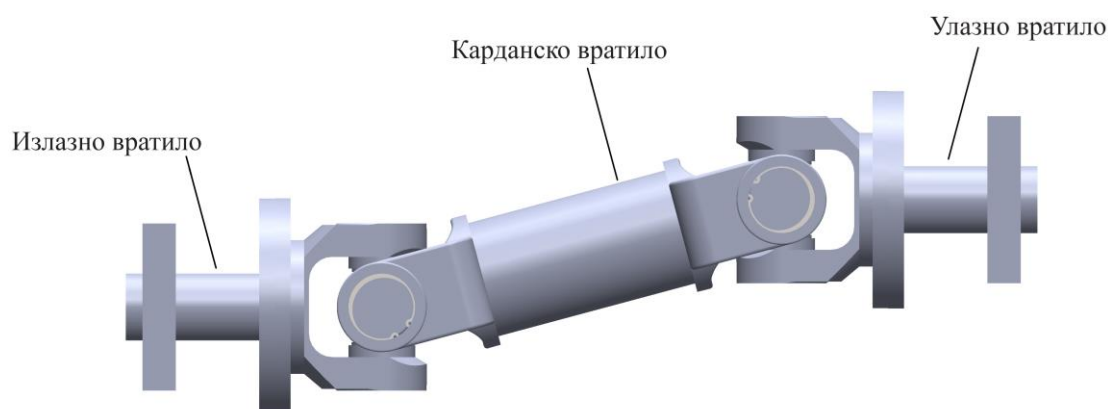
Како би се доказала синхроност у преносу обртног кретања на примеру удвојеног карданског вратила без телескопа, коришћен је софтвер “SolidWorks 2013” уз додатак “SolidWorks Motion”, који служи за симулацију и анализу кретања одређених механизма. Анализирана је кинематика ротационог кретања.

Пре него што је покренута анализа кретања карданског вратила, дефинисани су материјали свих саставних елемената. Након тога је дефинисан број обртаја улазног вратила, што је приказано на слици 21.



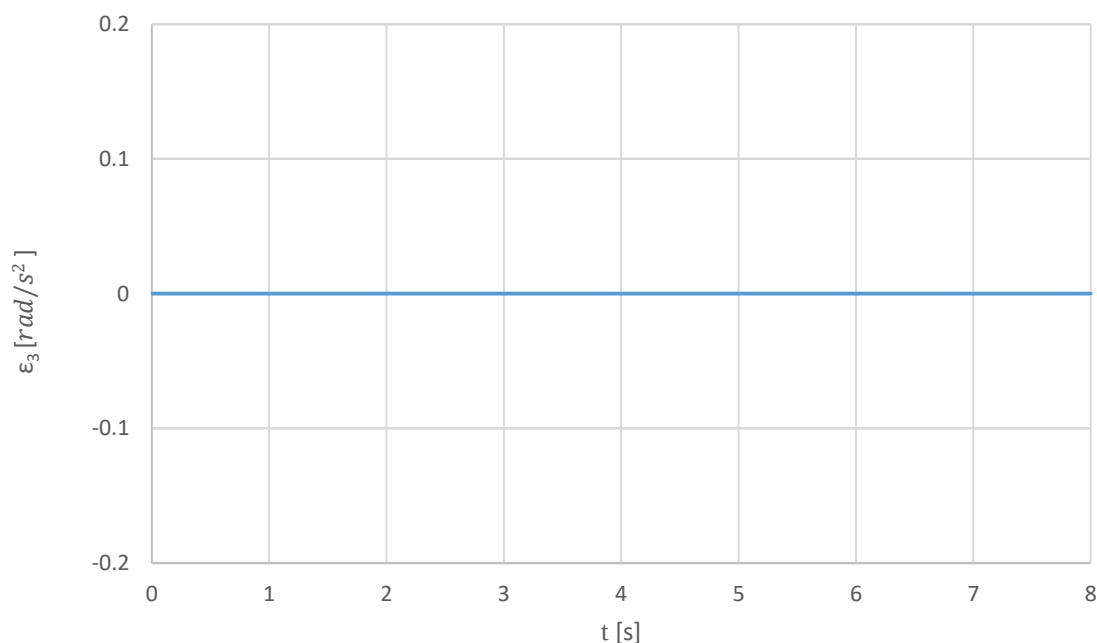
Слика 21. Дефинисање броја обртаја у радном окружењу “SolidWorks-a”

У првом случају карданско вратило је постављено под углом од 15° у односу на улазно вратило. Обзиром да је коришћен “Z” распоред вратила у дефинисању, улазно вратило је паралелно са излазним вратилом (слика 22).



