



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Примењена механика и аутоматско управљање

Предмет: Рачунарски алати

Број индекса: 701/2015

Катарина В. Лековић

Моделирање прслине

Завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Др Ненад Грујовић

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да представи основне елементе механике лома као и пример појаве прслине у материјалу у софтверу *Abaqus*.

Препоручена литература:

[1] Јовичић Г., Живковић М., Вуловић С.(2011):Прорачунска механика лома и замора, Машински факултет у Крагујевцу, ISBN 978-86-86663-65-8

[2] Данијела Д. Живојиновић (2013): Примена механике лома на процену интегритета заварених конструкција од легура алуминијума, докторска дисертација, Универзитет у Београду

Крагујевац, датум

ментор:

Име, презиме и звање ментора

Изјављујем да је Завршни рад Формални оквир управљања комуникацијом с аспекта заштите интелектуалне својине и ауторских права на високошколским институцијама у Србији резултат мог сопственог рада, а да су коришћене библиографске референце јасно наведене, као и сумарно у оквиру Литературе.

Захваљујем се ментору др. Ненаду Грујовићу као и др. Фатими Живић на корисним саветима, пруженој подршци и примедбама током израде овог рада. Такође, захваљујем се Андреји Радовановићу на помоћи око практичног дела рада, др. Владимиру Миловановићу и др. Мирославу Жиивковићу, својој породици као и свим колегама и пријатељима који су ми пружили своју несебичну помоћ током студирања и израде овог рада.

Кандидат:

Катарина В. Лековић

Апстракт:

У раду су представљени основни параметри механике лома и моделирање прслине која настаје у фрикционом споју.

У уводном делу наведене су карактеристике фрикционо завареног споја који се моделира у *Abaqus*-у. Потом је представљена проширена метода коначних елемената и на крају упутство за моделирање прслине са резултатима фактора интензитета напона.

Кључне речи: *XFEM*, *Abaqus*, моделирање, прслина

Abstract:

In this paper the basic parameters of fracture mechanics and modeling of crack that occurs in friction joints are presented.

The introduction includes characteristics of the friction welded joint for which modeling is done in *Abaqus*. Further on, Extended Finite Element Method and directions for modeling of crack with the results of stress intensity factor are presented.

Keywords: *XFEM*, *Abaqus*, modeling, crack

Садржај

УВОД	7
1. Заваривање трењем као технологија спајања елементата код путничког железничког вагона.....	9
1.1 Основни принципи фрикционог заваривања мешањем	9
1.2 Структура завареног споја добијеног FSW поступком	13
2. Моделирање FSW споја.....	16
3. Проширена метода коначних елемената X-FEM (Extended Finite Element Method) ...	18
3.1 Увод.....	18
3.2 Основе проширене методе коначних елемената	19
3.2. Функције побољшања.....	21
3.3 Дефинисање поља померања у XFEM-у	23
3.4 Општи облик проширене методе коначних елемената	24
3.5 Примена XFEM-а у ABAQUS-U.....	26
3.6 Критеријуми лома	27
3.6.1 Критеријум критичног напона – S_{cr}	28
3.6.2 Критеријум критичног отварања прслине	29
3.6.3 Критеријум дужине прслине у зависности од времена – $a=f(t)$	30
3.6.4 Критеријум-техника виртуелног отварања прслине	32
3.6.4.1 ВК закон.....	34
3.6.4.2 Power закон	34
3.6.4.3 Reeder-ov закон	35
3.6.5 Критеријум ниско – цикличног замора	35
3.6.5.1 Почетак раздвајања површина.....	36
3.6.5.2 Заморни раст прслине коришћењем PARIS – овог закона	37
3.7 Недостаци проширене методе коначних елемената	38
4. Алгоритам прорачуна.....	39
5. Прорачунски модел: FSW спој	43
ЗАКЉУЧАК	75
Попис слика.....	76
Литература.....	80

УВОД

Средином XX века, услед необјашњених хаварија бродова, мостова, железничких пруга појављује се све већи број истраживача у области механике лома. Један од истакнутијих међу њима јесте *Irwin*, према коме важну улогу при ширењу прслине игра концентрација напона у непосредној околини врха прслине. Као квантитативна мера концентрације напона у околини врха прслине уводе се величине фактора интензитета напона: K_I , K_{II} , K_{III} .

Шездесетих година XX века појављују се нови, фундаментални радови из механике лома. Најзначајнији међу њима су радови *Rice* – а засновани на дефинисању J интеграла и анализи његових особина. Теорија заснована на коришћењу J интеграла развијена је са циљем да се успостави квантитативна мера појаве нестабилног ширења прслине. Развија се критеријум лома заснован на примени J интеграла.

Одређивање основних параметара механике лома базира се на дефинисању концентрације напона у околини врха прслине. Једно од опште прихваћених правила за коришћење аналитичких метода при одређивању основних параметара механике лома јесте теза о аутономности прслине или концепт сличног понашања. Теза о аутономности је заснована на претпоставци да поље напона у околини врха прслине зависи од вредности средњих напона, еластичних својства материјала и облика прслине. Ова теза је прихватљива уколико је K зона мала у односу на димензије прслине, где се под K зоном подразумева област у околини врха прслине у којој може да се примењује теорија асимптотског напонског поља.

Теоријско одређивање параметара механике лома представља сложен математички задатак, посебно код конструкција са сложенom геометријом и условима оптерећења. Аналитичко одређивање параметара механике лома попут: фактора интензитета напона K , J интеграла, отварања врха прслине, је могуће само у малом броју случајева. Код решавања проблема са сложенom геометријом и сложеним условима оптерећења потребно је користити нумеричке методе прорачуна.

Један од практичних циљева примне методе коначних елемената у прорачунској механици лома јесте одређивање концентрације напона око врха прслине. Други примарни циљ примене методе коначних елемената у прорачунској механици лома јесте предвиђање могућности ширења прслине све до појаве лома.

Основни параметри у прорачунској линеарно еластичној механици лома су фактори интензитета напона K_I , K_{II} , K_{III} као и брзина ослобођене енергије G . У случају еласто – пластичне анализе основни параметри прорачунске механике лома су J интеграл и фактор отварања прслине.

Метода коначних елемената у прорачунској механици лома има два правца развоја. Један је заснован на коришћењу класичних коначних елемената, док је други, који датира из последње деценије двадесетог века, заснован на развоју унапређене методе коначних елемената.

Класични коначни елементи, нашли су широку примену при процени механичког стања постојећих прслина. Међутим, у примени класичне методе коначних елемената при симулацији раста прслине наилази се на низ потешкоћа. Те потешкоће се превасходно огледају у потреби да се при симулацији ширења прслине мрежа стално изнова генерише у складу са новонасталим положајем прслине, што је посебно проблем уколико је конструкција сложена. Други проблем се огледа у потреби да се оствари велики број степени слободе (фина мрежа) у околини врха прслине.

Снажан развој рачунарске технике, утицао је да се појаве нове унапређене методе коначних елемената, које су, између осталог, нашле примену и у прорачунској механици лома. Нове методе, које се појављују у последњој деценији двадесетог века, су: проширена метода коначних елемената (*eXtended Finite Element Method, X-FEM*) и безмрежна метода коначних елемената (*Element Free Galerkin Method, EFG*).

Посебан значај примене прорачунске механике лома се јавља у конструкцијама код којих је већ уочено постојање једне или више иницијалних прслина. У том случају је неопходно утврдити да ли ће напонска стања којима је изложена конструкција довести до даљег раста прслине, да ли ће се прслина ширити стабилно или нестабилно, и на основу тога проценити преостали век трајања испитиване конструкције. Овим питањима се бави нова научна дисциплина која превасходно проучава интегритет конструкција [1].

1. Заваривање трењем као технологија спајања елементата код путничког железничког вагона

1.1 Основни принципи фрикционог заваривања мешањем

Поступак фрикционо заваривање мешањем (*Friction Stir Welding-FSW*) је развијен и патентиран у децембру 1991. године од стране *W. Thomas*-а из Института за заваривање (*TWI – The Welding Institute, Cambridge, UK*).

Иако *FSW* представља релативно нов начин заваривања, убрзо почиње да се користи у авио саобраћају, као прилично ефикасан начин спајања компоненти од легура алуминијума. Велики успех постиже и у другим индустријским гранама, као што су железничка и аутомобилска индустрија.

Овај процес се обавља у чврстом стању, па је као такав погодан за заваривање како истородних, тако и различитих типова материјала. При томе се добијају одличне механичке карактеристике завареног споја.

FSW је настао као резултат истраживања вршених у циљу изналажења нових решења при заваривању легура алуминијума, како би се избегли проблеми који се јављају при конвенционалним процесима заваривања (локално загревање материјала до и преко тачке топљења, при чему се у значајној мери смањују механичка својства материјала). То је процес спајања материјала у чврстој фази, комбинованим деловањем топлоте и механичког рада. У току овог процеса температуре које се јављају у зони споја не прелазе тачку топљења материјала, већ се крећу у интервалу од 400-500 °C. При томе, не настају уобичајене грешке које су карактеристичне за процес топљења.

Овим, релативно новим поступком заваривања, могуће је заварити већину алуминијумских легура, па чак и оне које нису погодне за заваривање конвенционалним поступцима.

FSW је посебно погодно за спајање алуминијумских легура са великим распоном дебљина плоча. Могуће је заварити алуминијумске лимове дебљине од 0.5 до 50 *mm* у једном пролазу, односно до 100 *mm* дебљине формирањем двостраног вара. Такође, овим поступком заваривања могуће је успешно заварити и следеће материјале: бакар и његове легуре, олово, титанијум и његове легуре, легуре магнезијума, легуре олова, цинк, легуре никла, конструкциони челик, микролегиране челике, меки челик, нерђајући челик, аустенити и дуплекс челик, полимери.

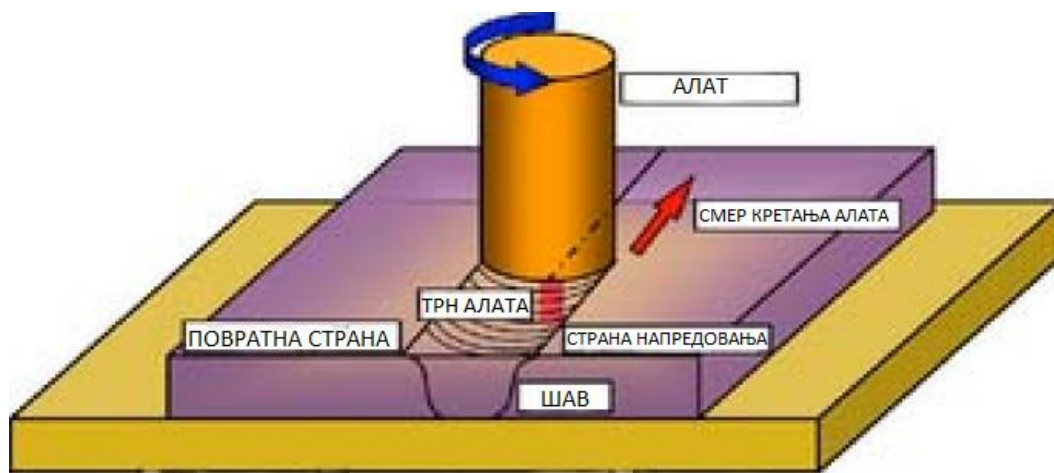
Поступак фрикционог заваривања мешањем (помоћу алата), као веома савремен поступак, нашао је своје место у производњи процесне опреме, производњи шинских возила, бродоградњи, аутомобилској индустрији, авиоиндустрији, производњи

космичких летилица, итд. Овим поступком се могу заваривати плоче, лимови, цилиндрични делови, склопни делови и то у свим могућим међусобним положајима.

Данас, заваривање представља најзаступљенији начин (технологију) спајања металних структура, нарочито конструкција са високо-габаритним мерама, као што су мостови, бродови, вагони, авиони.

До недавно коришћена техника спајања танкозидних структура израђених од легура алуминијума посредством закивака, у последње време се све више замењује новом технологијом спајања – фрикционим заваривањем мешањем.

Поступак *FSW* се остварује по принципу приказаном на слици 1. Лимови сучеоно постављени, притисну се један уз други и чврсто фиксирају за подложну плочу.

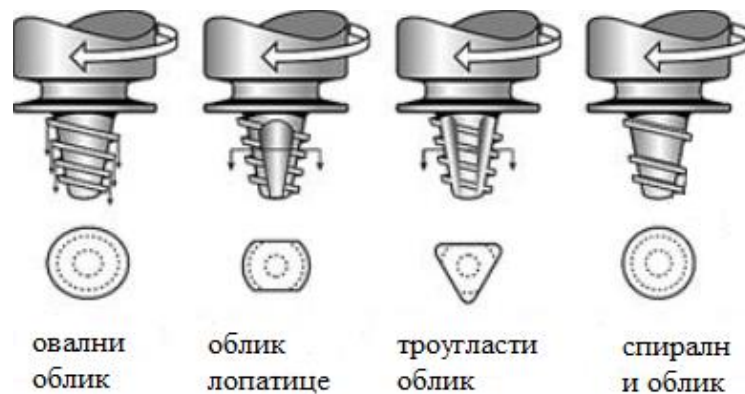


Слика 1. *FSW* поступак [2]

При томе користи се специјално обликован алат (Табела 1). Алат је цилиндричног облика и састоји се од ваљка и трна алата. Пречници ова два дела су различити, док је прелаз између оба дела раван и назива се чело ваљка. Облик трна може бити различит и служи за генерисање топлоте у споју (слика 2).

Табела 1. Алати [2]

<i>Cylindrical</i>	<i>Whorl™</i>	<i>MX ·triflaute™</i>	<i>Flared triflaute™</i>	<i>A-skew™</i>	<i>RE-stir™</i>
цилиндрични	спирални	MX- трољбни	šireći trožlební	A-zakošeni	Re-mešajući



Слика 2. Облици трна алата [2]

У почетном тренутку, алат се позиционира изнад лимова, при чему је његова оса нормална на додирну линију лимова. Процес започиње ротацијом алата (око сопствене осе) и ураћањем алата у материјал, по линији споја. Када чело ваљка додирне лимове, генерише се топлота и при томе се материјал лимова загрева до пластичног стања. Трн алата продире у материјале дуж линије споја. Потом, алат врши транслаторно кретање дуж линије споја два материјала која се заварују, уз истовремену ротацију. Након формирања завареног споја, алат завршава транслаторно кретање вертикалним извлачењем трна алата из основног материјала.

У зависности од конструкције уређаја за заваривање могуће је остварити различите начине кретања:

- подложна плоча је фиксирана за сто машине и врши хоризонтално транслаторно кретање заједно са лимовима, док алат врши само ротационо кретање (око своје осе).
- подложна плоча може бити непокретна а да транслаторно кретање врши алат.

У току заваривања се не користи додатни материјал и не долази до топљења материјала који се заварују. Дакле, алат и основни материјал остају у чврстом стању, док се у зони заваривања основни материјал налази у благо размекшаном, „пластичном“ стању. Оно је последица генерисања топлоте, која настаје као резултат трења између алата и основног материјала.

Дакле, фриксионо заваривање мешањем је процес базиран на интензивном мешању материјала око алата, а затим сједињавању и одлагању, тако добијеног материјала, иза трна алата. У зони споја се врши генерисање топлоте услед трења које настаје између трна алата и материјала који се заварује. Сам пренос топлоте се поспешује пластичним течењем материјала око трна алата и он зависи од особина материјала и од параметара заваривања. Параметри заваривања су: брзина ротације алата и релативна брзина алат-материјал, притисна сила, брзина заваривања, геометрија алата и време заваривања.

Термо-механички процеси који се одвијају у самом вару утичу на брзину загревања и хлађења, деформацију и течење материјала, а самим тим и на рекристализацију и механичке карактеристике завареног споја.

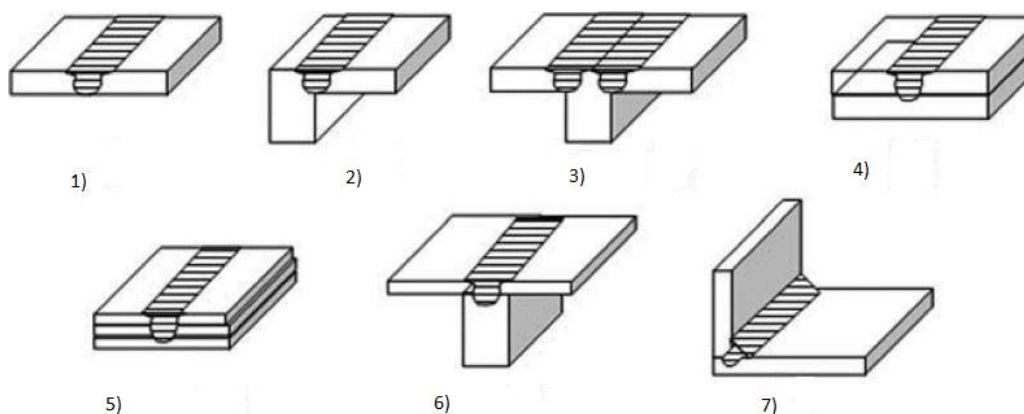
Основни параметри процеса заваривања су релативна брзина, сила и време заваривања.

У току процеса фрикционог заваривања мешањем, најинтензивније генерисање топлоте настаје на фронталном делу фрикционе површине трна алата, јер она долази у додир са незагрејаним материјалом на који трн алата наилази у смеру свог трансляторног кретања. На преосталим деловима трна алата интензитет генерисања топлоте је мањи, јер су већ у контакту са претходно загрејаним и пластичним материјалом.

Мешањем загрејаног материјала добија се ситнозрнастија структура, чиме се побољшавају, механичке карактеристике шавова. На тај начин, код неких случајева, добија се спој чије су механичке карактеристике боље у односу на основни материјал [2].

На слици 3, приказане су врсте спојева које се могу добити помоћу фрикционог заваривања мешањем:

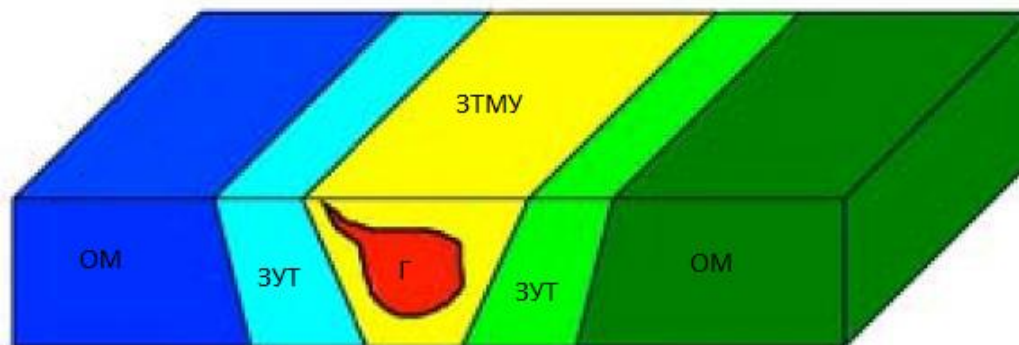
- 1) Сучеони спој,
- 2) Угаони-сучеони спој,
- 3) Т-спој три елемента
- 4) Једноструки преклопни спој,
- 5) Вишеструки преклопни спој,
- 6) Т-спој два елемента,
- 7) Угаони спој.



Слика 3. Врсте спојева добијених поступком FSW [2]

1.2 Структура завареног споја добијеног FSW поступком

Анализом макроструктуре узорка алуминијумских легура заварених поступком FSW, установљено је да постоји извесна несиметричност попречног пресека споја у односу на линију споја. При томе се уочава карактеристична структура облика тзв. „прстена лука“ у централној зони пресека. (Слика 4.)



Слика 4. Попречни пресек споја добијеног FSW поступком [2]

- Основни материјал (ОМ)
- Зона утицаја топлоте (ЗУТ)
- Зона термо-механичког утицаја (ЗТМУ)
- Грумен (Г)- део ЗТМУ

Узрочник асиметричности јесте сама природа течења материјала током процеса заваривања. Дакле, на слици 4. јасно се уочава несиметричност између стране напредовања (десно) и повратне/пратеће (лево) стране попречног пресека завареног споја. Страна напредовања вара је она страна споја код које се поклапају смерови вектора брзине ротације и праволинијског кретања алата, за разлику од повратне стране која се дефинише као страна на којој су ова два вектора супротног смера. Ова разлика у суперпонирању вектора брзина на страни напредовања, односно на повратној страни, узроковала је различитости при простирању топлоте и течења, а самим тим и механичким особинама. На пример: код алуминијумских легура које ојачавају старењем, тврдоћа у ЗУТ-у повратне стране је нижа, услед чега при затезном оптерећењу до лома долази баш у овој зони.

Промену особина основног материјала изазивају следећи фактори: максимално достигнута температура (последича топлоте индуковане трењем током заваривања), брзина хлађења, дејство притисне силе и течење материјала услед механичког мешања.

Управо ове појаве, пропраћене променом особина основног материјала, узрокују постојање неколико зона у завареном споју различитих по својој структури и особинама:

- **Основни материјал (ОМ)** – ова зона није изложена дејству механичког оптерећења и температуре, јер је на довољно великој удаљености од вара. Самим тим тако нема промена у микроструктури и механичким особинама и оне одговају свом полазном стању.
- **Зона утицаја топлоте (ЗУТ)** – је део основног метала близу вара, који је изложен дејству повишене температуре, али не и дејству механичког оптерећења. Током процеса заваривања у овој зони се одвија одређени температурни циклус загревања и хлађења, услед чега долази до промена у микроструктури и механичким особинама. Величина ове зоне зависи од односа времена и температуре заваривања, као и од растојања од осе вара.
- **Зона термо – механичког утицаја (ЗТМУ)** – је део основног материјала који се налази непосредно испод алата. Истовремено је изложен дејству механичког оптерећења и повишеној температури, што има за последицу појаву значајних промена у микроструктури, а самим тим и у механичким карактеристикама материјала.

Код алуминијумских легура, унутар ЗТМУ могуће је уочити три области:

1. Најизраженија је рекристализована област, тзв. **грумен**, која је услед дејства механичког оптерећења знатно деформисана као и због различитих вредности температуре у материјалу током заваривања.
2. Лево и десно од грумена налази се област која је деформисана у мањој мери у односу на грумен. У овој области може али и не мора доћи до рекристализације зрна, у зависности од врсте легуре.
3. Трећа област се налази изнад грумена. Настаје током пролаза ивице ваљка са повратне стране преко претходно формираног грумена.

Код других материјала, за разлику од легура алуминијума не постоји јасно изражена знатно рекристализована зона- тзв. грумен.

- **Грумен вара** – је део основног материјала, непосредно испод алата. Претрпео је највеће пластичне деформације, као резултат директног утицаја дејства трна алата. Ширина грумена је обично нешто већа од пречника трна алата. Микроструктура грумена се састоји од хомогено распоређених ситних рекристалисаних зона, што је последица процеса рекристализације који се у њему одвијају. У зависности од врсте легуре и услова заваривања, величина зрна се

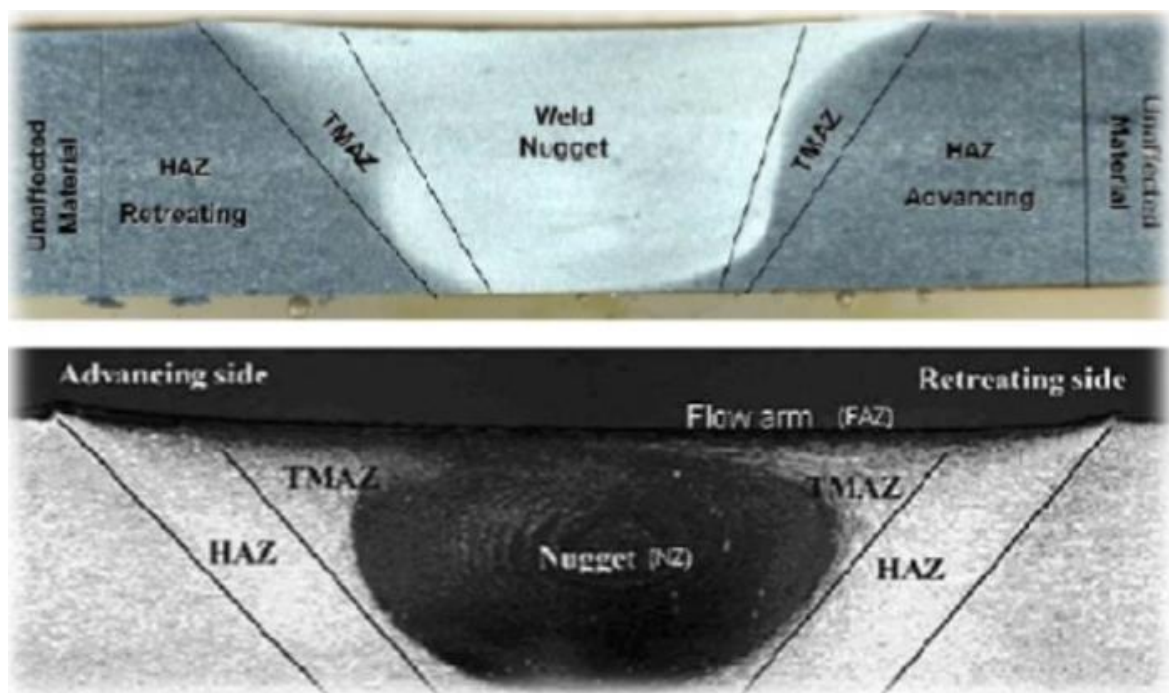
креће од 2 до 10 μm . Несиметричност шава се односи на сам грумен. На страни напредовања прелаз грумена ка ЗУТ-у је веома нагао, док је на повратној страни вара знатно постепенији.

Лице шава је горња површина споја која је у контакту са ваљком алата, док је корен шава доња површина споја која је у контакту са потпорном плочом [2].

