

**Факултет инжењерских наука
Универзитета у Крагујевцу**



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Енергетика и процесна техника

Предмет: Електротехника са електроником

Број индекса: 16/2006

Угљеша М. Ћоровић

**Примена Методе фиктивних извора за
решавање проблема у електостатици
завршни рад**

Комисија за преглед и одбрану:

1. др Јасна Радуловић - ментор
2. _____
3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да проучи препоручену, као и ширу литературу која се односи на нумерички метод, који има широку примену у анализи електростатичких поља у високо-напонском инжењерству, тзв. метод фиктивних извора (МФИ). На бази усвојеног знања кандидат треба да детаљно опише метод, као и поступак решавања једног конкретног електростатичког проблема.

Препоручена литература:

- [1] Singer H., Steinbigler H., Weiss P., A Charge simulation method for the calculation of high voltage fields, IEEE Trans., PAS 73, pp. 1660-1668. 1974.
- [2] Malik N. H., A review of the charge simulation method and its applications, IEEE Trans. on Electrical Insulation, 24 (1) pp. 3–20. 1989.
- [3] Весковић М., Решавање електростатичких проблема проводника у жљебу са посебним обртом на примену метода фиктивних извора, магистарски рад, Технички факултет у Чачку, Универзитет у Крагујевцу, 2009.

Крагујевац, датум

ментор:
др Јасна Радуловић

Резиме: Метод фиктивних извора (МФИ) је нумерички метод који се темељи на важности теореме еквиваленције различитих електромагнетних система. Суштина овог метода је у замени реалних оптерећења, која су распоређена по површинама електрода, коначним бројем непознатих фиктивних извора, који су постављени унутар простора који заузимају електроде. Положај фиктивних извора није строго дефинисан, па истраживач, извесним осећајем и интуицијом врши оптималан избор. Интензитети тих извора уобичајено одређују се применом метода подешавања у тачкама, тако да гранични услови на површинама електрода буду што боље задовољени.

Кључне речи: електростатика, електрода, фиктивни извори, гранични услови

Abstract: Charge Simulation Method (CSM) is numerical method based on theorem of equivalence of different electromagnetic systems. The basis of this method is to substitute real electrical surface charge of electrodes, with a finite number of unknown fictitious sources, which are placed within the area occupied by the electrodes. The position of fictitious sources is not strictly defined, so researcher, with some intuition and experience chooses the optimal one. The intensities of unknown fictitious sources are commonly determined using point-matching method, satisfying boundary conditions in finite number of points located electrode surface.

Keywords: electrostatics, electrodes, fictitious sources, boundary conditions

Садржај

1. Уводна разматрања.....	1
2. Метод фиктивних извора.....	4
2.1. Уводне напомене о методи.....	4
2.2. Теорема еквиваленције и метод ликова.....	6
2.3. Примена метода фиктивних извора.....	9
2.4. Избор облика фиктивних извора.....	15
2.5. Аспекти примене МФИ.....	16
2.5.1 Распоређивање фиктивних наелектрисања.....	16
2.5.2. Процена тачности.....	18
3. Пример примене МФИ у електростатици.....	22
3.1. Усамљена проводна лопта.....	22
3.2. Верификација резултата коришћењем програмског пакета FEMLAB.....	25
3.2.1. Програмски пакет FEMLAB.....	25
3.2.2. Поређење резултата добијених применом МФИ и пакета FEMLAB.....	29
4. Закључак.....	30
5. Литература.....	31

1. Уводна разматрања

Под електростатичким пољем се подразумева посебан случај електромагнетног поља које потиче искључиво од непокретних (у макроскопском смислу) наелектрисаних честица. У погледу начина на који се решавају, електростатички проблеми могу се поделити на следеће две групе:

1. у прву групу спадају проблеми код којих је расподела како запреминских, тако и површинских наелектрисања унапред позната;
2. у другу групу спадају проблеми када је задата геометрија електродног система и потенцијали (или оптерећења) електрода.

Проблеми у електростатици за које не постоје одговарајућа задовољавајућа тачна решења, решавају се аналитичким, нумеричким и експерименталним методама које показују одређене недостатке и предности у зависности од природе проблема који решавамо.

Један од најважнијих, али истовремено најтежих корака у процесу конструисања електромагнетних уређаја је процена електромагнетних процеса који се у њима дешавају. Теоријски модел електромагнетних процеса је заснован на фундаменталним законима електродинамике који су садржани у Максвеловим једначинама са одговарајућим граничним условима. Када се теоријски модел употпуни подацима о геометријским карактеристикама система, електромагнетним карактеристикама средине у којој се процес дешава и карактеристикама извора поља, тада он садржи све потребне информације о проучаваном електромагнетном процесу. Из теоријског модела треба добити информацију о том електромагнетном процесу, коришћењем одговарајућег математичког модела. Дакле, узимајући у обзир граничне услове, одређене математичке трансформације се примењују на теоријски модел. Постоје различити облици математичког модела за одређени електромагнетни процес зависно од врсте проблема и уведених функција поља.

Условно, математички модели могу да се поделе на моделе који се могу решавати помоћу:

- диференцијалних,
- интегралних,
- диференцијално - интегралних једначина.

Диференцијални математички модел је описан системом парцијалних диференцијалних једначина са одговарајућим граничним условима. Интегрални математички модел има облик система интегралних једначина, са граничним условима имплицитно описаним у систему једначина. Диференцијално-интегрални математички модел представља практично комбинацију претходно поменутих модела.

Математички модели се решавају коришћењем аналитичких и нумеричких метода. Аналитички методи омогућавају да се нађе тражена величина у виду познате функције или реда познатих функција. Таква решења су ограничена углавном на једноставне геометријске структуре као што су проводне равни, проводни цилиндри, проводне лопте итд. Најчешће коришћени аналитички методи су: метод Гринових функција, раздвајања променљивих, интегралних трансформација, аксијалних потенцијала, комфортно пресликавање, метод огледања, мултиполни развој, Ламеов метод, итд. Развој брзих дигиталних рачунара је у први план довео коришћење нумеричких метода помоћу којих се решавају многи проблеми сложених и неправилних геометрија које је тешко или немогуће решити помоћу аналитичких метода.

При решавању диференцијалних математичких проблема користи се више нумеричких прилаза, од којих ћемо издвојити два најважнија и то су:

1. метод коначних разлика (МКР),
2. метод коначних елемената (МКЕ).

За нумеричко решавање математичких модела помоћу интегралних једначина такође се користи више метода од којих ћемо поменути као најзначајније:

1. метод интегралних једначина (МИЈ),
2. метод фиктивних извора (МФИ).

МКР се дуго користио у пракси за израчунавање дводимензионалних (2Д) и осносиметричних електростатичких и магнетостатичких поља. На основу овог метода могуће је превести систем парцијалних диференцијалних једначина у систем диференцијалних једначина, уз коришћење одговарајуће изабране ортогоналне мреже. Овај метод даје релативно добре резултате у прорачуну 2Д модела апаратура високог напона. Недостатак овог метода су тешкоће у формирању мреже која добро апроксимира граничне линије између различитих средина, велики број потребних улазних података и потреба за нумеричким диференцирањем.

МКЕ се успешно примењује при решавању 2Д и 3Д електромагнетних поља. Овај метод је заснован на варијационом рачуну. Функција поља може да се изрази, узимајући у разматрање довољно мале делове у посматраној области, коначне елементе, као аналитичка функција унутар коначног елемента. Тако се долази до система алгебарских једначина, чијим се решавањем добија информација о функцији поља у области од интереса. Недостатак овог метода је генерално велики број улазних података који су потребни при дефинисању геометријских и материјалних параметара изабраних коначних елемената неке области.