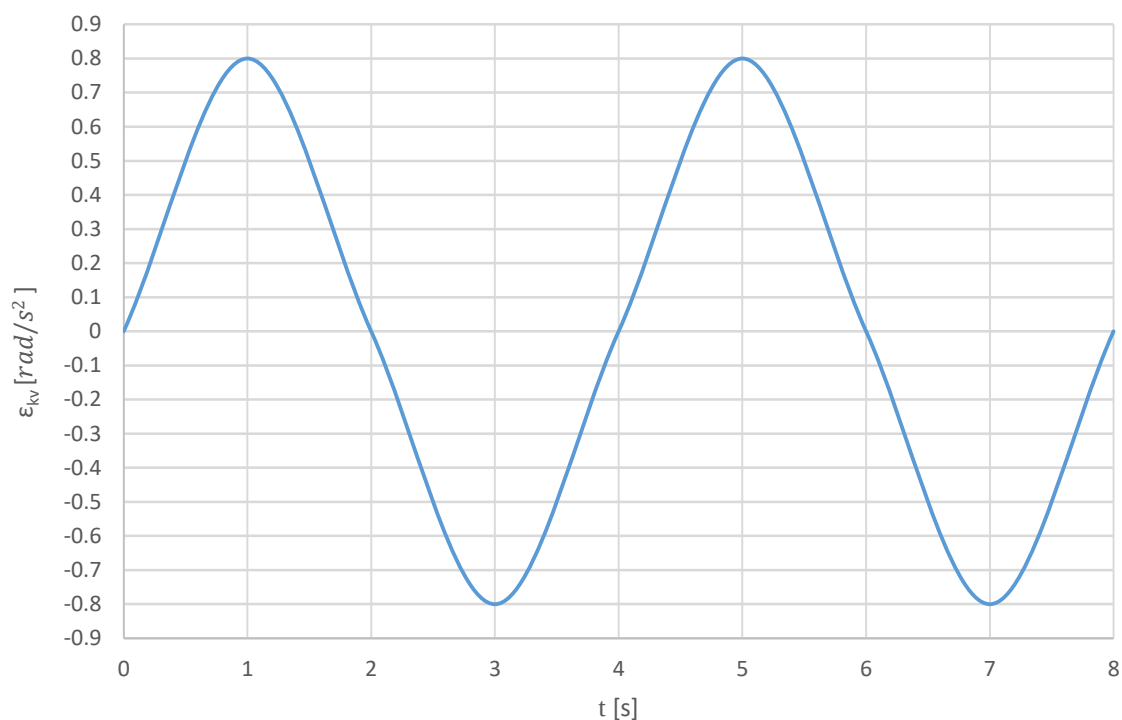
Слика 22. Карданско вратило постављено под углом од 15°

Затим је покренута анализа кретања као и генерисање графика промене угаоног убрзања гоњеног вратила у току времена. График приказује да је угаоно убрзање гоњеног вратила остало непромењено у току времена (слика 23).