2. Моделирање FSW споја

На слици 5 су дата два металографска снимка FSW споја две сучеоно заварене плоче. На слици се јасно уочавају описане зоне: грумен или језгро *NUGGET*, зона термомеханичког утицаја *ТМУ*, зона утицаја температуре *ЗУТ* и основни материјал *ОМ*.

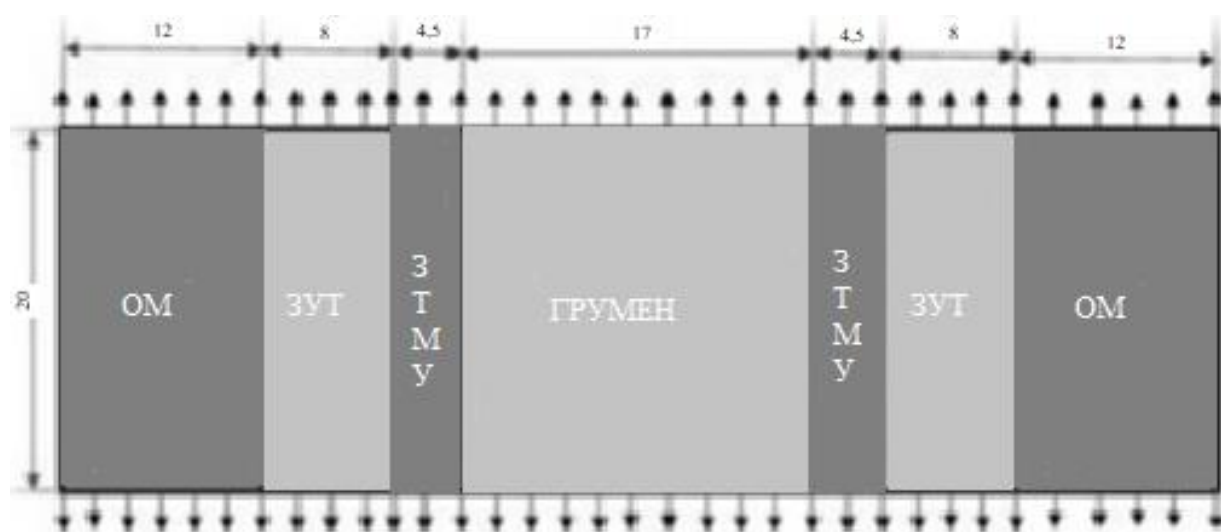
У оквиру *ЗУТ*-а јавља се асиметричност (у односу на линију споја) у повратној страни у односу на страну напредовања. Различитост се огледа у геометрији самих зона (мере и облик) као и механичким својствима материјала.



Слика 5. Металографски прикази FSW споја:

- HAZ-Зона утицаја топлоте (*ЗУТ*)
- TMAZ-Зона термо-механичког утицаја (*ЗТМУ*)
- Nugget-Грумен (*Г*)- део *ЗТМУ* [2]

Приликом моделирања FSW споја, извршено је поједностављење реалног споја на 2D модел. Дефинисане су зоне: димензионо, обликовно, а такође су унете карактеристике материјала за сваку зону понаособ.



Слика 6. 2D модел FSW споја [2]

3. Проширена метода коначних елемената *X-FEM (Extended Finite Element Method)*

3.1 Увод

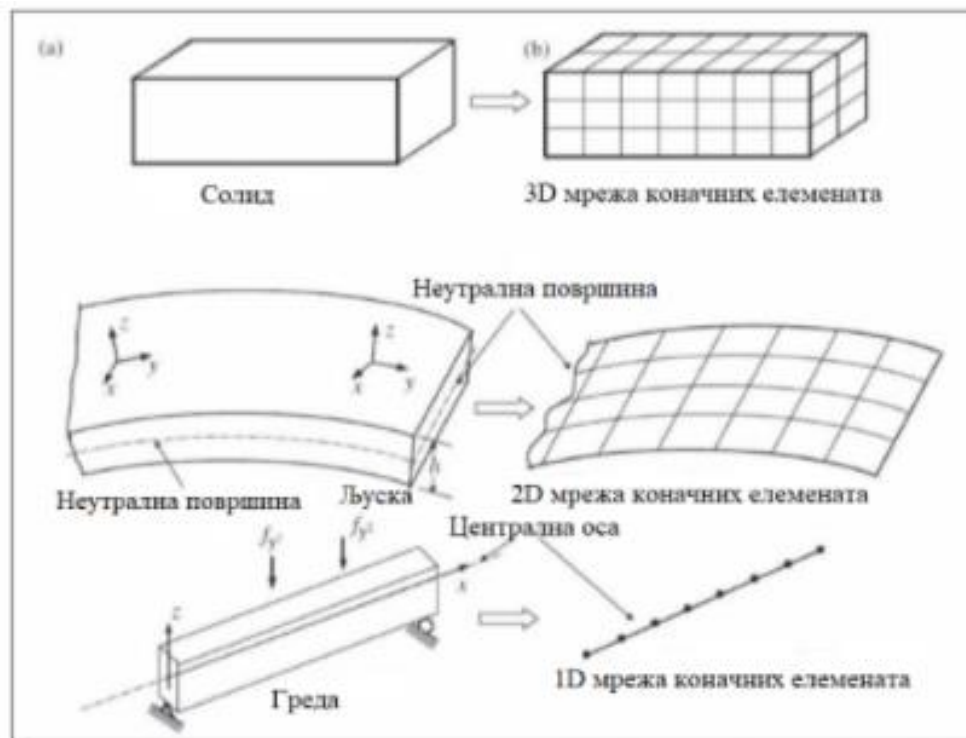
Примена методе коначних елемената је изузетно важна у области механике лома, нарочито код пројектовања носећих елемената сложених геометријских форми. Могуће је одредити радни век конструкције на основу унапред дефинисане геометрије конструкције, механичких карактеристика примењеног материјала, положаја, геометрије и иницијалне прслине. Моделирање прслине коришћењем конвенционалне методе коначних елемената је прецизно, али прилично проблематично са аспекта моделирања прслине која се шири у структури. Сваки нови фронт прслине захтева генерисање нове мреже коначних елемената, што веома компликује већ прилично сложену постојећу структуру мреже. Дакле, потребно је поновно генерисање мреже у околини врха прслине, као и њено уситњавање како би се добили што прецизнији резултати. Редифинисање мреже се врши од стране корисника софтвера.

Међутим, појава нове методе - проширене методе коначних елемената, даје револуционарне резултате у решавању оваквих проблема. Метод поједностављује приказ прслине поједностављењем мреже коначних елемената у околини прслине, обезбеђујући независност мреже од остатка геометрије. Корисник формира мрежу на испитиваном 3D моделу, а потом уводи иницијалне прслине у структуру. При сваком формирању новог фронта прслине, програм аутоматски генерише нову мрежу.

Дакле, потребно је прво одредити напонско стање структуре под дејством спољашњег оптерећења (уз адекватно дефинисане граничне услове), а потом дефинисати позицију, облик и геометрију прслине. На основу тога могуће је одредити параметре механике лома: факторе интензитета напона- K_I , K_{II} , K_{III} , односно J -интеграле.

Процес симулације раста прслине у структури је базиран на инкременталном поступку, тј. састоји се од низа корака. У сваком кораку се прорачунавају текући параметри за текућу дужину прслине. У наредном кораку, коришћењем података из претходног корака генеришу се нове вредности параметара механике лома.

Проширена метода коначних елемената је у саставу софтвера *Abaqus* и омогућава анализирање ширења 3D прслине у структури. При томе, обезбеђује се широк дијапазон параметара, као што су: различите технике израде мреже, тип и величина коначног елемента (слика 7), поједностављење модела у случају симетричности структуре, рад са склоповима, рад са 2D моделима. Као резултат анализе добија се расподела фактора интензитета напона (или J -интеграла) дуж фронта прслине, за сваки генерисани фронт. Такође, могуће је израчунавање радног века конструкције и приказ резултата у форми da/dN дијаграма, за различите вредности фактора асиметрије циклуса – R [2].



Слика 7. Приказ коначних елемената [2]

3.2 Основе проширене методе коначних елемената

Моделирање прслина у структури, применом класичне методе коначних елемената, захтева поклапање мреже коначних елемената са геометријом дисконтинуитета. Проблем се усложњава у случају моделирања раста прслине, које захтева сукцесивно генерисање мреже како би се пратила текућа примена у структури (геометријски дисконтинуитет у простору).

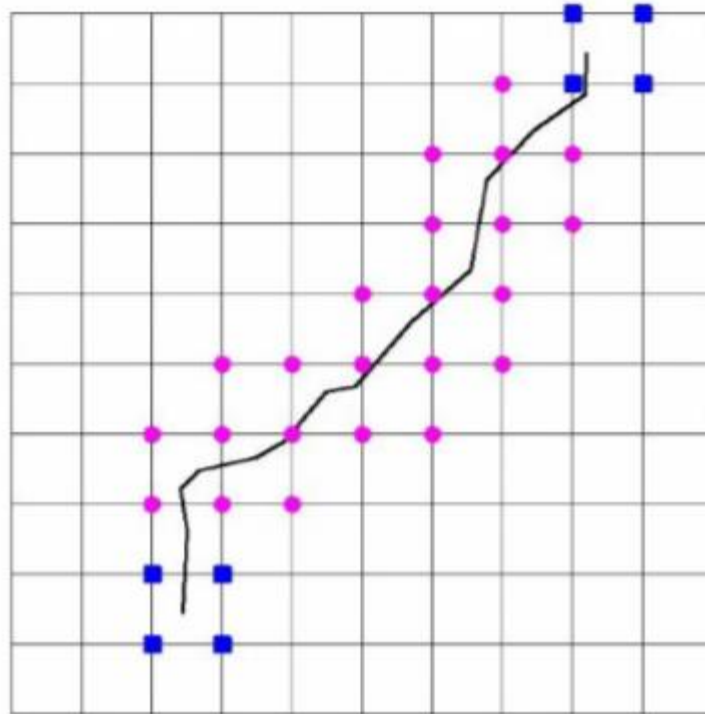
XFEM омогућава моделирање произвољног облика прслине. При симулацији квазистатичког или заморног раста прслине није потребно извршити промену мреже око саме прслине, током њене прогресије.

XFEM је заснован на [2]:

- Генерисању мреже коначних елемената, при чему дисконтинуитет (прслина) није укључен,
 - Коришћењу додатних функција за апроксимацију дисконтинуитета, тј. померања. Додатне функције подразумевају скуп функција побољшања.
- У анализи раста прслине користе се два типа функције побољшања:

- Дисконтинуална *Heaviside-ova* функција - $H(x)$ која дефинише поље померања странама прслине
- Скуп линеарних еластичних асимптотских функција померања, које описују поље померања око врха прслине-тзв. *Near Tip* функције – NT .

Прслина се моделира на тај начин што се оним чворовима чији су елементи пресечени прслином, додају нови степени слободе.



Слика 8. Чворови побољшани NT ■ и $H(x)$ ● функцијама [2]

Разликују се три типа чворова [2]:

- К чвор – има 2 степена слободе и користи се код оних коначних елемената који нису пресечени прслином
- Н чвор – чвор побољшан *Heaviside-ovom* одскочном функцијом - $H(x)$. Примењује се на чвор само уколико је бар један припадајући елемент пресечен прслином (слика 8), а да се ни у једном од њих не налази врх прслине. Овај тип чвора има 4 степена слободе
- NT чвор – чвор који је побољшан са 4 функције асимптотског поља померања око врха прслине. NT чворови су чворови елемента у коме се налази врх прслине и имају 10 степени слободе.

3.2. Функције побољшања

Генерализована *Heaviside*-ова функција- $H(x)$

Уколико се посматра ширење прслине у 2D простору, положај тачке у односу на прслину се може дефинисати преко генерализоване *Heaviside*-ове функције (слика 9) [2]:

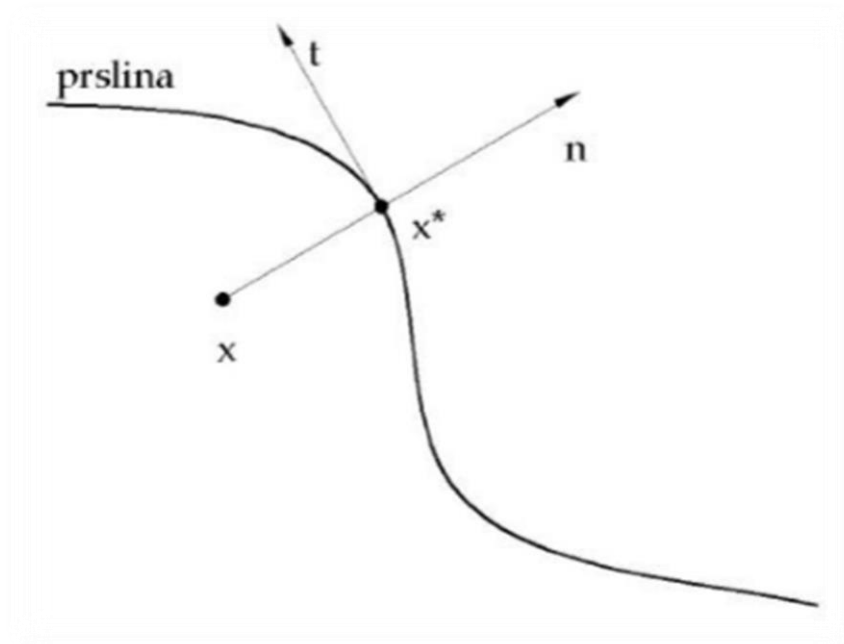
$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } (x - x^*) \cdot n \geq 0, \text{ тачка је изнад прслине} \\ -1, & \text{ако је } (x - x^*) \cdot n < 0, \text{ тачка је испод прслине} \end{cases}$$

где је:

n – спољашња јединична нормала

x - референтна тачка – чвор у коме се не налази врх прслине

x^* - пресечна тачка прслине са мрежом коначних елемената



Слика 9. Дефинисање положаја тачке у односу на прслину [2]

Функције асимптотског поља померања – NT функције

Приликом моделирања поља померања у непосредној близини врха прслине користе се функције побољшања [2]:

- Код изотропних – еластичних материјала, користе се 4 функције побољшања:

$$\Psi(r, q) = [\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4] = \left[\sqrt{r} \sin \frac{q}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{q}{2}, \sqrt{r} \sin q \sin \frac{q}{2}, \sqrt{r} \sin q \cos \frac{q}{2} \right] \quad (1)$$

- Код ортотропних материјала, присутно је 6 функција побољшања:

$$\Psi(r, q) = [\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6] = \left[\sqrt{r} \cos \frac{q_1}{2} \sqrt{g_1(q)}, \sqrt{r} \sin \frac{q_1}{2} \sqrt{g_1(q)}, \sqrt{r} \cos \frac{q_2}{2} \sqrt{g_2(q)}, \sqrt{r} \sin \frac{q_2}{2} \sqrt{g_2(q)} \right] \quad (2)$$

При чему су r и q координате у локалном поларном координатном систему, са координатним почетком у врху прслине.

- Код еласто – пластичне анализе постоји такође 6 функција:

$$\Psi(r, q) = [\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6] = r^{\frac{1}{n+1}} \left[\sin \frac{q}{2}, \cos \frac{q}{2}, \sin \frac{q}{2} \sin q, \cos \frac{q}{2} \sin q, \sin \frac{q}{2} \sin 2q, \cos \frac{q}{2} \sin 2q \right] \quad (3)$$

или

$$\Psi(r, q) = [\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6] = r^{\frac{1}{n+1}} \left[\sin \frac{q}{2}, \cos \frac{q}{2}, \sin \frac{q}{2} \sin q, \cos \frac{q}{2} \sin q, \sin \frac{q}{2} \sin 3q, \cos \frac{q}{2} \sin 3q \right] \quad (4)$$

Односно, комбинацијом претходне две варијанте добија се функција са осам функција побољшања:

$$\Psi(r, q) = [\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6, \Psi_7, \Psi_8] = r^{\frac{1}{n+1}} \left[\sin \frac{q}{2}, \cos \frac{q}{2}, \sin \frac{q}{2} \sin q, \cos \frac{q}{2} \sin q, \sin \frac{q}{2} \sin 2q, \cos \frac{q}{2} \sin 2q, \sin \frac{q}{2} \sin 3q, \cos \frac{q}{2} \sin 3q \right] \quad (5)$$

3.3 Дефинисање поља померања у XFEM-у

Наведене функције побољшања поменуте у претходном одељку се уводе у апроксимацији код релативно малог броја коначних елемената, у односу на цео домен. Додатни степени слободе се примењују на све коначне елементе који садрже дисконтинуитет, али понекад и на суседне елементе.

Општи облик апроксимације векторске функције померања, проширивањем за функције побољшања, може се представити следећом једначином [2]:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \left[\sum_{a=1}^m \psi_a(x) a_i^a \right] \quad (6)$$

где су:

$N_i(x)$ – интерполационе функције i - тог коначног елемента ($i \in [1, n]$)

n – број коначних елемената

$\psi_a(x)$ – a -та функција побољшања у i - том чвору ($a \in [1, m]$)

m – број функција побољшања

a_i^a – додатни степени слободе који одговарају a – тој функцији побољшања у i - том чвору

Уколико се врши 2D моделирање раста прсине, апроксимација померања са побољшањем може се приказати у следећој форми:

$$u^h(x) = \sum_{i \in S_u} N_i(x) \left[u_i + \underbrace{H(x) a_i}_{i \in S_a} + \sum_{a=1}^4 \underbrace{\Psi_a(x) b_i^a}_{i \in S_b} \right] \quad (7)$$

где су:

u_i – вектор померања коначног елемента,

a_i – вектор чворног померања побољшан *Heaviside*- овом функцијом

b_i^a – вектор чворног померања побољшан *NT* функцијом

S_u – скуп свих чворова на коначним елементима

S_a – скуп чворова на коначним елементима пресеченим прслином

S_b – скуп свих чворова на коначним елементима који садрже врх прслине

3.4 Општи облик проширене методе коначних елемената

Једначине померања, могу бити искоришћене за везу глобалне матрице крутости – K , матрицу степени слободе у чворовима – q и матрицу примењених сила у чворовима – f [2]:

$$K \cdot q = f \quad (8)$$

Глобална матрица крутости – K , може се приказати на следећи начин:

$$K = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} \\ K_{ua}^T & K_{aa} \end{bmatrix} \quad (9)$$

где су:

K_{uu} – класична матрица крутости коначних елемената

K_{aa} – матрица крутости побољшаних коначних елемената

K_{ua} – матрица спреге између класичних и побољшаних компоненти крутости

Елементарна матрица – K_e за било коју матрицу крутости се може израчунати на основу једначине:

$$K_e = \int_{\Omega} B_a^T C B_b d\Omega \quad a, b = u, a \quad (10)$$

при чему су:

C – конститутивна матрица изотропног линеарног еластичног материјала

B_u – матрица извода класичних функција облика

B_a – матрица извода побољшаних функција облика

Матрице B_u и B_a могу се приказати у општем облику:

$$B_u = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \end{bmatrix} \quad B_a = \begin{bmatrix} (N_i \Psi_i^a)_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & (N_i \Psi_i^a)_{,y} & 0 \\ 0 & 0 & (N_i \Psi_i^a)_{,z} \\ 0 & (N_i \Psi_i^a)_{,z} & (N_i \Psi_i^a)_{,y} \\ (N_i \Psi_i^a)_{,z} & 0 & N_{i,x} \\ (N_i \Psi_i^a)_{,y} & (N_i \Psi_i^a)_{,x} & 0 \end{bmatrix}$$

Матрице q и f се могу изразити на следећи начин:

$$q^T = \{u \ a\}^T \quad (11)$$

$$f^T = \{f_u^T \ f_a^T\} \quad (12)$$

где су:

u и a – вектори померања класичних и додатних степени слободе

f_u и f_a – вектори примењених сила класичних и побољшаних компоненти апроксимације померања

Коришћењем функција побољшања, као и додатних степени слободе, могуће је израчунати векторе релативне деформације и напона:

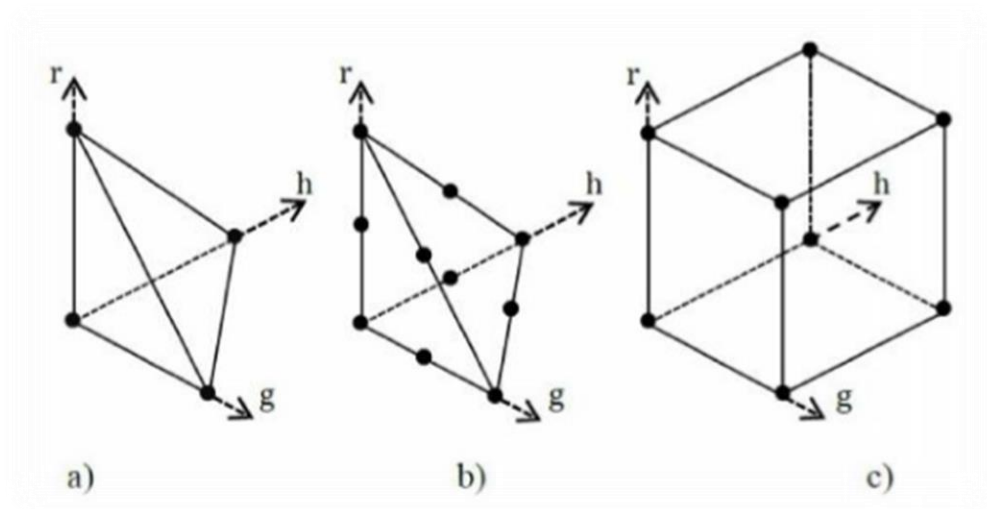
$$\varepsilon = [B_u B_a] \{u \ a\}^T \quad (13)$$

$$\sigma = C \cdot \varepsilon \quad (14)$$

3.5 Примена XFEM-а у ABAQUS-U

У *Abaqus*-у, код *XFEM*, симулације, користе се два различита типа елемената [2]:

- Тетраедарски и
- Хексаедарски (слика 10)



Слика 10. Коначни елементи за XFEM [2]

Код ова два типа коначних елемената, постоји интерна подела и односи се на број чворних тачака елемента, који се користи у нумеричким прорачунима. Постоје два подтипа коначних елемената: линеарни и квадратни.

Линеарни тетраедарски елементи користе само једну интеграциону тачку, за разлику од тетраедарских елемената другог реда који за интеграцију користе 4 чворне тачке.

Хексаедарски елементи првог реда користе један чвор, док хексаедарски елементи другог реда користе 8 чворова при интеграцији.

Интеграција се односи на прорачун матрице крутости – C .

3.6 Критеријуми лома

У анализи раста прслине, битно је дефинисати критеријуме лома. Постоји пет различитих критеријума лома [2]:

1. Критеријум лома: критични напон на одређеном растојању од врха прслине;
2. Критеријум лома: критична вредност отварања прслине;
3. Критеријум лома: зависност дужине прслине у функцији од времена $a = f(t)$;
4. Критеријум лома: техника виртуелног затварања прслине
5. Критеријум лома: зависност $\frac{da}{dN}$ заснована на *Paris*-овом закону.

У *Abaqus* – и се анализира тзв. квази – статички модел прслине и њен даљи раст код дводимензионалних модела (равански или осно-симетрични) за све критеријуме лома и за тродимензионалне моделе (солид и љуске) али само по два критеријума.

Који критеријум лома, од горе наведених ће се примењивати, је објашњено у даљем тексту.

Анализа пропагације прслине у структури је заснована на нумеричким методама и њиховој примени на дискретизованом континуму. Дакле, све потребне величине се прорачунавају у чворним тачкама. При томе, од великог је значаја прецизно дефинисање граничних и почетних услова. Дакле, до раздвајања површина у околини врха прслине долази када критеријум лома- f превазилази вредност 1, унутар унапред дефинисане толеранције- f_{tol} :

$$1 - f_{tol} < f < 1 + f_{tol} \quad (15)$$

У оквиру самог програма *Abaqus*, могуће је специфицирати вредност толеранције - f_{tol} . Уколико је $f < 1 + f_{tol}$, испуњен је критеријум лома. Стандардна вредност за $f_{tol} = 0,1$ је код прва три критеријума лома, док се вредност $f_{tol} = 0,2$ усваја код преостала два критеријума.

3.6.1 Критеријум критичног напона – S_{cr}

Уколико се као критеријум лома специфицира критични напон испред врха прслине, до раздвајања површина (лома) ће доћи када локални напон на одређеном растојању испред врха прслине достигне критичну вредност. Овај критеријум се најчешће користи код кртих материјала. Дефинише се на следећи начин [2]:

$$f = \sqrt{\left(\frac{s}{s^f}\right)^2 + \left(\frac{t_1}{t_1^f}\right)^2 + \left(\frac{t_2}{t_2^f}\right)^2} \quad (16)$$

где су:

s – нормални напони

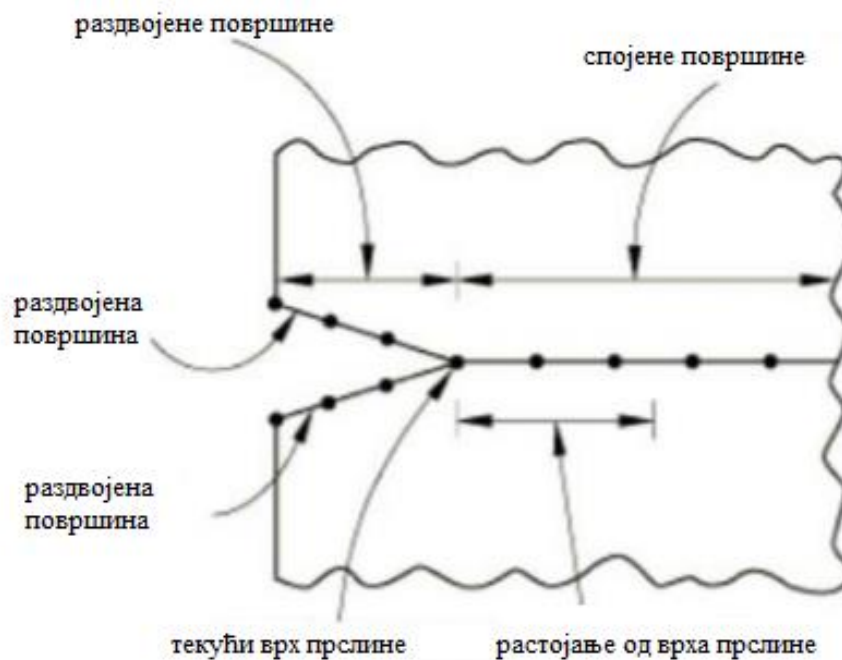
t_1 и t_2 - тангенцијалне компоненте напона

s^f и t^f – нормални и тангенцијални напон лома, који се морају унапред специфицирати (карактеристика материјала), односно критичне вредности нормалног и тангенцијалног напона.