МИЈ је један од најопштијих и најчешће коришћених метода, који се у разним варијантама може применити на различите класе проблема. Овај метод је заснован на идеји о могућности замене пола неким еквивалентним наелектрисањима која су распоређена по површини проводника и на раздвојној површини хомогених диелектрика. Узимање у обзир граничних услова обезбеђује се увођењем одговарајућих интегралних једначина. За површине електрода користи се Дирихлеов услов у виду интегралних једначина I реда, а за границе раздвајања диелектрика услов непрекидности нормалних компоненти вектора диелектричног помераја у виду интегралних једначина II реда. Приликом решавања саме интегралне једначине основни циљ је да се иста трансформише у систем линеарних једначина, чијим се решавањем долази до потребних величина.

МФИ је нашао широку примену у анализи електростатичких поља у високонапонском инжењерству [1]. Суштина овог метода је у замени реалних оптерећења, која су распоређена по површинама електрода, коначним бројем непознатих фиктивних извора, који су постављени унутар простора који заузимају електроде, [8]. Интензитети тих извора одређују се, решавањем система линеарних једначина, тако да гранични услови на површинама електрода буду што боље задовољени. Стечена искуства показују да данас метод фиктивних извора представља веома једноставан и тачан нумерички приступ за приближно решавање проблема електромагнетике, који је без ограничења применљив на различите електромагнетне системе.

2. Метод фиктивних извора

2.1. Уводне напомене о методи

Код решавања проблема електростатике најчешће се одређује електрични скалар потенцијал. Ако се познаје функција потенцијала, релативно лако се могу одредити остале величине од интереса: вектор јачине поља, наелектрисања, сила, енергија, итд.; као и неки важни параметри: капацитивност, проводност, индуктивност.

У погледу начина на који се решавају, електростатички проблеми могу се поделити на следеће две групе:

1. У прву групу спадају проблеми код којих је расподела како запреминских, тако и површинских наелектрисања унапред позната. Тада се потенцијал израчунава врло једноставно (најчешће у облику интеграла), а ако се познаје функција потенцијала тада се релативно лако могу одредити и остале величине од интереса (као и вектор јачине поља, енергија, итд.). Међутим, веома мали број стварних проблема се може решити на овај начин. Углавном су то системи који поседују веома високу симетрију као на пример: усамљена проводна лопта, усамљен неограничено дуг цилиндрични проводник кружног пресека, усамљен квазилинеични кружни обруч, итд.

2. У Другу групу спадају проблеми када је задата геометрија електродног система и потенцијали (или оптерећења) електрода. Ови проблеми су најприсутнији у инжењерској пракси и за њихово решавање разрађен је велики број како аналитичких, тако и нумеричких и приближних метода. Као и остали, и ови методи показују одређене предности и недостатке у зависности од природе проблема за чије се решавање користе.

Код сложених и неправилних геометрија морају се користити нумеричке методе. Оне су углавном развијене за приближно решавање диференцијалних и интегралних једначина и представљају неку од бројних варијанти метода момената, коначних елемената или коначних разлика.

Посебно је за приближно нумеричко решавање интегралних једначина применљив метод фиктивних извора.

Метод фиктивних извора представља један једноставан и тачан нумерички поступак за приближно решавање проблема у електростатици, односно у

електромагнетици уопште. Овај метод је без ограничења применљив на електродне системе произвољног облика, како при квазистационарним тако и при динамичким процесима.

Прве идеје о његовој примени у решавању проблема електростатике потичу још од пионирских дана развоја савремене теорије електромагнетних поља, када су обликоване тзв. теореме лика у равном, цилиндричном и сферном огледалу и помоћу њих решаван већи број интересантних проблема у затвореном, аналитичком облику. Појавом рачунара и њиховом применом у решавању ових проблема наставило се са развојем и усавршавањем овог метода. Данас, метод фиктивних извора представља веома моћан и широко распрострањен нумерички метод за решавање проблема у електростатици. Стечена искуства указују да је предност овог метода у односу на друге нумеричке методе изузетна тачност, једноставност као и општост која омогућава велику разноврсност примене.

У основи, метод фиктивних извора се темељи на важној теореме о еквиваленцији различитих електромагнетних система.

У суштини МФИ је идеја да се уместо правог електродног система образује еквивалентни електростатички систем, сачињен од погодних одабраних и обликованих такозваних фиктивних извора, лоцираних унутар простора који запоседају електроде система. Очигледно је да је тај приближно еквивалентни електростатички систем у великој мери произвољан, а из разлога што положај и врста фиктивних извора нису унапред и строго дефинисани. Та чињеница ни у ком случају не представља недостатак метода, већ напротив, добру страну и предност метода. Наиме, преимућство метода лежи у томе што се истраживачу пружа шанса да извесним "осећајем" и интуицијом изврши оптимални избор и да од неограничено много комбинација фиктивних извора изабере најподеснију. Такође облик електроде често сугерише распоред и врсту фиктивних извора. Код 3Д електродних система као фиктивни извори најчешће се користе тачкаста оптерећења, код планпаралелних подужна, а код аксијалносиметричних равномерно оптерећени кружни линеични обручи.

Електромагнетно поље које стварају подесно одабрани фиктивни извори увек задовољава Максвелове једначине, док на великим удаљеностима од извора тежи нули. Због тога се интензитети фиктивних извора тако одређују да гранични услови на површинама електрода буду што боље задовољени. Гранични услови подразумевају да површина тела мора бити еквипотенцијална и да електрично поље на њој мора имати

само нормалну компоненту, $E_t = 0$. Постоје два најчешће примењивана приступа за одређивање непознатих интензитета фиктивних извора и то су:

- метод подешавања у тачкама (МПТ) и
- метод најмањих квадрата (МНК).

Оба приступа доводе до система линеарних једначина у коме се као непознате јављају интензитети фиктивних извора, с тим што МПТ подразумева да треба да се задовољи само први гранични услов, тј. да се у коначном броју тачака на површини електроде задовољи услов константне вредности потенцијала, а МНК подразумева да треба водити рачуна о свим постојећим граничним условима.

МФИ се показао веома успешним за решавање многих актуелних проблема у електростатици и електромагнетици. Основне предности овог метода су изузетна једноставност, као и општост која омогућава велику разноврсност примене. МФИ се веома успешно примењује и на системе који садрже један или више хомогених диелектрика, затим на тракасте водове, као и на решавање проблема са анизотропним срединама.

2.2. Теорема еквиваленције и метод ликова

Опште теореме електромагнетног поља су последице Максвелових једначина, те често разјашњавају природу и особине електромагнетног поља. Најважније опште теореме електромагнетног поља су:

- теорема суперпозиције,
- теорема компензације,
- теорема о расподели енергије у електромагнетном пољу,
- Поинтингова теорема,
- теорема јединствености решења Максвелових једначина,
- теорема реципроцитета,
- теорема дуалности електромагнетног поља електричних и магнетних извора и
- општа теорема еквиваленције.

Свака од ових теорема, на свој начин, даје користан увид у особине електромагнетног поља, што је од великог значаја за решавање проблема електромагнетике.

Према општој теореме еквиваленције, утицај оптерећених тела је могуће свести на неке еквивалентне изворе унутар домена који заузима тело, сматрајући да је средина у домену који је раније заузимало тело истих особина као ван тела. Еквивалентни извори ове врсте у домену који је раније заузимало тело називају се ликови примарних извора.

Метод ликова је примена посебног облика теореме еквиваленције. Низ електростатичких проблема као што су проводне равни, цилиндри и лопте, као и неки случајеви поља у нехомогеним диелектрицима, могу се решити применом метода електричних ликова, односно теореме еквиваленције. У основи, у свим таквим случајевима расподела наелектрисања је унапред позната у једном делу простора, а утицај непознате расподеле наелектрисања на проводним телима или везаних наелектрисања у диелектрику, замењује се ликовима познате расподеле оптерећења.