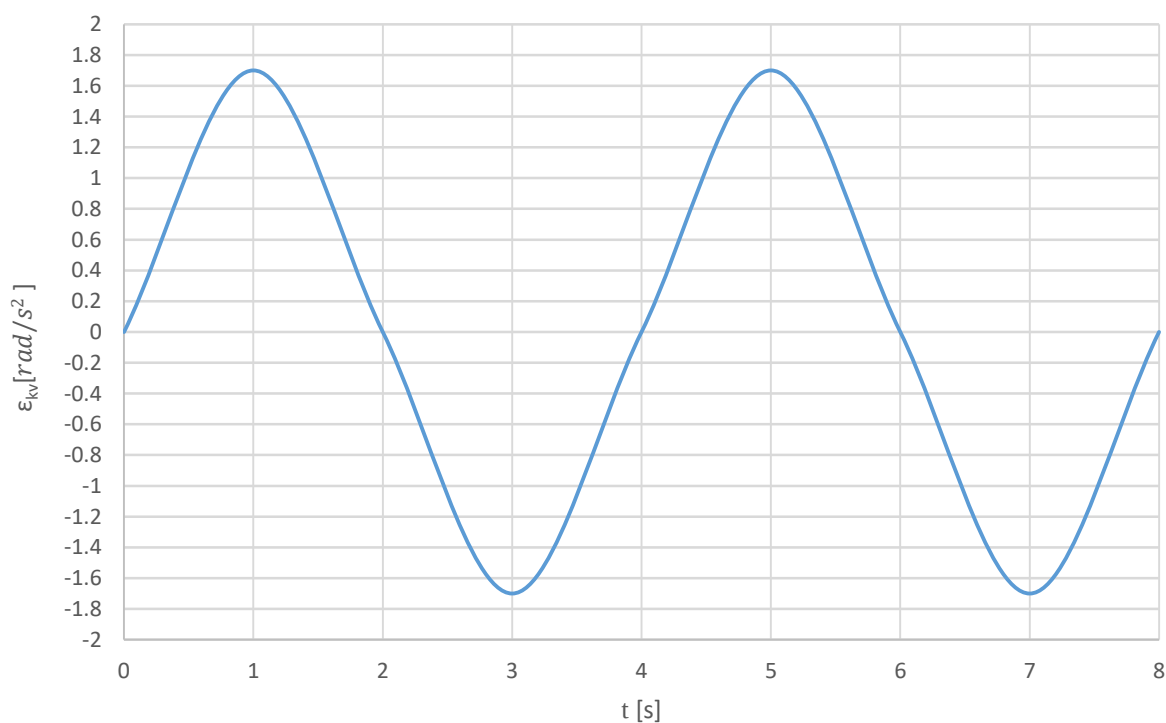
Слика 23. Промена угаоног убрзања гоњеног вратила у току времена

Анализа кинематике карданског преноса уз помоћ софтвера доказује теорије да је уз помоћ карданског вратила могуће остварити константне угаоне брзине погонског и гоњеног вратила. Резултати анализе, такође, показују да постоји неравномерност у обртном кретању карданског вратила, што је приказано на слици 24.



Слика 24. Промена угаоног убрзања карданског вратила у току времена (15°)

У другом случају карданско вратило је постављено под углом од 25° у односу на улазно вратило. Очекивано је да ће резултати промене угаоног убрзања гоњеног вратила остати исти, такође се и промена угаоног убрзања код карданског вратила повећала, што је приказано на слици 25.



Слика 25. Промена угаоног убрзања карданског вратила у току времена (25°)

6. Подмазивање карданских преносника

Површине карданских вратила које учествују у клизању и котрљању, неопходно је подмазивати и осигурати од истицања уља, а такође и од продирања прашине и абразивних честица.

Крста осовина има четири најфиније обрађена и површински окаљена рукавца, који леже у прецизним игличастим лежајевима, а ови у виљушкама вратила, осигурани од испадања помоћу ускочника. Конструкција крстасте осовине је изведена тако да омогућује подмазивање сва четири лежаја крста, помоћу мазалице смештене на крстастој осовини. За подмазивање могуће је користити литијум сапонифициране масти или хипиодна уља домаћих и страних произвођача, мање вискозности. Боље резултате у подмазивању игличастих лежајева дају конзистентна мазива, јер поседују боља антикорозиона својства, адхезиона својства, као и довољну чврстоћу мазивог слоја, чиме се смањује вероватноћа појаве скоринга. Век трајања лежајева подмазиваних трансмисионим уљима је приближно 1,5 до 1,7 пута мањи од века лежајева подмазиваних одговарајућим мастима. Још бољи резултати се постижу повећањем квалитета обраде рукавца, [4].

