

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Информатика у инжењерству

Предмет: Механика флуида

Број индекса: 63/2011

Андрија С. Јестровић
Истицање течности кроз отворе и
наглавке
завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. др Слободан Савић - ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да:

- проучи одговарајућу литературу везану за проблеме истицања течности кроз отворе и наглавке
- теоријски приучи истицање течности кроз мале и велике отворе на основу препоручене и прикупљене литературе
- проучи истицање течности кроз наглавке и различите облике наглавака
- примени проучену теорију на примеру истицања течности из резервоара
- изради тродимензионални модел резервоара из примера у одговарајућем компјутерком програму

Препоручена литература:

[1] Обровић, Б., Механика флуида, Универзитет у Крагујевцу, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Крагујевац, 2007.

[2] Кнежевић, Д., Милашиновић, А., Механика флуида, Универзитет у Бања Луци, Машински факултер Бања Лука, Бања Лука, 2010.

[3] Адамовић, Ж., Кутин, М., Пухарић, М., Адамовић, М., Хидраулика и пнеуматика, Институт Гоша, Београд, 2009.

Крагујевац, 2015

Ментор:
др Слободан Савић, ванд. проф.

Садржај

Резиме	4
Увод	5
Једначина протока	6
Бернулијева једначина	7
Рејнолдсов број	8
1. Основни облици истицања	10
1.1. Истицање течности кроз мале отворе	10
1.1.1. Домет млаза	15
1.1.2. Подводно истицање	16
1.2. Истицање течности кроз велике отворе	18
1.2.1. Правоугаони отвор ширине b	19
1.2.2. Кружни отвор полупречника R	20
1.3. Истицање течности кроз наглавке	21
1.3.1. Општа својства наглавака	21
1.3.2. Облици наглавака	24
1.3.2.1. Вентуријев наглавак	24
1.3.2.2. Бордин наглавак	25
1.3.2.3. Сужени (конвергентни) наглавак	26
1.3.2.4. Проширени (дивергентни) наглавак	26
1.3.2.5. Зарубљени (коноидни) наглавак	27
1.4. Истицање течности при промењивом нивоу	28
1.4.1. Истицање течности у атмосферу при сталном дотицању	28
1.4.2. Спојени судови	30
2. Задати пример	32
2.1. Решавање примера	33
2.2. Израда модела	36
Закључак	42
Литература	43

Резиме

Овај завршни рад детаљно проучава истицање течности кроз отворе и наглавке, као и њихов примена на задатом проблему. Размотрене су и једначине и извођења неопходна за разумевање главног дела рада.

Први део рада се бави теоријом и проучава различите делове области као што су истицање кроз мале и велике отворе, подводно истицање, истицање између спојених судова, истицање са константним дотицањем, као и разне облике наглавака.

Други део рада користи теоријски део за решавање проблема истицања течности кроз отвор на дну сферног резервоара. На крају рада је описан поступак израде тродимензионалног модела резервоара у одговарајућем компјутерском програму.

Кључне речи: Истицање, отвор, наглавци, модел.

Abstract

This paper detailedly examines liquid outflow through holes and sleeves, as well as their application on a given problem. Equations and derivations necessary for understanding the main part of the paper have also been described.

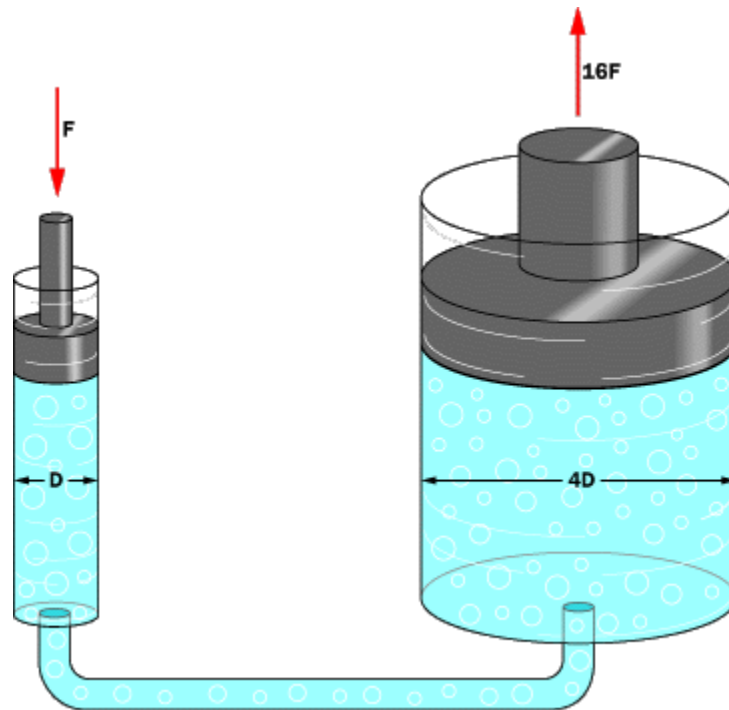
The first part of the paper deals with the theory and studies different parts of the field like outflow through small and large openings, underwater outflow, outflow between connected reservoirs, outflow with constant inflow of liquid, as well as different types of sleeves.

The second part of the paper uses the theoretical part to solve a problem of outflowing liquid from an opening at the base of a spherical reservoir. At the end of the paper the process of making a tridimensional model of the reservoir in a computer program is described.

Key words: Outflow, opening, sleeves, model.

Увод

Хидраулика је грана машинског инжењерства која се бави механичким својствима течности. На основном нивоу хидраулика је слична пнеуматици, само што користи течности уместо гасова. Механика флуида даје теориску подлогу за хидраулику, која се фокусира на инжењерску примену својстава течности. У области хидроенергије хидраулика се користи за стварање, контролисање и преношење снаге помоћу течности под притиском. Хидрауличке теме се крећу кроз много области, неке научне, већином инжењерске, и укључују области као што су проток, бране, коришћење флуида за аналогно контролисање, пумпе, турбине, хидроенергију, рачунарска динамика флуида, мерење протока, механике речних токова и ерозије.



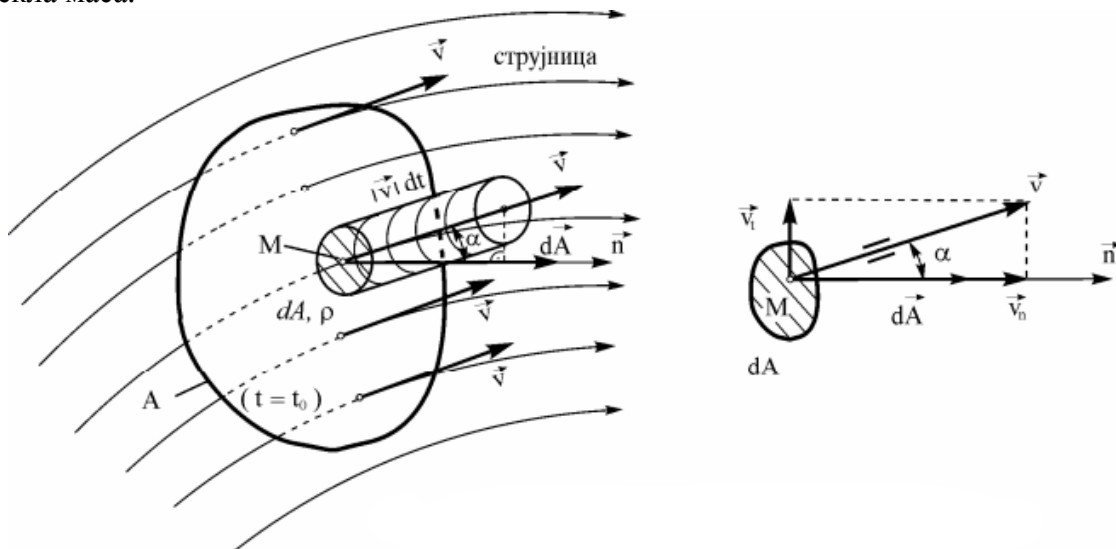
Слика 1. Пример примене хидраулике

Реч хидраулика потиче од Грчке речи ὕδραυλῖκός (hydraulikos), која потиче од речи ὕδωρ (hydor) што значи вода и αὐλός (aulos) што значи цев [1-2].

За израчунавање истицања течности биће нам неопходне једначина протока и Бернулијева једначина. За одређивање режима струјања неопходно је познавати Рејнолдсов број, па ће и о њему бити речи.

Једначина протока

Једна од значајних основних величина која карактерише струјање флуида је проток. Проток се дефинише као количина флуида која проструји кроз неку отворену, односно затворену површ у јединици времена. При струјању нестишљивог флуида из практичних разлога се као мера протеклог флуида усваја његова запремина, а тако дефинисани проток назива се запремински проток. Код струјања стишљивог флуида мења се и густина у струјном пољу па је погодније да се за одређивање количине протеклог флуида усвоји протекла маса.



Слика 2. Проток флуида [3]

Једначина запреминског протока гласи

$$Q = \int_A (\vec{v} \cdot d\vec{A}).$$

Скаларни пројзвод вектора $\vec{v}$ и $d\vec{A}$ се своди на пројзводе интензитета ових вектора $v dA$, па се образац своди на

$$Q = \int_A v dA,$$

што је могуће свести на

$$dQ = v dA.$$

Масени проток је могуће добити из запреминског израза [3-4]

$$dQ_m = \rho dQ = \rho v dA.$$

Бернулијева једначина

За инжењерску анализу струјних проблема најважнија је Бернулијева једначина. Скоро сви практични задаци решавају се директно - применом Бернулијеве једначине са њеним пратећим условом – једначином континуитета. Значај једначине огледа се у њеном садржају који представља биланс појединих врста флуидне енергије. Њен општепознат облик без губитака (z оса оријентисана навише)

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho} + z = \text{const.},$$

је основни облик. Сваки члан на левој страни представља енергију коју у себи садржи јединична маса флуидне струје. Први члан представља кинетичку енергију, други енергију притиска, а трећи положајну енергију. Константа на десној страни означава да је збир наведене три врсте енергије константан за било коју тачку струјнице. Делимичним ограничењем за кинетичку енергију, могуће је прећи са струјнице на струјно влакно, струјну цев и на произвољне, замишљене или стварне, проточне пресеке, између којих постоји флуидни континуитет. Други, врло често употребљаван облик Бернулијеве једначине је:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{const.}$$

Овде су поједине врсте енергије дате у метрима стуба течности која струји кроз посматране пресеке. Погодна је за квантитативно и дијаграмско поређење свих врста енергије преко одговарајућих висина стубова проточне течности. Чланови су редом: брзинска висина, притисна (пијезометарска) висина и геодезијска висина. Снага флуидне струје добија се множењем сваког члана Бернулијеве једначине са проточном масом (ρQ), па је:

$$P = \frac{1}{2} \rho Q v^2 + pQ + z\rho gQ = \text{const.}$$

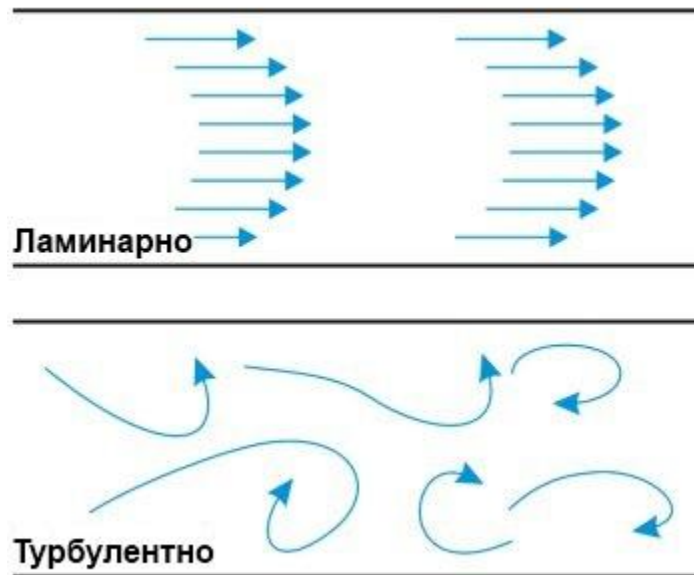
Први члан одређује снагу флуидне струје при атмосферском притиску. Друга два члана одређују снагу када постоји разлика притисака у флуидној струји и околини у односу на коју се мери снага (најчешће атмосферски притисак). Ова снага може да буде позитивна и негативна, а уобичајено је да се даје са $P = \Delta p Q$.