Код дводимензионалне анализе компонента тангенцијалног напона – t_2 није значајна у прорачуну, тако да се у том случају вредност t_2^f не мора дефинисати. До раздвајања површина долази када критеријум лома – f пређе вредност 1.

Уколико вредност t_1^f није дата, или је изједначена са нулом, не узима се у обзир у прорачуну, тј. нема утицаја на критеријум лома.

Напони на одређеном растојању од врха прслине се израчунавају интерполацијом вредности у оближњим чворовима. Интерполација зависи од тога да ли су примењени коначни елементи првог или другог реда.



Слика 11. Дефинисање растојања од врха прслине, код критеријума критичног напона [2]

3.6.2 Критеријум критичног отварања прслине

Уколико се анализа раста прслине заснива на критеријуму отварања врха прслине, чворови у околини врха прслине ће се раздвојити када вредност отварања прслине на одређеном растојању иза врха прслине превазиђе критичну вредност. Овај критеријум се користи код дуктилних материјала.

Критеријум критичног отварања прслине се дефинише на следећи начин [2]:

$$f = \frac{d}{d_c} \quad (17)$$

где су:

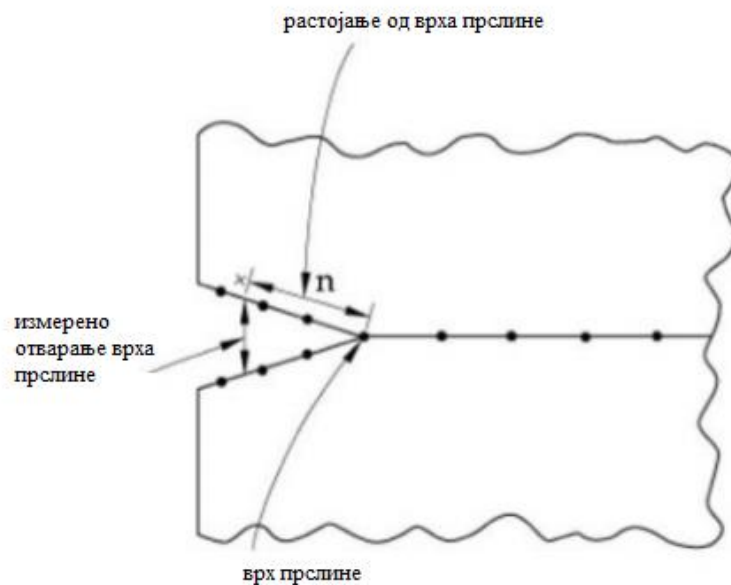
- d – мерена вредност отварања прслине

- d_c – критична вредност отварања врха прслине (дефинисана од стране корисника)

Дакле, чворови у околини врха прслине ће се раздвојити уколико критеријум лoma f пређе вредност 1.

Укупна дужина прслине се одређује као растојање између врха иницијалне прслине и текућег врха прслине. Отварање прслине је растојање нормално на две површине које се раздвајају на датом растојању.

Одређивањем растојања n иза врха прслине, дефинише се тачна позиција на којој се врши рачунање критичног отварања прслине (слика 12).



Слика 12. Дефинисање растојања код критеријума критичног отварања прслине [2]

Abaqus рачуна отварање врха прслине интерполацијом вредности у околним чворовима.

Као и код претходног критеријума, тачност добијених решења зависи од типа елемената.

3.6.3 Критеријум дужине прслине у зависности од времена – $a=f(t)$

Ширење прслине подразумева дефинисање дужине прслине у функцији од времена од стране корисника. При томе је потребно дефинисати и референтну тачку од које ће се мерити дужина прслине у деформисаној конструкцији [2].

При дефинисању критеријума лома – f , потребно је одредити дужину текуће прслине. Мери се од референтне тачке и представља суму правих линија, тј. растојања од врха иницијалне прслине до референтне тачке и растојања од врха иницијалне прслине до врха текуће прслине.

Посматрајући слику 13, нека чвор 1 буде врх иницијалне прслине, а чвор 3 врх текуће прслине. Растојање од врха текуће прслине је представљено на следећи начин [2]:

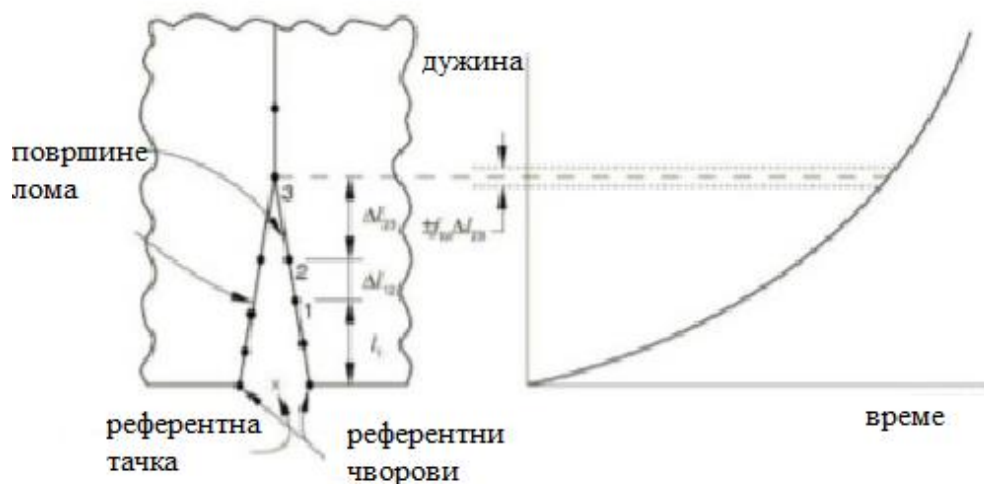
$$l_3 = l_1 + \Delta l_{12} + \Delta l_{23} \quad (18)$$

где су:

- l_1 - дужина праве линије која спаја чвор 1 и референтну тачку

- Δl_{12} – растојање између чворова 1 и 2

- Δl_{23} - растојање између чворова 2 и 3



Слика 13. Раст прслине у функцији од времена [2]

Критеријум лома – f је дат:

$$f = \frac{l - (l_3 - \Delta l_{23})}{\Delta l_{23}} \quad (19)$$

при чему је:

- l – дужина прслине у датом тренутку – t (крива дефинисана од стране корисника)

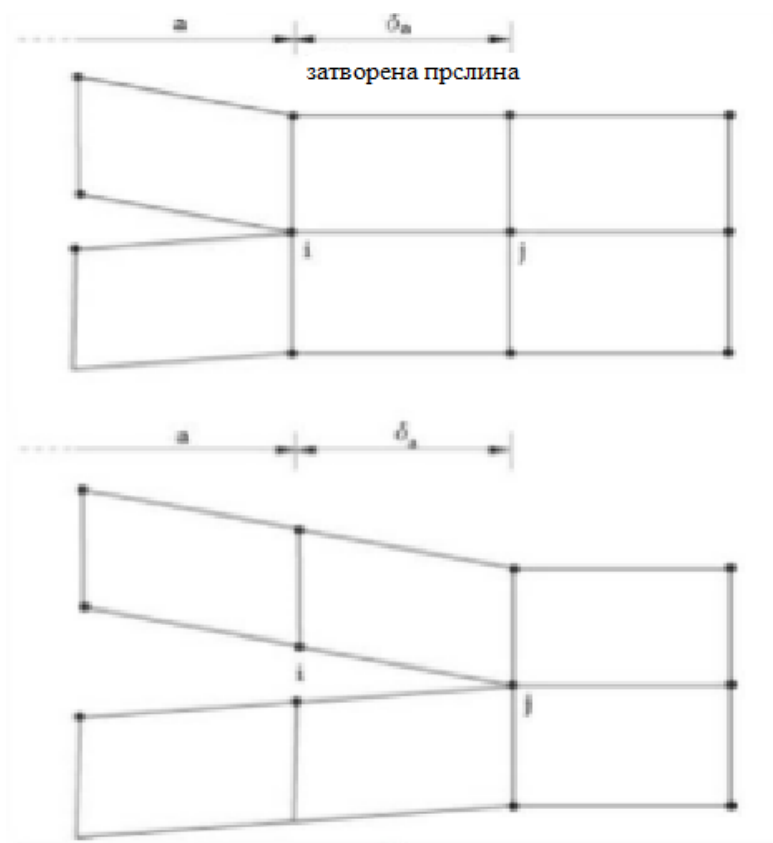
Врх текуће прслине – чвор 3 ће се раздвојити када функција лома - f превазиђе вредност 1 (унутар дефинисане толеранције дефинисане од стране корисника)

Уколико се разматра нелинеарна механика лома, референтна тачка се може померати како се конструкција деформише, па је потребно одредити референтну тачку тако да њена померања неће имати утицаја на одређивање критеријума лома – дужине прслине у функцији од времена.

3.6.4 Критеријум-техника виртуелног отварања прслине

Критеријум-техника виртуелног затварања прслине користи принципе линеарно-еластичне механике лома и користи се код проблема код којих се јавља крт лом дуж унапред дефинисане површине [2].

Техника виртуелног затварања прслине је заснована на претпоставци да се енергија деформације ослобађа када се прслина прошири за извесну меру и да је при томе једнака енергији потребној за затварање прслине за исту меру. На слици 14 је дат пример који указује на сличност између ширења прслине од чвора i до чвора j и затварања прслине у чвору j .



Слика 14. Енергија која се ослобађа при ширењу прслине једнака је енергији потребној за затварање прслине [2]

На слици 15 чворови 2 и 5 ће почети да се одвајају када [2]:

$$f = \frac{G_I}{G_{IC}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\vartheta_{1,6} F_{\vartheta,2v5}}{bd} \right) \frac{1}{G_{IC}} \geq 1 \quad (20)$$

при чему су:

G_I – брзина ослобађања енергије (сила раста прслине) за мод I

G_{IC} – критична брзина ослобађања енергије за мод I

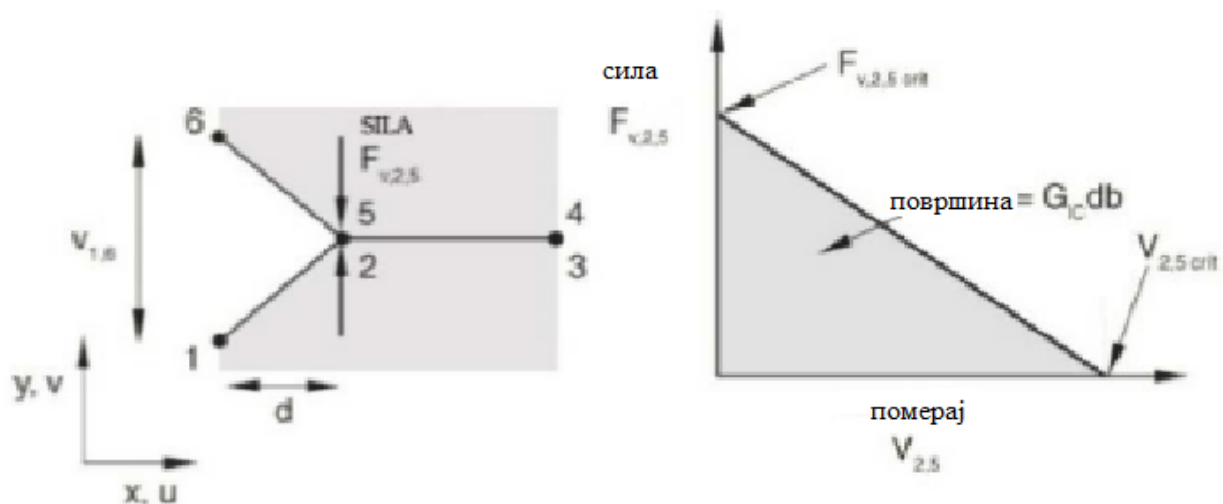
b – ширина елемента на фронту прслине

d – дужина елемента на фронту прслине

$F_{\vartheta,2v5}$ – вертикална сила између чворова 2 и 5

$\vartheta_{1,6}$ – вертикално померање између чворова 1 и 6

Уз претпоставку да се затварње прслине одвија у линеарно – еластичној области, енергија која је потребна да би се прслина затворила (тј. енергија која се ослобађа при расту прслине) се рачуна из претходне једначине. Сличне једначине се добијају за преостале модове (мод II и мод III).



Слика 15. Мод I [2]

У општем облику, укључујући модове I, II, III, критеријум лома би гласио [2]:

$$f = \frac{G_{ekv}}{G_{ekvC}} \geq 1 \quad (21)$$

где су:

G_{ekv} – еквивалентна брзина ослобађања енергије у чвору,

G_{ekvC} – еквивалентна критична брзина ослобађања енергије

Врх прслине ће се раздвојити (раст прслине) уколико критеријум лома – f пређе вредност 1.

У *Abaqus*-у су дате три различите формуле за прорачун G_{ekvC} у случају комбинованог мода:

- ВК закон
- *Power* закон
- *Reeder –ov* закон

Избор закона је заснован на искуству.

3.6.4.1 ВК закон

ВК закон је формулисан од стране *Benzeggagh* – а (1996) следећом формулом [2]:

$$G_{ekvC} = G_{IC} + (G_{IIC} - G_{IC}) \left(\frac{G_{II} + G_{III}}{G_I + G_{II} + G_{III}} \right)^h \quad (22)$$

При томе је потребно обезбедити вредност G_{IC} , G_{IIC} и h . Овај модел повезује три модела у један.

3.6.4.2 *Power* закон

$$\frac{G_{ekv}}{G_{ekvC}} = \left(\frac{G_I}{G_{IC}} \right)^{a_m} + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}} \right)^{a_n} + \left(\frac{G_{III}}{G_{IIIC}} \right)^{a_o} \quad (23)$$

За дефинисање овог модела потребно је унапред дати следеће вредности [2]: G_{IC} , G_{IIC} , G_{IIIC} , a_m , a_n , и a_o .

3.6.4.3 Reeder-ov закон

$$G_{ekc} = G_{IC} + (G_{IIC} - G_{IC}) \left(\frac{G_{II} + G_{III}}{G_I + G_{II} + G_{III}} \right)^h + (G_{IIIC} - G_{IIC}) \left(\frac{G_{III}}{G_{II} + G_{III}} \right) \left(\frac{G_{II} + G_{III}}{G_I + G_{II} + G_{III}} \right)^h \quad (24)$$

Потребно је унапред одредити: G_{IC} , G_{IIC} , G_{IIIC} , и h .

Овај закон се примењује када $G_{IIC} \neq G_{IIIC}$. У случају када је $G_{IIC} = G_{IIIC}$, Reeder –ov закон се редукује на ВК закон. Дакле, Reeder –ov закон се користи код тродимензионих проблема [2].

3.6.5 Критеријум ниско – цикличног замора

Критеријум ниско – цикличног замора се примењује искључиво код нискоцикличних анализа. Почетак раста прслине је окарактерисан *Paris* – овим законом, који даје зависност силе раста прслине – G и брзине раста прслине – $\frac{da}{dN}$, као што је приказано на слици 16. Сила раста прслине – G у околини врха прслине се рачуна на бази технике виртуелног отварања прслине.

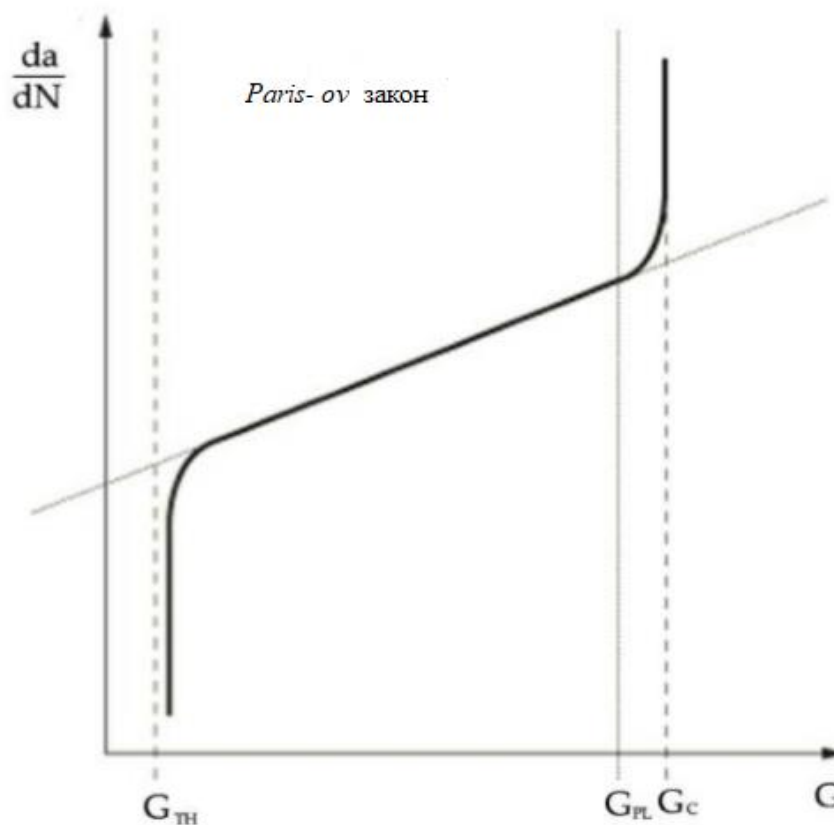
Paris –ова законитост је ограничена са доње стране прагом силе раста прслине – G_{TH} , испод које вредности нема иницијације раста прслине. Са горње стране јавља се лимит G_{pt} , изнад чије вредности ће доћи до интензивног раста прслине. G_c је еквивалентна критична сила раста прслине за сва три мода (уколико постоје).

Потребно је дефинисати односе [2]:

$$\frac{G_{TH}}{G_c} = 0.01 \quad (25)$$

$$\frac{G_{pt}}{G_c} = 0.85 \quad (26)$$

Дате вредности су стандардне (у *Abaqus*- и).



Слика 16. Заморни раст прслине дефинисан Paris – овим законом [2]

3.6.5.1 Почетак раздвајања површина

Почетак раздвајања површина се везује за почетак раста прслине. Код ниско – цикличног замора почетак раста прслине се повезује са ΔG , који представља разлику између силе раста прслине када је структура максимално, односно минимално оптерећена.

Критеријум лома, у том случају се дефинише на следећи начин [2]:

$$f = \frac{N}{c_1 \Delta G^{c_2}} \geq 1 \quad (27)$$

при чему су:

c_1 и c_2 - константе материјала

N – број циклуса оптерећења

До раздвајања коначних елемената у оквиру врха прслине неће доћи све док се претходна једначина не испуни и не достигне максимална сила раста прслине – $G_{\max}$, када је структура оптерећена максималном вредношћу цикличног оптерећења. При томе та максимална вредност је већа од прага – G_{TH} .

3.6.5.2 Заморни раст прслине коришћењем PARIS – овог закона

Када се једном постигне критеријум заморног раста прслине, брзине раста прслине - $\frac{da}{dN}$ се може израчунати на бази релативне брзине ослобађања енергије - ΔG . Брзина раста прслине (промена дужине прслине по циклусу оптерећења) је представљена *Paris* – овим законом (под условом да је испуњено $G_{\text{TH}} < G_{\max} < G_{\text{pl}}$) [2]:

$$\frac{da}{dN} = c_3 \Delta G^{c_4} \quad (28)$$

где су :

c_3 и c_4 - константе материјала

N – број циклуса оптерећења

Abaqus повећава дужину прслине a_N , при датом броју циклуса оптерећења за инкременталан број циклуса – ΔN на дужину прслине - $a_{N+\Delta N}$ одвајајући бар један елемент у околини врха прслине. Пошто су дате константе материјала - c_3 и c_4 , као и чворна растојања (у коначно – елементној мрежи) - $\Delta a_{N_j} = a_{N+\Delta N} - a_N$ у околини врха прслине, на основу горе наведене једначине, могуће је одредити инкрементални број циклуса оптерећења – ΔN_j који може изазвати раздвајање j -тог чвора. Могуће је израчунати минималан инкремент броја циклуса оптерећења – $\Delta N_{\min} = \min(\Delta N_j)$, потребан за ширење прслине за дужину једнаку дужини коначног елемента – $\Delta a_{N_{\min}} = \min(\Delta a_{N_j})$. Након одвајања коначног елемента, долази до редистрибуције оптерећења, те се након тога прорачунава нова вредност релативне брзине ослобађања енергије – ΔG за нови елемент у околини врха прслине, за нови циклус. Ако је $G_{\max} > G_{\text{pl}}$, елементи у околини врха прслине ће се раздвојити, један по један, при повећању броја циклуса за вредност – dN .

3.7 Недостаци проширене методе коначних елемената

Недостаци примењене методе се огледају у следећем [2]:

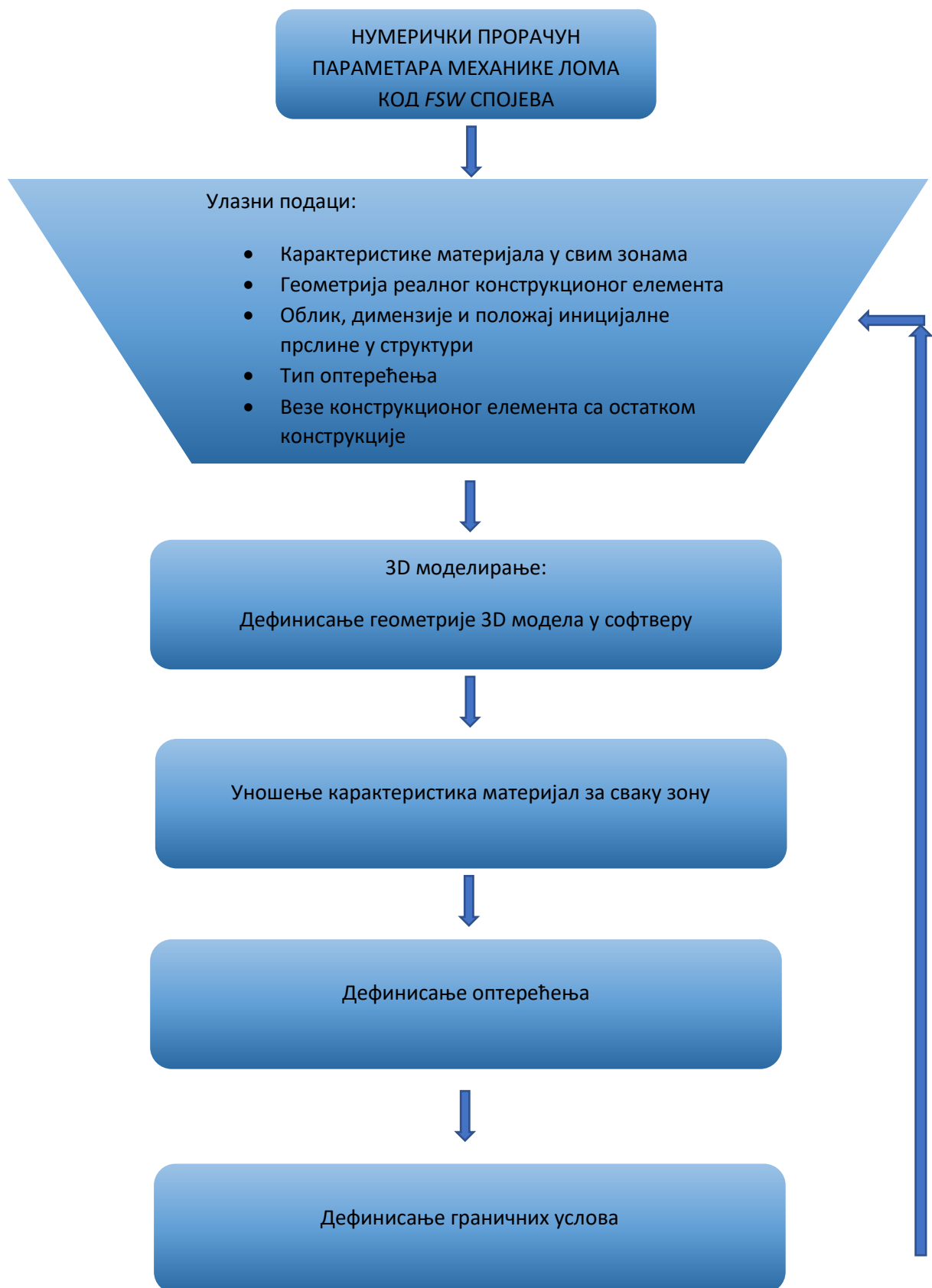
- Тачност резултата је у тесној вези са карактером формиране мреже коначних елемената. Дакле, тип елемента (тетраедарски или хексаедарски), димензије коначног елемента, као и густина мреже у одређеним регионима конструкције у значајној мери ће утицати на реализацију прорачуна. Управо то захтева висок ниво искуственог знања из области генерисања мреже коначних елемената
- Фронт прслине (све чворне тачке фронта прслине) у сваком тренутку њене прогресије морају истовремено бити у оквиру истог региона, како би се омогућило израчунавање фактора интензитета напона – K_I , односно J -интеграла. Самим тим настаје ограничење у моделирању конструкције (више региона, тј. материјала спојених FSW – ом) и у облику прслине.