Коефицијент трења челика у жљебном споју, који се јавља при телескопирању карданског вратила, зависи од квалитета подмазивања. При добром подмазивању креће се од 0,06 до 0,10. У случају недовољног подмазивања или присуства абразива, коефицијент трења нагло расте и достиже вредност при задирању 0,35 - 0,4. Аксијална сила при томе знатно порасте. Она делује на међувратило карданског преносника и оптерећује лежајеве, кућиште и друге чланове склопа. Зато је неопходно систематско подмазивање жљебног споја карданског преносника. Аксијално оптерећење се знатно смањује уколико се трење клизања, при аксијалном померању, замени трењем котрљања (жлебна веза са куглицама или ваљцима), [4].

Ожљебљени спој се подмазује преко мазалице, постављене на телескопског виљушци. Правилним избором мазива, може се знатно смањити сила трења. Експериментална испитивања су показала да се највеће смањење коефицијента трења клизања у жљебовима постиже коришћењем графитне масти, уља за коничне зупчанике и трансмисионим ауто-тракторским уљима. Упоредјујући са широко коришћеним пластичним мазивима, ова мазива смањују силу трења више од 75%, [4].

Ефикасно средство продужења века трајања високооптерећеног ожљебљеног дела вратила, на чијим се контактним површинама јављају високи притисци и температуре, је примена специјалних тешкотопљивих пластичних мазива са додатком дисулфид молибдена. Жлебна вратила са молибденовим мазивом могу издржати већа оптерећења без задирања, него са обичним пластичним мазивима. Телескопски део вратила се може подмазивати и мастима за шасије или њима сличним мазивима. Основни узрок смањења века трајања карданских спојева је образовање чепова у мазивим каналима, изазваних оксидационим процесима у уљу. Са повећањем вискозности, таложењем и растом чепова, хабање рукаваца се повећава [4].

Ефикасне методе у борби са појавом чепова су:

- претходно чишћење мазива,
- побољшање херметичности система подмазивања и
- примена конструкционих решења са проточним системом подмазивања.

Поједини произвођачи препоручују подмазивање крстастог зглоба сваких 2000 часова рада, а телескопски део вратила после сваких 450 часова рада. Уколико карданска вратила раде у отежаним условима, препоручени интервали подмазивања се обавезно скраћују, [4].

За подмазивање претходно пројектованог карданског вратила и котрљајних лежајева на рукавцима крстасте осовине, користи се алуминијум комплексна мазива маст са додатком MoS_2 . Ова мазива маст носи назив FAMALPLEX[®] 2MS, производи се и пуни у фабрици мазива “*ФАМа.д.*” у Крушевцу. FAMALPLEX[®] 2MS алуминијум комплексна мазива маст је базирана на минералним уљима високог индекса вискозитета и чврстих мазивих додатака који повећавају способност мазивог филма у делу ношења високих специфичних оптерећења и обезбеђују сигурност мазивог склопа, посебно када је отежано редовно домазивање.

Предности FAMALPLEX[®] 2MS мазиве масти су, [7]:

- изузетна механичка стабилност,
- одлична стабилност на смицање,
- добра термичка и хемијска стабилност,
- добра реолошка својства,
- повећана способност подношења високих оптерећења,
- изузетно су постојане на воду, влагу и према благим растворима киселина...