Основни облик Бернулијеве једначине (без губитака) описује струјање идеалног флуида, док проширени облик (са губицима) даје слику енергијских промена реалног, вискозног флуида. Губици при струјању стварног флуида приказани су уз помоћ експерименталних података у процентима кинетичке енергије основне флуидне струје. На овакав начин обрачунавање вискозних утицаја упутило је немогућност потпуне теоријске анализе струјања реалног флуида (турбулентан режим) [5-6].

Рејнолдсов број

Кретање течности може бити

- Ламинарно - код кога се струјнице не мешају
- Турбулентно - кретање је узбуркано и хаотично, и долази до мешања струјница



Слика 3. Врсте струјања

Рејнолдс је у својим експериментима опазио да флуид прелази из ламеларног у турбулентно кретање при одређеној средњој брзини кретања, коју је назвао критична брзина. Могуће је да ламеларно струјање остане такво и не већим брзинама, али свако узнемиравање ће довести до промене. За критичну брзину се узима најмања брзина при којој настаје прелаз из једног у друго стање. Ова брзина зависи од вискозности течности и пречника цеви.

Критичан број, назван критичан Рејнолдсов број, зависи од критичне брзине, пречника и кинематичке вискозности

$$Re^* = \frac{v_{kr} D}{\nu} = 2320.$$

За свако кретање течности могуће је одредити стварни Рејнолдсов број

$$Re = \frac{v_{kr} D}{\nu}.$$

Уколико је

- $Re < Re^*$ онда је кретање ламинарно
- $Re > Re^*$ онда је кретање турбулентно

За случај да течност при струјању кроз цеви делимично или потпуно испуњава пресек саме цеви, као и при кретању течности у каналима, уместо пречника D , користи се хидраулични радијус проточног пресека. Овај радијус се дефинише као количник живог или проточног пресека A и оквашеног обима O

$$R_h = \frac{A}{O}.$$

Живи или проточни пресек струјног тока је попречни пресек струје течности управан на главни правац кретања. То је део пресека (или цео нормални пресек) цеви или канала испуњен течностју. Оквашени обим O представља дужину обима попречног пресека тока течности који је у додиру са чврстим површима (са површима зидова канала или цевовода). Код напорног цевовода кружног попречног пресека хидраулични радијус износи

$$R_h = \frac{D^2/\pi}{D\pi} = \frac{D}{4} \Rightarrow D = 4R_h.$$

При кретању течности кроз цевоводе произвољног облика попречног пресека, које флуид потпуно или делимично испуњава употребљава се еквивалентни пречник

$$D_e = 4R_h,$$

из чега следи

$$Re = \frac{vD_e}{\nu} = \frac{v4R_h}{\nu} \quad \text{или} \quad Re' = \frac{Re}{4} = \frac{vR_h}{\nu}.$$

Ако се за критичну вредност Рејнолдсовог броја усвоји $Re^*=2320$, тада је за пресеке произвољног облика број Re' меродаван за утврђивање режима кретања.

- $vR_h/\nu < 580$ кретање је ламинарно
- $vR_h/\nu > 580$ кретање је турбулентно

У највећем броју практичних случајева кретања воде, бензина, керозина и ваздуха кретање је турбулентно. Кретање веома вискозних течности (уља за подмазивање, нафте, мазута, ...) је углавном ламинарно [7].

1. Основни облици истицања

Постоје различити услови за истицање течности кроз отворе. Могу се делити на то где течност истиче:

- Истицање у атмосферу
- Подводно истицање:
 1. Истицање у исту течност
 2. Истицање у другу течност

У оба случаја истицање може да буде:

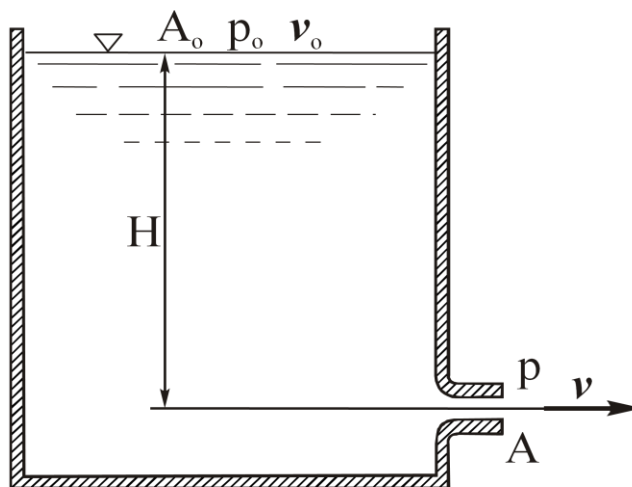
- При сталном новоу течности
- При промењивом нивоу течности

Ови услови знатно утичу на брзину којом течност истиче, а тиме и на проток [8].

1.1. Истицање течности кроз мале отворе

Претпоставимо да постоју суд из кога истиче течност у атмосферу кроз мали отвор оштрих ивица. Оса отвора је на дубини H испод нивоа течности, и да се истицањем течности ниво не смањује тако што се додаје течност у суд, тј. $H = \text{const.}$

$$A \ll A_0, \quad H = \text{const.}$$



Слика 4. Истицање кроз мали отвор [9]

За извођење Торичелијевог образаца је потребна Бернулијева једначина за ниво течности и мали отвор

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}.$$

Користећи једначину континуитета

$$v_0 = v \frac{A}{A_0},$$

коју земањујемо у Бернулијевој једначини, добија се

$$v^2 \left(1 - \frac{A^2}{A_0^2} \right) = 2g \left(\frac{p - p_0}{\rho g} + H \right).$$

Пошто је површина отвора врло мала у поређењу са слободном површином суда, може се занемарити разлика површина, тј.

$$\frac{A^2}{A_0^2} \approx 0,$$

и пошто су сви притисци једнаки атмосферском притиску

$$p_0 = p = p_a,$$

добија се квадрат брзине

$$v^2 = 2gH,$$

који може да се сведе на

$$v = \sqrt{2gH}.$$

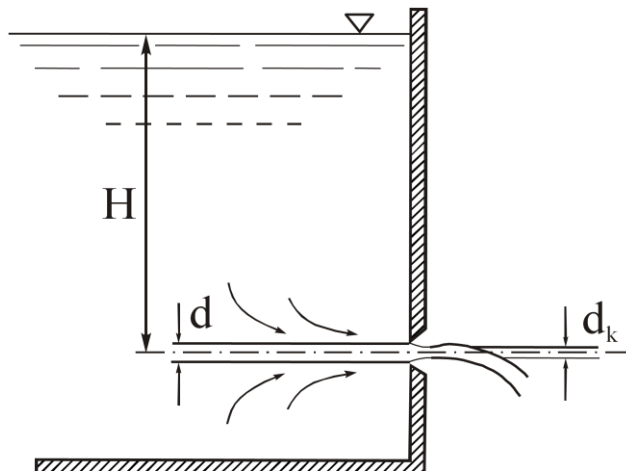
Добијена једначина представља Торичелијеву формулу. На крају се добија проток

$$Q = vA = A\sqrt{2gH}.$$

Да би ове једначине биле тачне неопходно је да су следећи услови испуњени

- Течност је невискозна
- Струјање је стационарно (ниво воде у суду је константан)
- Површина отвора је много мања од слободне површине течности у суду

Огледи су показали да је стварна брзина увек мања од оне коју даје Торичелијев образац. То неслагање се објашњава вискозношћу течности јер је немогуће занемарити међусобно трење делића флуида, или трење флуида о зидове суда.



Слика 5. Сужавање млаза на излазу кроз мали отвор [9]

Зато је неопходно поћи од Бернулијеве једначине

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + \xi \frac{v^2}{2g},$$

где су са 0 означени коефицијенти на слободној површини, а без на отвору. Пошто је брзина одређена

$$v_0 = v \frac{A}{A_0}, \quad p_0 = p = p_a,$$

заменом у Бернулијевој једначини се добија израз

$$v = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{1 + \xi - \frac{A^2}{A_0^2}}},$$

у горњем изразу ξ представља коефицијент отпора услед оштрих ивица отвора. Пошто је разлику квадрата слободне површине и површине отвора могуће занемарити због разлике у површинама

$$\frac{A^2}{A_0^2} \approx 0,$$

могуће је свести једначину брзине на

$$v = \varphi \sqrt{2gH}.$$

Коефицијент φ који се дефинише изразом

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}},$$

се назива коефицијент брзине, и за воду износи од 0,96 до 0,99. Обично се усваја да је $\varphi=0,97$, што одговара вредности за коефицијент отпора $\xi=0,06$.

Коришћење брзине у једначини за израчунавање протока добија се

$$Q = vA = \varphi A \sqrt{2gH}.$$

Овако добијени проток је знатно већи од вредности које су добијене експериментално. Разлика настаје као последица контракције млаза, а састоји се у томе што нормални пресек млаза није једнак површини отвора, него је нешто мањи.

Делићи течности уз зид суда не могу да, при уласку у отвор, нагло промене правац за 90° и зато не излазе кроз отвор нормално према површини зида, већ под углом, што доводи до смањења попречног пресека млаза у односу на попречни пресек отвора.

Експериментално је утврђено да највећа контракција настаје на растојању $d/2$ од отвора, где је d пречник отвора, и да пречник пресека млаза d_k приближно износи $d_k=0,8d$.

На тај начин се израз за брзину истицања односи, не на брзину у отвору, већ на брзину у суженом пресеку површине A_k

$$Q = vA = \varphi A_k \sqrt{2gH}.$$

Увођењем коефицијента контракције ψ , који је једнак односу површине пресека млаза и површине отвора

$$\psi = \frac{A_k}{A} = \frac{d_k^2}{d^2} = 0,8^2 = 0,64,$$

добија се следећа једначина протока

$$Q = \varphi \psi A \sqrt{2gH} = \mu A \sqrt{2gH},$$

из чега следи да коефицијент μ има вредност

$$\mu = \varphi \psi = 0,97 \cdot 0,64 \approx 0,62,$$

и назива се коефицијентом истицања. Израчуната вредност се добро слаже са експериментално добијеним подацима.

Коефицијент истицања се најлакше одређује мерењем, при чему се мери проток, површина отвора и висина течности, а затим се коефицијент израчунава формулом

$$\mu = \frac{Q}{A\sqrt{2gH}}.$$

На основу резултата добијених коришћењем образаца и извођењем експеримената могуће је извести следеће закључке

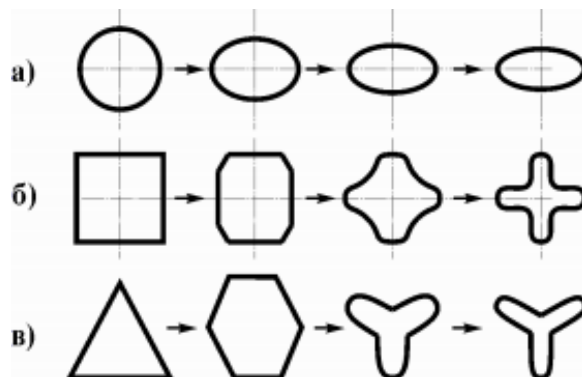
- да μ опада кад H расте
- да μ опада кад A расте
- да μ зависи од облика отвора
- да је μ веће за квадратни отвор него за кружни
- да је μ веће за правоугли отвор него за квадрат, и да што је више правугаоник хоризонтално издужен то је μ веће

Проблем контракције млаза може да се решава и конформним пресликавањем јер су граничне површине течности и ваздуха прилично постојане. Резултат

$$\psi = \frac{\pi}{\pi + 2} \approx 0,611,$$

се добро слаже са огледима.

Облик попречног пресека млаза у близини отвора сличан је самом отвору, али се надале брзо мања. На пример, углови квадратног млаза почињу да се увлаче, а на средини страна се појављују испупчења, тако да се у крајњој линији квадрат претвара у крст. Кружни пресек постепено прелази у вертикално издужену елипсу. Ова појава се назива преображај млаза [10-11].



Слика 6. Трансформације попречног пресека млаза [12]

1.1.1. Домет млаза

Домет млаза је могуће одредити једначинама за хоризонтални хитац

$$x = vt,$$

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

За наше потребе је $x=L$ и $y=h$. Затим треба изједначити обе једначине по времену чиме се добија

$$h = \frac{g \left(\frac{L}{v}\right)^2}{2}.$$

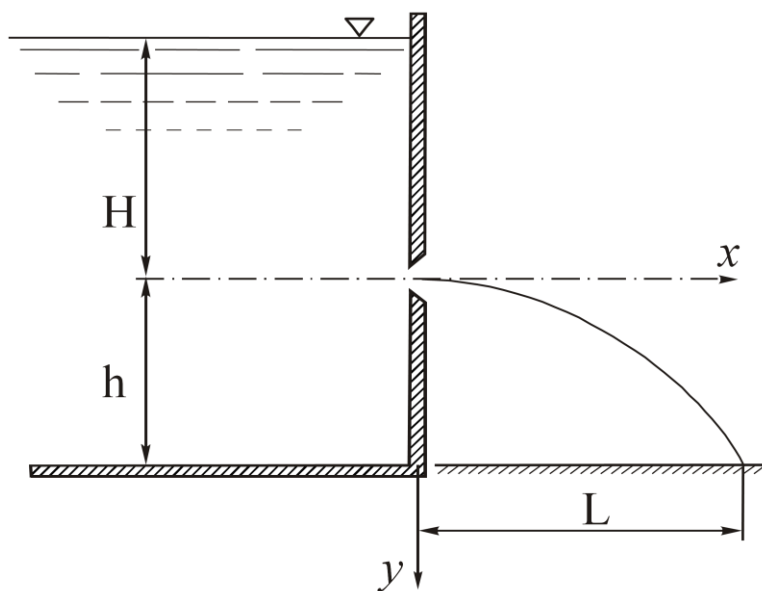
Увођењем Торичелијеве формуле за брзину и сређивањем једначине

$$2h = \frac{gL^2}{\varphi^2 2gH},$$

$$L^2 = 4\varphi^2 hH,$$

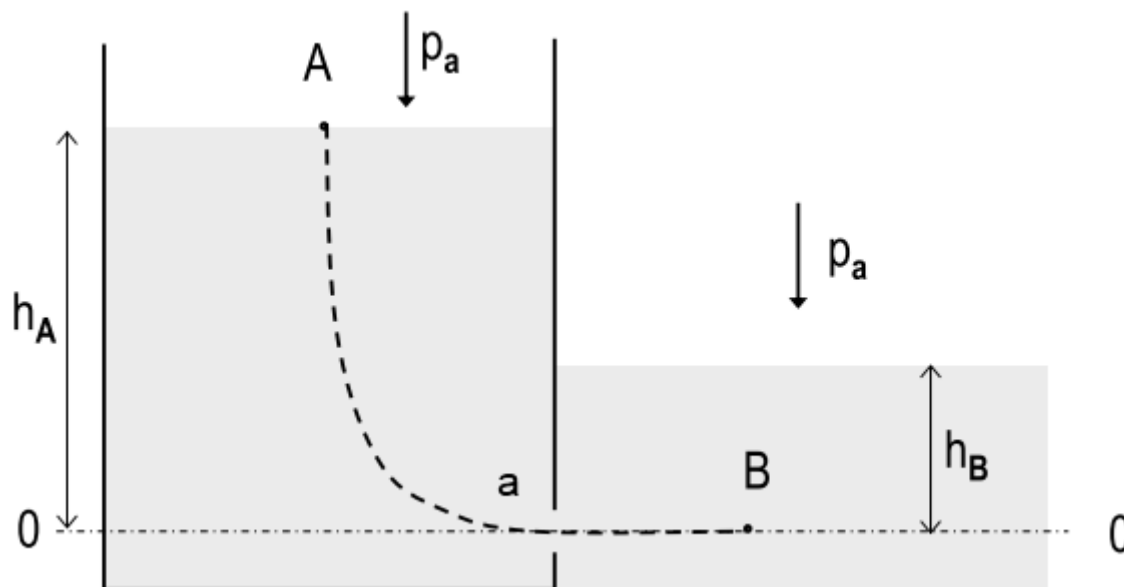
$$L = 2\varphi\sqrt{Hh},$$

се добија једначина за домет млаза.



Слика 7. Домет млаза [9]

1.1.2. Подводно истицање



Слика 8. Подводно истицање [13]

Ако је отвор кроз који истиче течност испод површине течности, на десној страни Бернулијеве једначине јавља се и хидростатички притисак течности из околине места истицања. У том случају Бернулијва једначина изгледа

$$\frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + h = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + 0.$$

Пошто је притисак на месту отвора једнак

$$p_B = p_a + 2gh_B,$$

заменом у Бернулијевој једначини се добија једначина за брзину

$$v_T = \sqrt{2g(h_A - h_B)},$$

и ако узмемо да је разлика висина слободних површина

$$h = h_A - h_B,$$

добиће се Торичелијева формула

$$v_T = \sqrt{2gh}.$$

Овај резултат не урачунава отпоре на отвору, па се додавањем отпора добија стварна брзина

$$v = v_T \varphi = \varphi \sqrt{2gh}.$$

Једначина за проток је слична једначини за истицање кроз мале отворе

$$Q = \mu' a \sqrt{2gh}.$$

Једина разлика је у коефицијенту протока јер постоји мала разлика између њега и коефицијента протока за истицање у атмосферу. Долази до ширења млаза, те је коефицијент μ' нешто мало мањи од коефицијента μ . Мерењем је утврђено да је [13-15]

$$\mu' = 0,98\mu \approx \mu.$$

1.2. Истицање течности кроз велике отворе

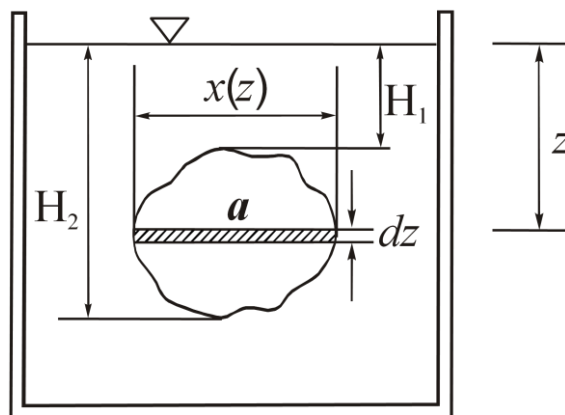
Код малих отвора се могло сматрати да се брзине при истицању флуида подједнако распоређене на површини отвора. Зато се могло рачунати са средњом брзином за коју се претпоставља да припада тежишту отвора. Међутим, истицање кроз велике отворе не може да се израчуна на исти начин, јер велике отворе треба замишљати као да су састављени од много малих отвора, при чему сваки мали отвор зависи од закона

$$Q = \mu A \sqrt{2gz}.$$

Профил брзине по пресеку је одређен сложеним законом, те се брзина може сматрати константном само на површиници

$$dA = x(z)dz = dA(z).$$

Овде z представља растојање тежишта отвора од слободне површине течности. Површина целог отвора се дели на елементалне површине. Свака површинеца је удаљена за z од слободне површине, висока dz , а широка $x(z)$.



Слика 9. Истицање кроз велике отворе [9]

$$dQ = \mu x(z) \sqrt{2gz} dz.$$

Проток кроз велики отвор је једнак збиру протока кроз све мале отворе, па се добија

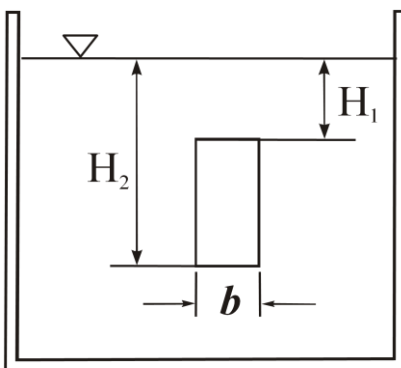
$$Q = \int_{H_1}^{H_2} \mu x(z) \sqrt{2gz} dz,$$

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_2} x(z) \sqrt{z} dz.$$

Претпоставља се да коефицијент истицања μ не зависи од висине z , тј. да је коефицијент једнак код свих елементарних отвора.

Заменом $x(z)$ одговарајућом функцијом која одговара облику отвора, може се приступити интеграцији израза. У следећим примерима је то и показано [16-18].

1.2.1. Правоугаони отвор ширине b



Слика 10. Попречни пресек отвора у облику квадрата [9]

Квадратни отвор је и најлакши јер промењива $x(z)$ директно одговара ширини странице b .

$$x(z) = b,$$

што се затим замењује у једначини протока

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left(H_2^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}} \right),$$

и добија коначна једначина за протока кроз правоугаони отвор.

1.2.2. Кружни отвор полупречника R

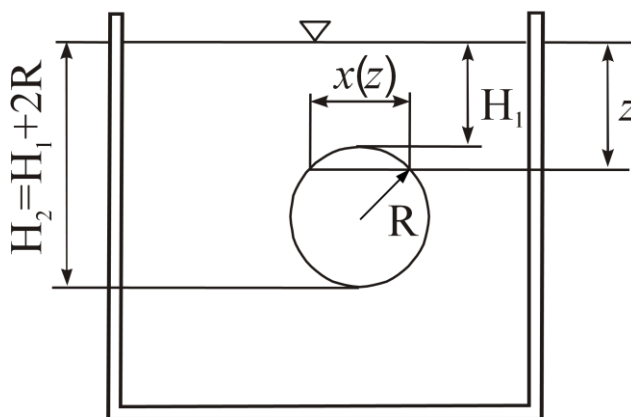
На основу слике се изводи Питагорина теорема

$$\left(\frac{x(z)}{2}\right)^2 = R^2 - (H_1 + R - z)^2,$$

одакле добијамо израз за $x(z)$

$$x(z) = 2\sqrt{R^2 - (H_1 + R - z)^2},$$

где је H_1 најкраће растојање отвора од слободне површине, а H_2 најдуже могуће.



Слика 11. Попречни пресек отвора у облику круга [9]

Заменом у већ изведеној једначини за проток добијамо

$$Q = 2\mu\sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_1+2R} \sqrt{z[R^2 - (H_1 + R - z)^2]} dz.$$

Овај интеграл је експанзиони, и може се израчунати пошто се развије у ред. Наводи се резултат који се добија кад се ред ограничи на прва два члана:

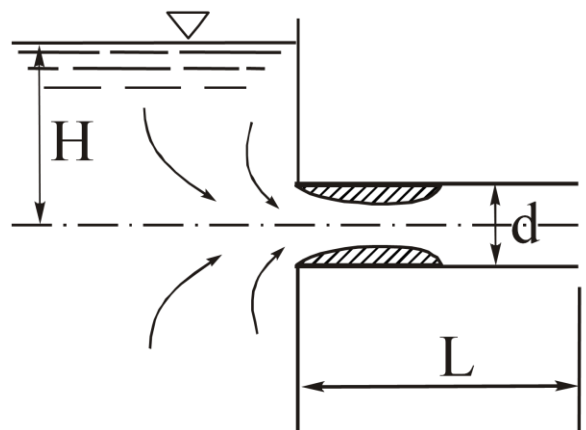
$$Q = \mu\pi R^2 \sqrt{2g(H_1 + R)} \left[1 + \frac{1}{32} \frac{R^2}{(H_1 + R)^2} \right].$$

Експериментално је показано да је израз довољно тачан за практичну употребу.

1.3. Истицање течности кроз наглавке

1.3.1. Општа својства наглавака

Наглавак је најчешће цилиндричног облика и намешта се на спољашњу страну суда наспрам отвора. Да је наглавак направљен од провидног материјала у наглавку би се видела мртва област поред зидова (осенчено на слици). Она настаје због кривљења струјница при проласку кроз отвор па не належу одмах уз наглавак, већ то чине нешто даље. Зато је попречни пресек млаза и почетку мањи од попречног пресека отвора и цеви. Вода полако трењем одвлачи ваздух из мртве области па се притисак у том делу смањује, а пошто се струјање устали, долази до образовања делимичног вакуума. Смањење притиска зависи од брзине живе струје наглавка, односно од висине течности у резервоару.



Слика 12. Мртва зона у наглавку [9]

Због снижења притиска долази до повећање брзине истицања у суженом делу млаза јер, према Бернулијевој једначини, мањем притиску одговара већа брзина. То доводи до повећања протока, односно раста коефицијента истицања μ . За ову појаву се каже да наглавак сише воду.

Наглавак, као и свака цев, ствара додатни отпор, што доводи до губитка енергије и смањења брзине. У кратким цевима преовлађује први, а у дугим други ефекат. Према Агроскину, може се створити представа о узајамном односу на следећи начин.

Прво требало би написати Бернулијеву једначину за слободну површину течности и за излазни отвор наглавка: облик је исти као раније. Ако се опет занемари однос квадрата површина, добија се

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \xi}} = \varphi \sqrt{2gH}.$$

Коефицијент отпора ξ је овде другачији, и зато долази до промене коефицијента брзине ϕ . Коефицијент ξ се може раставити на три дела и затим сваки посебно израчунати

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3.$$

1) Коефицијент ξ_1 припада локалном отпору оштрих ивица отвора. Вредност 0,06 је већ нађена, али она се односи на v_1 у суженом пресеку млаза, али не за брзину на излазу из нагавка где је пресек једнак површини отвора. Одговарајући члан Бернулијеве једначине

$$\xi_1 \frac{v^2}{2g} = 0,06 \frac{v_1^2}{2g},$$

из чега добијамо

$$\xi_1 = 0,06 \frac{v_1^2}{v^2}.$$

На основу једначине континуитета

$$v_1 A_1 = vA,$$

где су A и A_1 површине пресека млаза при излазу и суженог млаза, добија се

$$\xi_1 = 0,06 \frac{A^2}{A_1^2} = \frac{0,06}{\psi^2} = \frac{0,06}{0,64^2} \approx 0,15.$$

2) Коефицијент ξ_2 локалног отпора услед проширења млаза може се израчунати применом Бордине теореме

$$\frac{(v_1 - v)^2}{2g} = \xi_2 \frac{v^2}{2g},$$

што је могуће свести

$$\xi_2 = \frac{(v_1 - v)^2}{v^2} = \left(\frac{A}{A_1} - 1 \right)^2 = \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right)^2 \approx 0,315.$$

3) Коефицијент ξ_3 представља отпор на праволинијској деоници цеви и добија се помоћу Дарсијеве формуле

$$\xi_3 = \xi_t \frac{L}{d}.$$

Тако коефицијент отпора ξ постаје једнак

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0,465 + \xi_t \frac{L}{d},$$

што је могуће заменити у једначини за коефицијент брзине

$$\frac{1}{\varphi} = \sqrt{1,465 + \xi_t \frac{L}{d}},$$

из чега се добија једначина брзине

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1,465 + \xi_t \frac{L}{d}}}.$$

Пошто течност испуњава пресек, тј. $\mu = \varphi$, контракције нема.

Сада треба наћи дужину наглавка L за коју ће истичућа течности имати исти коефицијент μ као при истицању без наглавка. Ако се узму приближне вредности за $\xi_t = 0,02$ и за $\mu = 0,62$, онда се добија

$$\sqrt{1,465 + 0,02 \frac{L}{d}} = \frac{1}{0,62},$$

из чега следи се добија дужина наглавка

$$L = 57d.$$

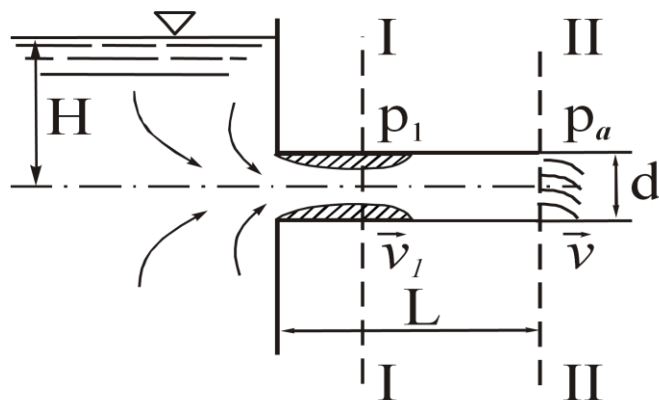
Закључује се да дужина наглавка може бити 57 пута већа од пречника отвора и да ће тек тад проток постати исти као и да наглавка нема. Краће цеви ће имати бољи коефицијент истицања, дуже гори.

Обично се жели постићи највећи могући проток. Стога је неопходно да се наглавак што више скрати. Ипак постоји граница испод које не треба ићи, јер су огледи показали да се мртва зона простире на дужини од око 3 пречника отвора. Наглавак не сме бити краћи јер ће онда спољни ваздух улазити у мртву зону и поништити вакуум. Оптимална дужина за наглавак је $(3,5 - 4)d$. Овакви наглавци се називају прави наглавци.

1.3.2. Облици наглавака

1.3.2.1. Вентуријев наглавак

Вентуријев наглавак је кратка цилиндрична цев где је мртва зона замењена профилисањем цеви.



Слика 13. Вентуријев наглавак [9]

Многобројни огледи су показали да коефицијент истицања Вентуријевог наглавка зависе, углавном, од Рејнолдсовог броја, што се може доказати димензијском анализом. Махом су коефицијенти истицања и брзине једнаки $\mu=\varphi=0,82$.

Тражењем притиска у суженом пресеку I-I, под условом да ако је p_1 апсолутни притисак, онда је $p_v=p_a-p_1$ потпритисак којим се мери вакуум, преко Бернулијеве једначине

$$\frac{p_a}{\rho g} + H = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + \xi \frac{v_1^2}{2g},$$

извршиће се прелаз од брзине v_1 која припада суженом пресеку ка брзини v на излазу. Пошто је

$$\frac{v^2}{v_1^2} = \psi^2,$$

$$\xi \frac{v_1^2}{2g} = \frac{\xi}{\psi^2} \frac{v^2}{2g},$$

и из једначине брзине

$$\frac{v^2}{2g} = \varphi^2 H,$$

заменом у Бернулијевој једначини се добија

$$\frac{p_v}{\rho g} = \frac{v^2}{2g} \frac{1 + \xi}{\psi^2} - H = \left(\varphi^2 \frac{1 + \xi}{\psi^2} - 1 \right) H.$$

Величине φ , ψ и ξ су константне, па је вакуум сразмеран висини нивоа течности. Ако су $\varphi=0,82$, $\psi=0,64$ и $\xi=0,06$, коефицијент сразмерности је приближно 0,74, дакле

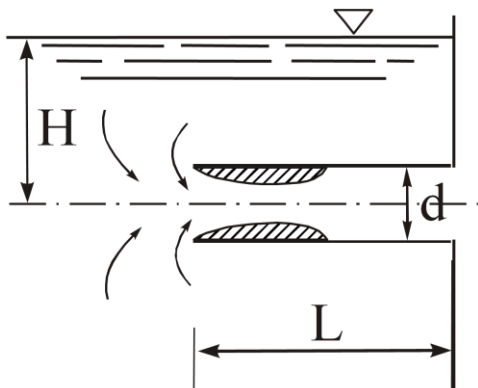
$$\frac{p_v}{\rho g} \approx 0,74H.$$

Овај резултат омогућава да се објасни појава која се понекад запажа при употреби Вентуријевог наглавак. Дешава се да се течност одвоји од зида и да истиче као да наглавак не постоји. Коефицијент истицања се тада смањи са 0,82 на 0,62, а тиме и проток.

Ово се објашњава тиме што је теоретска максимална величина вакуума 10,33m али практично износи највише 7m. Пошто је вакуум једнак 0,74H, то значи да висина течности у суду не сме прећи, теоретски, $10,33/0,74 \approx 14m$, а практично $7/0,74 \approx 9,5m$. О овоме треба водити рачуна, да не би дошло до пада протока.

1.3.2.2. Бордин наглавак

Бордин наглавак је такође цилиндрична цев истог пресека као отвор, али је наглавак смештен са унутрашње стране суда. Док обилази ивице Бординовог наглавка струјнице скрећу за 180° и доводи до јачек сужавања млаза од Вентуријевог наглавка.

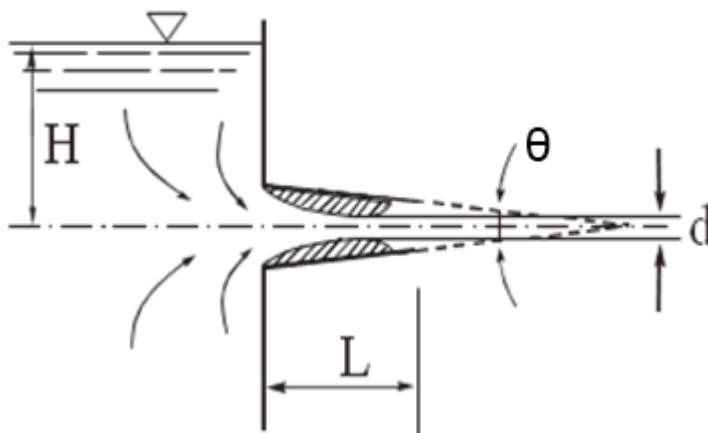


Слика 14. Бордин наглавак [9]

За проучавање наглавка би се могла искористити иста теоријска разматрања као и раније, и дошло би се до истих образаца, само са нешто другачијим вредностима. Коефицијент μ је једнак 0,71 кад је цев дужа од три пречника. У краћим цевима се млаз одваја од зидова, те μ опада на 0,51, тј. смањује се испод вредности која одговара истицању без наглавка.

1.3.2.3. Сужени (конвергентни) наглавак

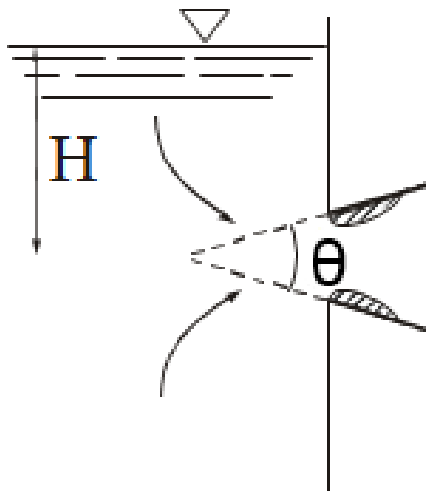
Сужени наглавак има облик зарубљене купе чија је мања основа излаз из наглавка. Експерименти су показали је да коефицијент брзине ϕ и коефицијент истицања μ зависе од угла θ при врху купе. Када је $d=15\text{mm}$, $L=40\text{mm}$ и $H=3\text{m}$, према Добинсовом експерименту, коефицијент μ добија максималну вредност 0,946 када је угао θ једнак 13° . Ова врста наглавка даје велику брзину па имају велику инжењерску примену.



Слика 15. Сужени наглавак [9]

1.3.2.4. Проширени (дивергентни) наглавак

Проширени наглавак је зарубљена купа која се шири у правцу струјања. Депресија код овог наглавка је већа него код Вентуријевог наглавка, и утолико више уколико је већи угао θ при врху купе. Ширење наглавка олакшава одвајање млаза од зидова, због чега угао θ не сме бити превише велики.

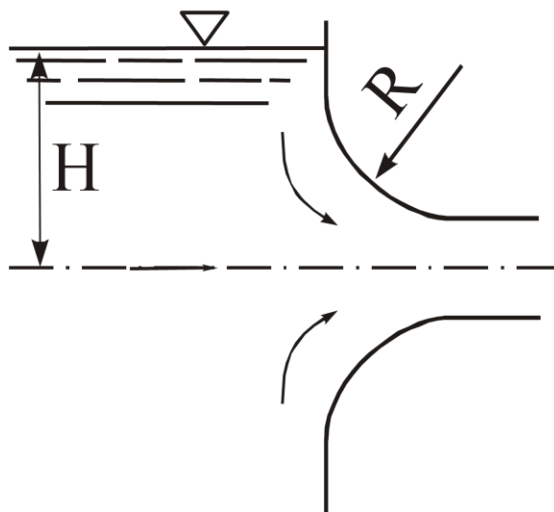


Слика 16. Проширени наглавак [9]

Иако коефицијенти ϕ и μ зависе од угла θ , ипак је могуће приближно узети $\phi=\mu=0,45$, за излазни пресек. Обочно се узима да је угао θ између 5° и 7° . Кад би се рачунало за улазни пресек, оне би биле много веће, што показује да се кроз овакав наглавак повећава проток. Проширени наглавци се обично употребљавају када је неопходан већи проток уз мању брзину истицања, али треба пазити на кавитацију, јер вода лако може почети да испарава.

1.3.2.5. Зарубљени (коноидни) наглавак

Понекад, да би се спречила контракција млаза, се користи наглавак чији је улаз пажљиво зарубљен. Коефицијент истицања за овакве наглавке се креће од 0,97 до 0,99, зависно од квалитета унутрашње површине цеви и висине течности у суду. Такође се одвајање млаза од зидова наглавка своди на минимум.



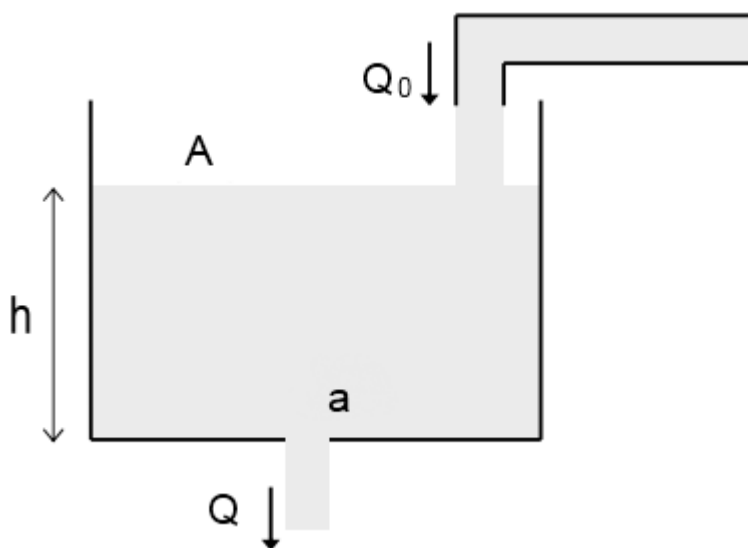
Слика 17. Зарубљени наглавак [9]

Зарубљени наглавак има знатне предности у односу на друге наглавке, али се ретко користи због компликоване, и тиме скупе, израде. Сваки од ових наглавака се израђује за одређену врсту истицања, па кад дође до промене нивоа течности у суду, требало би заменити наглавак.

1.4. Истицање течности при промењивом нивоу

Ова врста истицања се јавља када се из суда напуњеног течностју та течност празни, или се не долива једнаком брзином којом она истиче. Како се ниво течности мења, тако ће се и брзина истицања мењати, и то представља пример неустаљеног кретања течности.

1.4.1. Истицање течности у атмосферу при сталном дотицању



Слика 18. Истицање при сталном дотицању [13]

Проток кроз отвор на дну резервоара је дат изразом

$$Q = \mu a \sqrt{2gh}.$$

У овом случају проток зависи од висине течности у резервоару. Ако у резервоар истовремено и дотиче течност протоком Q_0 , за који се претпоставља да је константан, временом ће се проток мењати, све док се улазни и излазни протоци не изједначе. Равнотежна дубина се налази

$$Q_0 = Q \rightarrow h_0 = \frac{Q_0^2}{2g(\mu a)^2}.$$

Ако је почетна дубина већа од равнотежне, она ће се смањити док не досегне равнотежну вредност, а ако је мања, ниво течности ће расти до равнотежне вредности. Време неопходно да течност досегне равнотежни ниво се одређује преко једнакости запреминских промена

$$-Adh = Q_0 dt - \mu a \sqrt{2gh} dt,$$

чијом се интеграцијом добија тражено време

$$t = \frac{1}{\mu a \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{A(h) dh}{\sqrt{h_0} - \sqrt{h}}$$

Да би се решио овај интеграл, непоходно је познавање промене површине пресека која зависи од висине h . Ако течност не дотиче у сид, онда је $Q_0=0$ и $h_0=0$, па следи

$$t = \frac{1}{\mu a \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{A(h) dh}{\sqrt{h}},$$

одакле се, у зависности од облика пресека суда добија израз пражњења суда.

Ако је пресек суда константан по висини добија се

$$t = \frac{2A}{\mu a \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}),$$

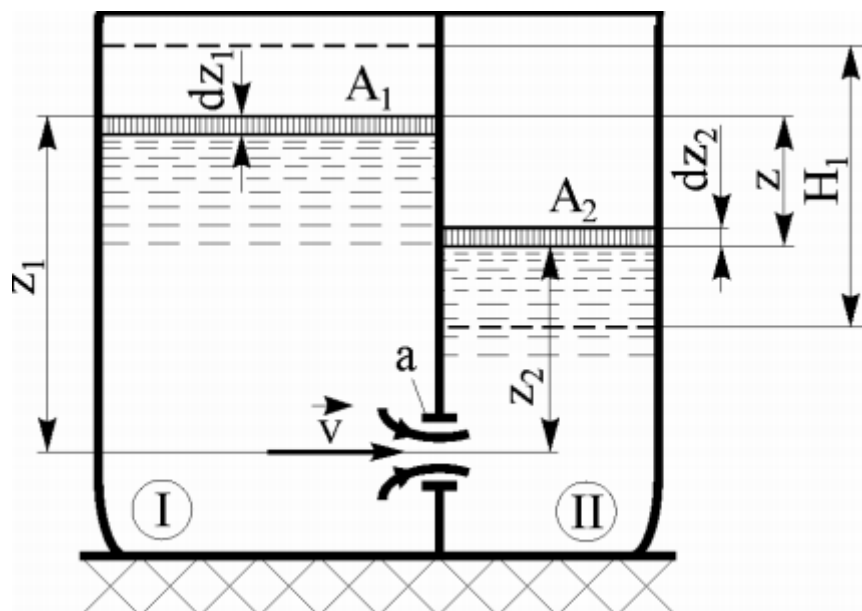
и на крају за потпуно пражњење суда потребно је ставиди да је $h_2=0$, из чега следи

$$t_0 = \frac{2A\sqrt{h_1}}{\mu a \sqrt{2g}}$$

Ово време је два пута дуже од времена потребног да иста запремина течности истече из резервоара ако се дубина h_1 држи константном.

1.4.2. Спојени судови

Течност претиче из суда I у суд II кроз мали отвор у преградном зиду. Ниво течности у суду I ће да опада а ниво течности у суду II ће да расте, тако да се почетна разлика H_1 између нивоа смањује све док се нивои потпуно не изједначе.



Слика 19. Спојени судови [19]

У неком тренутку времена у току претицања, положаји нивоа одређени су висинама z_1 и z_2 у односу на осу отвора а њихова разлика је z . За време dt пређе из суда I у суд II количина течности одређена изразом

$$Qdt = \mu a \sqrt{2gz} dt.$$

Истовремено се у суду I промени запремина за $A_1 dz_1$, а у суду II за $A_2 dz_2$, па диференцијална једначина претицања гласи

$$-A_1 dz_1 = A_2 dz_2 = \mu a \sqrt{2gz} dt.$$

У првом члану једначине стављен је знак минус, јер се у току претицања висина z_1 смањује, док висина z_2 расте. Како је, према слици

$$z_1 = z_2 + z.$$

изводи се диференцијал

$$dz_1 = dz_2 + dz \Rightarrow dz_2 = dz_1 - dz.$$

За одређивања везе између разлике нивоа z и времена t , треба из једначина

$$-A_1 dz_1 = A_2 dz_2 \quad \text{и} \quad dz_2 = dz_1 - dz,$$

да се елиминише dz_2 . Тиме се долази до релације

$$dz_1 = \frac{A_2 dz}{A_1 + A_2}.$$

Ако се овај израз замени долази се до диференцијалне једначине

$$dt = \frac{-A_1 A_2}{A_1 + A_2} \frac{dz}{\mu a \sqrt{2gz}}.$$

Да би се нашло време t за које ће се разлика нивоа z променити од почетне почетне H_1 до неке разлике разлике нивоа H_2 , потребно је да се једначина интегрални у границама од H_1 до H_2 . Уз претпоставку да су површине пресека A_1 и A_2 судова сталне, добиће се

$$t = \frac{2A_1 A_2}{A_1 + A_2} \frac{1}{\mu a \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}).$$

Време изједначавања нивоа у судовима судовима ($H_2=0$) је

$$t_0 = \frac{2A_1 A_2}{A_1 + A_2} \frac{\sqrt{H_1}}{\mu a \sqrt{2g}}.$$

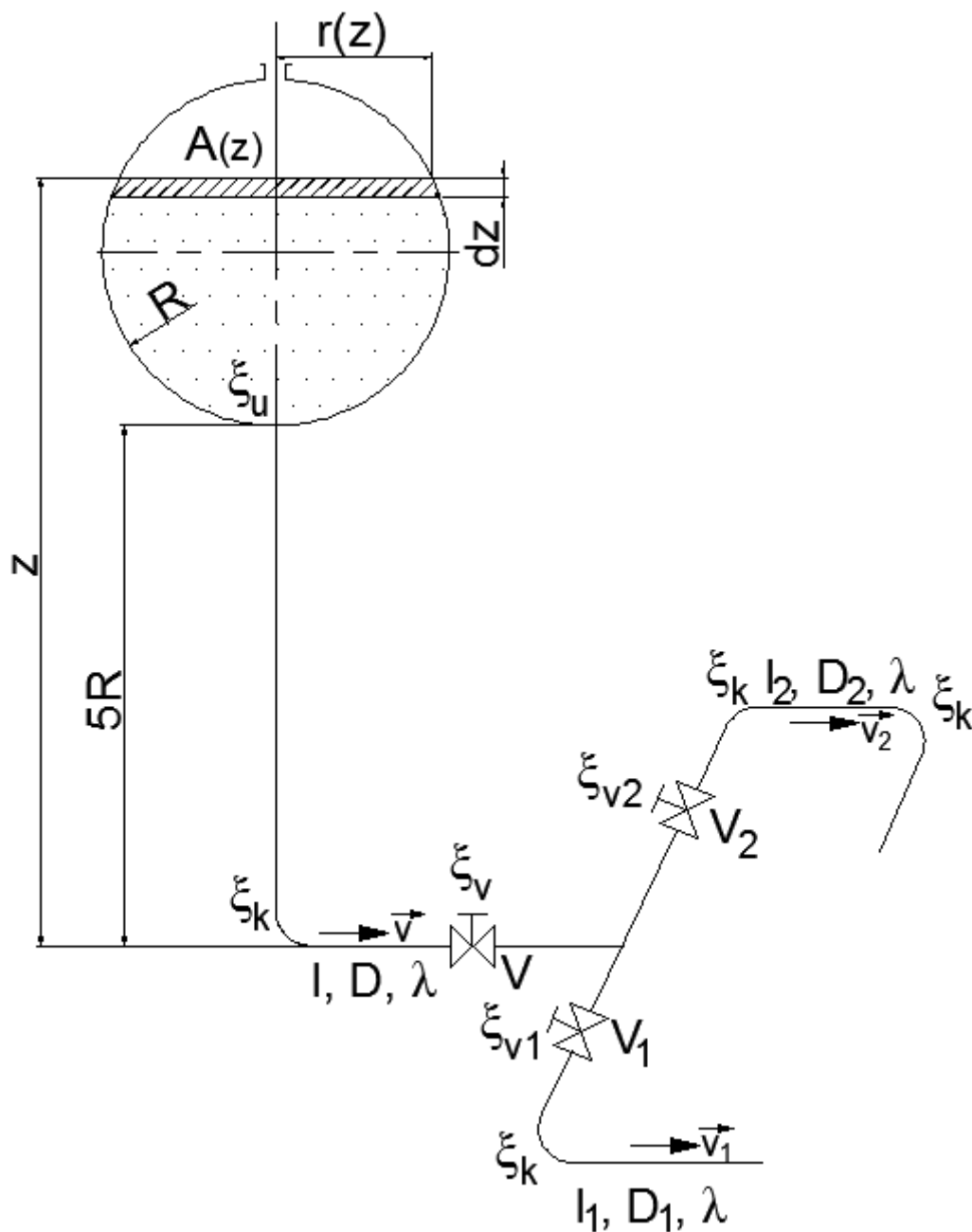
Ако је суд I веома велики у односу на суд II, тада се може сматрати да у њему ниво течности остаје на истој висини, док ниво течности у суду II расте. Тада се време изједначавања нивоа одређује као [19]

$$t_0 = \lim_{A_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{2A_1 A_2}{A_1 + A_2} \frac{\sqrt{H_1}}{\mu a \sqrt{2g}} \right) = \frac{2A_2 \sqrt{H_1}}{\mu a \sqrt{2g}}.$$

2. Задати пример

Из напуњеног водоторња сферног облика резервоара истиче течност у атмосферу кроз цеводод приказан на скици. Одредити време пражњења овог резервоара ако су:

$R=1,5\text{m}$, $l=6\text{m}$, $l_1=4\text{m}$, $l_2=10\text{m}$, $D=45,085\text{mm}$, $D_1=24,257\text{mm}$, $D_2=24,257\text{mm}$, $\xi_u=0,5$; $\xi_k=0,6$; $\xi_v=0,5$; $\xi_{v1}=0,6$; $\xi_{v2}=0,7$; $\rho=1000\text{ kg/m}^3$ и $\lambda=0,025$ (за све цеви).



Слика 20. Скица проблема

2.1. Решавање примера

Прво треба поставити Бернулијеву једначину за тренутно положај нивоа течности у сферном резервоару на висини z и за излазни пресек цеви 1

$$\frac{v_r^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} + gz = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} + g \cdot 0 + \frac{v^2}{2} \left(\xi_u + \xi_k + \xi_v + \lambda \frac{l}{D} \right) + \frac{v_1^2}{2} \left(\xi_{v1} + \xi_k + \lambda \frac{l_1}{D_1} \right).$$

$v_r^2/2$ је могуће занемарити јер је брзина опадања нивоа воде у резервоару много мања од брзине истицања воде из цеви, а p_a/ρ је могуће скратити са обе стране па се добија

$$gz = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v^2}{2} \left(\xi_u + \xi_k + \xi_v + \lambda \frac{l}{D} \right) + \frac{v_1^2}{2} \left(\xi_{v1} + \xi_k + \lambda \frac{l_1}{D_1} \right).$$

На исти начин се добија и Бернулијева једначина за други излазни пресек

$$\frac{v_r^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} + gz = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} + g \cdot 0 + \frac{v^2}{2} \left(\xi_u + \xi_k + \xi_v + \lambda \frac{l}{D} \right) + \frac{v_2^2}{2} \left(\xi_{v2} + 2\xi_k + \lambda \frac{l_2}{D_2} \right),$$

$$gz = \frac{v_2^2}{2} + \frac{v^2}{2} \left(\xi_u + \xi_k + \xi_v + \lambda \frac{l}{D} \right) + \frac{v_2^2}{2} \left(\xi_{v2} + 2\xi_k + \lambda \frac{l_2}{D_2} \right).$$

Одузимањем ових једначина се добија веза између брзина

$$\begin{aligned} \frac{v_1^2}{2} + \frac{v^2}{2} \left(\xi_u + \xi_k + \xi_v + \lambda \frac{l}{D} \right) + \frac{v_1^2}{2} \left(\xi_{v1} + \xi_k + \lambda \frac{l_1}{D_1} \right) \\ = \frac{v_2^2}{2} + \frac{v^2}{2} \left(\xi_u + \xi_k + \xi_v + \lambda \frac{l}{D} \right) + \frac{v_2^2}{2} \left(\xi_{v2} + 2\xi_k + \lambda \frac{l_2}{D_2} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_1^2}{2} \left(\xi_{v1} + \xi_k + \lambda \frac{l_1}{D_1} \right) = \frac{v_2^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} \left(\xi_{v2} + 2\xi_k + \lambda \frac{l_2}{D_2} \right),$$

$$\frac{v_1^2}{2} \left(1 + \xi_{v1} + \xi_k + \lambda \frac{l_1}{D_1} \right) = \frac{v_2^2}{2} \left(1 + \xi_{v2} + 2\xi_k + \lambda \frac{l_2}{D_2} \right),$$

$$v_1^2 = v_2^2 \frac{\left(1 + \xi_{v2} + 2\xi_k + \lambda \frac{l_2}{D_2} \right)}{\left(1 + \xi_{v1} + \xi_k + \lambda \frac{l_1}{D_1} \right)},$$

$$v_1 = v_2 \sqrt{\frac{1 + \xi_{v2} + 2\xi_k + \lambda \frac{l_2}{D_2}}{1 + \xi_{v1} + \xi_k + \lambda \frac{l_1}{D_1}}} = C v_2.$$

C је одређено изразом

$$C = \sqrt{\frac{1 + \xi_{v2} + 2\xi_k + \lambda \frac{l_2}{D_2}}{1 + \xi_{v1} + \xi_k + \lambda \frac{l_1}{D_1}}},$$

и његова вредност се може добити заменом константи датих поставком

$$C = \sqrt{\frac{1 + 0,7 + 2 \cdot 0,6 + 0,025 \frac{10}{24,257}}{1 + 0,6 + 0,6 + 0,025 \frac{4}{24,257}}} = \sqrt{\frac{2,9103}{2,2041}} = \sqrt{1,3204} = 1,1491.$$

На основу претходне везе између брзина v_1 и v_2 у гранама цевовода, једначине континуитета

$$v \frac{D^2 \pi}{4} = v_1 \frac{D_1^2 \pi}{4} + v_2 \frac{D_2^2 \pi}{4},$$

$$v D^2 = v_1 D_1^2 + v_2 D_2^2,$$

и друге Бернулијеве једначине се налази средња брзина истицања v

$$v = \sqrt{\frac{2gz}{\xi_u + \xi_k + \xi_v + \lambda \frac{l}{D} + \left(\frac{D^2}{CD_1^2 + D_2^2} \right)^2 \left(1 + \xi_{v2} + 2\xi_k + \lambda \frac{l_2}{D_2} \right)}} = v(z),$$

из чега је могуће добити једначину протока кроз главну цев

$$Q(z) = v(z) \frac{D^2 \pi}{4} = \mu \frac{D^2 \pi}{4} \sqrt{2gz}.$$

Коефицијент протока μ је дефинисан као

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{\sqrt{\xi_u + \xi_k + \xi_v + \lambda \frac{1}{D} + \left(\frac{D^2}{CD_1^2 + D_2^2}\right)^2 \left(1 + \xi_{v2} + 2\xi_k + \lambda \frac{1}{D_2}\right)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{0,5 + 0,6 + 0,5 + 0,025 \frac{6}{45,085} + \left(\frac{45,085^2}{1,149 \cdot 24,257^2 + 24,257^2}\right)^2 \left(1 + 0,7 + 2 \cdot 0,6 + 0,025 \frac{10}{24,257}\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1,6033 + 1,607^2 \cdot 2,9103}} = 0,331.\end{aligned}$$

Будући да тренутна величина слободне површине течности у резервоару износи

$$A(z) = 3^2\pi = [R^2 - (z - 6R)^2]\pi,$$

и на основу једначине за истицање

$$-A(z)dz = (Q - Q_0)dt,$$

уз услов да течност не дотиче у резервоар ($Q_0=0$)

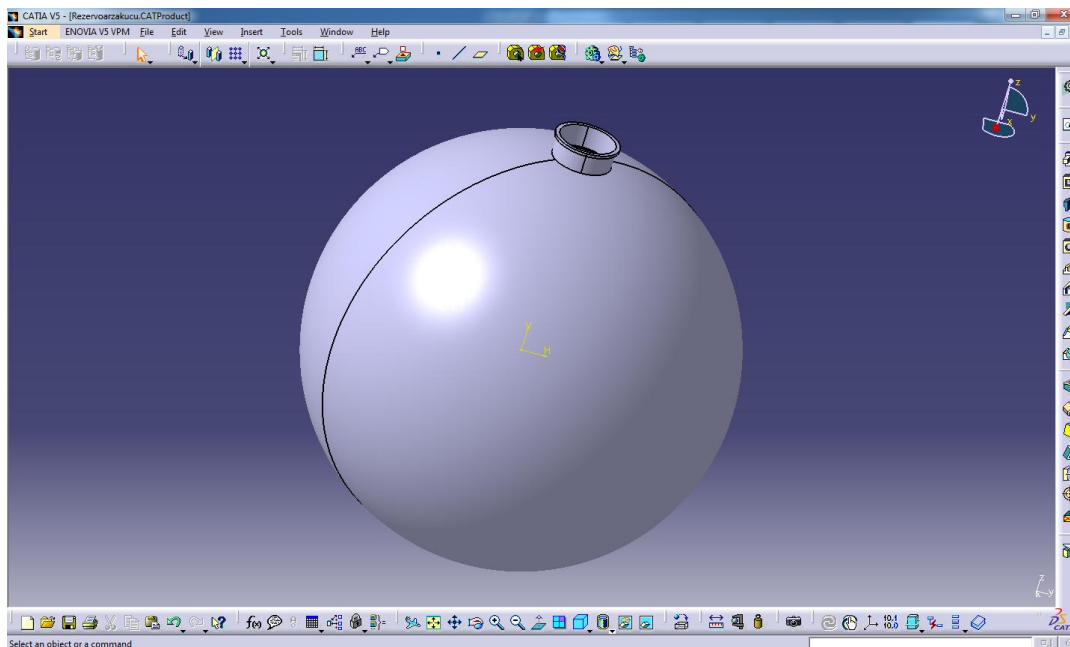
$$-A(z)dz = Qdt,$$

се налази време пражњења сферног резервоара

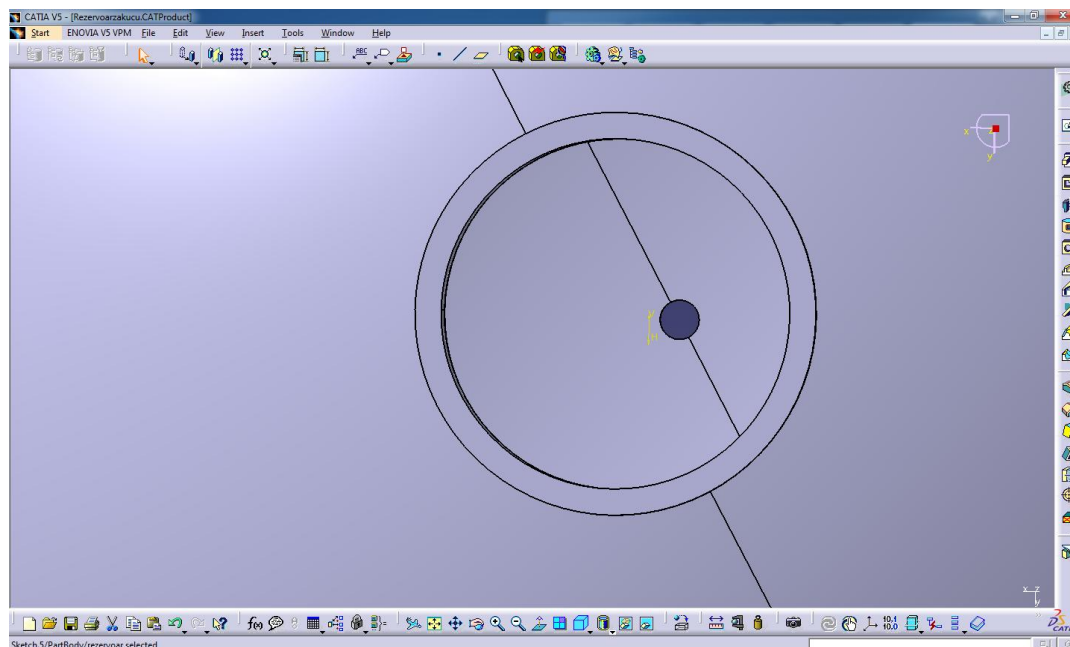
$$\begin{aligned}t &= - \int_{7R}^{5R} \frac{[R^2 - (z - 6R)^2]\pi}{\mu \frac{D^2\pi}{4} \sqrt{2gz}} dz = \frac{32}{5} \frac{R^2 \sqrt{R}}{\mu D^2 \sqrt{2g}} (25\sqrt{5} - 21\sqrt{7}) = \\ &= \frac{32}{5} \frac{2,25 \cdot 1,225}{0,331 \cdot 0,00203265722 \cdot 4,43} \cdot 0,341 = 2018,167s = 0,5606h.\end{aligned}$$

2.2. Израда модела

Величине цеви су узете са [20]. Конструкциони аспекти нису узети у обзир. Модел је рађен у програму катија (CATIA).

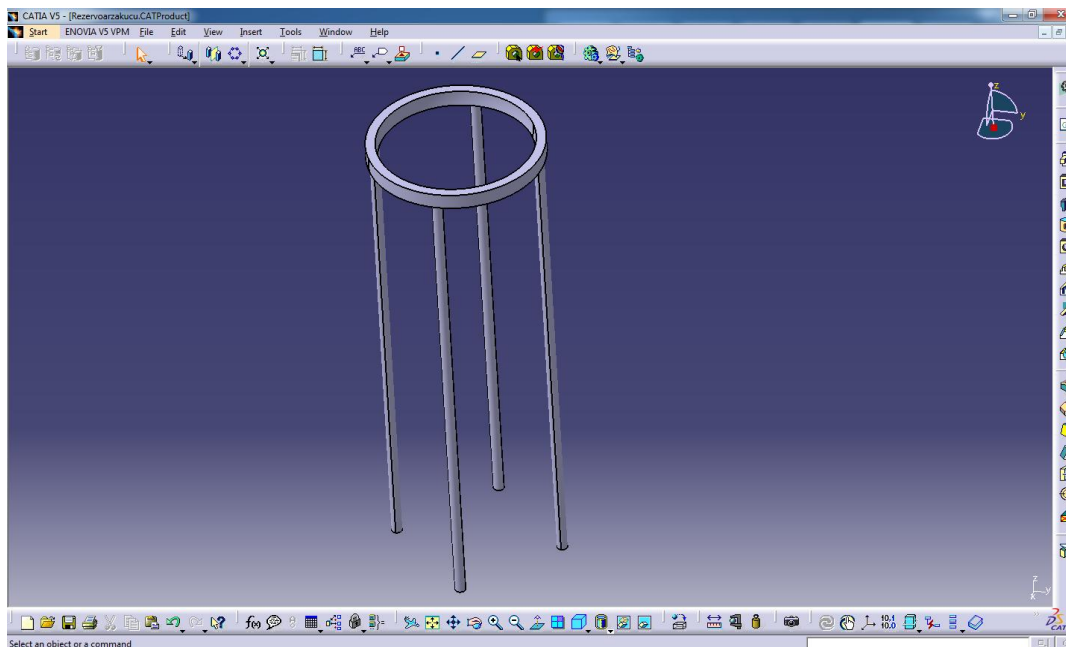


Слика 21. Модел резервоара



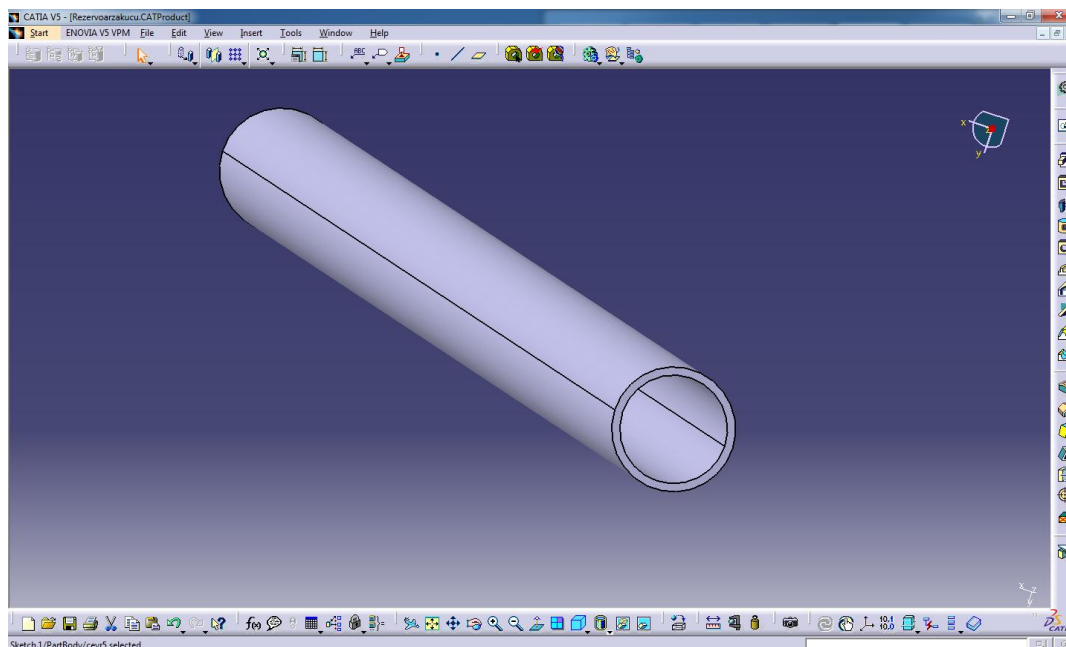
Слика 22. Поглед на унутрашњост резервоара

Резервоар је направљен коришћењем команде "Shaft" да се заротира лук у облику полукруга. Отвори на резервоару су направљени уз помоћ тела у облику ваљака направљених командом "Rad" и округлих рупа добијених коришћењем команде "Pocket".



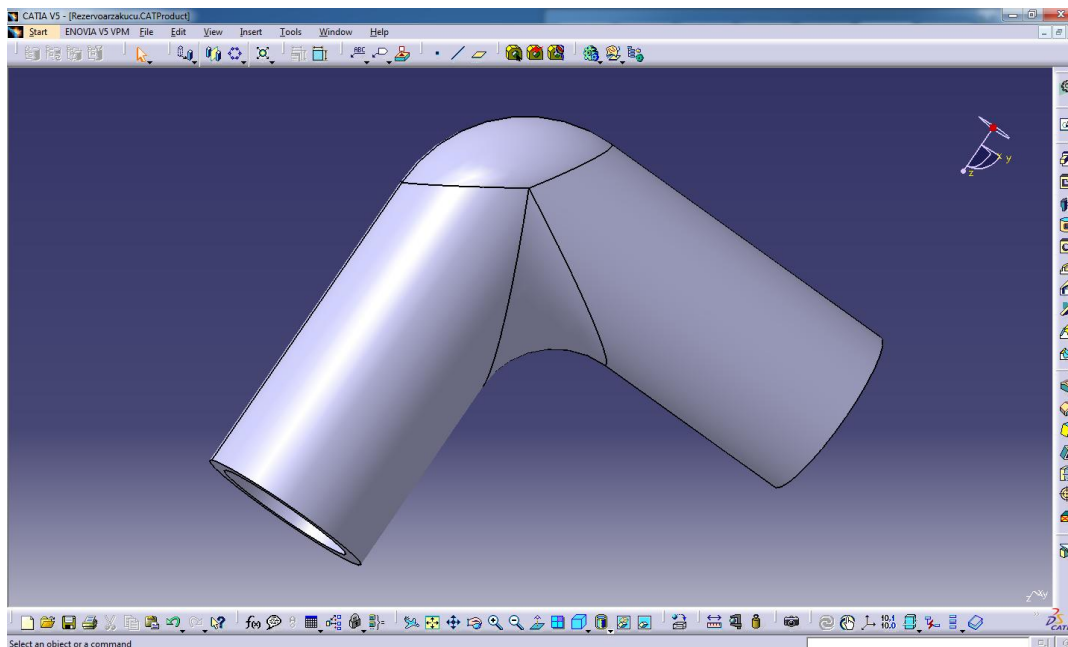
Слика 23. Носач резервоара

Носач је направљен од квадрата чија је једна страна прерађена да има облик одсечка круга истог полупречника као резервоар, и затим командом "Shaft" добијен тродимензионални приказ. Једна нога у облику ваљка је накачена за дно носача и затим ископирана командом "Circular Pattern".



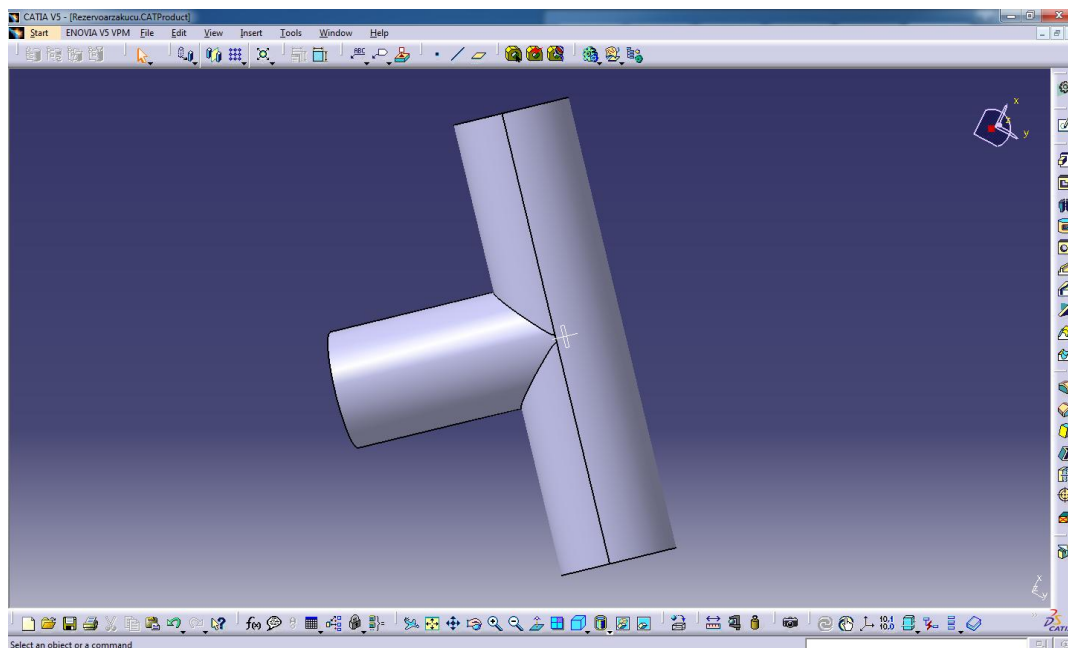
Слика 24. Цев

Цевке се добијају тако што се направи ваљак командом "Pad", а затим избуши рупа командом "Pocket".



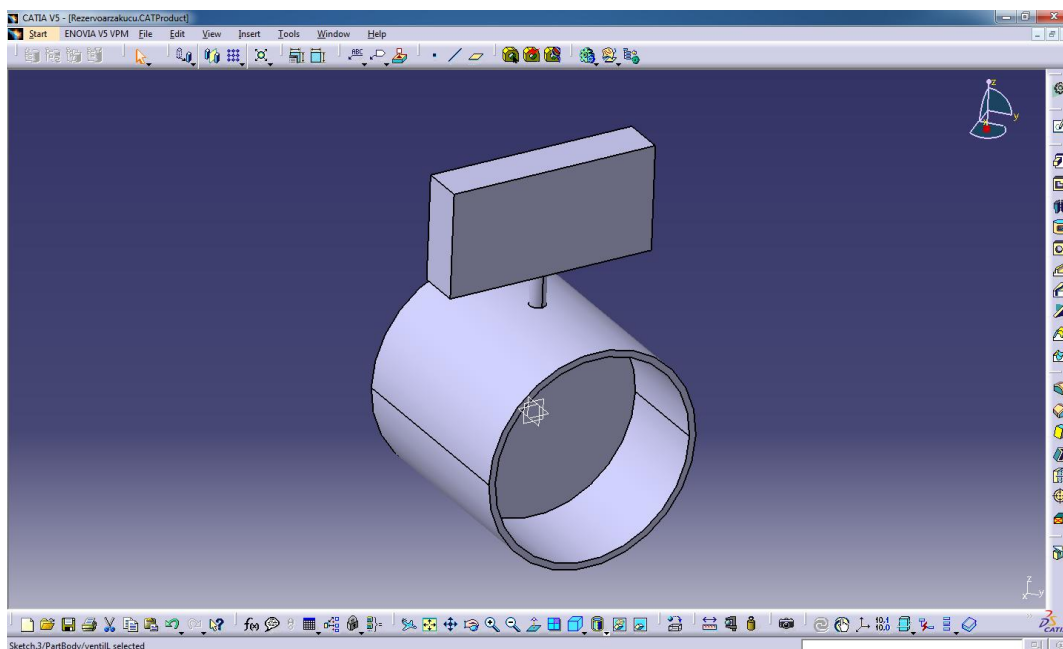
Слика 25. Угаони део цеви

Угаоне цеви се добијају спајањем две обичне цеви и коришћењем команде "Edge Fillet".



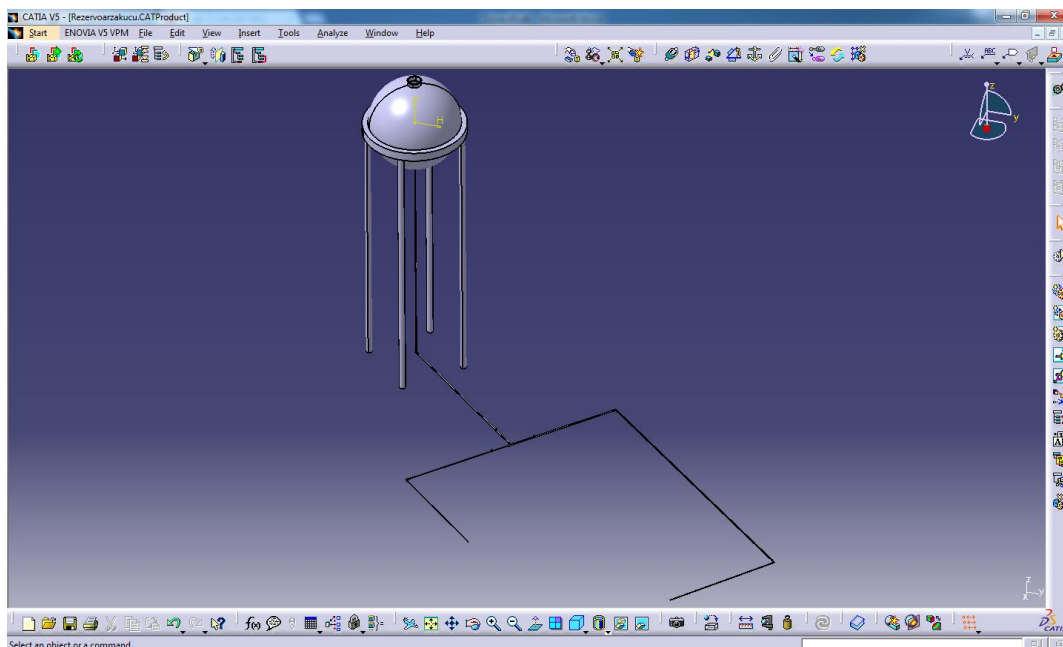
Слика 26. Разводник

Разводник се добија тако што се прво споје ваљци, па затим избуше рупе командом "Pocket".

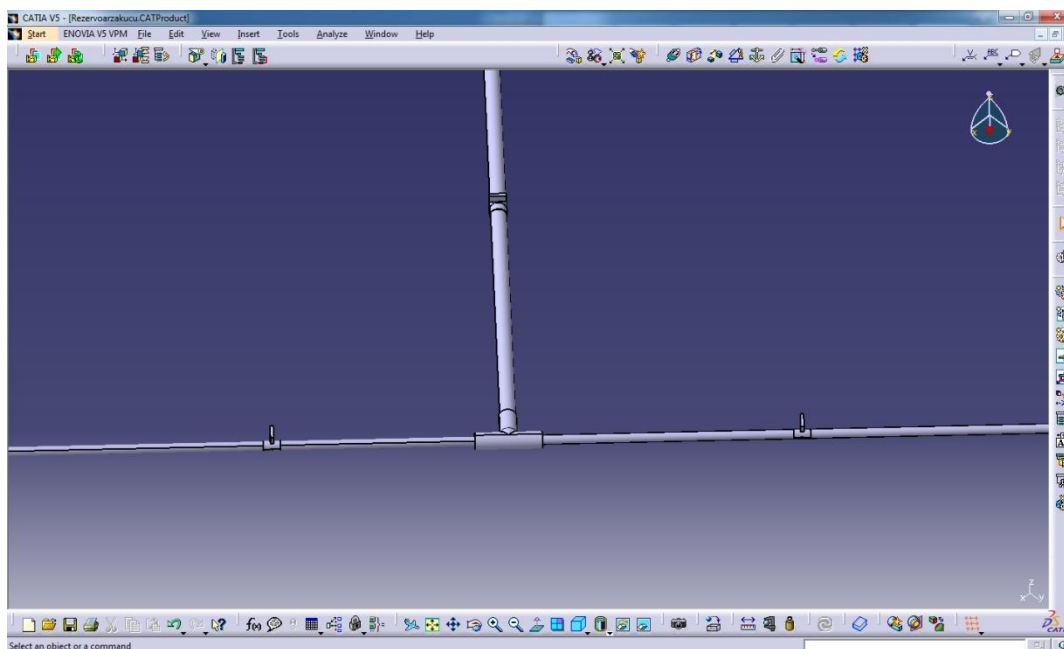


Слика 27. Вентил

Вентил се добија тако што се на мању цев додаје ручица за окретање, а у цев убацује лептир.

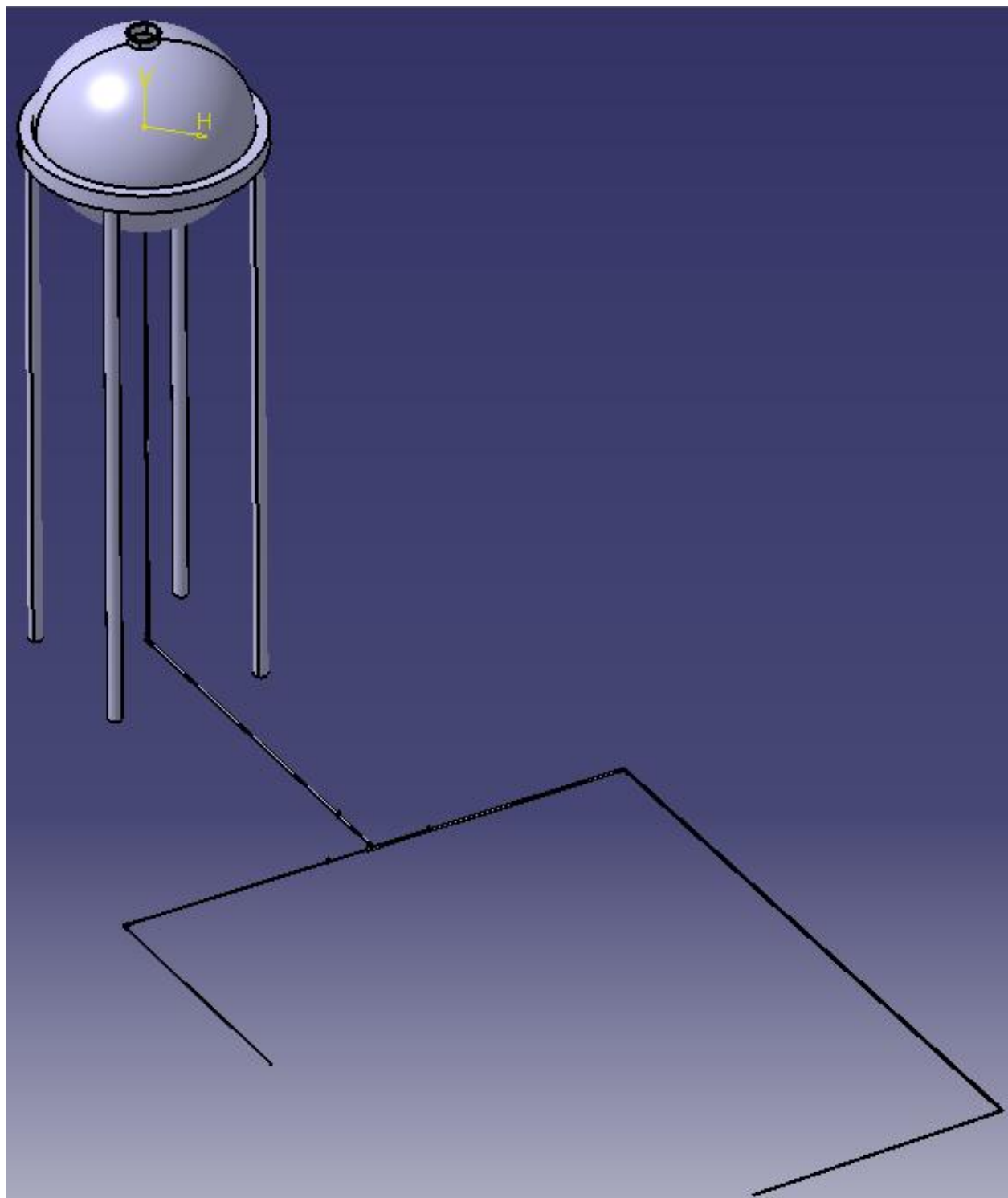


Слика 28. Приказ целог склопа



Слика 29. Приказ дела склопа са вентилима

На крају остаје само да се све склопи у "Assembly Design"-у. Главно део резервоара се фиксира док се остали делови, уз помоћ ограничења, доводе на своје место [21].



Слика 30. Цео склоп резервоара и цеви

Закључак

Разумевање истицања течности кроз отворе и наглавке има велики значај, јер се данас на великим раздаљинама транспортују разне течности (као што су нафта, бензин, вода и др.) на најразличитије начине (танкери, цевоводи, цистерне, итд.) у великим количинама и разлика у ефикасности од само 1% миже имати велики ефекат, били на цену, на време транспорта или на транспортовану количину. Због тога је даљи развој ове области врло битан, поготово јер ће потражња за гореневеденим сировинама, а посебно водом, да расте у будућности.

Примена рачунарских технологија за осмишљање, израчунавање и прототиповање различитих хидрауличких делова, конструкција и система знатно скраћује неопходно време, као и уложене ресурсе и новац, што су врло битне ставке у данашњем глобализованом свету, где је брзина израде нечега подједнако важна као и квалитет.

Једна од технологија у развоју која би могла, и вероватно ће имати, велики утицај на ову област јесу 3Д штампачи. Они су се појавили скорија и њихов потенцијал је одмах примећен, толико да се очекује да ће у наредним годинама направити огроман утицај у свим врстама и облицима индустрија. 3Д штампачи би могли да омогуће да делови, који се раније нису користили јер су били неисплативи, као поменути зарубљени наглавак, сада постану лако доступни свима, и на тај начин повећају ефикасност целе инфраструктуре.

Значај ове области, као и целе области хидраулика, ће наставити да расте у будућности, иако се раније предвиђао њен застој.

Литература

- [1] <https://en.wikipedia.org/wiki/Hydraulics>, приступљено септембра 2015.
- [2] <https://sh.wikipedia.org/wiki/Hidraulika>, приступљено септембра 2015.
- [3] <http://moodle.mfkg.rs/mod/resource/view.php?id=709>, приступљено септембра 2015.
- [4] Обровић, Б., Механика флуида, Универзитет у Крагујевцу, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Крагујевац, 2007.
- [5] <http://www.dodaj.rs/f/2t/cG/U00riCy/bernulijeva-jednacina-sk.pdf>, приступљено септембра 2015.
- [6] <http://moodle.mfkg.rs/mod/resource/view.php?id=712>, приступљено септембра 2015.
- [7] <http://moodle.mfkg.rs/mod/resource/view.php?id=713>, приступљено септембра 2015.
- [8] Обровић, Б., Савић, С., Хидраулика основи, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2005.
- [9] <https://www.google.rs/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0CCQQFjABahUKEwiG9-OAt9jHAhWKGcWkHT7kDTM&url=http%3A%2F%2Fnastava.sf.bg.ac.rs%2Fmod%2Fresource%2Fview.php%3Fid%3D11989&usg=AFQjCNHvpFiwnd5HdiIc75xZdxeOWfw0IQ&bvm=bv.101800829,d.bGg&cad=rja>, приступљено септембра 2015.
- [10] Вороњец, К., Обрадовић, Н., Механика флуида, Универзитет у Београду, Грађанска књига, Београд, 1960.
- [11] <http://www.dodaj.rs/f/v/Eq/3VCC0gAd/11isticanje-kroz-male-ot.pdf>, приступљено септембра 2015.
- [12] <http://moodle.mfkg.rs/mod/resource/view.php?id=719>, приступљено септембра 2015.
- [13] <http://www.scribd.com/doc/48065259/Fluidi-skripta-web-7#scribd>, приступљено септембра 2015.
- [14] http://rgn.hr/~zandreic/studenti/fluidi/mf_p8.pdf, приступљено септембра 2015.
- [15] http://rgn.hr/~zandreic/studenti/fluidi/temelji_mehanike_fluida.pdf, приступљено септембра 2015.
- [16] Кнежевић, Д., Милашиновић, А., Механика флуида, Универзитет у Бања Луци, Машински факултер Бања Лука, Бања Лука, 2010.

- [17] Адамовић, Ж., Кутин, М., Пухарић, М., Адамовић, М., Хидраулика и пнеуматика, Институт Гоша, Београд, 2009.
- [18] <http://www.dodaj.rs/f/2B/2H/Q2iNQHC/10isticanje-kroz-velike-.pdf>, приступљено септембра 2015.
- [19] <http://moodle.mfkg.rs/mod/resource/view.php?id=720>, приступљено септембра 2015.
- [20] https://en.wikipedia.org/wiki/Nominal_Pipe_Size, приступљено септембра 2015.
- [21] <http://moodle.mfkg.rs/course/view.php?id=39>, приступљено септембра 2015.
- [22] Лазаревић, П., Истицање течности кроз отворе, наглавке и прелива, Завршни рад, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Универзитет у Крагујевцу, Крагујевац, 2014.
- [23] <http://www.tehnikum.edu.rs/predmeti/0003/Predavanje062.pdf>, приступљено септембра 2015.
- [24] http://titan.fsb.hr/~jpetric/Udzbenici/Udzbenik_HIDRAULIKA_JPetric.pdf, приступљено септембра 2015.
- [25] http://hikom.grf.bg.ac.rs/web_stranice/KatZaHidr/Predmeti/Hidraulika/Skripte/Hidraulika_1/H1Predavanje4.pdf, приступљено септембра 2015.
- [26] http://hikom.grf.bg.ac.rs/web_stranice/KatZaHidr/Predmeti/Hidraulika/Skripte/Hidraulika_1/H1Predavanje5.pdf, приступљено септембра 2015.