4. Алгоритам прорачуна

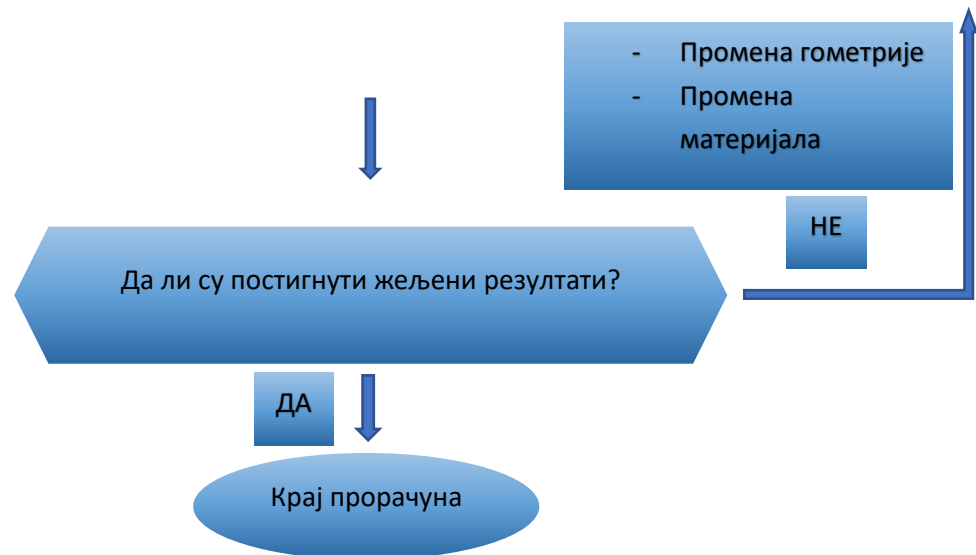
Прорачун се састоји из следећих фаза [2]:

- 1) Прелиминарно дефинисање геометрије констукције, односно 3D моделирање.
- 2) Дефинисање карактеристика материјала за сваку зону: ОМ, ЗУТ, ЗТМУ и Г. Уносе се вредности E – *Young* – овог модула еластичности, ν – *Poisson* –овог коефицијент, зависност напона – s од релативне деформације – e : $s=f(e)$ (ова зависност се даје у форми табеле)
- 3) Одређивање дејствујућег оптерећења (тип оптерећења, интензитет и место дејства)
- 4) Одређивање граничних услова, односно типа (врсте) везе испитиваног конструкционог елемента са остатком склопа (са којим чини функционалну целину)
- 5) Прелиминарни прорачун (напонско – деформационо стање за конструкцију без прслина) на бази којих се врши процена критичних места за појаву иницијалне прслине у структури. На основу искуства, потом се врши дефинсање величине, положаја и облика прслине.
- 6) Нови прорачун са прслином, при чему се добијају сви неопходни подаци потребни за процену века конструкције, односно одређивање стабилности ширења прслине.
- 7) Уколико добијени подаци не задовољавају са аспекта сигурности или поузданости, конструктор је принуђен да примени бар једну од следећих мера:
 - Измена постојеће геометрије констукције,
 - Израда конструкције од новог, квалитетнијег материјала,
 - Примена нове технологије спајања (коришћење неког другог поступка, као што је *FSW*, којим се постиже већи квалитет споја),
 - Примена адекватног технолошког поступка у циљу постизања бољих карактеристика конструкционог елемента

Дакле, целокупан алгоритам се итеративно понавља док год се не добију жељени резултати.







Слика 17. Алгоритам нумеричког прорачуна параметара лома код FSW спојева [2]

Алгоритам приказан на слици 17 представља ток прорачуна интегритета неке конструкције. Међутим, у овом раду, одрађен је један део, као излазна величина очекује се фактор интензитета напона.

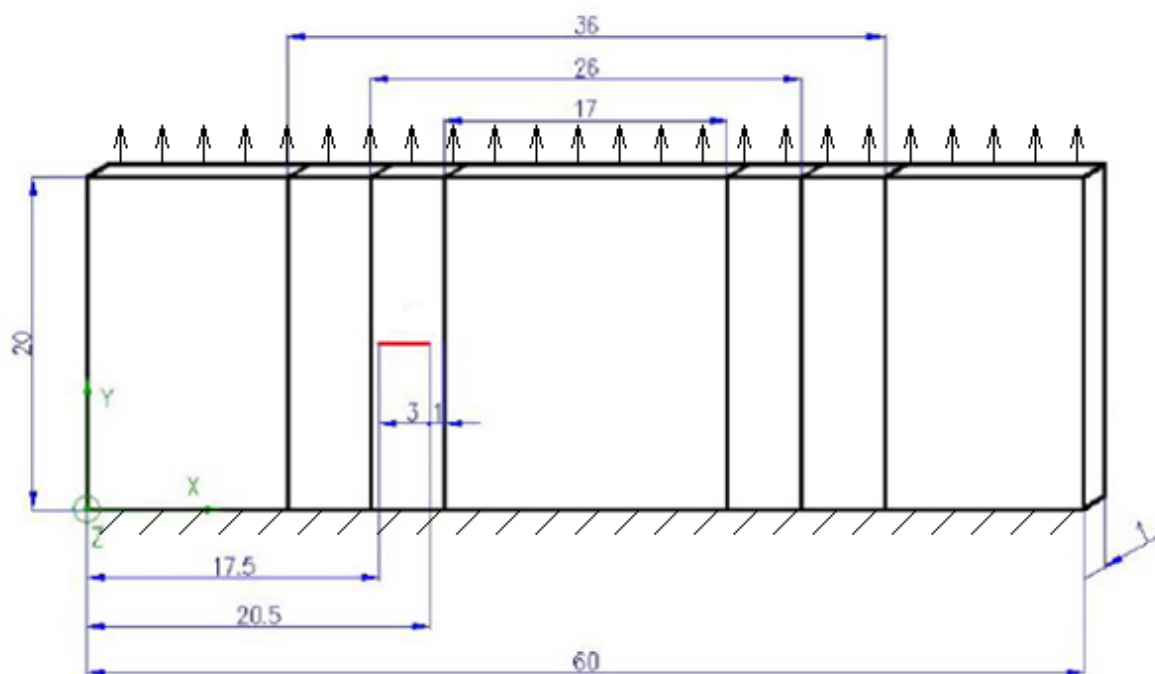
5. Прорачунски модел: FSW спој

Услед детаљније анализе легура алуминијума и њиховог спајања процесом фрикционог заваривања у дипломском раду: Легуре алуминијума у производњи вагона, јавила се жеља и за проучавањем појаве прслине услед оптерећења на овако насталом споју, где је разматрана фрикционо заварена плоча изложена дејству затезне силе.

Као пример анализе ширења прслине у FSW споју, усвојен је модел плоче. У оквиру софтвера *Abaqus* урађен је 3D модел са FSW зонама. Димензије зона су одређене на бази металографских снимака.

Анализирани су различити облици, димензије и положај прслине у FSW споју. Међутим, даљом детаљном анализом установљено је да у оквиру *Abaqus* софтвера постоје извесна ограничења. Дакле, параметре механике лома, као крајњи исход анализе ширења прслине у структури, могуће је прорачунати само у случају када се све тачке фронта прслине у датом тренутку налазе искључиво само у оквиру једног региона (зоне). У случају моделирања реалног 3D модела, без обзира на облик и димензије иницијалне прслине, јавља се овај проблем који је немогуће софтверски решити [2].

То доводи до поједностављења 3D модела FSW споја. Извршена је апроксимација споја у форми равних зона (слика 18). Плоча је димензија $1 \times 20 \times 60 \text{ mm}$ ($2W = 60 \text{ mm}$, $t = 1 \text{ mm}$).



Слика 18. Поједностављен модел 3D модел FSW споја

У структуру је унета полазна иницијална прслина дужине $2a_0 = 3 \text{ mm}$ у ЗТМУ зони. Десни крај прслине се налази на растојању 1 mm од границе Г – ЗТМУ. Посматрана је њена даља прогресија.

Плоча је оптерећена на затезање дуж ивице, а управно на правац пружања прслине. Супротна паралелна ивица је укљештена (сва померања су једнака 0).

За сваку зону понаособ су унете карактеристичне величине: E – *Young* – ов модуо еластичности, ν – *Poisson* – ов коефицијент, као и функционална зависност напона од релативне деформације $\sigma = f(\epsilon)$ (подаци су унети у *Abaqus* у форми табеле). Слична анализа је рађена у докторској дисертацији: Примена механике лома на процену интегритета заварених конструкција од легура алуминијума [2], па су полазни параметри усвојени из овог рада.

Young – ов модуо еластичности као и *Poisson* – ов коефицијент усвојени су за све зоне као исте вредности и то: $E=68000 \text{ MPa}$ и $\nu=0.33$.

Табела 2. Зависност напона од деформације за сваку зону појединачно

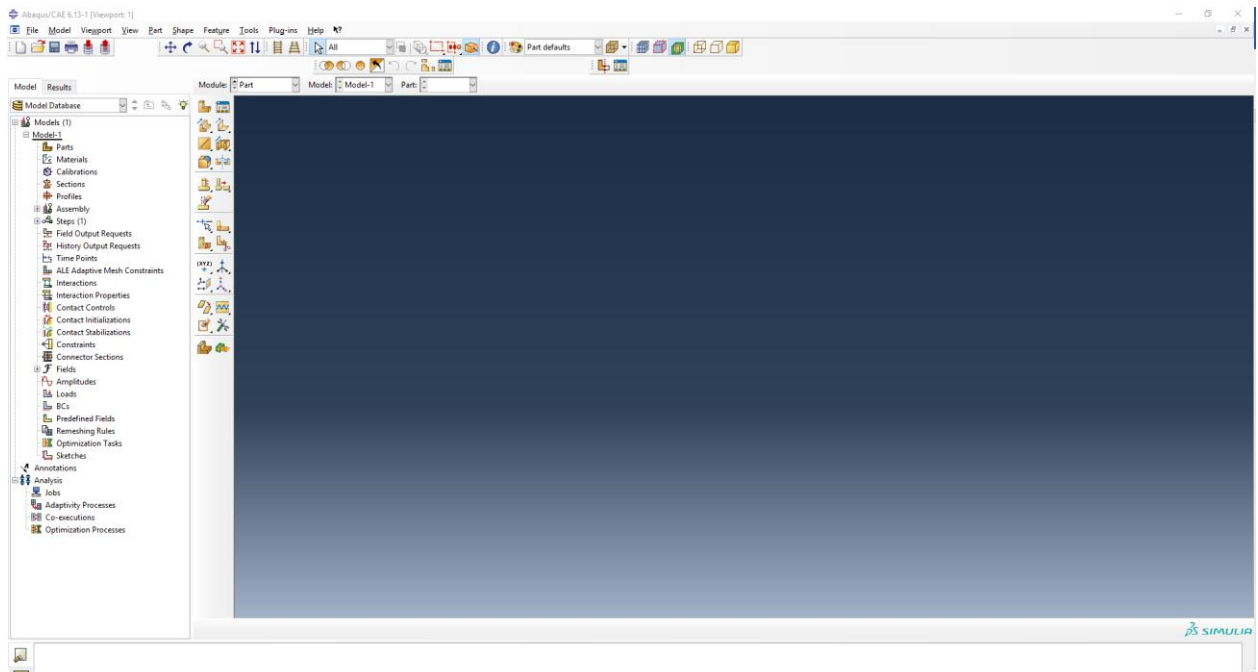
Зона грумена		Зона термомеханичког утицаја		Зона утицаја топлоте		Основни материјал	
$\sigma \text{ (MPa)}$	$\epsilon \text{ (%)}$	$\sigma \text{ (MPa)}$	$\epsilon \text{ (%)}$	$\sigma \text{ (MPa)}$	$\epsilon \text{ (%)}$	$\sigma \text{ (MPa)}$	$\epsilon \text{ (%)}$
30.43	0.00044	50.34	0.0007	25	0.0004	20	0.0003
51.3	0.0008	75.86	0.00123	35	0.0006	40	0.0006
69.56	0.0012	106.9	0.0016	58	0.001	45	0.0009
91.3	0.0015	131.03	0.002	83	0.00126	90	0.0014
130.43	0.0021	186.21	0.0031	95	0.0015	125	0.0021
186.95	0.0032	268.96	0.0045	130	0.002	220	0.0034
286.96	0.0043	331.03	0.0057	175	0.0028	300	0.005
331.91	0.0055			280	0.00438	320	0.0058
				330	0.00558	440	0.0084
				480	0.00898	487	0.012
				540	0.01166		

Мрежа је хексаедарска.

У резултатима анализе дат је упоредни приказ деформисаног модела са прслином у датом тренутку (кораку) са расподелом *Von Mises* – овог напона.

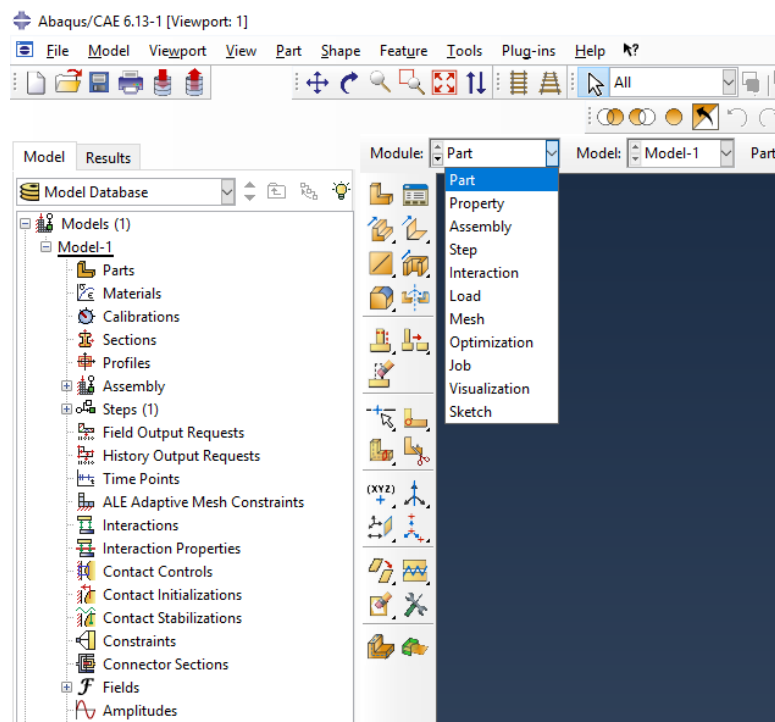
Након формирања мреже број елемената је 141470 док је број чворова 345468.

Покренути *Abaqus/CAE 6.13-1* (слика 19)



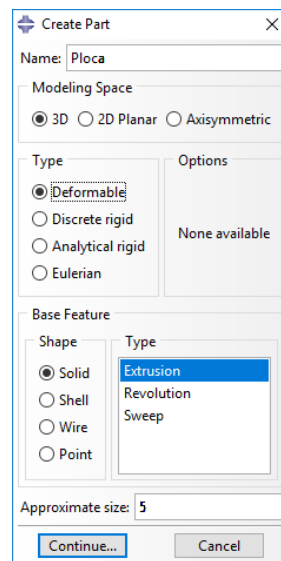
Слика 19. Приказ окружења *Abaqus-a*

Из падајуће листе **Module** изабрати окружење **Part** како би се креирао модел плоче (слика 20).



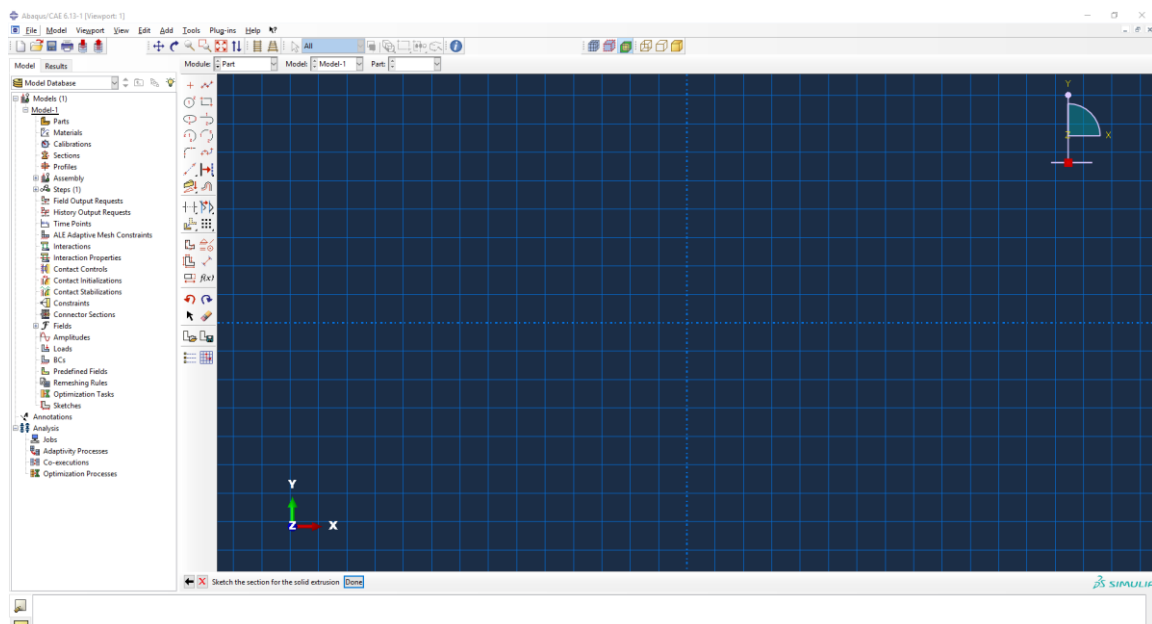
Слика 20. Бирање окружења *Part*

Из палете која се јавља са леве стране изабрати **Create Part** и попунити као што је приказано на слици затим притиснути **Continue** (слика 21).



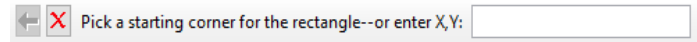
Слика 21. Попуњавање почетног прозора у окружењу Part

Након попуњавања **Create Part** прозора појављује се следеће окружење (слика 22) у коме се црта плоча.



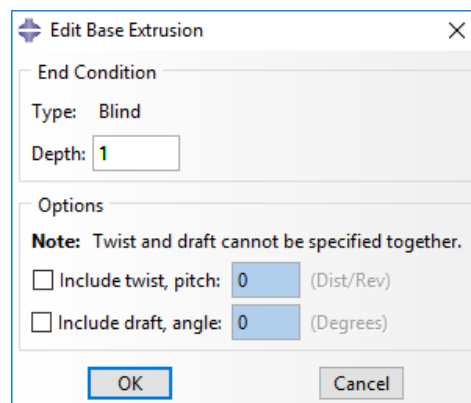
Слика 22. Приказ окружења у коме се црта модел

Из палете која се јавља са стране изабрати **Create Lines: Rectangle (4 lines)**. У следећем прозору (слика 23) се уносе координате почетног и крајњег угла правоугаоника тј (0,0) и (60,20), затим притиснути **Done**.



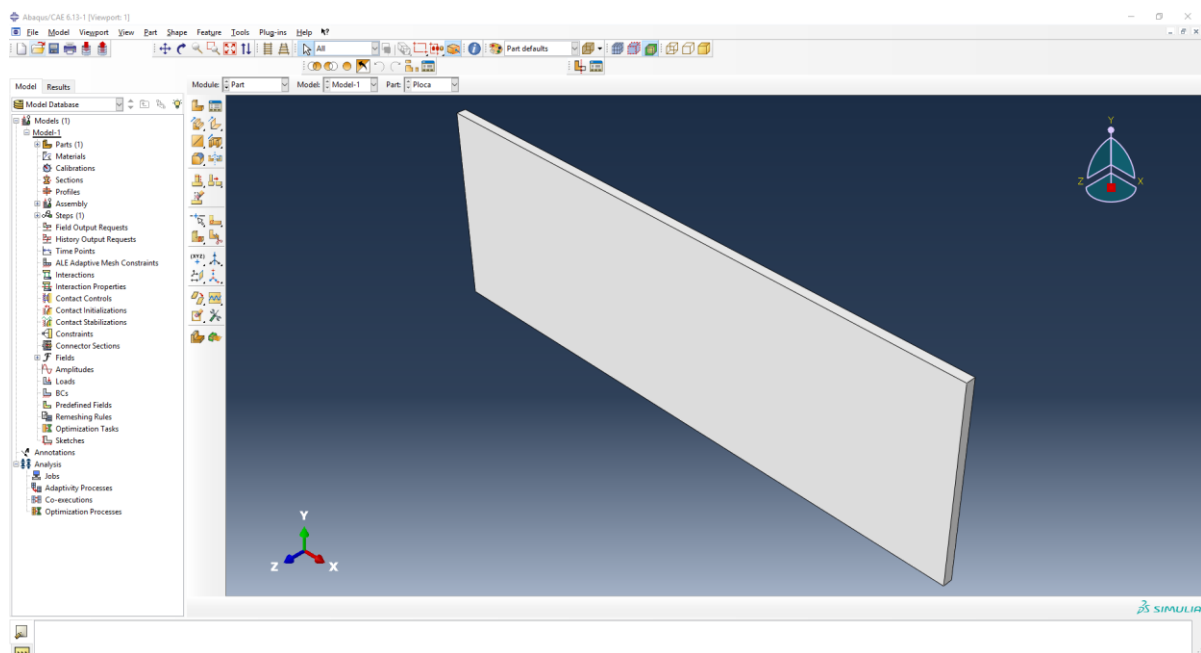
Слика 23. Уношење координата плоче

Прозор који се појављује (слика 24) се попуњава као на следећој слици, уноси се дебљина плоче, затим притиснути **OK**.



Слика 24. Уношење дебљине плоче

На следећој слици је дат приказ плоче (слика 25). Сада је потребно направити одговарајуће зоне.



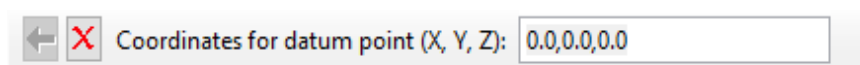
Слика 25. Приказ нацртане плоче

Неопходно је направити равни помоћу тачака које ће да поделе плочу на одговарајуће зоне. Тачке се креирају помоћу команде **Create Datum Point: Enter Coordinates**.

Табела 3. Приказ координата помоћу којих настају равни које су потребне за креирање секција

Раван	Тачка	X	Y	Z
I	1.	12	0	0
	2.	12	10	1
	3.	12	20	0
II	4.	17	0	0
	5.	17	10	1
	6.	17	20	0
III	7.	21.5	0	0
	8.	21.5	10	1
	9.	21.5	20	0
IV	10.	38.5	0	0
	11.	38.5	10	1
	12.	38.5	20	0
V	13.	43	0	0
	14.	43	10	1
	15.	43	20	0
VI	16.	48	0	0
	17.	48	10	1
	18.	48	20	0

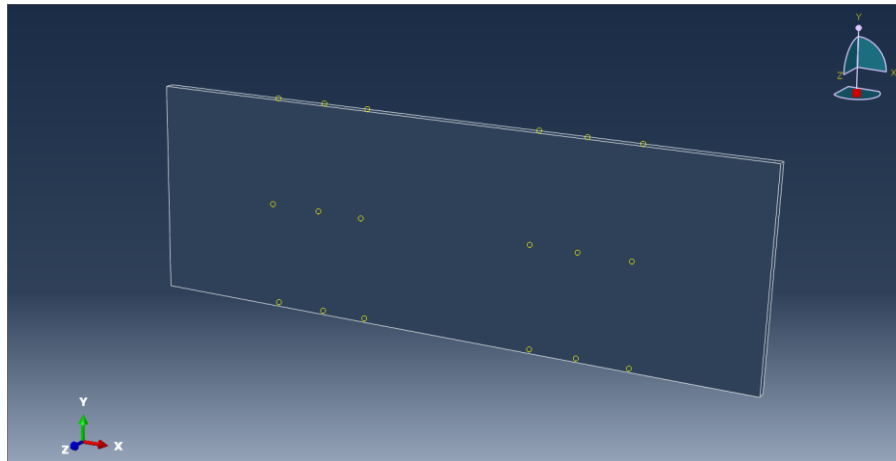
У прозору који се појављује (слика 26) треба уписати сваку координату из табеле.



Слика 26. Прозор у коме се уписују координате за креирање равни

Манипулација моделом се врши помоћу  док се видљивост подешава помоћу следеће палете .

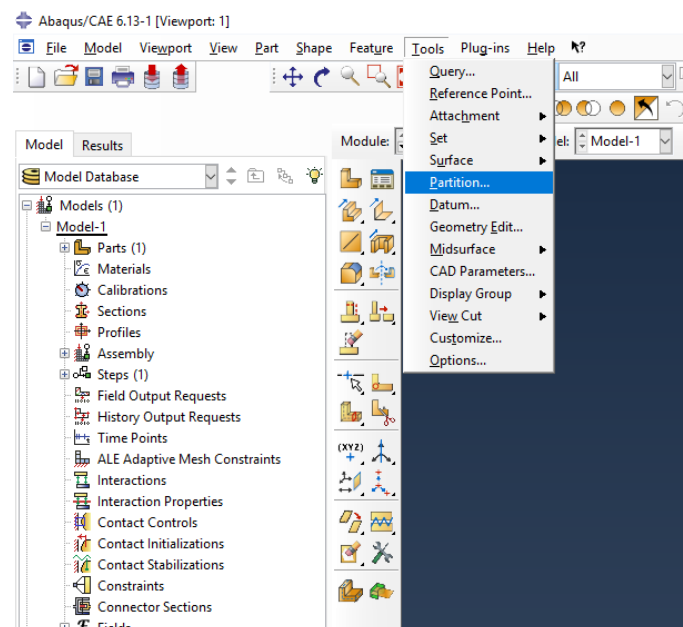
Након уношења координата сваке тачке добија се следећа ситуација (слика 27):



Слика 27. Приказ креираних тачака на плочи

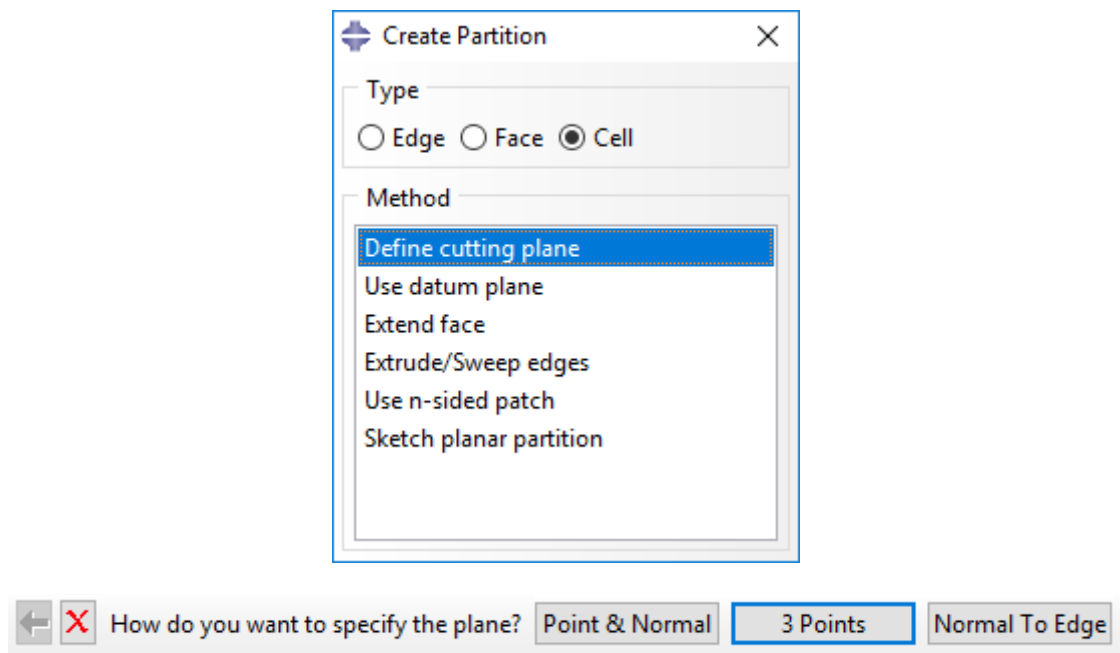
Сада је потребно направити равни, од постојећих тачака, које ће поделити плочу на одговарајуће зоне.

Tools/Partition (слика 28)



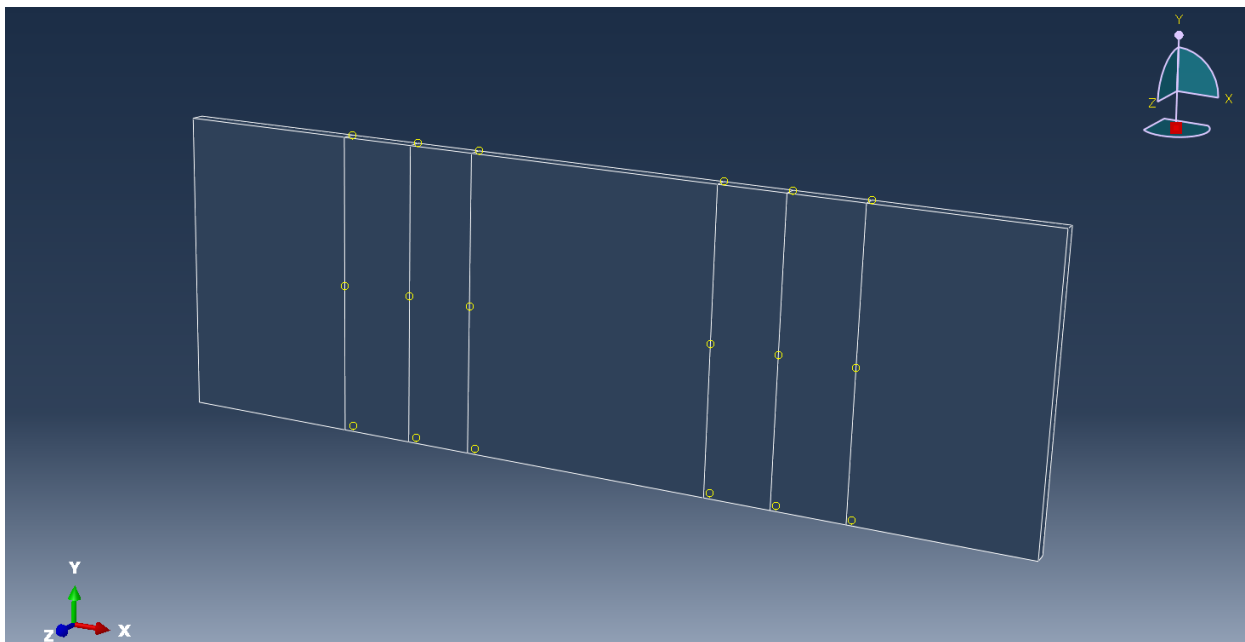
Слика 28. Приказ опције за креирање равни

У прозорима који се појављују (слика 29) одабрати опције као на сликама:



Слика 29. Креирање равни помоћу три одговарајуће тачке

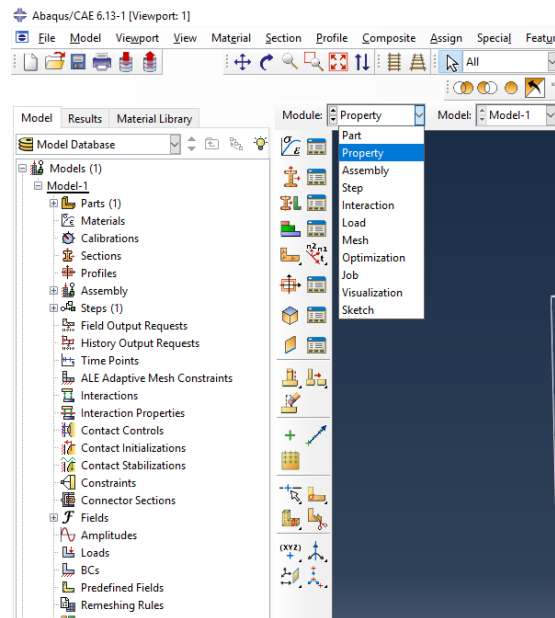
Након тога, бирају се по три тачке како би се креирале равни које ће да деле плочу. Резултат формирања равни је приказан на следећој слици (слика 30):



Слика 30. Приказ плоче са креираним равнима

Дефинисање материјала и секција

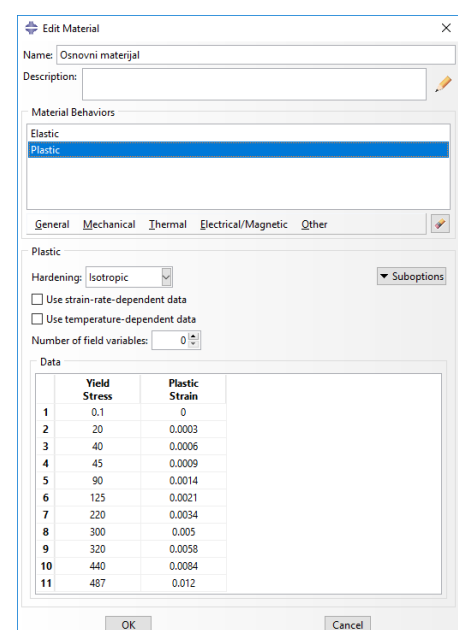
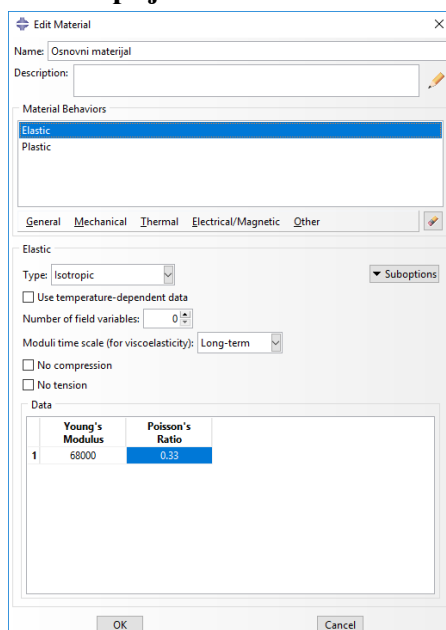
Из падајуће листе **Module** изабрати окружење **Property** како би се креирали одговарајући материјали и секције (слика 31).



Слика 31. Одабир окружења за креирање и дефинисање материјала

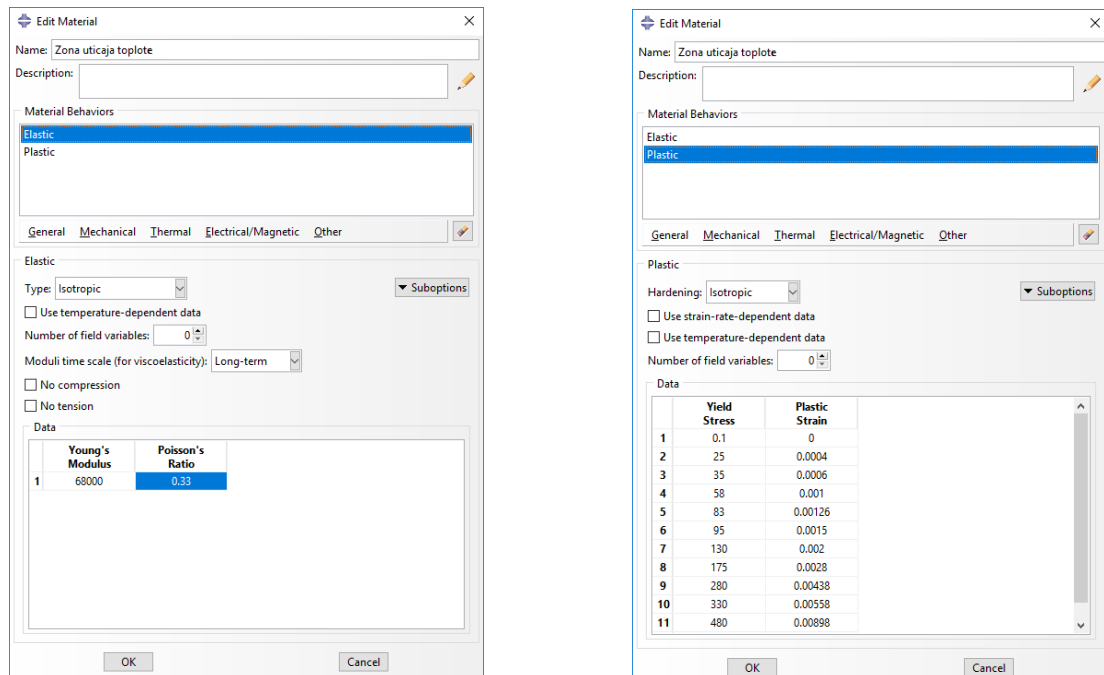
Из палете која се јавља са стране изабрати опцију **Create Material** и прозор који се појави попунити као на сликама (слика 32 - 35).

Основни материјал:



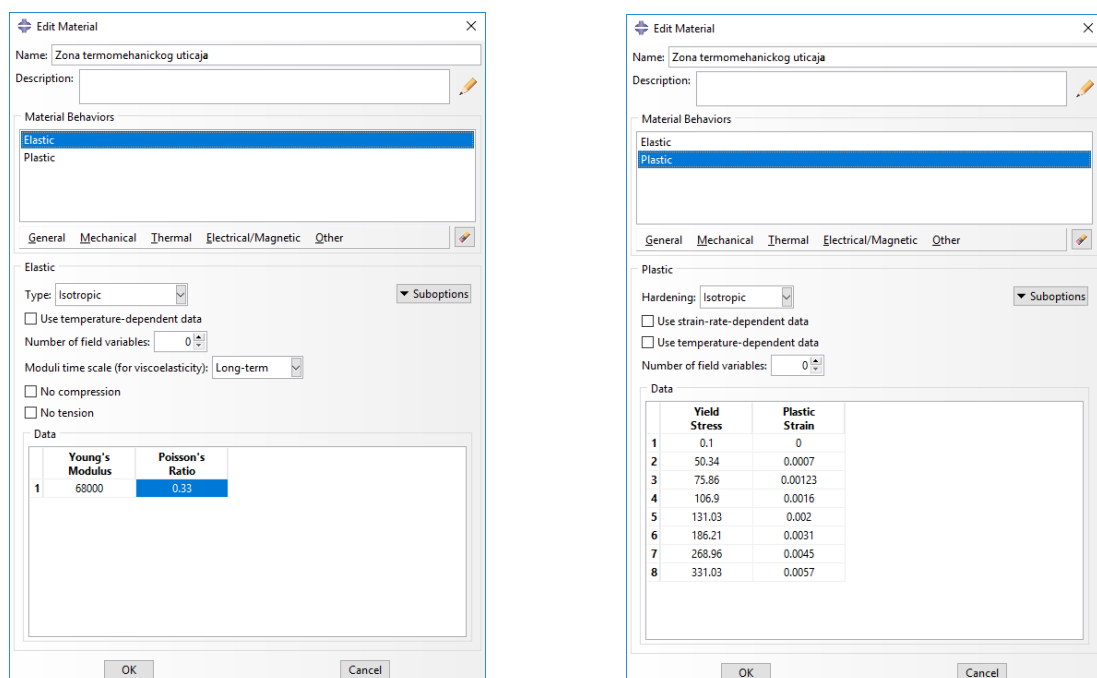
Слика 32. Попуњавање карактеристика за зону основног материјала

Зона утицаја топлоте:



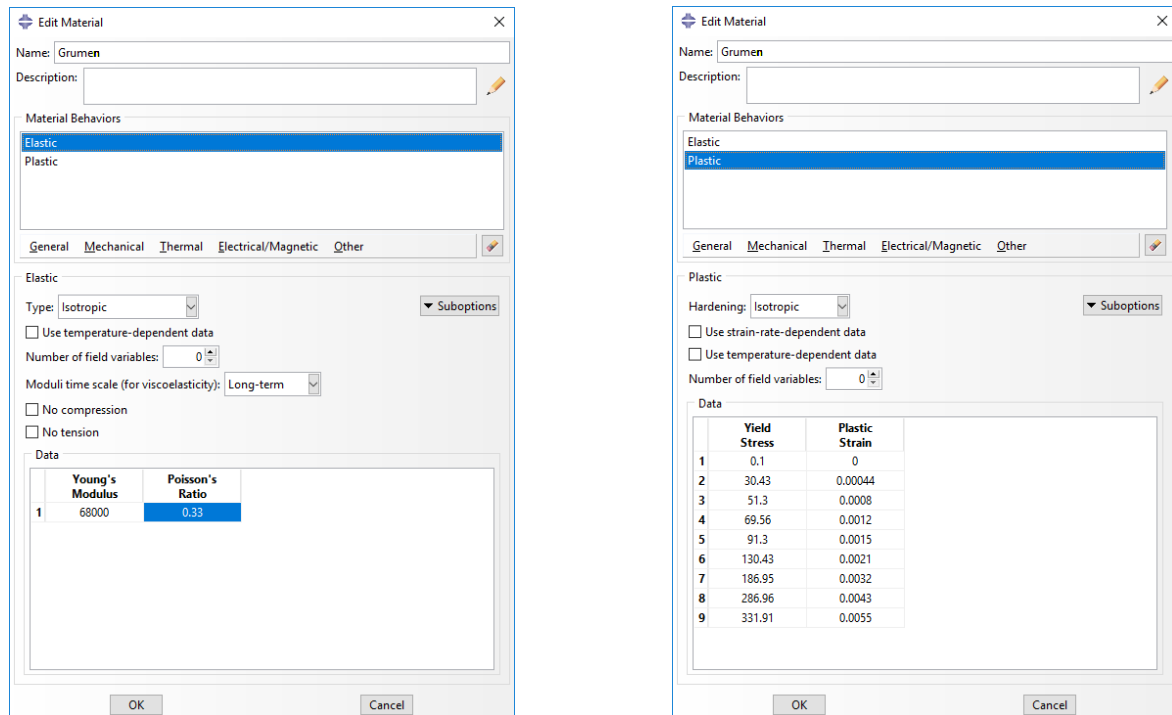
Слика 33. Попуњавање карактеристика за зону утицаја топлоте

Зона термо-механичког утицаја:



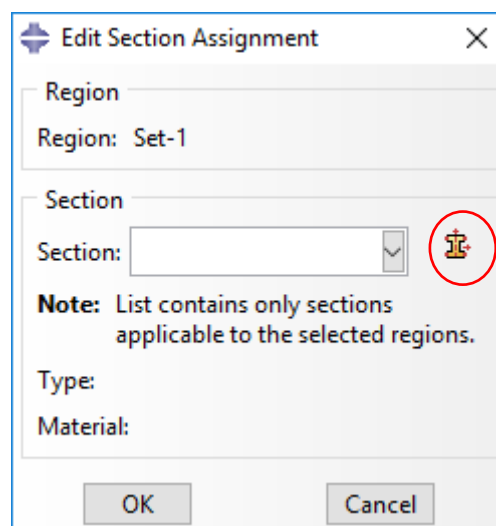
Слика 34. Попуњавање карактеристика за зону термо механичког утицаја

Зона грумена:



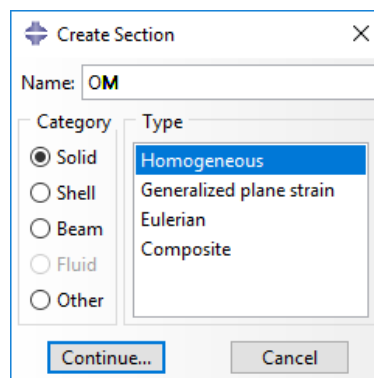
Слика 35. Попуњавање карактеристика за зону грумена

Сада је потребно материјале доделити одговарајућим секцијама. Притиснути **Assign Section**, затим селектовати основни материјал, притиснути **Done**. Појављује се следећи прозор (слика 36):



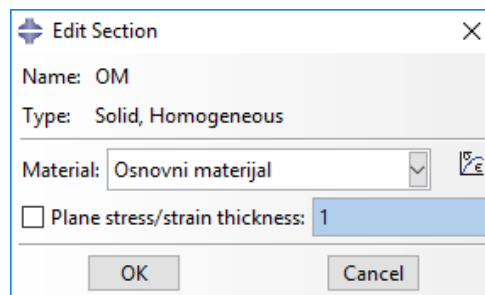
Слика 36. Прозор за стварање одговарајућих секција

Притиснути сличицу која је заокружена. Појављује се следећи прозор (слика 37):



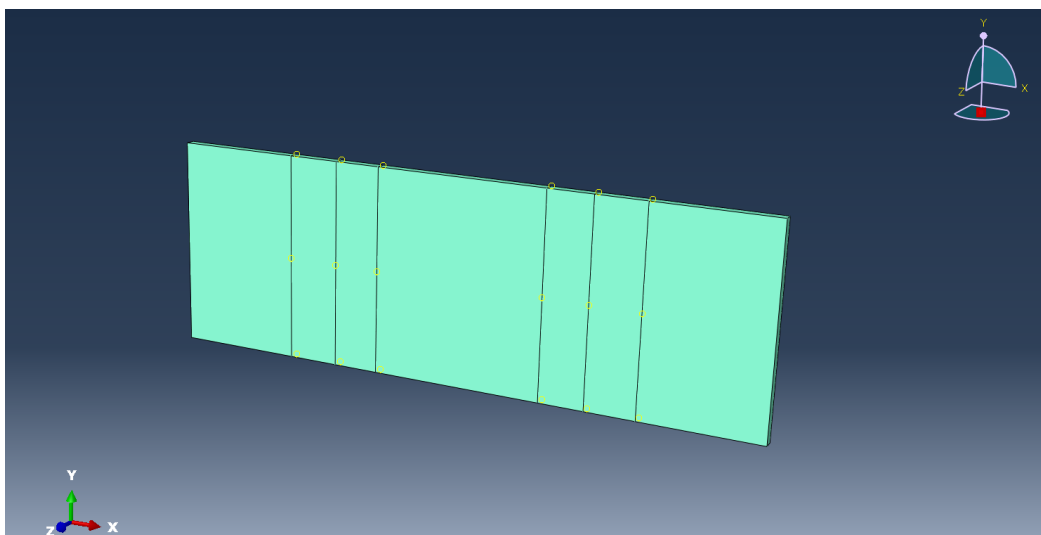
Слика 37. Уписивање назива секције и одабир одговарајуће категорије

Попунити прозор као на слици и притиснути **Continue**, као и следећи прозор који се појављује у наставку (слика 38), притиснути **OK**.



Слика 38. Доделивање материјала одговарајућој секцији

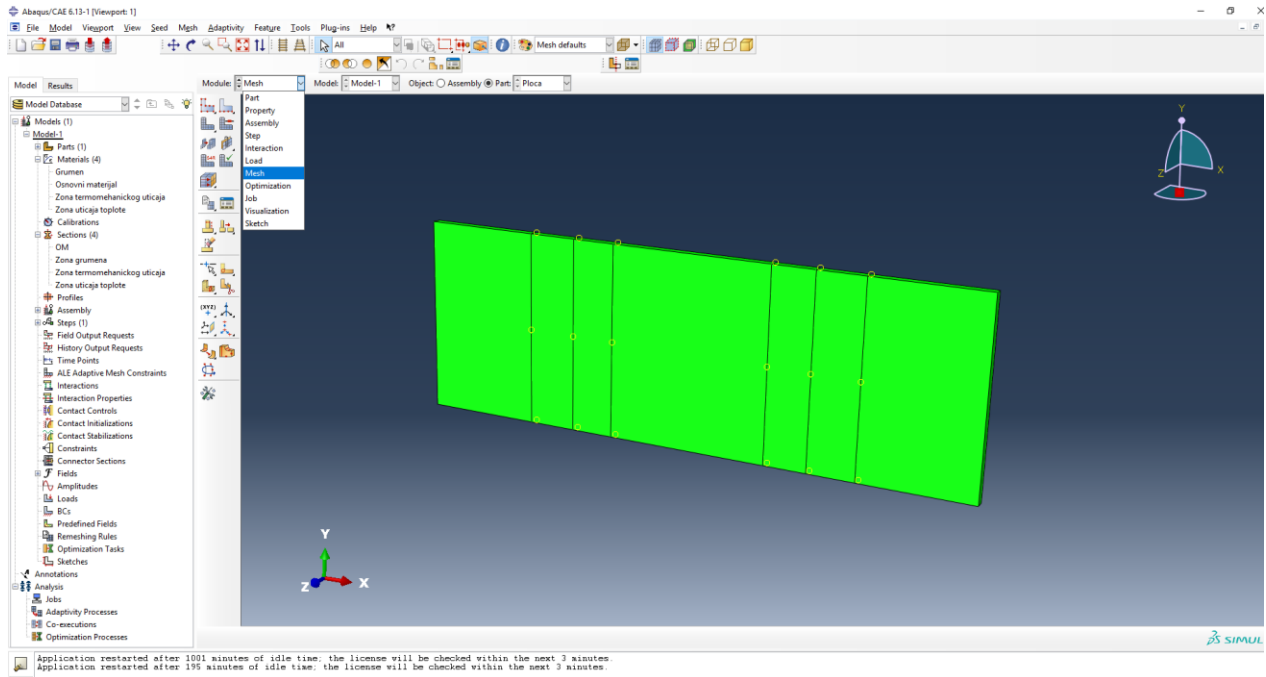
Поновити поступак за сваку зону. Као резултат, добија се следеће (слика 39):



Слика 39. Приказ плоче са креираним секцијама

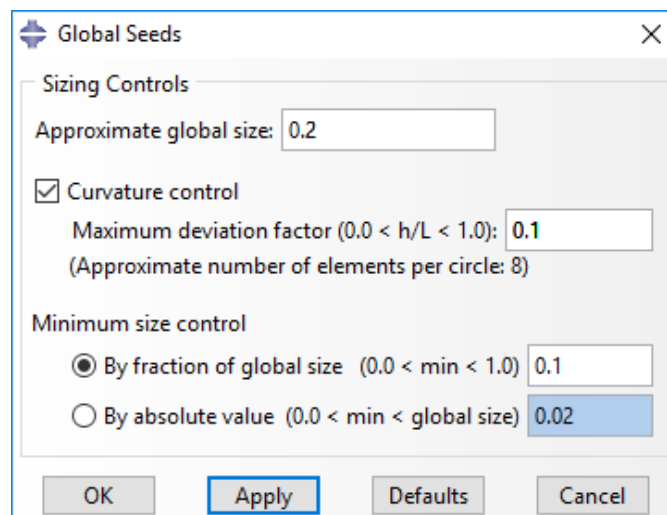
Креирање мреже

Из падајуће листе **Module** изабрати окружење **Mesh** (слика 40).



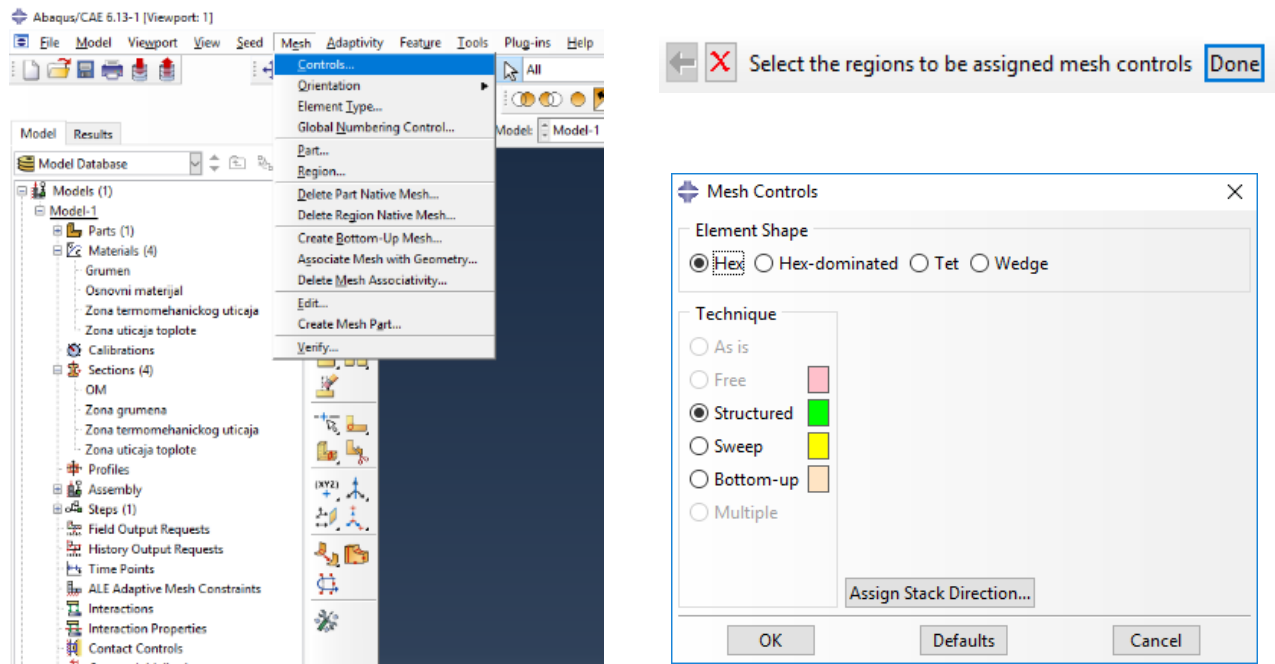
Слика 40. Приказ окружења за креирање мреже

Изабрати опцију **Seed Part** која служи за одређивање величине елемента (слика 41), опција **Seed Edges** служи за задавање броја елемената дуж неке линије уколико је то потребно.



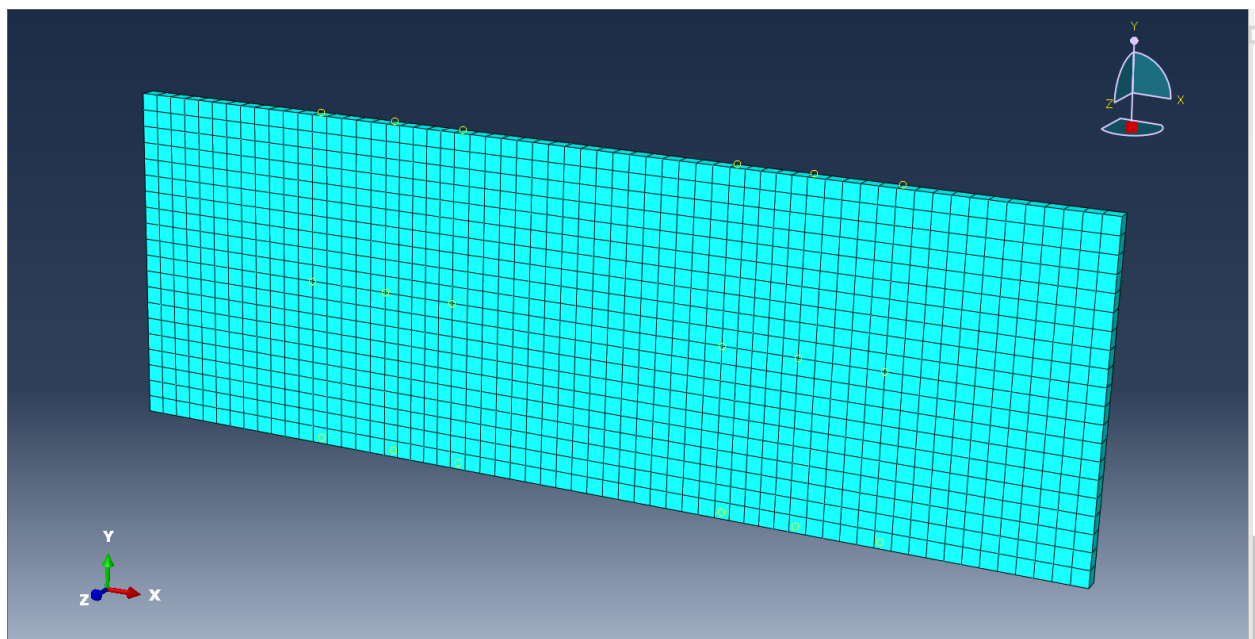
Слика 41. Попуњавање величине коначног елемента

Затим притиснути **Mesh /Controls** где је потребно селектовати све елементе и притиснути **Done**. Прозор који се појављује попунити као на слици (слика 42).



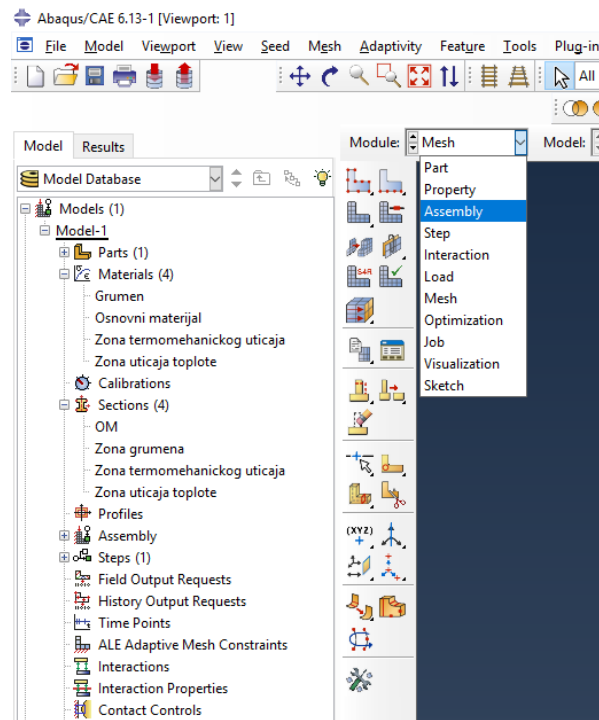
Слика 42. Одабир типа коначног елемента

Из палете са леве стране селектовати **Mesh Part**, притиснути **Yes**. Као резултат се добија следеће (слика 43):



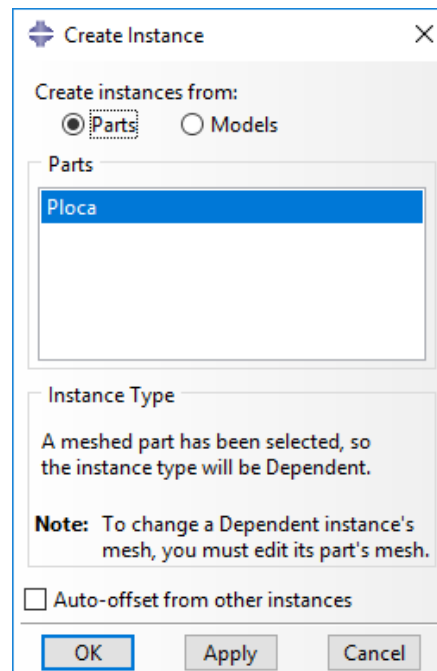
Слика 43. Приказ плоче са креираном мрежом

Из падајуће листе **Module** изабрати окружење **Assembly** (слика 44).

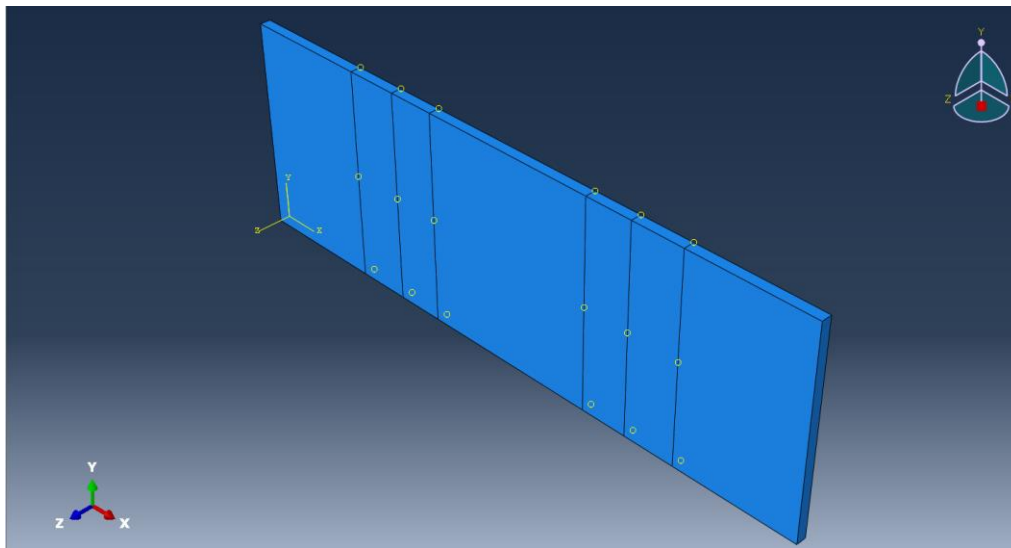


Слика 44. Одабир окружења Assembly

Из палете са леве стране изабрати **Create Instance**, изабрати плочу и притиснути ОК (слика 45).



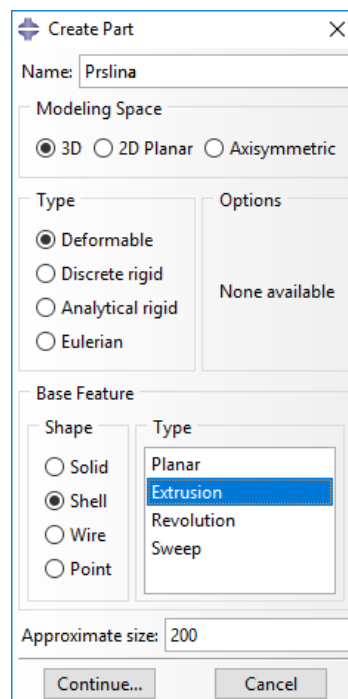
Слика 45. Креирање примера плоче



Слика 46. Приказ плоче након свих подешавања

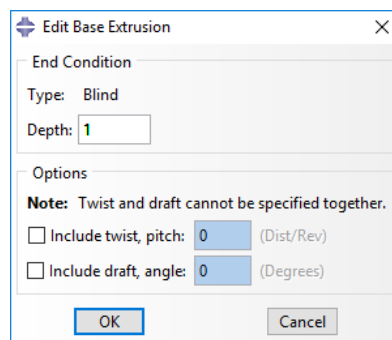
Креирање прслине

Из падајуће листе **Module** изабрати окружење **Part**, затим **Create Part**, прозор који се појављује попунити на следећи начин (слика 47).



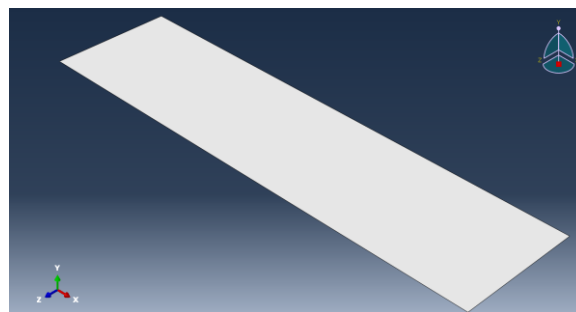
Слика 47. Попуњавање почетног прозора у окружењу Part за прслину

Из палете са леве стране изабрати опцију **Create Lines: Connected** и нацртати линију одређену координатама (17.5 , 10) и (21.5 , 10), затим прозор који се појављује попунити на следећи начин (слика 48).



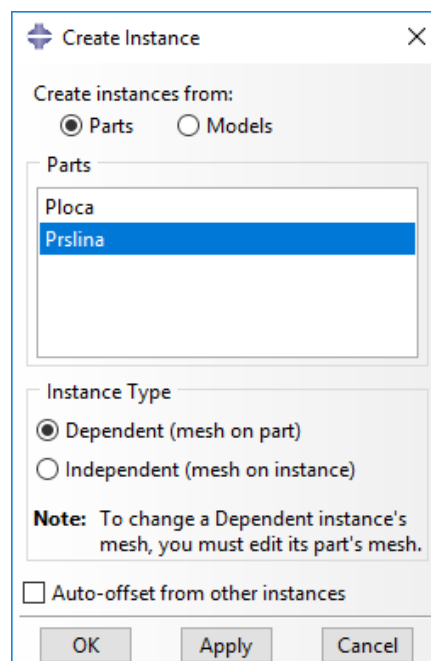
Слика 48. Додељивање друге димензије прслини

Као резултат добија се следеће (слика 49):



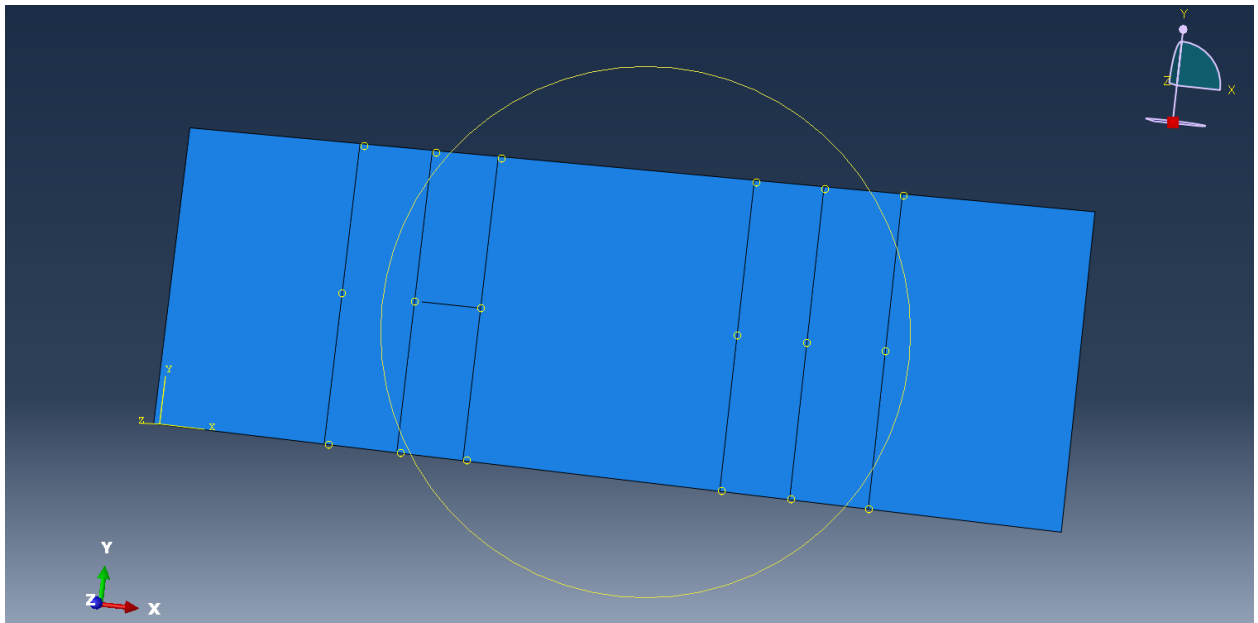
Слика 49. Приказ прслине

Сада је потребно из окружења **Assembly** изабрати опцију **Create Instance**, изабрати прслину и притиснути **OK** (слика 50).



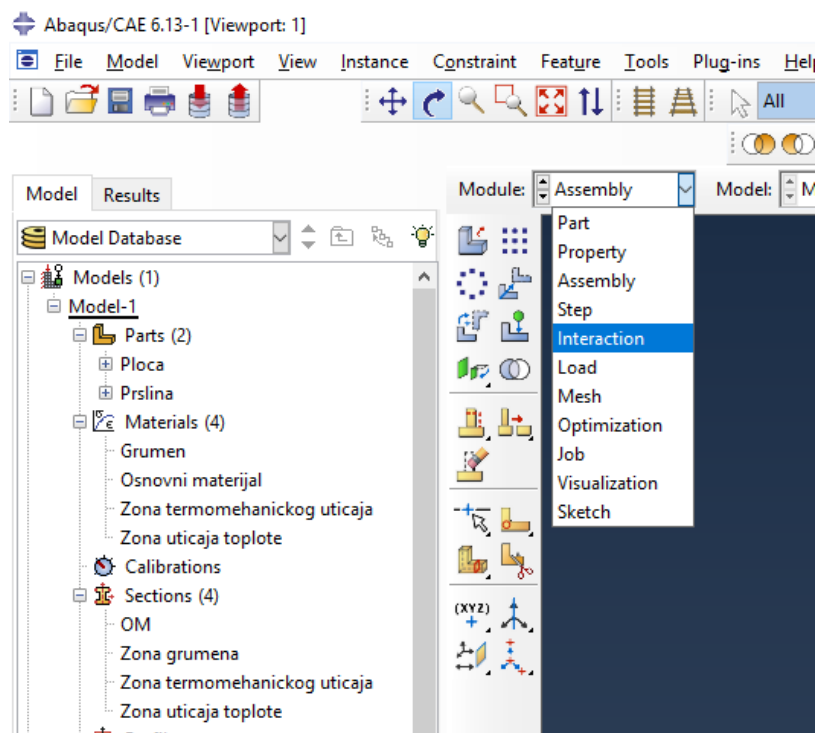
Слика 50. Креирање примера прслине

Сада се у **Assembly** окружењу може видети и прслина (слика 51).



Слика 51. Приказ прслине на плочи у окружењу **Assembly**

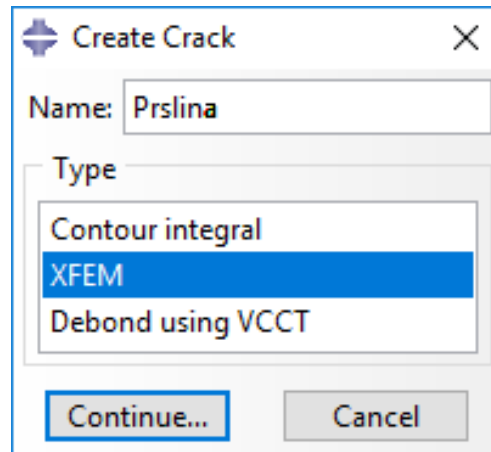
Из падајуће листе **Module** изабрати окружење **Interaction** (слика 52).



Слика 52. Прелаз у окружење **Interaction** како би се доделиле одређене карактеристике прслини

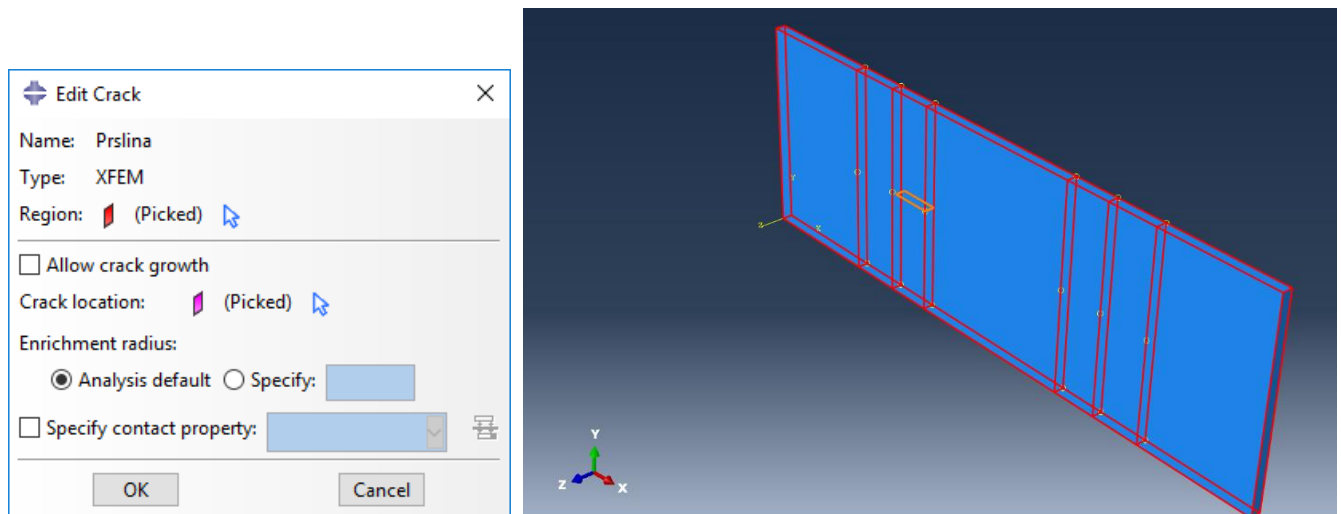
Special/Crack/Create

Прозор који се појављује попунити као на слици (слика 53):



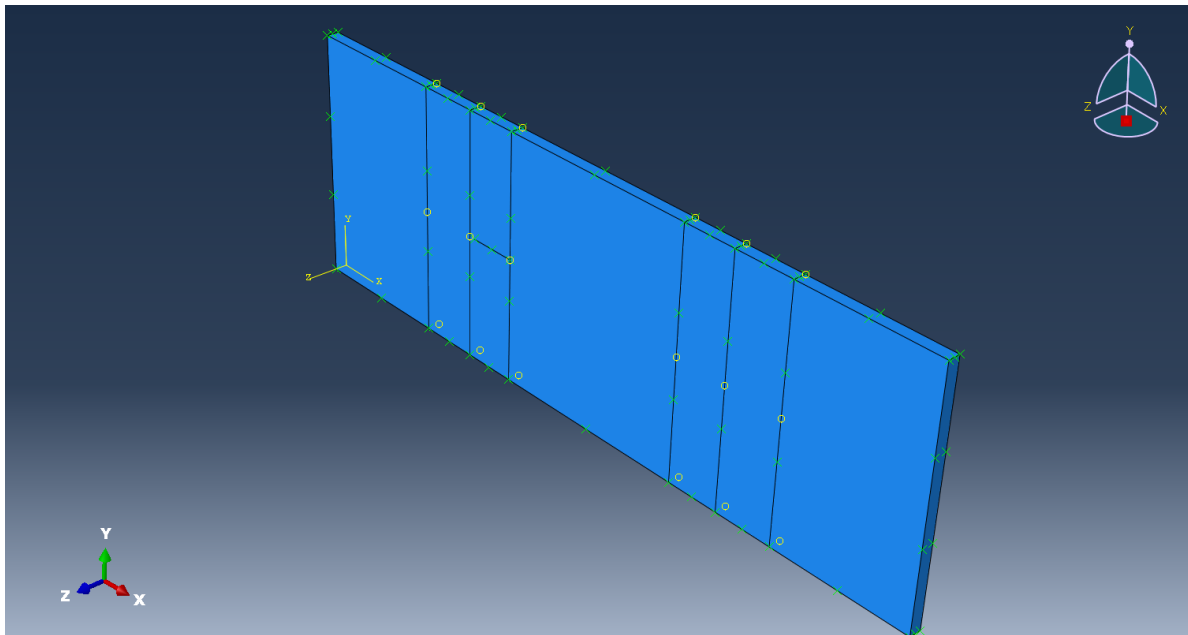
Слика 53. Одабир проширене методе коначних елемената

Након тога селектовати као домен плочу и прозор који се појављује попунити као на слици уз селектовање прслине (слика 54).



Слика 54. Селектовање прслине

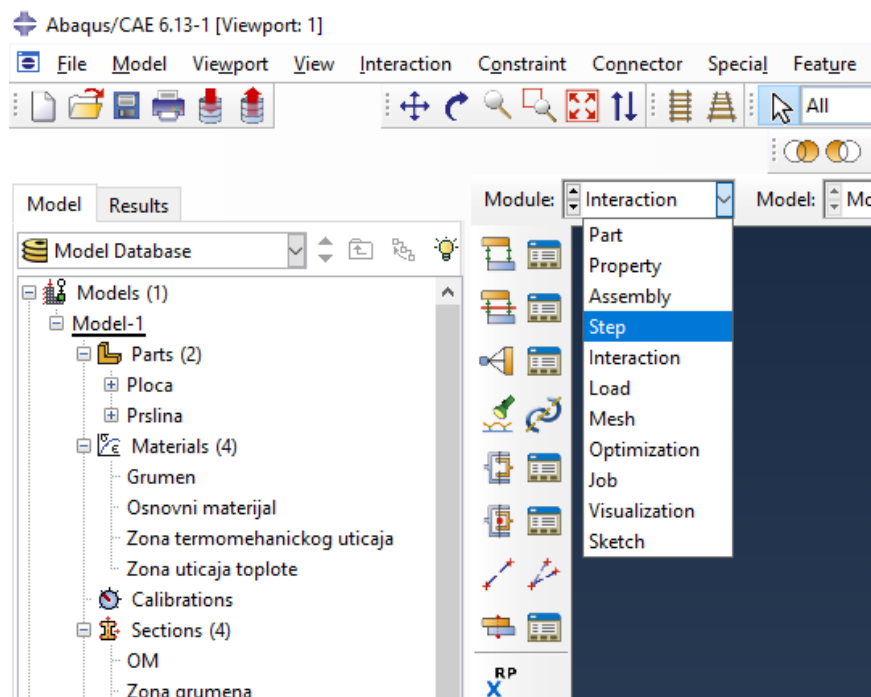
Добија се следећа ситуација (Слика 55):



Слика 55. Приказ плоче са прслином

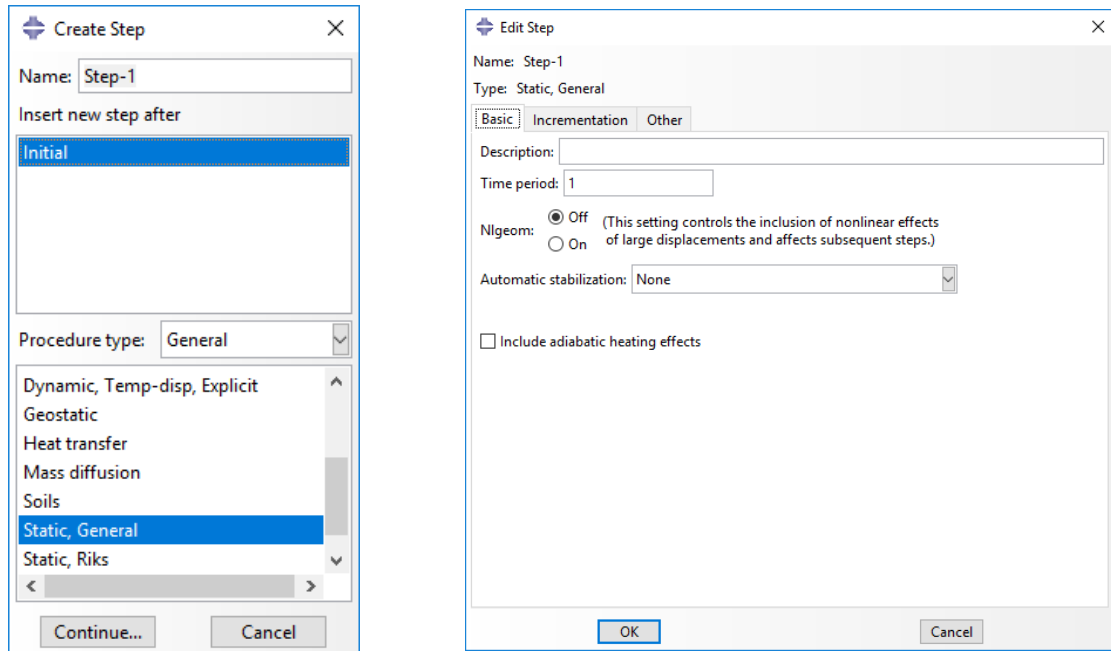
Креирање граничних услова и оптерећења:

Из падајуће листе **Module** изабрати окружење **Step** (слика 56).



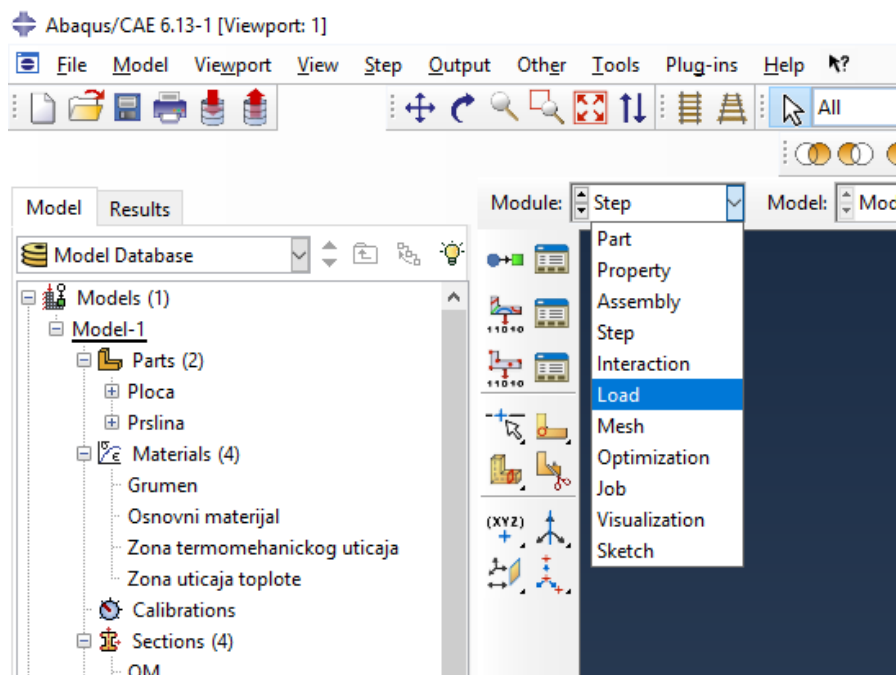
Слика 56. Прелазак у окружење Step

Из палете са леве стране изабрати опцију **Create Step**. У прозору који се појављује притиснути **Continue** а у следећем **OK** (слика 57).



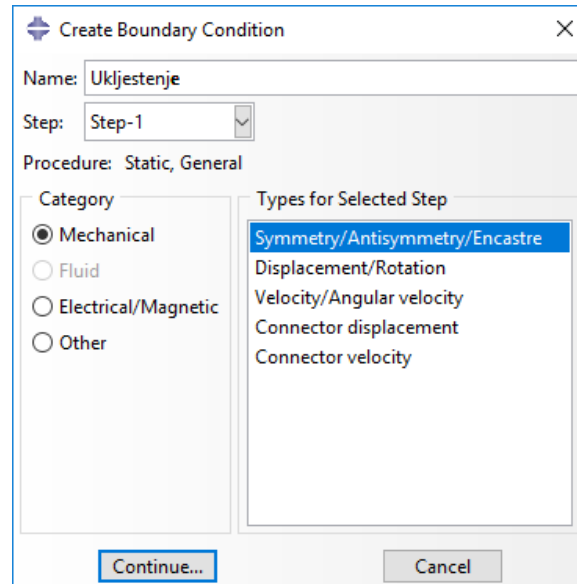
Слика 57. Избор статичке компоненте за креирање граничних услова и оптерећења

Сада је потребно прећи у окружење **Load** (слика 58).



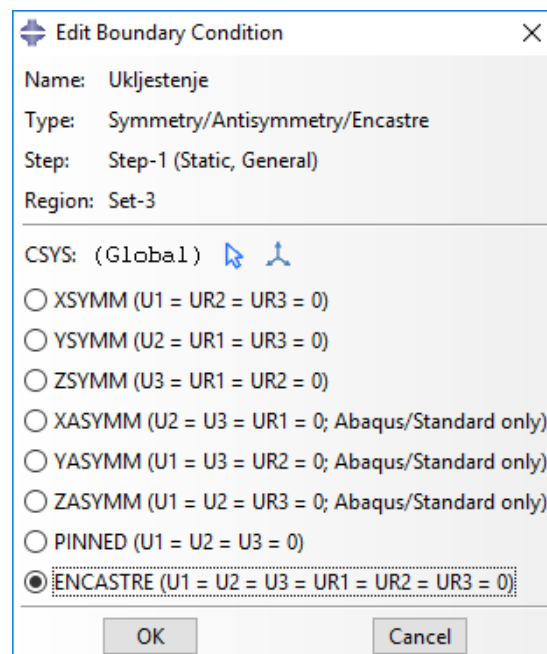
Слика 58. Прелазак у окружење Load како би се креирало оптерећење

Доња страна плоче је укљештена. Укљештење се задаје помоћу опције **Create Boundary Condition**, прозор који се појави попунити на следећи начин и притиснути **Continue** (слика 59):

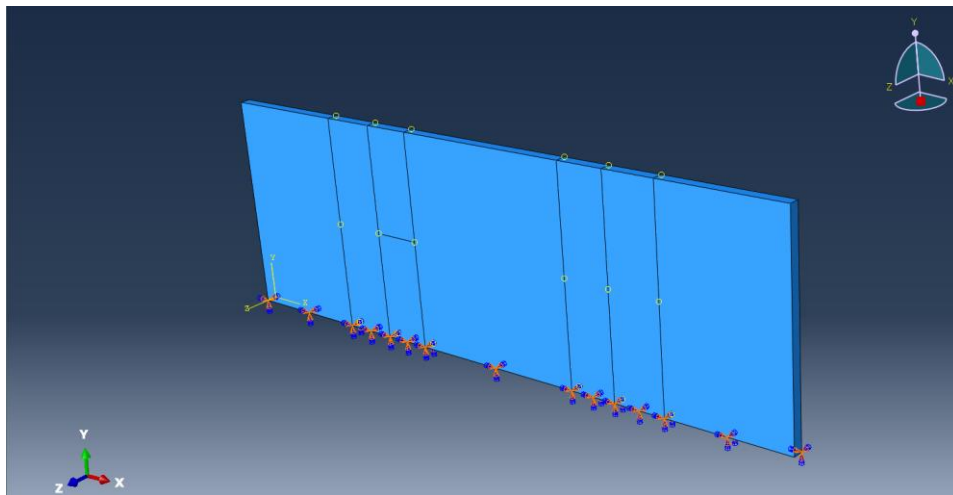


Слика 59. Приказ прозора за креирање укљештења

Затим је потребно селектовати површину која треба да буде укљештена и прозор који се појави попунити на следећи начин (слика 60):

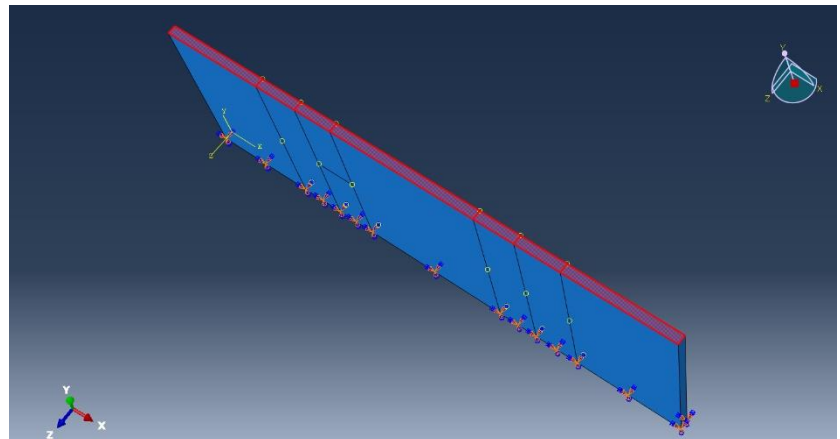
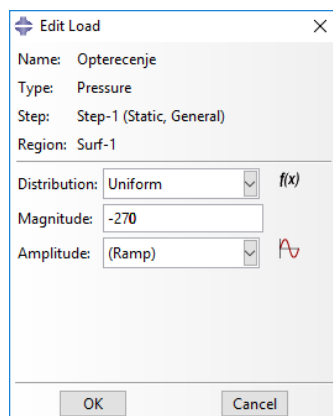
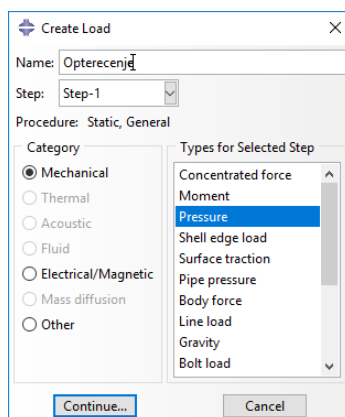


Слика 60. Чекирање опције да су сва померања једнака нули

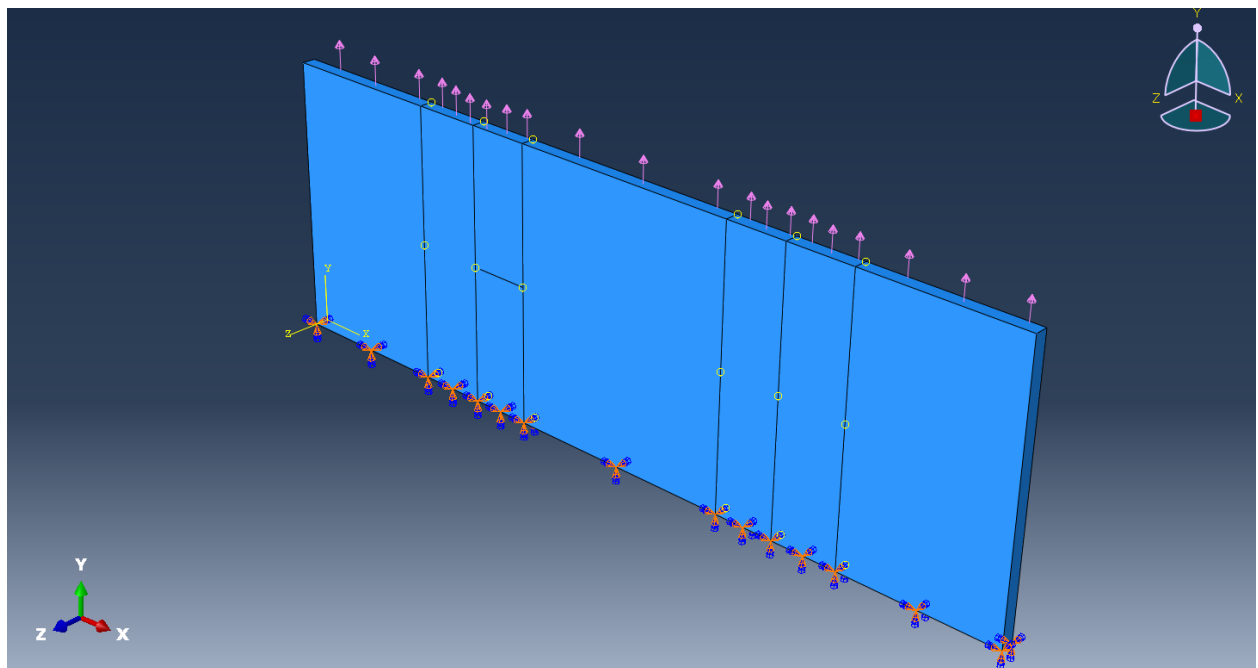


Слика 61. Приказ укљештене плоче

На горњу површину плоче делује затезна сила од 270 МПа. Сила се задаје помоћу опције **Create Load**. Прозор који се појављује попунити на следећи начин и притиснути **Continue** затим селектовати све површине на које делује ова сила и у прозору који се појављује задати силу (слика 62).

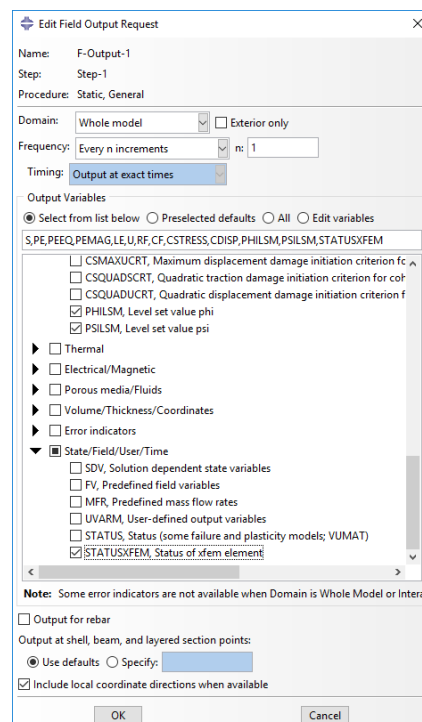


Слика 62. Задавање затезног оптерећења



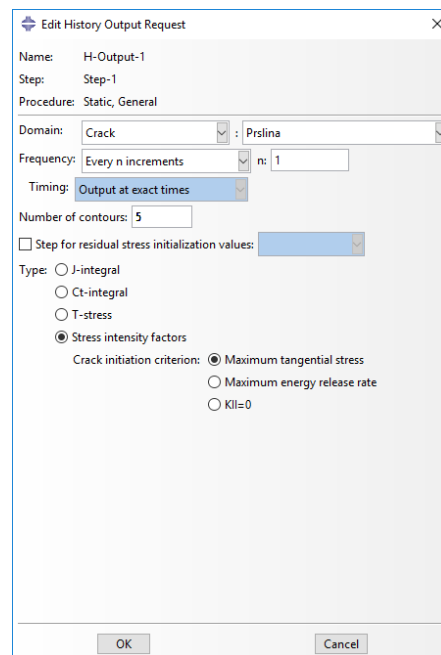
Слика 63. Приказ плоче са укљештењем и затезним оптерећењем

Како би се добили жељени резултати потребно је дефинисати неке захтеве. У стаблу које се налази са леве стране у оквиру **Field Output Requests**, одабрати **F-Output-1** и у прозору који се јавља чекирати следеће ставке (слика 64):



Слика 64. Чекирање жељених ставки које ће бити резултат анализе

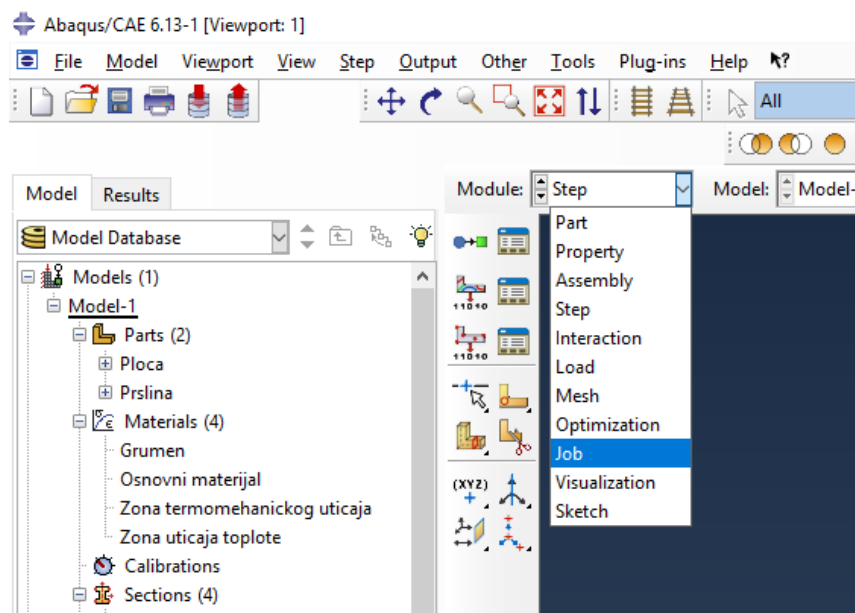
Затим, такође у стаблу, изабрати **History Output Requests** и попунити као на слици (слика 65).



Слика 65. Одабир фактора интензитета напона као излазну компоненту анализе

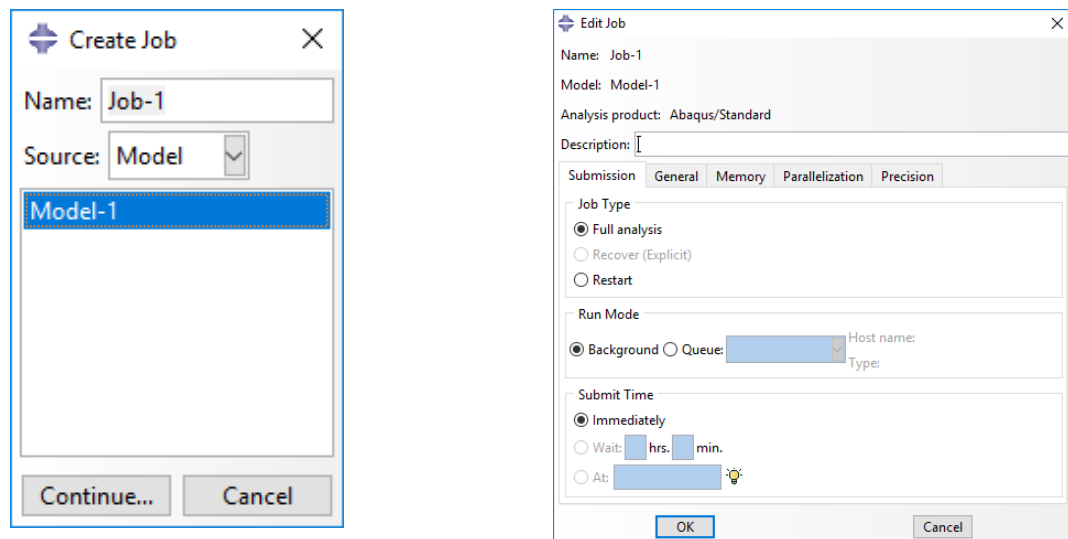
Решавање проблема и приказивање резултата

Сада је модел спреман за покретање анализе. Потребно је прећи у окружење **Job** (слика 66).



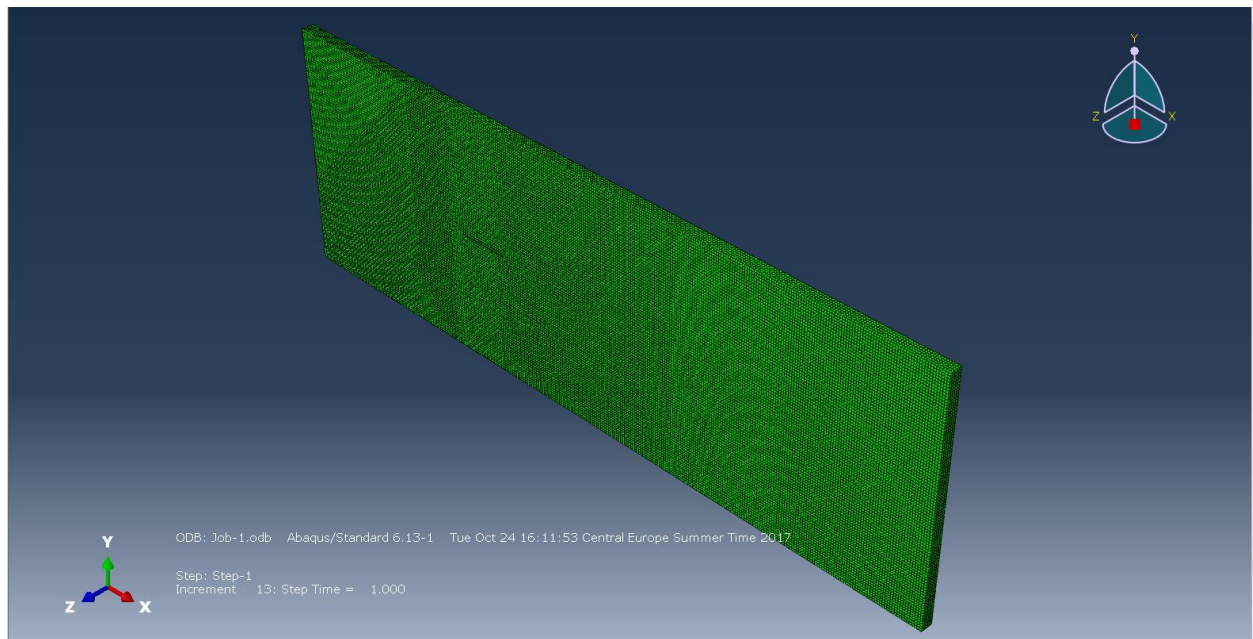
Слика 66. Прелазак у окружење Job

Десним кликом на **Jobs** у стаблу изабрати **Create** и у прозору који се приказује притиснути **Continue** а у прозору након тога **OK** (слика 67).



Слика 67. Креирање анализе

Сада када је креиран **Job-1**, десним кликом на њега изабрати **Submit**, а затим **OK**. Када се анализа заврши десним кликом на **Job-1** изабрати **Results** (слика 68).

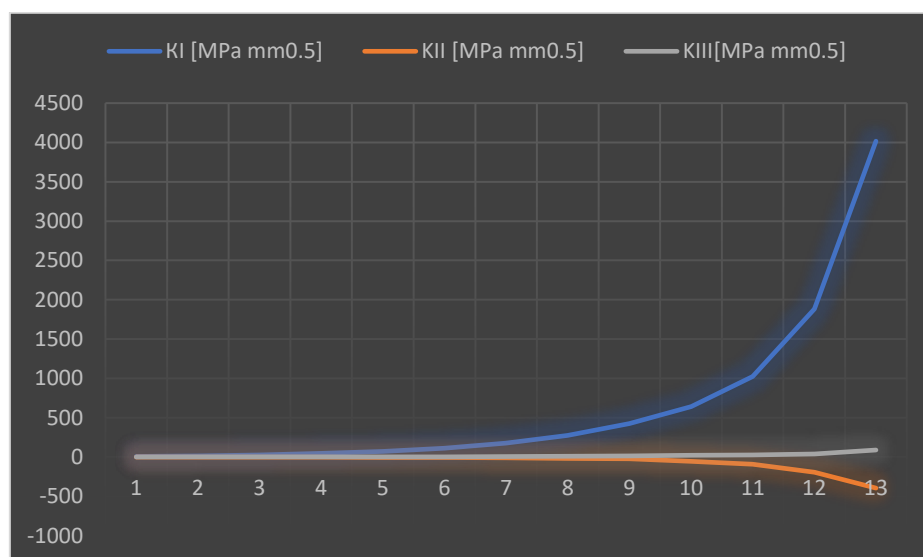


Слика 68. Приказ плоче када је завршена анализа

Сада је потребно из палете која се налази на левој страни изабрати опцију **Plot Contours on Deformed Shape** како би се видео деформисани модел са резултатима. Фактор интензитета напона се очитава тако што се у директоријуму где се чувају подаци за одрађену анализу пронађе **Text** документ у коме се налазе потребне информације.

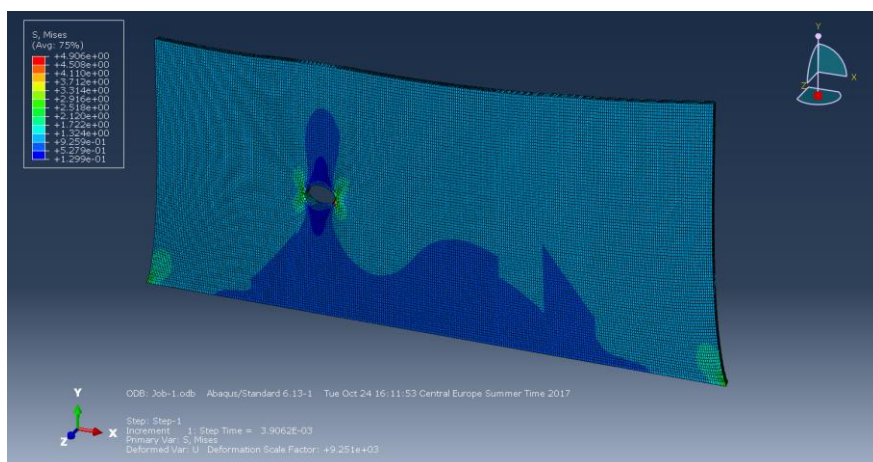
Табела 4. Приказ резултата фактора интензитета напона по корацима

Корак	K_I [MPa mm ^{0.5}]	K_{II} [MPa mm ^{0.5}]	K_{III} [MPa mm ^{0.5}]
1	7.740	-0.4835	0.2479
2	15.67	-0.9766	0.4976
3	27.54	-1.715	0.8717
4	45.37	-2.841	1.443
5	72.22	-4.587	2.338
6	113.4	-7.213	3.581
7	176.5	-11.06	5.431
8	275.1	-16.92	8.852
9	427.3	-24.42	13.42
10	639.8	-55.47	21.38
11	1024	-93.7	27.99
12	1881	-192.8	38.97
13	4017	-395.1	89.11

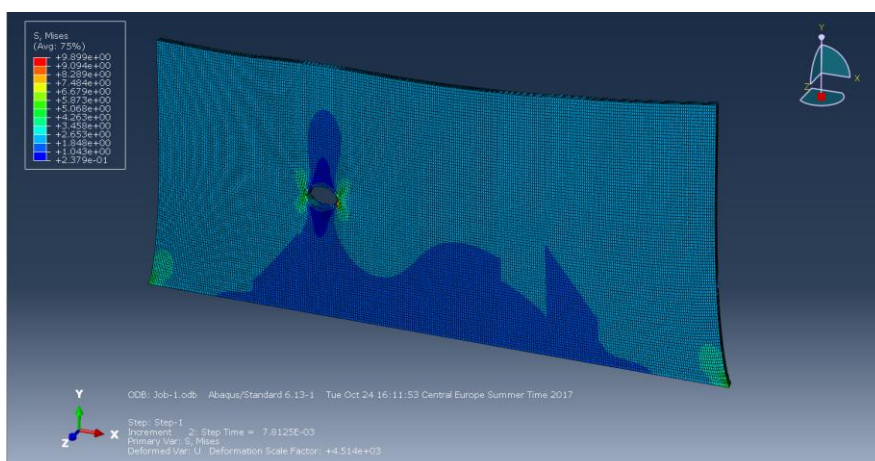


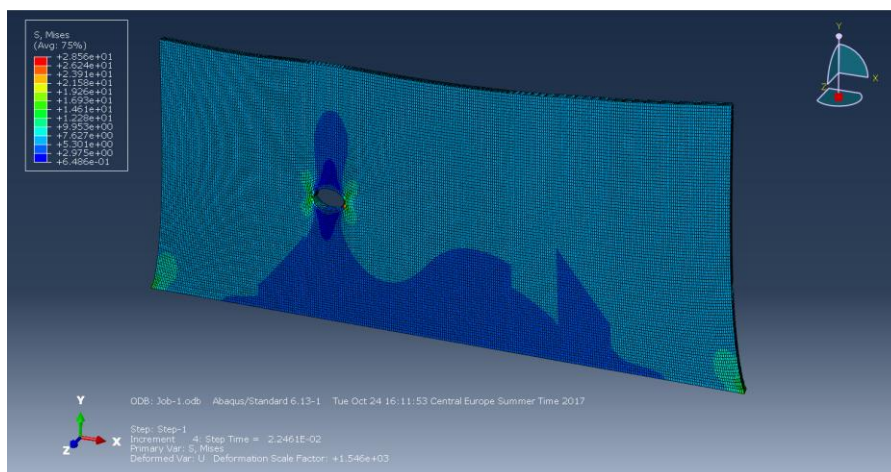
-приказ фактора интензитета напона по корацима-

У наставку ће бити приказани резултати за 13 корака (чији је број дефинисао сам програм аутоматски).

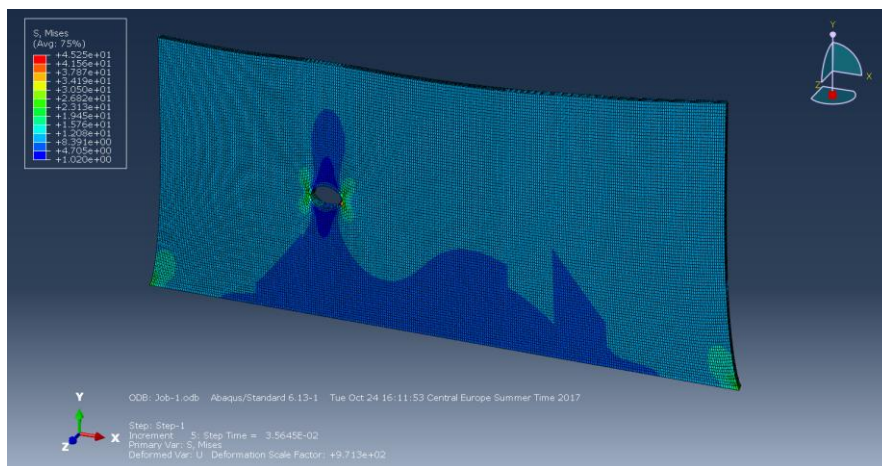


Слика 69. Први корак

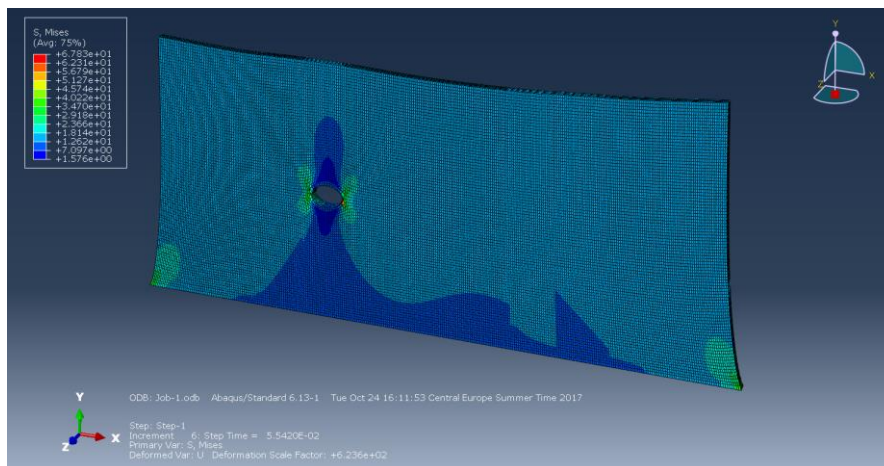




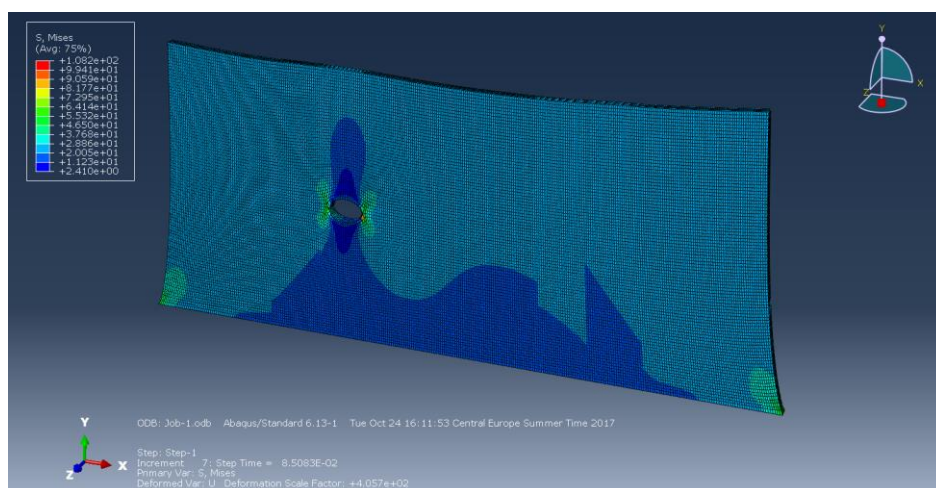
Слика 72. Четврти корак



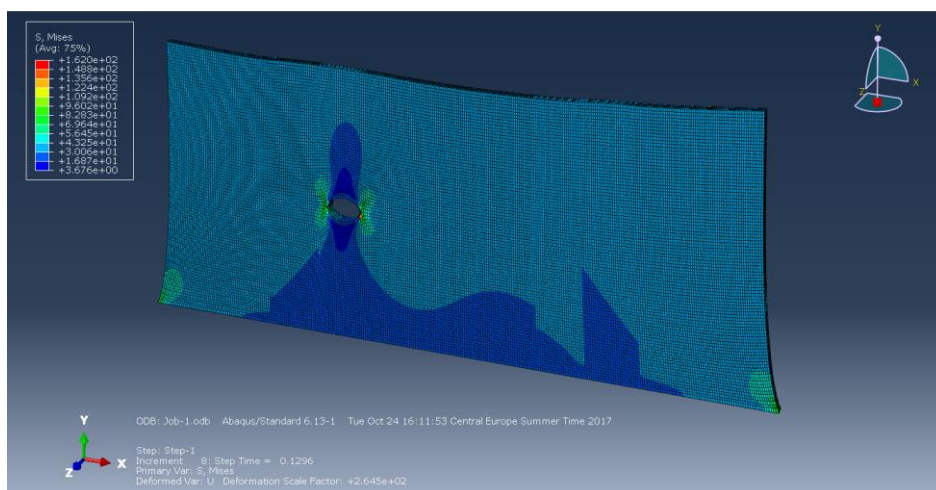
Слика 73. Пети корак



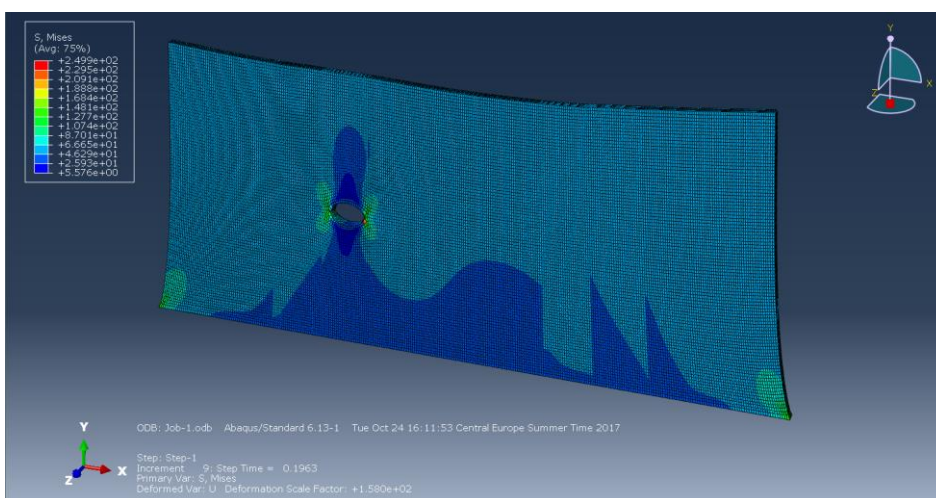
Слика 74. Шести корак



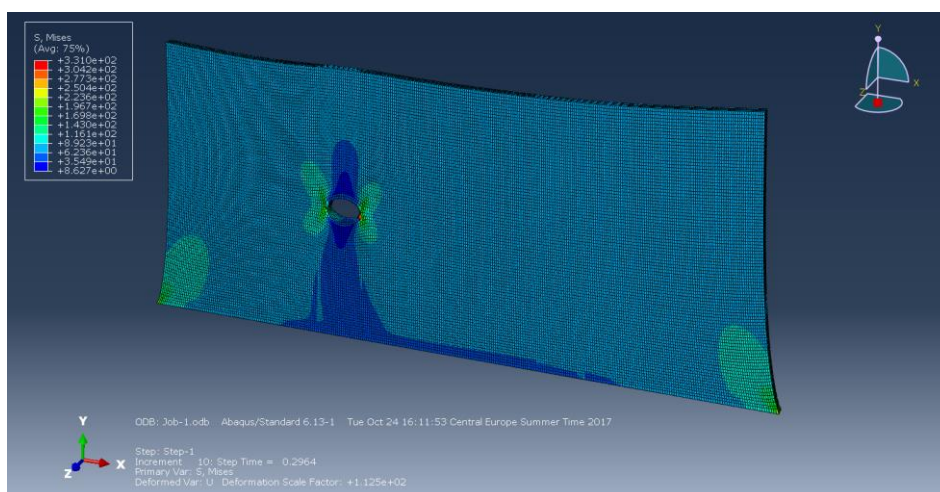
Слика 75. Седми корак



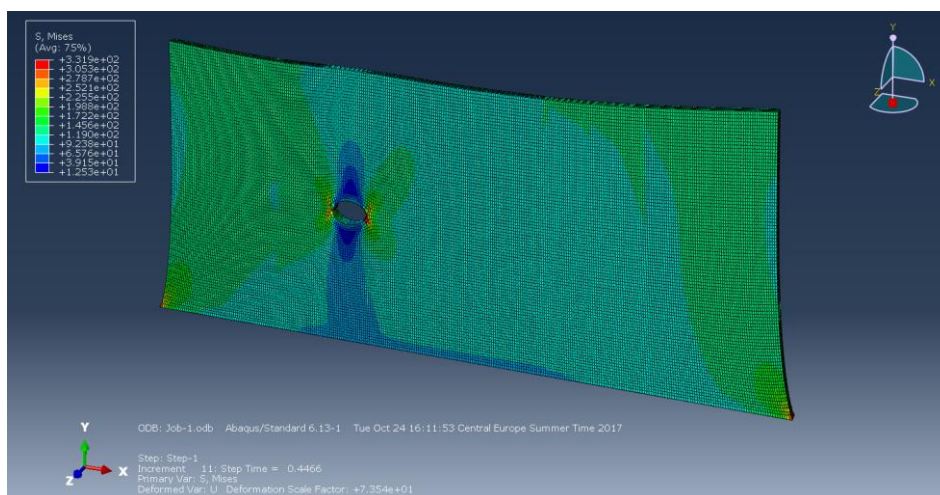
Слика 76. Осми корак



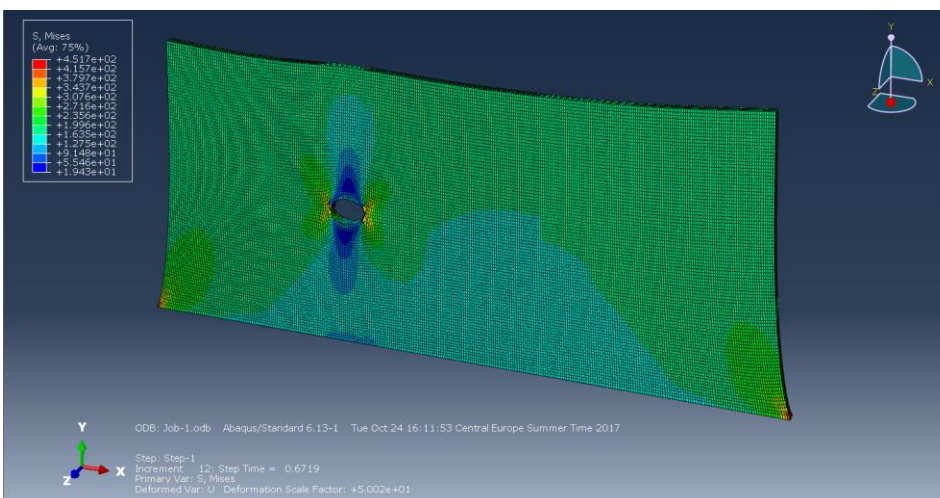
Слика 77. Девети корак



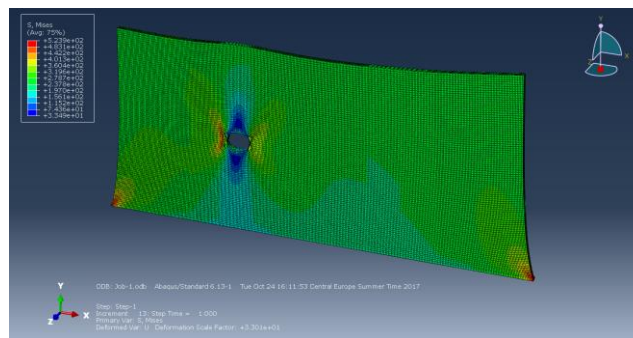
Слика 78. Десети корак



Слика 79. Једанаести корак



Слика 80. Дванаести корак

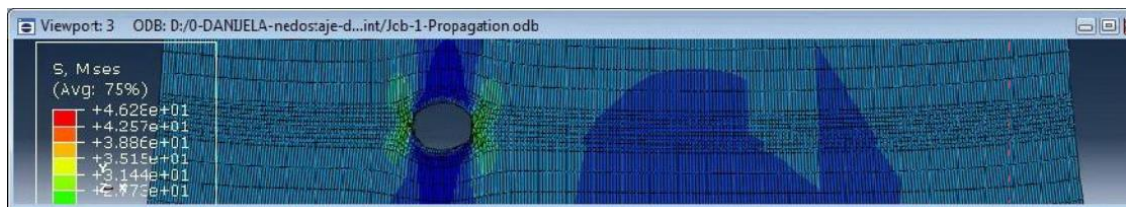


Слика 81. Тринаести корак

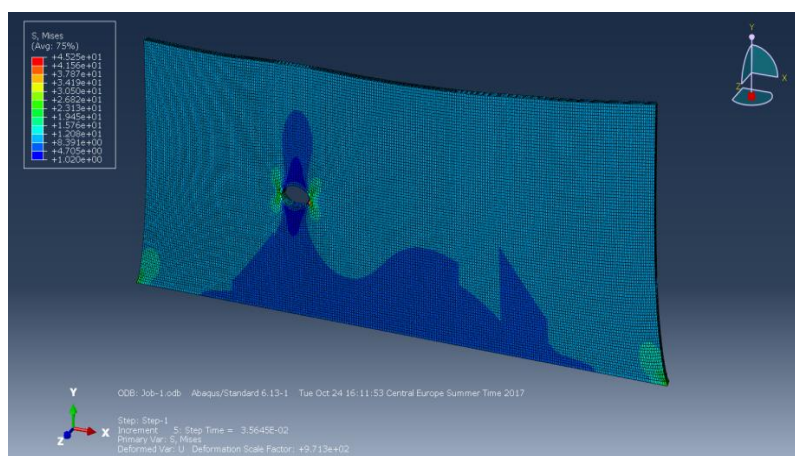
На основу претходно приказане анализе могуће је закључити да се максимални напон формира у околини врха прслине и да достиже максималну вредност напона у датој зони.

Поређење резултата

Упоредним приказом резултата добијених прорачуном и резултата из рада: Примена механике лома на процену интегритета заварених конструкција од легура алуминијума се може видети да су добијене величине приближно исте. Мала одступања постоје највероватније због формирања мреже коначних елемената, типа елемента као и његових димензија.



Слика 82. Приказ расподеле Мизесових напона из рада: Примена механике лома на процену интегритета заварених конструкција од легура алуминијума



Слика 83. Приказ расподеле Мизесових напона добијених прорачуном

ЗАКЉУЧАК

Разматрано је ширење прслине у *FSW* споју, при чему је иницијална прслина уведена у ЗТМУ. Експериментално је утврђено да је ЗТМУ место где се најчешће јављају прслине.

При формирању мреже коначних елемената потребно је водити рачуна о квалитету мреже, како би резултати били прецизнији.

У овом раду, као излазна величина добијени су Мизесови напони као и фактор интензитета напона, што оставља простора за даље унапређивање, као што је прорачун века конструкције-интегритет конструкције.

Показано је да се предности коришћења софтвера огледају у следећем: уштеда времена, средстава и ресурса, што је нашло оправданост са економског аспекта. Дакле, скупа лабораторијска мерења су замењена корисничким софтвером, у оквиру ког се врши: моделирање конструкције, са увођењем иницијалне прслине у структуру, а потом прорачун напона и деформације, као и симулација ширења прслине са свим релевантним параметрима механике лома.

Попис слика

Слика 1- FSW поступак

Слика 2 - Облици трна алата

Слика 3 - Врсте спојева добијених поступком FSW

Слика 4 - Попречни пресек споја добијеног FSW поступком: основни материјал (ОМ), зона утицаја топлоте (ЗУТ), зона термо-механичког утицаја (ЗТМУ), грумен (Г)- део ЗТМУ

Слика 5 - Металографски прикази FSW споја: HAZ-Зона утицаја топлоте (ЗУТ), TMAZ-Зона термо-механичког утицаја (ЗТМУ), Nugget-Грумен (Г)- део ЗТМУ

Слика 6 - 2D модел FSW споја

Слика 7 - Приказ коначних елемената

Слика 8 - Чворови побољшани NT ■ и $H(x)$ ● функцијама

Слика 9 - Дефинисање положаја тачке у односу на прслину

Слика 10 - Коначни елементи за XFEM

Слика 11 - Дефинисање растојања од врха прслине, код критеријума критичног напона

Слика 12 - Дефинисање растојања код критеријума критичног отварања прслине

Слика 13 - Раст прслине у функцији од времена

Слика 14 - Енергија која се ослобађа при ширењу прслине једнака је енергији потребној за затварање прслине

Слика 15 - Мод I

Слика 16 - Заморни раст прслине дефинисан Paris – овим законом

Слика 17 - Алгоритам нумеричког прорачуна параметара лома код FSW спојева

Слика 18 - Поједностављен модел 3D модел FSW споја

Слика 19 - Приказ окружења Abaqus-a

Слика 20 - Бирање окружења Part

Слика 21 - Попуњавање почетног прозора у окружењу Part

- Слика 22 - Приказ окружења у коме се црта модел
- Слика 23 - Уношење координата плоче
- Слика 24 - Уношење дебљине плоче
- Слика 25 - Приказ нацртане плоче
- Слика 26 - Прозор у коме се уписују координате за креирање равни
- Слика 27 - Приказ креираних тачака на плочи
- Слика 28 - Приказ опције за креирање равни
- Слика 29 - Креирање равни помоћу три одговарајуће тачке
- Слика 30 - Приказ плоче са креираним равнима
- Слика 31 - Одабир окружења за креирање и дефинисање материјала
- Слика 32 - Попуњавање карактеристика за зону основног материјала
- Слика 33 - Попуњавање карактеристика за зону утицаја топлоте
- Слика 34 - Попуњавање карактеристика за зону термо механичког утицаја
- Слика 35 - Попуњавање карактеристика за зону грумена
- Слика 36 - Прозор за стварање одговарајућих секција
- Слика 37 - Уписивање назива секције и одабир одговарајуће категорије
- Слика 38 - Додељивање материјала одговарајућој секцији
- Слика 39 - Приказ плоче са креираним секцијама
- Слика 40 - Приказ окружења за креирање мреже
- Слика 41 - Попуњавање величине коначног елемента
- Слика 42 - Одабир типа коначног елемента
- Слика 43 - Приказ плоче са креираном мрежом
- Слика 44 - Одабир окружења Assembly
- Слика 45 - Креирање примера плоче
- Слика 46 - Приказ плоче након свих подешавања

Слика 47 - Попуњавање почетног прозора у окружењу Part за прслину

Слика 48 - Додељивање друге димензије прслини

Слика 49 - Приказ прслине

Слика 50 - Креирање примера прслине

Слика 51 - Приказ прслине на плочи у окружењу Assembly

Слика 52 - Прелаз у окружење Interaction како би се доделиле одређене карактеристике прслини

Слика 53 - Одабир проширене методе коначних елемената

Слика 54 - Селектовање прслине

Слика 55 - Приказ плоче са прслином

Слика 56 - Прелазак у окружење Step

Слика 57 - Избор статичке компоненте за креирање граничних услова и оптерећења

Слика 58 - Прелазак у окружење Load како би се креирало оптерећење

Слика 59 - Приказ прозора за креирање укљештења

Слика 60 - Чекирање опције да су сва померања једнака нули

Слика 61 - Приказ укљештене плоче

Слика 62 - Задавање затезног оптерећења

Слика 63 - Приказ плоче са укљештењем и затезним оптерећењем

Слика 64 - Чекирање жељених ставки које ће бити резултат анализе

Слика 65 - Одабир фактора интензитета напона као излазну компоненту анализе

Слика 66 - Прелазак у окружење Job

Слика 67 - Креирање анализе

Слика 68 - Приказ плоче када је завршена анализа

Слика 69 - Први корак

Слика 70 - Други корак

Слика 71 - Трећи корак

Слика 72 - Четврти корак

Слика 73 - Пети корак

Слика 74 - Шести корак

Слика 75 - Седми корак

Слика 76 - Осми корак

Слика 77 - Девети корак

Слика 78 - Десети корак

Слика 79 - Једанаести корак

Слика 80 - Дванаести корак

Слика 81 - Тринаести корак

Слика 82 - Приказ расподеле Мизесових напона из рада: Примена механике лома на процену интегритета заварених конструкција од легура алуминијума

Слика 83 - Приказ расподеле Мизесових напона добијених прорачуном

Литература

- [1] Јовичић Г., Живковић М., Вуловић С.(2011):Прорачунска механика лома и замора, Машински факултет у Крагујевцу, ISBN 978-86-86663-65-8
- [2] Данијела Д. Живојиновић (2013): Примена механике лома на процену интегритета заварених конструкција од легура алуминијума, докторска дисертација, Универзитет у Београду
- [3] Danijela Živojinović, Aleksandar Sedmak, Aleksandar Grbović (2013): Crack Growth analysis in friction stir welded joint zones using Extended finite element method, UDK/UDC: 621.791.05: 669.715
- [4] Катарина Лековић (2017): Легуре алуминијума у производњи вагона, Дипломски рад, Крагујевац, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу
- [5] Metthew Pais, Nam-Ho Kim: XFEM Analysis of a Plate with an Edge Crack, University of Florida, Gainesville, FL
- [6] Dr.-Ing. Jens Lüke: Verwendung von XFEM in Abaqus zur Rissfortschrittsberechnung, Dessault Systemes Simulia, Aachen
- [7] Software: Abaqus-Dessault Systemes Simulia