7. Закључак

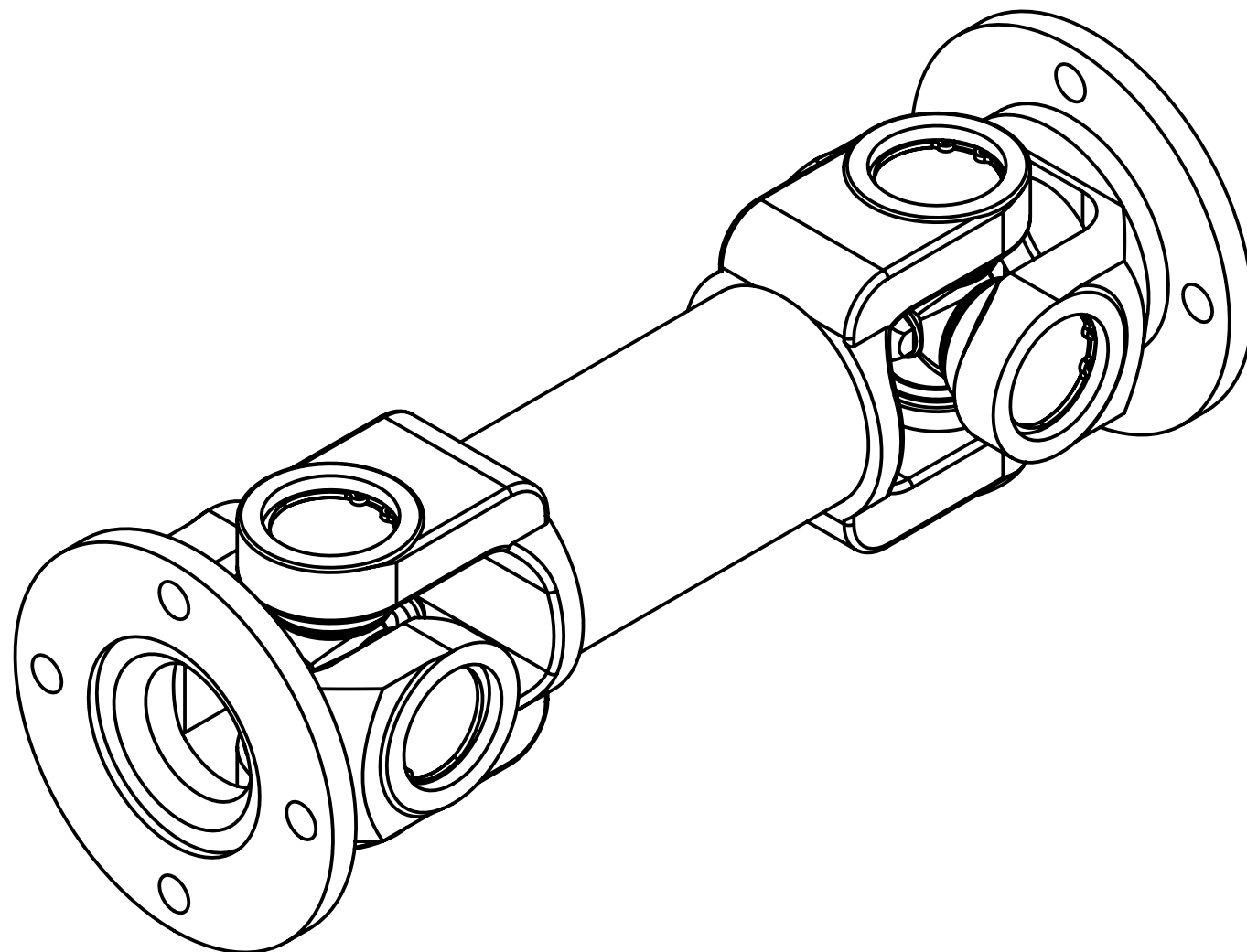
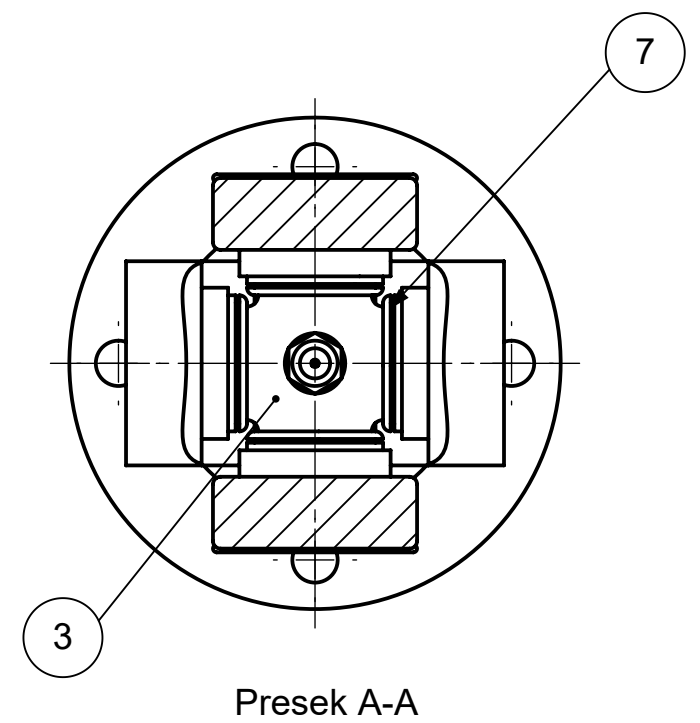
Циљ завршног рада је био да се на једном месту дају карактеристична поглавља у решавању кинематике проблема неравномерности преноса обртног кретања и кинематике удвојеног карданског преносника.