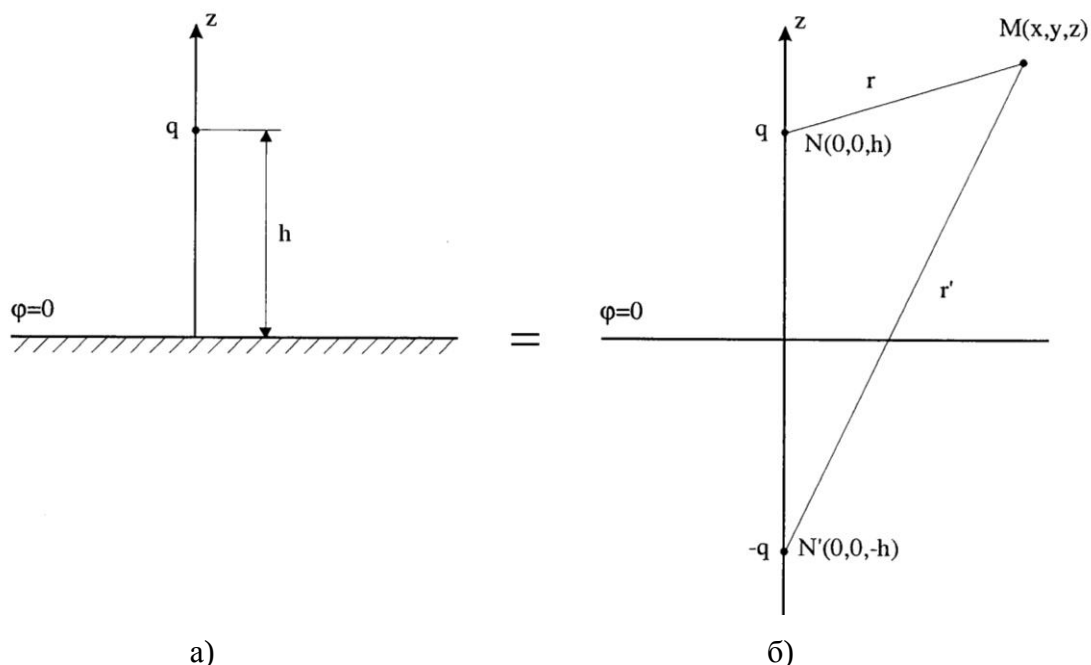
Метод ликова ће бити приказан најједноставнијим примером прорачуна поља које потиче од тачкастог наелектрисања које се налази на висини q изнад проводне равни нултог потенцијала, Сл. 1а.

Лако се може показати да је поље оптерећења q које је постављено над проводном равни, идентично пољу које би се добило када би се проводна раван уклонила, а уместо ње увело тачкасто наелектрисање $-q$ постављено симетрично у односу на раван, Сл. 1б Потенцијал у произвољној тачки M је:

$$\varphi_M = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \quad (2.2.1)$$

Како су растојања од наелектрисања q и до произвољне тачке проводне равни једнака, то је резултантни потенцијал на њој једнак нули, што потврђује да је гранични услов испуњен и да је добијено решење јединствено по теореме о једнозначности решења. На основу принципа суперпозиције, овај метод се може применити на произвољан број тачкастих наелектрисања или наелектрисаних тела произвољног облика, постављених изнад проводне равни.

Изложени поступак прорачуна поља у литератури се среће под називом теорема лика у равном огледалу. Погодним комбинацијама, помоћу овог метода могу се решавати различити сложенији проблеми.



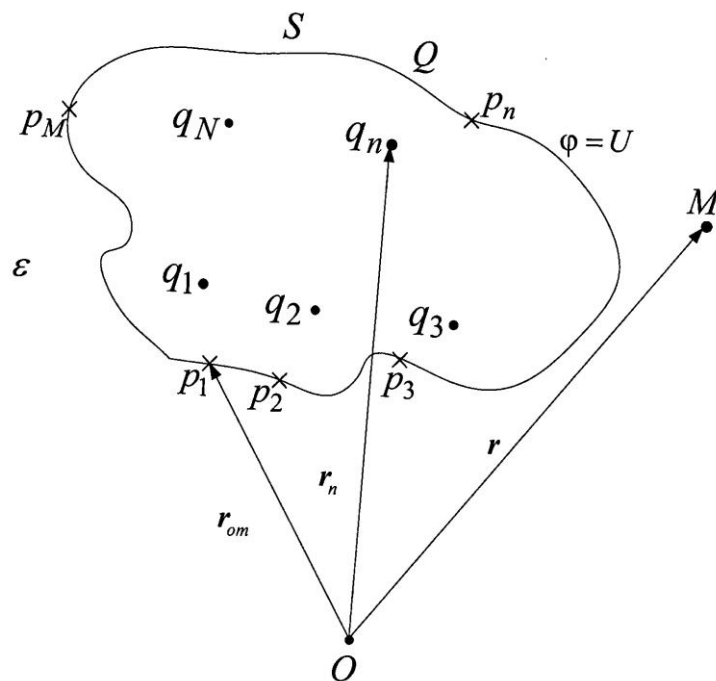
Слика 1. а) Тачкасто наелектрисуње над проводном равни и
б) Лик тачкастог наелектрисуња у проводној равни

МФИ се темељи на важности теореме еквиваленције различитих електромагнетних система, односно теореме ликова као њеног посебног облика. Тако је, при одређивању електромагнетног поља, увек могуће уместо стварних извора лоцираних унутар неке области дефинисане неком површином, поставити еквивалентне, фиктивне изворе, под условом да и стварни и фиктивни извори на тој површини образују једнако електромагнетно поље.

Прве идеје о примени МФИ, практично потичу још од раних дана развоја савремене теорије електромагнетних поља, када су формулисане теореме ликова у равном, цилиндричном и сферном огледалу. Тако се слободно може рећи да наведене теореме представљају најпростију варијанту МФИ или основу на којој се касније изграђивао овај метод. Развој и усавршавање овог метода дешавао се паралелно са појавом рачунара и њиховом применом за решавање проблема у теорији електромагнетних поља.

2.3. Примена метода фиктивних извора

Са циљем да се на једноставном примеру илуструје примена методе, а да се при томе не изгуби на општости, биће разматрана усамљена електрода површине S , оптерећена наелектрисањем Q и односу на референтну тачку у бесконачности доведена на потенцијал U (Сл 2.).



Слика 2. Усамљена електрода у хомогеној средини

Усамљена електрода оптерећена наелектрисањем Q применом методе фиктивних извора, може се заменити еквивалентним системом који чине тачкаста наелектрисања q_n , $n=1,2,...,N$ постављена унутар простора који заузима ова електрода тако да је $Q = \sum_n q_n$, $n=1,2,...,N$ (Слика 2.).

Потенцијал који у тачки M ствара n -ти извор је:

$$\varphi_n = q_n G(\mathbf{r}_n), \quad (2.3.1)$$

где је

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} \quad (2.3.2)$$

Гринова функција за потенцијал усамљеног тачкастог наелектрисања, $\mathbf{r}_n$ и $\mathbf{r}$ су вектори положаја тачке у којој се налази n -ти фиктивни извор и тачке у којој се одређује потенцијал.

Сагласно принципу суперпозиције, резултујући потенцијал, који стварају сви фиктивни извори, биће:

$$\varphi = \sum_{n=1}^N \varphi_n = q_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n). \quad (2.3.3)$$

Приближна вредност јачине електричног поља је:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi = -\sum_{n=1}^N q_n \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n). \quad (2.3.4)$$

Интензитети фиктивних извора одређују се тако да буду задовољени гранични услови и то гранични услов на површини електроде да је:

$$\varphi = U, \quad (2.3.5)$$

услов да је тангенцијална компонента јачине електричног поља на раздвојној површини једнака нули

$$E_t = 0, \quad (2.3.6)$$

као и да у околини електроде потенцијал φ задовољава Лапласову једначину

$$\Delta \varphi = 0. \quad (2.3.7)$$

На основу ових услова формира се систем са N једначина чија су решења вредности наелектрисања фиктивних извора.

Како формирати систем једначина и решити проблем? Постоји неколико могућности за решавање:

1. Први и најједноставнији је применом **метода подешавања у тачкама** тако да гранични услови на површини тела буду пгго боље задовољени. Потенцијал дат изразом (2.3.1) подеси се на потенцијал електроде U у M тачака подешавања на њеној површини. Ако се са r_{om} означи вектор положаја тачке подешавања, добија се систем једначина.

$$U = \sum_{n=1}^M q_n G(\mathbf{r}_{om}, \mathbf{r}_m), \quad r=1,2,\dots,M. \quad (2.3.8)$$

Решавањем овог система једначина добијају се вредности наелектрисања фиктивних извора, а затим се на основу њих може одредити и укупно оптерећење усамљене електроде, као и њена капацитивност.

$$Q = \sum_{n=1}^M q_n \text{ и } C = \frac{Q}{U} \quad (2.3.9)$$

Као показатељ остварене тачности проверава се гранични услов на површини електроде. Тако је гранични услов за потенцијал једино испуњен у тачкама подешавања, а између њих приближан потенцијал одступа од тачног. Са порастом броја фиктивних извора одступања приближне од тачне вредности потенцијала се смањују и тако остварује боље задовољење граничних услова за потенцијал.

Дакле, тачност приказаног метода се повећава са порастом броја фиктивних извора, али се мора водити рачуна да тај број не буде превелик, јер тада систем линеарних једначина може постати лоше условљен и због тога направити неприхватљиве грешке.

За процену остварене тачности предлаже се увођење тзв. **ефективне грешке**, која се ако је задовољен гранични услов за потенцијал у N тачака на површини тела и ако су r_{om} вектори положаја ових тачака, може дефинисати као:

$$Q_{\varphi} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\Phi(r_{om}) - U]^2} \quad (2.3.10)$$

2. Методом најмањих квадрата могуће је одредити непознате вредности фиктивних извора тако што се формира функционал:

$$F = \sum_{m=1}^{K \geq M} \left(U - \sum_{n=1}^N q_n G_{nm} \right)^2, \quad G_{nm} = G(r_{om}, r_n), \quad (2.3.11)$$

где је $K \geq M$ број тачака подешавања, а овај функционал је увек позитиван. У случају тачног решења његова вредност једнака је нули. За добијање апроксимативног решења потребна је што мања вредност функционала, а то је задовољено ако је:

$$\partial F / \partial q_n = 0, \quad n=1,2,\dots,N, \quad (2.3.12)$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial y_n} = \frac{\partial F}{\partial z_n} = 0, \quad n=1,2,\dots,N, \quad (2.3.13)$$

где је

$$r_n = x_n \vec{x} + y_n \vec{y} + z_n \vec{z}, \quad (2.3.14)$$

а $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ су јединични вектори.

Ако се као непозната величина посматра само наелектрисање фиктивних извора онда је (2.3.13) систем линеарних једначина погодан за одређивање непознатих вредности наелектрисања фиктивних извора.

Ако број тачака подешавања тежи бесконачности тада функционал (2.3.11) добија интегрални облик тј. прелази у средњеквадратну апроксимацију,

$$F = \oint \left[U - \sum_{n=1}^N q_n G(\vec{r}_n) \right]^2 dS. \quad (2.3.15)$$

Непознате величине су само наелектрисања фиктивних извора која се одређују из система линеарних једначина,

$$\partial F / \partial q_n = 0, \quad n=1,2,\dots,N. \quad (2.3.16)$$

У представљеном поступку, постоји неколико нетабличних интеграла, па је неопходна нумеричка интеграција, што ствара мале потешкоће. Међутим, подинтегралне функције у овим интегралима су без сингуларитета па било који квадратурни поступак доводи до решења.

3. Развојем граничног услова (2.3.5) у функционални ред (нпр. Фуријеов, Лежандров или Беселов) могу се добити веома добри резултати,

$$\varphi = \sum_{n=1}^N q_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k f_k(\mathbf{r}) \quad (2.3.17)$$

где су $f_k(\mathbf{r})$ базне функције, U_k су коефицијенти а $\mathbf{r}$ представља вектор положаја тачке на површини електроде. Након сређивања израза (2.3.17) и након интеграције по површини електроде, потенцијал се може приказати изразом:

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k f_k(\mathbf{r}) \quad (2.3.18)$$

где је

$$\varphi_k = \sum_{n=1}^N q_n \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) \nabla \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}) dS \quad (2.3.19)$$

После изједначавања првих N чланова у добијеном изразу за гранични услов, непозната наелектрисања фиктивних извора могу бити одређена решавањем следећег система линеарних једначина,

$$\varphi_k = \sum_{n=1}^N q_n \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) \nabla \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}) dS = U_k, \quad k=1,2,\dots,N. \quad (2.3.20)$$

2.4. Избор облика фиктивних извора

За примену метода фиктивних извора веома је битан правилан избор врсте и облика фиктивних извора. Чињеница је да просторни распоред фиктивних оптерећења може бити сасвим произвољан. Положај и врста нису унапред дефинисани, они могу бити не само електрична оптерећења и струје, већ и непостојећа магнетна оптерећења и струје које она образују, а такође и сложене комбинације које у себи садрже неке допунске захтеве произашле из симетрије, или неке друге особине, система који се посматра.

Веома је важно нагласити да без обзира како били обликовани фиктивни извори, електромагнетно поље које они стварају увек задовољава Максвелове једначине, а на великим удаљеностима од извора тежи нули. Фиктивне изворе треба тако дефинисати да гранични услови на површини S буду што боље задовољени.

Попгго се гранични услови задовољавају приближно нумерички, очигледно је да вредности наелектрисања фиктивних извора, а такође и облик као и распоред нису једнозначно одређени. Тако постоји неограничено много комбинација фиктивних извора. Иако се на први поглед чини да је то недостатак метода, детаљнија истраживања показују да се у овоме садрже одређене предности овог метода јер истраживач може интуицијом извршити оптималан избор облика и распореда фиктивних извора унутар посматране области. Често сам облик електрода као и геометрија система посматраног проблема сугеришу прикладан избор облика и распореда фиктивних извора. Свакако важно место заузима и интуиција истраживача. Ипак нека правила се могу констатовати:

1. Фиктивни извори су у облику тачкастих наелектрисања када систем чине тродимензионалне електроде коначних димензија;
2. Подужна наелектрисања су фиктивни извори код дводимензионалних план-паралелних система;
3. Кружне линеичне равномерно оптерећене обруче користимо као фиктивне изворе када систем има аксијалну симетрију;
4. Као фиктивни извори могу бити коришћени аксијални мултиполи, али и сложенији облици фиктивних извора.

2.5. Аспекти примене МФИ

Резултат који се добија при одређивању потенцијала и јачине електричног поља помоћу МФИ садржи грешке, које су најчешће последица апроксимације граничних услова или начина распоређивања фиктивних извора.

2.5.1 Распоређивање фиктивних наелектрисања

Најважнији и најтежи задатак који се поставља истраживачу у току примене МФИ је свакако проналажење, од неограничено много комбинација, оптималног распореда фиктивних извора и тачака подешавања. Тако истраживачу облик електрода и интуиција најчешће сугеришу најпогоднији распоред. Међутим, постоји и један искуствени критеријум који се користи приликом позиционирања тачкастих фиктивних наелектрисања и тачака подешавања, Сл. 3а, који се показао веома ефикасним. То је тзв. фактор додељивања:

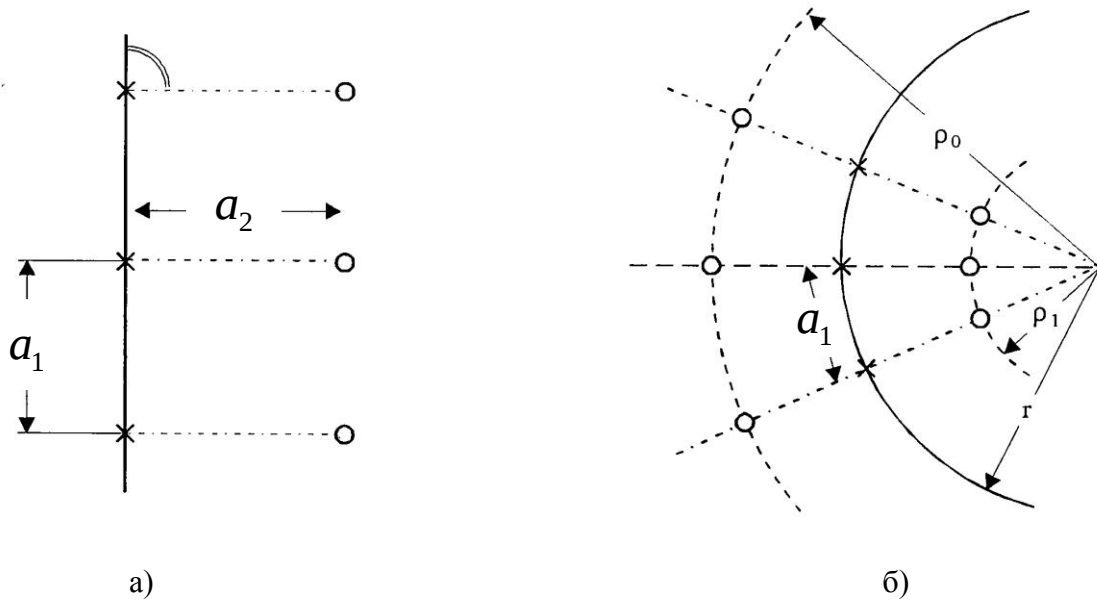
$$f_a = \frac{a_1}{a_2} \tag{2.5.1}$$

где је:

a_1 - раздаљина између две суседне тачке подешавања,

a_2 - раздаљина између тачке подешавања и одговарајућег фиктивног извора.

За случај закривљених контура, Сл. 3б, да би се избегла веома мала растојања између тачкастих фиктивних наелектрисања и тачака подешавања, користи се критеријум закривљености.



Слика 3. Распоред фиктивних наелектрисања

$$\rho_{1,0} = r \left[\sqrt{1 + \left(f_a \frac{a_1}{r} \right)^2} \mp f_a \frac{a_1}{r} \right] \quad (2.5.2)$$

где су:

ρ_1 - вредност за конвексну криву, негативан знак,

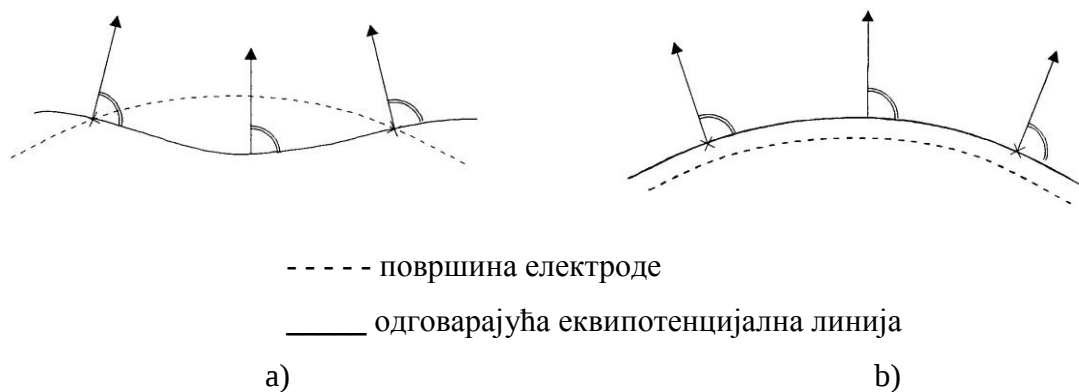
ρ_0 - вредност за конкавну криву, позитиван знак.

Постоји још начина за добијање критеријума размештања, односно начина за одређивање позиција фиктивних извора, од којих треба поменути увођење оптимизационих процедура, на пример Fletcher-ов алгоритам. итд.

2.5.2. Процена тачности

За случај електроодних система са хомогеним диелектриком користе се следећи критеријуми за процену тачности метода, [6]:

- одступања израчунатог потенцијала у низу тачака на површини електроде од задатог потенцијала електроде и
- одступања израчунатих нормалних компоненти вектора јачине електричног поља на површини електроде од нормалног правца, Сл. 4.



а) неприхватљиво решење и б) прихватљиво решење

За електродне системе са више диелектрика, додатно се користе следећи критеријуми на границама диелектрика:

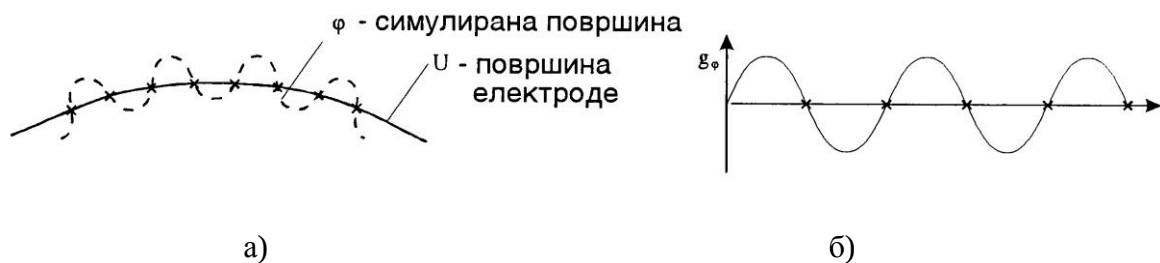
- континуитет потенцијала,
- континуитет тангенцијалне компоненте електричног поља и
- израз за нормалне компоненте електричног поља.

На примеру сферне електроде у хомогеном диелектрику, чији је потенцијал U , биће дефинисани најчешће коришћени показатељи за процену тачности МФИ. Нека су интензитети фиктивних извора, распоређених унутар простора који запоседа електрода, одређени методом подешавања у тачкама. Као што је поменуто, као мерила остварене тачности користе се гранични услови на површини електроде. Гранични услов за потенцијал је испуњен једино у тачкама подешавања, док је око средине

између суседних тачака подешавања најслабије задовољен, односно ту је одступање израчунатог од задатог потенцијала максимално. Тангенцијална компонента електричног поља ће пак бити максимална у околини тачке подешавања, док ће око средине између суседних тачака подешавања бити приближно једнака нули. Најчешће коришћен показатељ за процену остварене тачности је грешка потенцијала g_φ , која представља локално одступање у граничном услову за потенцијал

$$g_\varphi = \frac{\varphi - U}{U} \quad (2.5.3)$$

Грешка потенцијала на површини електроде се може апроксимирати синусоидалном расподелом, Сл. 5б.



Слика 5. а) Симулација површине електроде и

б) Расподела грешке потенцијала на површини електроде [1,6]

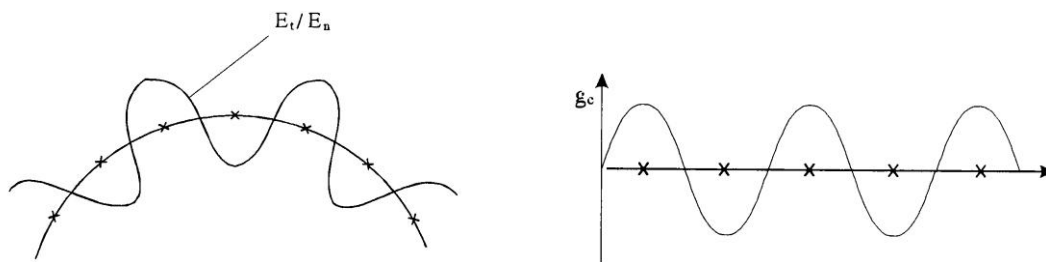
Могуће је одредити и максималну грешку потенцијала $g_{\varphi \max}$, која представља максимално одступање у граничном услову за потенцијал

$$g_{\varphi \max} = \max g_{\varphi \max} \quad (2.5.4)$$

Да би се испитао други гранични услов, који се односи на тангенцијалну компоненту електричног поља на површини електроде $E_t = 0$, најчешће се налази однос тангенцијалне и нормалне компоненте електричног поља. Тако се добија локална грешка за јачину електричног поља, g_e .

$$g_t = \frac{E_t}{E_n} \quad (2.5.5)$$

Грешка електричног поља на површини проводника се такође може сматрати синусоидалном. Сл. 6, а искуство показује да је грешка електричног поља на површини проводника до десет пута већа од грешке потенцијала.



Слика 6. Локална грешка за електрично поље на површини електроде

Такође се може, као мерило тачности, користити максимална грешка за електрично поље, $g_{e\max}$ која је једнака максималној вредности односа тангенцијалне и нормалне компоненте на површини проводника

$$g_{e\max} = \max g_e \quad (2.5.6)$$

Наведене грешке могу се сврстати у тзв. локалне показатеље. Веома вредни за процену остварене тачности су и тзв. интегрални показатељи, који приказују интегрални ефект начињене грешке. Ове интегралне грешке се још срећу под именом ефективне или средњеквадратне грешке.

Нека је гранични услов за потенцијал проверен у M тачака на површини тела и нека су $\vec{r}_{om}$ вектори положаја ових тачака. Тада се ефективне грешке за потенцијал, односно електрично поље могу дефинисати као

$$g_{\varphi eff} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\frac{\varphi_m - U}{\Delta \varphi} \right]^2} \quad (2.5.7)$$

и

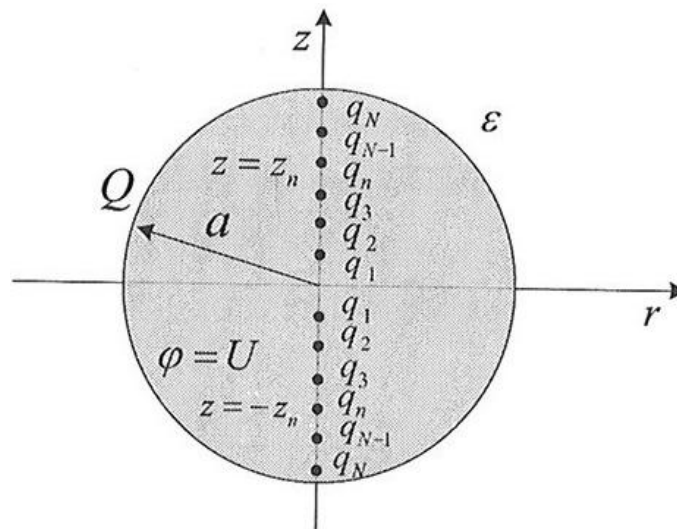
$$g_{eff} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\frac{E_t}{E_n} \right]_m^2} \quad (2.5.8)$$

Исти критеријуми и мерила за процену тачности МФИ се користе и приликом примене метода најмањих квадрата за одређивање интензитета фиктивних извора. Јасно је да ће грешке тада бити мање и израчунавање тачније, јер се приликом примене МНК истовремено води рачуна и о граничном услову за потенцијал и о граничном услову за тангенцијалну компоненту електричног поља.

3. Пример примене МФИ у електростатици

3.1. Усамљена проводна лопта

Када систем чине тродимензионалне електроде коначних димензија, фиктивни извори су у облику тачкастих наелектрисања.



Слика 7. Усамљена проводна лопта

На пример, за усамљену проводну лопту наелектрисану наелектрисањем Q полупречника a , (приказану на Сlici 7.), као фиктивни извори користе се тачкаста наелектрисања, равномерно распоређена дуж пречника лопте (Слика 7.), на местима:

$$z = \pm z_n, \quad z_n = a \frac{2n-1}{2N+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.1.1)$$

Потенцијал у околини лопте износи:

$$\varphi = \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z_n^2 - 2Rz_n \cos\theta}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + z_n^2 + 2Rz_n \cos\theta}} \right] = \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z_n^2 - 2Rz_n \cos\theta}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + z_n^2 + 2Rz_n \cos\theta}} \right] \quad (3.1.2)$$

где су r и z цилиндричне а R и θ сферне координате система, чији се координатни почетак налази у средишту лопте, тако да је

$$z = R \cos \theta \quad \text{и} \quad r = R \sin \theta \quad (3.1.3)$$

Како постоји N тачкастих извора, методом подешавања у тачкама гранични услов да је на површини лопте потенцијал сталан и једнак U треба задовољити у N тачака одабраних на горњем делу лопте на местима

$$R = a, \theta = \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, N = 1 \\ \frac{\pi}{2} \frac{n-1}{N-1}, N > 1 \end{cases}, n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.1.4)$$

Тако се добија следећи систем линеарних једначина:

$$\varphi = U = \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + z_n^2 - 2az_n \cos \theta_m}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + z_n^2 + 2az_n \cos \theta_m}} \right], m = 1, 2, \dots, N \quad (3.1.5)$$

Када се реши овај систем једначина и одреде фиктивни извори, капацитивност усамљене проводне лопте израчунава се као:

$$C_f = Q/U \quad (3.1.6)$$

Где је $Q = 2 \sum_{n=1}^N q_n$ укупно наелектрисање лопте.

Аналитичко решење за капацитивност усамљене лопте дато је изразом:

$$C_e = 4\pi\epsilon_0 a. \quad (3.1.7)$$

У Табели 1. приказане су вредности односа C_f / C_e у зависноги од броја фиктивних извора N .

Табела 1. Испитивање слагања аналитичког и нумеричког решења [7].

N	C_f / C_e
5	0,973499
10	0,982633
50	0,997455
100	0,999999
200	0,999999
300	0,999999
400	0,999999
500	0,999999
600	0,999999

Из Табеле 1. може се уочити да је у случају усамљене проводне лопте показано изузетно слагање резултата добијених решавањем помоћу метода фиктивних извора и резултата добијених помоћу аналитичког израза, а то се види из вредности односа C_f / C_e који тежи јединици већ за релативно мали број фиктивних извора.

3.2. Верификација резултата коришћењем програмског пакета FEMLAB

3.2.1. Програмски пакет FEMLAB

Резултати добијени коришћењем метода фиктивних извора упоређени су са резултатима добијеним коришћењем програмског пакета FEMLAB, [5]. Програмски пакет FEMLAB је комердијални програмски пакет фирме COMSOL. FEMLAB је веома моћан програмски пакет намењен решавању проблема из електромагнетике, али и из области термодинамике, акустике, хемије, динамике флуида, квантне механике, простирања таласа, итд. FEMLAB је инжењерски оријентисан програмски пакет за решавање парцијалних диференцијалних једначина, заснован на графичком интерфејсу и на примени метода коначних елемената. Метод коначних елемената - МКЕ, је нумеричка метода намењена за прорачун физичких величина у реалним геометријама. Суштина овог метода је у дискретизацији неког разматраног домена. МКЕ се заснива на решавању Максвелових једначина на површини која је дискретизована помоћу замишљених линија или површина на одређени број поддомена који се називају коначним елементима, а њихов скуп за цео домен, представља мрежу коначних елемената. Коначни елементи могу бити праволинијски и криволинијски. И једни и други могу бити једнодимензионални (линијски), дводимензионални (облика троугла или четвороугла) и тродимензионални (облика тетраедра и призме). Најчешће су у примени дводимензионални коначни елементи троугаоног облика, јер омогућавају добру апроксимацију области са кривим конгурама и представљају основни елемент мреже коначних елемената. Коначни елементи су повезани у коначном броју тачака које се усвајају на контури елемента. Те тачке се називају чворне тачке или чворови. Стање у сваком коначном елементу описује се помоћу коначног броја параметара у чворовима, као и везама између вредности променљивих у чворовима са вредностима променљивих у било којој тачки коначног елемента. На овај се начин вредности електричног или магнетског поља, у зависности од једначина које се користе, прецизно рачунају у тачкама које представљају темена троуглова тзв. чворним тачкама. Вредности поља у осталим тачкама од интереса се рачунају интерполацијом вредности суседних темена. Остале величине се рачунају на основу израчунатих вредности поља.

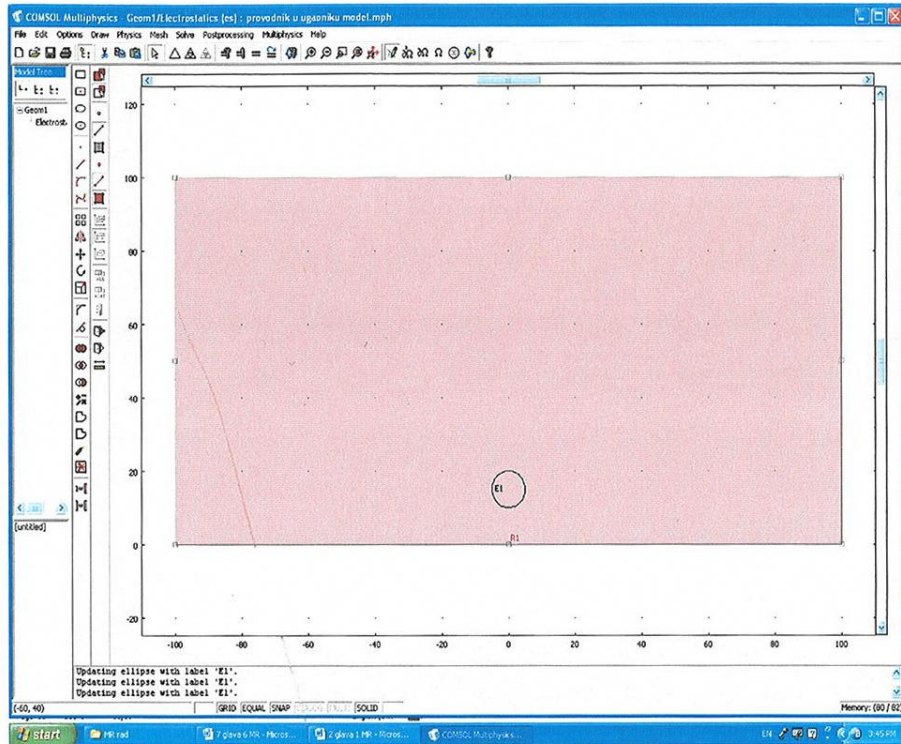
Употреба ове методе је могућа за површине које обухватају дводимензионе или тродимензионе моделе.

Након избора чворова, основних непознатих у њима и интерполационих функција, следећи важан корак у примени МКЕ је одређивање карактеристика појединих елемената и врши се независно од мреже као целине. Примена МКЕ завршава се формирањем једначина за мрежу коначних елемената, а њиховим решавањем долази до жељених резултата.

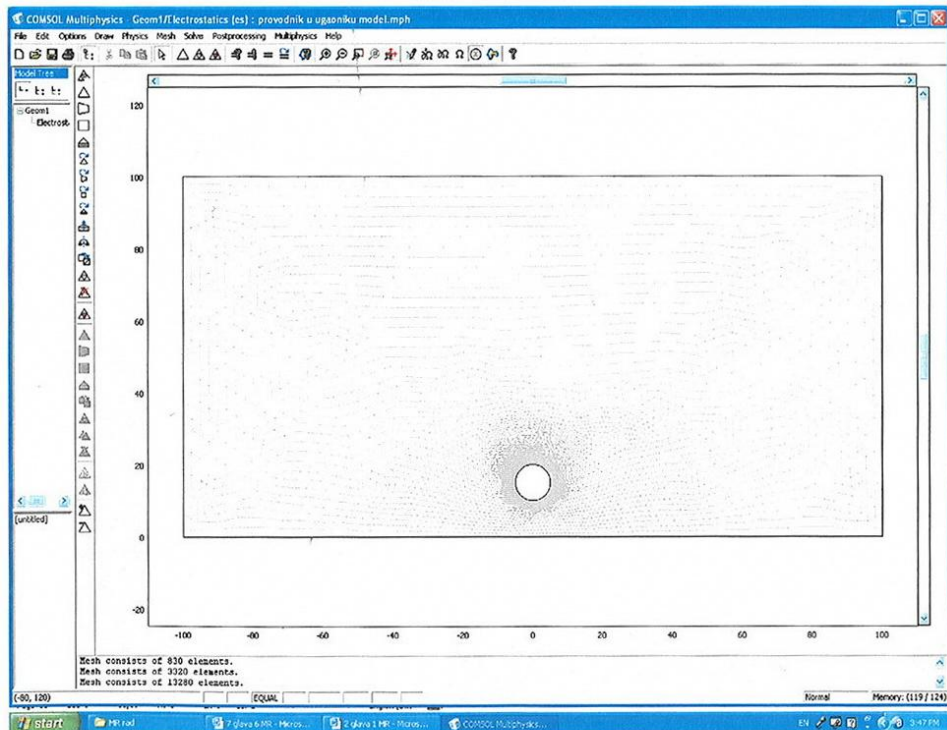
На тржишту је присутан значајан број интерактивних софтверских пакета који омогућавају анализу електричног и магнетног поља. Један од најприкладнијих за употребу је FEMLAB. Моделовањем проблема који се разматра олакшан је поступак и скраћено је време за поставку проблема. Предност FEMLAB је што сам прави мрежу коначних елемената. Помоћу FEMLAB-а могу да се решавају сви проблеми одређивања поља у стационарним режимима.

Радно окружење овог програмског пакета је оријентисано ка кориснику. Могу се уочити следећи модови:

- Draw Mode - је намењен цртању геометрије проблема, у овом случају масивног проводника изнад проводне равни (Слика 8.),
- Boundary Mode - служи за дефинисање граничних услова,
- Subdomain Mode - у њему се дефинишу карактеристике средина тј. релативна диелектрична константа,
- Mesh Mode - служи за постављање одговарајуће мреже. Густина постављене мреже утиче и на тачност добијених резултата. На Слици 9. приказана је мрежа за конкретан проблем. Мрежа има 6804 чвора и 13280 троуглова.
- Solve Mode - је намењен решавању проблема (Слика 10.)
- Post Mode (Postprocessing) - у њему се смештају резултати извршене апликације, који могу бити у виду графика промене потенцијала, јачине електричног поља, електричне индукције дуж произвољног правца, итд.

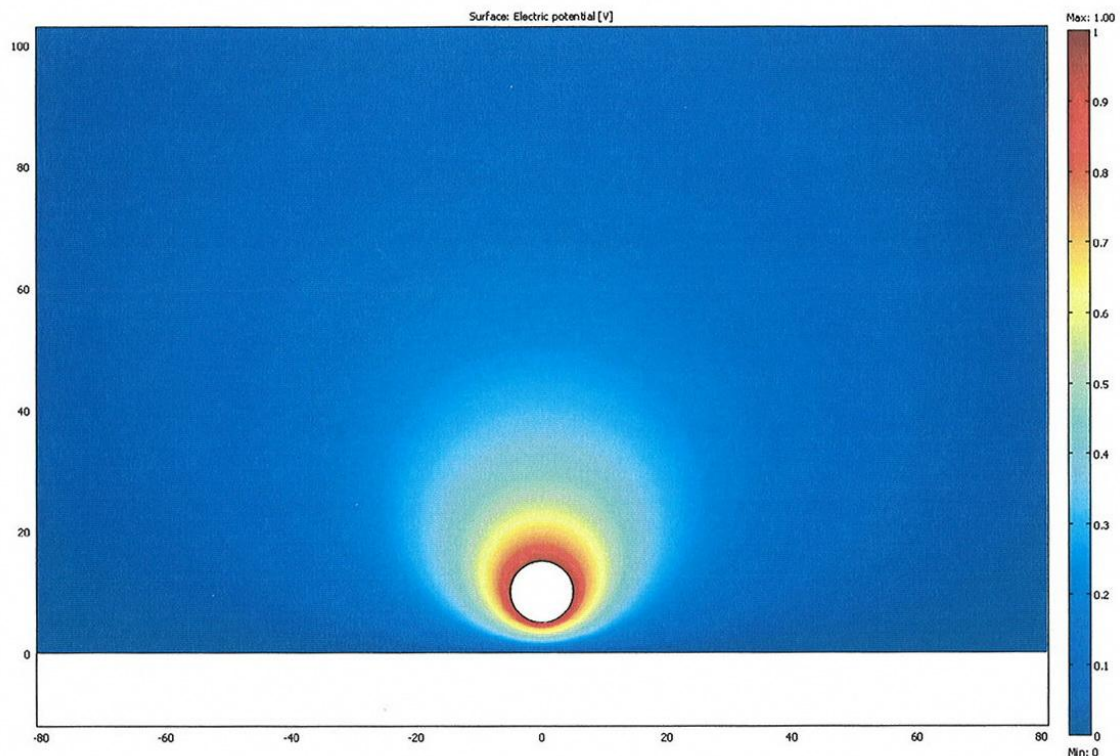


Слика 8. Draw Mode програмског пакета FEMLAB

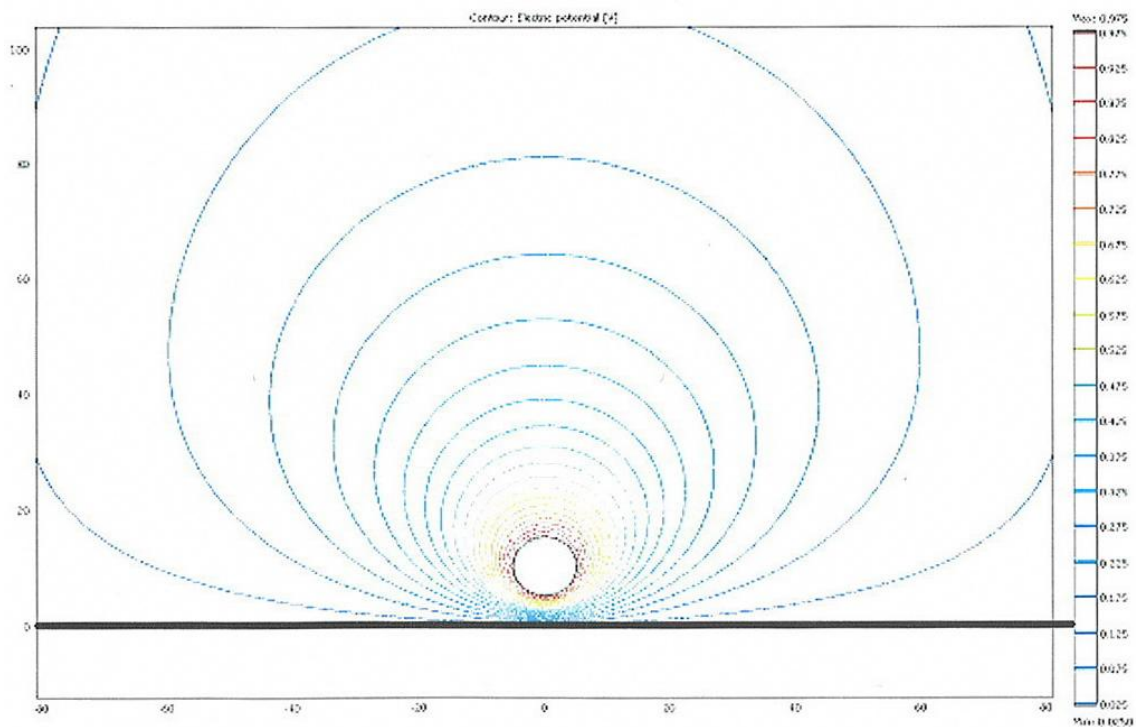


Слика 9. Mesh Mode програмског пакета FEMLAB

Неки од добијених резултата за еквипотенцијалне линије, добијене применом програмског пакета COMSOL Multyphysics3.5 Client, приказане су на Сликама 10. и 11.



Слика 10. Еквипотенцијалне линије Solve Mode програмског пакета FEMLAB



Слика 11. Еквипотенцијалне линије Post Mode програмског пакета FEMLAB

Капацитивност C'_{FL} се прорачунава у Post Mode-у програмског пакета FEMLAB из израза за енергију

$$W' = \frac{1}{2} C'_{FL} U^2 \Rightarrow C'_{FL} = \frac{2W'}{U^2} \quad (3.2.1)$$

3.2.2. Поређење резултата добијених применом МФИ и пакета FEMLAB

У Табели 2. приказано је поређење и релативно одступање резултата за капацитивност добијених применом МФИ (C'_f) од резултата добијених применом израза за аналитичко решење (C'_e) као и од резултата добијених коришћењем програмског пакета FEMLAB (C'_{FL}).

Приказани резултати су дати за различит однос $\frac{a}{d}$, где је a вредност полупречника лопте, а d је јединична вредност димензије система, а за познате вредности броја фиктивних извора N и фактора увлачења f .

Табела 2. Израчунате капацитивности различитим методама, као и грешке [7]

$\frac{a}{d}$	$C'_f, N=100$	C'_e	C'_{FL}	C'_f/C'_e	C'_f/C'_{FL}	$g_{C_f} [\%]$	$g_{C_n} [\%]$
1	0,998614	0,998615	1,009307	0,999999	0,989432	0,0001	1.05944
5	4,993070	4,993075	5,230339	0,999999	0,954637	-0,0002	-4.53642
10	9,986139	9,986149	10,960484	0,999999	0,911104	-0,0001	-8.88974

На основу резултата из Табеле 2. може се видети одлично слагање резултата за капацитивност добијених применом МФИ са резултатима добијеним применом израза за аналитичко решење.

4. Закључак

Метод фиктивних извора (МФИ) је нумерички метод који се темељи на важности теореме еквиваленције различитих електромагнетних система. Суштина овог метода је у замени реалних оптерећења, која су распоређена по површинама електрода, коначним бројем непознатих фиктивних извора, који су постављени унутар простора који заузимају електроде. Положај фиктивних извора није строго дефинисан, па истраживач, извесним осећајем и интуицијом врши оптималан избор. Интензитети тих извора уобичајено одређују се применом метода подешавања у тачкама, тако да гранични услови на површинама електрода буду што боље задовољени. Број тачака подешавања, односно непознатих величина, је код МФИ увек једнак броју фиктивних наелектрисања, N . У принципу, коришћењем МФИ већ са малим бројем погодних размештених фиктивних извора постиже се задовољавајућа тачност. МФИ је ефикасан при решавању широке класе проблема.

У овом завршном раду, након што су теоријске поставке метода увидом у доступну литературу проучене, детаљно је описан метод, као и начин примене метода на решавање једног конкретног електростатичког проблема. Такође је показано на разматраном примеру усамљене проводне лопте, одлично слагање са аналитичким решењем, као и решењем добијеним коришћењем програмског пакета FEMLAB.

5. Литература

- [1] Singer H., Steinbigler H., Weiss P., A Charge simulation method for the calculation of high voltage fields, IEEE Trans., PAS 73, pp. 1660-1668. 1974.
- [2] Surutka J. V., Veličković D. M: Some improvements of the Charge Simulation Method for Computing Electrostatic Fields , Bulletin LXXIV de l' Academie Serbe des Sciences et des Arts, Class des Sciences technique, No. 15; pp.27-44. 1981.
- [3] N.H. Malik. A review of the charge simulation method and its applications, IEEE Trans. on Electrical Insulation, 24 (1) pp. 3–20. 1989.
- [4] Сурутка Ј. В.: Електромагнетика , Академска мисао, Београд, 2006.
- [5] FEMLB, Version 2.2.0.181 [http:// www.femlab.com](http://www.femlab.com) , septembar 2012.
- [6] Kato S.: An estimation method for the electric field Error of Charge Simulation Method, Third Int. Symp. on high voltage eng., Milan, pp. 11.09-11.12. 1979.
- [7] Весковић М., Решавање електростатичких проблема проводника у жљебу са посебним обртом на примену метода фиктивних извора, магистарски рад, Технички факултет у Чачку, Универзитет у Крагујевцу, 2009.
- [8] Радуловић Ј., Решавање проблема квазистационарног електромагнетног поља помоћу метода фиктивних извора, магистарски рад, Електронски факултет у Нишу, 1994. год.