Као бољи увод у тему наведени су основни елементи карданског преносника и кинематика самог карданског зглоба. Главна карактеристика карданских механизма јесте да преносе обртно кретање под извесним углом, међутим постоји неравномерност у преносу обртног кретања. Неравномерност се уклања употребом карданског вратила. Карданско вратило се састоји из две просте карданове спојнице повезано међувратилом. Применом карданског вратила постиже се синхроност само погонског и гоњеног вратила, док је обртање међувратила неравномерно. Инерцијалне силе, које при томе настају, знатно оптерећују зглобове нарочито при већим бројевима обртаја. Тежиште рада приписано је кинематици удвојеног карданског преносника тј. карданског вратила. Комплетно извођење образаца за прорачун кинематике обртног кретања карданског вратила је обухваћен, као и елементарни приказ прорачуна при реалним условима рада. Теорије о неравномерном обртању карданског вратила су доказане анализом кинематике обртног кретања уз помоћ рачунара. Испитати реалне услове уз помоћ рачунара, у којима функционише карданско вратило, је немогуће због тренутних могућности софтвера, зато при конструисању карданског вратила треба имати у виду да код низа машина, закон измене углова може бити и стохастичке природе. У таквим случајевима, целисходно је снимање измене углова, коме се уз то даје и математичка интерпретација. Подмазивање је такође један од битнијих елемената у одржавању механичких преносника, што не одступа ни од карданских преносника. Уз помоћ подмазивања могуће је остварити дужи радни век преносника, смањење трења што доводи до смањења активних сила у зглобовима карданског вратила.

Из свега поменутог, закључује се да је могуће остварити синхроност у преносу обртног кретања између погонског и гоњеног вратила употребом карданског вратила, али да то доводи до неравномерности обртања самог карданског вратила и да ова правила важе само у идеалним условима.

8. Литература

- [1] Стојановић Б., Благојевић М.: *Механички преносници*, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац, 2015.
- [2] Ањоша А., Микић Д.: *Развој карданских вратила кроз историју*, Техника и информатика у образовању 2012, Чачак, 2012.
- [3] Симић Д., Јанковић А.: *Карданско вратило*, Машински факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац, 1993.
- [4] Танасијевић С.: *Механички преносници*, Југословенско друштво за трибологију, Крагујевац, 1994.
- [5] Seherr H., Schmelz F., Aucktor E.: *Universal joints and Driveshafts*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2006.
- [6] Глигорић Р.: *Механизми пољопривредних машина*, Пољопривредни факултет Универзитета у Новом Саду, Нови Сад, 2015.
- [7] Фабрика мазива ФАМ а.д., www.fam.co.rs, www.fam.co.rs/proizvodi/mazive-masti-i-specijalna-maziva/63-aluminijumove-kompleksne-ep-mazive-masti/1373-famalplex-2ms, приступљено 26.6.2018.



8	2		Mazalica	DIN 71412 AM6x1	
7	8		Graničnik		
6	8		Igličasti ležaj	HK1511	
5	1		Centralni deo		
4	2		Viljuška vratila		
3	2		Kardanski krst	K.065	
2	8		Uskočnik	DIN 472 Ø22	
1	2		Viljuška		
Poz.	Kol.	Jm.	Naziv	Standard - izabrane karakteristike	Primedba
					
				Masa	Razmera 1:1
			Datum	27.6.2018.	Naziv: Kardansko vratilo
			Obrad.	T. Mutavdžić 11/2015	
			Stand.		
			Odobr.		
			FAKULTET INŽENJERSKIH NAUKA UNIVERZITETA U KRAGUJEVCU		Oznaka: ST-02 065x188
					List: 1
					L
St. i.	Izmene	Datum	Ime	Izv. pod.	Zamena za: