

Факултет инжењерских наука

Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне дипломске академске студије

Модул: Производно машинство

Предмет: Механика II

Број индекса: 30/2003

Никола Д. Мајсторовић

Гироскопи

дипломски рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. **др Љиљана Вељовић, доцент - ментор**

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог дипломског рада кандидат треба да:

- дефинише основне карактеристике Кинематике и Динамике обртања крутог тела око непомичне тачке са посебним освртом на Ојлерове динамичке једначине,
- представи гироскопе као пример крутих тела која се обрћу око непомичне тачке,
- изнесе приближну теорију гироскопа,
- прикаже карактеристике гироскопа са два и три степена слободе кретања кроз неколико примера,
- истражи примере примене гироскопа и гироскопских уређаја.

Препоручена литература:

[1] Вељовић Љ.: *History and Present of Gyroscopes Models and Vectors Rotators*, Scientific Technical Review, VTI Serbian Army, 2010, Vol.60, No.3-4, pp. 101–111

[2] Вујановић Б.: Динамика, Научна књига, Београд, 1977

[3] Ђурковић В.: Динамика материјалних система, Војна академија Београд, 2010

Крагујевац,

12. 06. 2014. године

ментор:

др Љиљана Вељовић, доцент

Резиме

У општем случају, механички гироскопи изводе обртање око непомичне тачке, сферно кретање, које се може описати једначинама динамике крутог тела. Дата је анализа принципа рада као и карактеристике гироскопа са два и три степена слободе кретања. Основна претпоставка приближне теорије гироскопа је да је угаона брзина симетричног гироскопа око осе симетрије веома велика.

У раду је дат кратак историјски преглед модела гироскопа и гироскопских уређаја. Такође је дат преглед модела гироскопа и гироскопских уређаја који се користе за управљање и стабилизацију кретања бродова, авиона, возила и торпеда. Све већи захтеви, нови материјали и нове технологије доводе до модернијих гироскопа, мањих димензија и велике прецизности.

Кључне речи: момент количине кретања, гирскоп, приближна теорија гироскопа, гироскомпас, инерцијална платформа, вештачки хоризонт, торпеда

Abstract

Generally, mechanical gyroscopes rotate about more axes with one point intersection, a fixed point, and that can be described by equations of the dynamics of a rigid body. An analysis of the principles of operation and types of movement are given. The basic assumption of the approximate theory of gyro is that the gyro angular velocity about the axis of symmetry is very high.

Intension of this paper is to present a short historical review of models and constructions of gyroscopes.

Gyroscope models and their construction realization that are used to manage and stabilize the movement of ships, aircraft, vehicles and torpedoes are presented, also. With development of micro and nano technology, a new class of gyroscope appears.

Keywords: angular momentum, gyro, gyro rotor, the approximate theory of gyro, gyrocompass, inertial platform, artificial horizon, torpedoes

Садржај

1.0	Увод	1
2.0	Гироскопи	3
2.1	Историјски развој гироскопа	4
3.0	Динамика гироскопа	8
3.1	Ротација крутог тела око две осе које се секу	8
3.1.1	Кинематика крутог тела које се обрће око две осе које се секу	8
3.1.2	Динамика крутог тела које се обрће око две осе које се секу	13
3.1.3	Euler-ово (Ојлерово) решење	16
3.1.4	Lagrange-ово (Лагранжово) решење	17
3.1.5	Решење Соње Ковалевски	19
4.0	Обртање уравнотеженог тела	20
4.1	Ојлерове једначине у случају обртања уравнотеженог симетричног тела	20
4.2	Стабилност обртања уравнотеженог симетричног тела	22
4.3	Стабилност обртања уравнотеженог несиметричног тела	24
5.0	Приближна теорија гироскопских појава	28
5.1	Приближна теорија гироскопских појава	28
5.2	Карактеристике гироскопа са три степена слободе	29
5.3	Регурална прецесија тешког симетричног гироскопа	31
5.4	Гироскопско клатно	32
6.0	Гироскоп са два степена слободе	34

6.1	Гироскопски момент	34
7.0	Примена гироскопа	36
7.1	Гирокомпас	36
7.2	Ротори	38
7.3	Возила	39
7.4	Авиони	42
7.5	Бродови	43
7.6	Пројектили	44
7.7	Инерционе платформе	45
7.8	Вештачки хоризонт	47
7.9	Показивач скретања	47
7.10	Играчке	48
8.0	Савремени гироскопи	52
8.1	Даљи развој гироскопа	55
9.0	Закључна разматрања	56
	Литература	58

1.0 Увод

Чигра је предмет конусног, сферног или овалног облика са шпицастим врхом, најчешће играчка, која ако се заврти, наставља да се окреће око једне осе ротације. Познато је да та једноставна играчка, зврк, има необичну особину да када се обрће довољно великом угаоном брзином око своје осе симетрије, дуго остаје у стању обртања око те осе.

Физичке особине чигре су сличне као особине гироскопа. Ове особине привлачиле су научнике широм света, па су као резултат дугогодишњих истраживања настали многи уређаји и инструменти, од једноставних до веома сложених конструкција, а који имају значајну улогу у стабилизацији кретања. Способност гироскопа да задржава стални правац кад се обрће великом брзином искоришћена је у многим областима машинства, рударства, у авијацији, у навигацији, војној индустрији, у небеској механици,... Гироскопи су делови инструмената у авионима, ракетама, пројектилима, многим транспортним средствима и оружју. То им даје веома значајну улогу као и потребу да буду подвргнути строгој контроли при пројектовању и самој изради, јер би у случају оштећења могло доћи до катастрофалних последица. Својства гироскопа поседују елисе авиона које ротирају, небеска тела у кретању, ротори турбина, артиљеријски пројектили у кретању, неке инсталације на бродовима. Велики број уређаја који се примењују у војним сврхама базира на принципу гироскопа.



Два велика научника - Волфганг Паули и Нилс Бор посматрају чигру на отварању универзитета Лунд у Шведској 1954. године

Популарност чигри је поприлично порасла педесетих година прошлог века и тада је објављено неколико теоретских чланака о њиховом кретању. Окретање чигре не би било различито од окретања неког другог тела да не долази до лепо уочљиве појаве прецесије. Под прецесијом се подразумева промена смера осе око ког ротира тело.



Чигра зврк, споменик у Холандији

Највећа чигра на свету налази се у Холандији. То је скулптура Чигра зврк (*Bromtol*) висине 10 метара, која краси кружни ток на северном улазу у град Остерхаут. Скулптура је уметничко дело Петра Хохмана, а пошто је споменик постављен у делу града који врви од различитих индустријских делатности, претпоставља се да је уметник Хохман представио овај крај управо овом огромном шареном играчком. Називају је *визиткартом града*.

Најтежа чигра на свету има 280 килограма и налази се у Кини. Рекорд за најтежу чигру коју је један човек успео да покрене од 2005. године држи Чанг Тај-Јуан (*Chang Tai-Yuan*). Чигра, коју је он покренуо само конопцем, имала је 60 килограма и окретала се 39 секунди.

Чигре је описао и Бранислав Нушић (1864–1938) у „*Речнику српскохрватског језика*“ Матице српске:

„ Дечја играчка на дну зашиљеној, а у врху проширеној, која се окреће под ударцима бича.“



2.0 Гироскопи

Гироскоп (жироскоп, чигра, зврк) је хомогено обртно тело које се обрће великом угаоном брзином око своје осе симетрије и данас је један од најважнијих инерцијалних сензора који мери угаону брзину и мала угаона померања око референтне осе. Када мери угаону брзину зове се *брзински гироскоп* (rate gyroscope), а када мери мале угловне поремећаје – *интегрирајући гироскоп* (rate integrating gyroscope). У енглеској литератури користи се реч *gyro*. Име гироскоп потиче од грчких речи *γυρο* (окрет) и *σκοπεω* (посматрати) и везује се за експерименте које је 1852. године извео Jean Bernar Leon Foucault. Принцип рада гироскопа заснива се на принципу псеудорегуларне прецесије. У физици овај принцип је познат као гироскопска инерција или просторна крутост. Уређај се састоји од диска или точка чија се оса може слободно обртати и заузимати било који положај у простору. При том је брзина обртања гироскопа око сопствене осе много већа од угаоне брзине обртања саме осе гироскопа. Основно својство гироскопа је да задржи неизмењен правац осе обртања при одсуству момента спољашњих сила. Кад на гироскоп делује неки спољашњи момент, јавља се тежња да се оса гироскопа помери у правцу дејства тог момента. Гироскоп се супротставља дејству спољашњег спрега спрегом истог интензитета и правца а супротног смера (гироскопски момент, девијациони момент). Тај спрег је пропорционалан сопственој угаоној брзини гироскопа која је велика. Када се уређај монтира у кардански обруч, његов положај остаје готово фиксиран, без обзира на било који покрет платформе на којој је монтиран.

Савремена навигацијска авио-опрема је незамислива без гироскопских уређаја, а уз то постоји и читав низ мирнодопских и војних примена. Поменимо само уређаје за аутоматско навођење различитих робота, багера, бушилица или других радних машина. Примена гироскопа у техници је веома велика. Данас су гирокомпаси у потпуности заменили магнетне компасе у авиоиндустрији, морепловству, аутомобилизму. Стабилизација и навођење циљева тенкова у вожњи, навођење подморница, бродова и различитих пројектила по унапред задатој путањи само су неки од војних захтева где су гирокомпаси нашли своју примену. У балистици, гироскопи су основни мерни елемент у систему управљања пројектила. Они откривају одступање пројектила од жељених услова лета. Гироскопски ефекат је коришћен и код неких дечјих играчака (чигра, уо –уо, powerball).

Многи ротирајући елементи, као замајци на пример, понашају се као гироскопи иако не користе гироскопски ефекат.

2.1 Историјски развој гироскопа

Гироскопи су познати од давних времена. Стари народи знали су за обртну чигру, играчку која је задржавала вертикални правац кад се обртала великом брзином, што је основна карактеристика гироскопа. Прва чигра је пронађена у периоду од пре око три и по хиљаде година пре нове ере, што потврђују археолошка ископавања која су открила ову играчку на свим континентима, осим на Антарктику. Чигре од глине, настале пре око три и по хиљаде година пре нове ере, пронађене су на археолошким ископинама града Ура који се налазио на подручју данашњег Ирака. Керамичке чигре које су пронађене у Троји, направљене су три миленијума пре наше ере. Чигри је било и у старом Египту, што такође потврђују археолошке ископине из времена од 2000. до 1400. године пре наше ере, као и у Кини које датирају из доба око хиљаду година пре нове ере. Откривене су и чигре од кости у Старом Риму, за које се сматра да су настале у трећој деценији пре нове ере. На појединим предметима старогрчке грнчарије из 500. године пре наше ере, исликане су сцене жена које се забављају окретањем чигре. Чигре се помињу у грчким књижевним делима: у спеву „Илијада“, у „Држави“ грчког филозофа Платона, у комедији „Птице“ старогрчког драмског писца Аристофана; у римској књижевности из првог века пре нове ере: у Вергилијевом херојском епу „Енеид“а; и у енглеској књижевности у шеснаестом и седамнаестом веку у неколико Шекспирових дела.

У 14. веку у Енглеској је постојала велика чигра која се користила за вежбе загревања током хладних дана. Много година касније, током 18. и почетком 19. века научници и морепловци посматрају чигру као научну алатку. Енглески научник Серсон је 1740. године препоручио морепловцима да чигру користе као уређај као „вештачки хоризонт“ на бродовима. На жалост када је сам Серсон желео да демонстрира своју замисао, брод којим је пловио је потонуо. Године 1817. Немац Johann Bohnenberger конструише лопту која се обрће и назива је једноставно: „машина“. Данас се сматра да је то најстарији познат гироскоп. Walter R. Johnson 1832. године уместо лопте посматра обртање диска а француски математичар Pierre - Simon Laplace је, радећи на Политехничкој школи у Паризу, препоручује као наставно помагало што изазива пажњу Leon Foucault-а. Француски научник Leon Foucault је изводио експерименте у намери да демонстрира ротацију Земље. Точак, који се обртао великом брзином, био је везан за прстен и обртао се независно од њега. Оса точка задржавала је почетни правац па је овај научник тако доказао ротацију Земље и уређај је добио име гироскоп.

Педесет година касније (1898.) Аустријанац Ludwig Obry патентира уређај, мали точак од бронзе, за управљање торпедом који базира на гироскопском ефекту.



Слика 2.1 *Johann Bohnenberger-ова „машина“*



Слика 2.2 *Dumoulin-Froment-ова конструкција Leon Foucault-овог гироскопа из 1852.године, Музеј Националне Уметности, Париз*

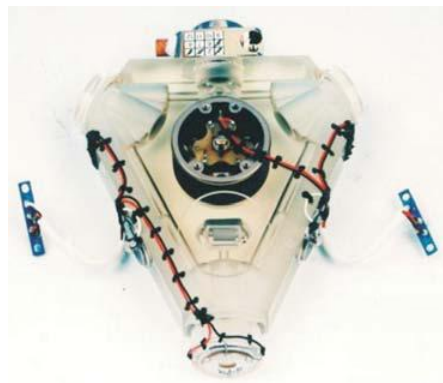
Са развојем електромотора ствара се могућност израде гирокомпаса. Први наутички гирокомпаси направљени су између 1905. и 1908. године. У том периоду мерило војне моћи била је премоћ на мору. Поред Немаца (Otto Schlick, Н. Anschütz-Kaempfe) и Американаца, на развоју индустрије гироскопа радили су и други народи. Први аутоматски пилот за летелице (хеликоптере) користећи гироскоп конструише Elmer A. Sperry 1909. године.. Компанија Sperry, основана 1910. године, се шири како би обезбедила авионске и бродске стабилизаторе а тренд тог развоја следе и компаније у другим државама. Једна америчка компанија из Indiane је 1917. године направила гироскопску играчку (jo - jo) са канапом за покретање и постољем. Ова играчка, која се и данас производи, се сматра класичном америчком играчком.

У првим деценијама 20. века многи проналазачи су покушавали да искористе гироскоп као основу за навигационе системе како би се избегло дотадашње одређивање положаја на бази положаја звезда на небу. Касније је овај принцип искоришћен у развоју унутрашњих система за навођење балистичких ракета.

Са појавом првих авиона ради се интензивно на усавршавању гироскопа тако да су већ почетком 1930. године први механички пнеуматски гироскопи примењивани при одређивању курса. Ови гироскопи су имали првобитни пнеуматски погон а затим електрични тако да се тај гироскоп звао електро-механички гироскоп. Због велике потрошње струје и негативног утицаја трења код ових гироскопа у периоду од 1950-1970. године користе се „пливајући“ електро-механички гироскопи (floated

гуго), код којег се ротор заједно са карданом урања у течност. Подморнице и стратешки авиони користе још тачније електромеханичке гироскопе са електростатичким лежајевима (ESG-electrostatic ally suspended gyro).

Средином шездесетих година прошлог века конструисани су ласерски гироскопи чији принцип рада базира на ефекту Sagnaca. Светлосни зрак који ствара ласер дели се на два дела. Један се креће у смеру казаљке на сату док се други креће у супротном смеру тако да време доласка светлосних зрака у детектор није исто па је временска разлика у доласку зрака пропорционална угаоној брзини. Названи су Ring Laser Gyro или скраћено RLG. Код таквих гироскопа не постоје механички делови који ротирају тако да RLG гироскопи троше мало енергије. Уређаји су термички и димензионално врло стабилни.



Слика 2.3 Ring Laser Gyro

Седамдесетих година прошлог века развијен је Fibber Optic Gyro – FOG гироскоп који је у основи врло сличан RLG гироскопу. Основна разлика између ове две врсте гироскопа је што је код RLG гироскопа примењен оптички резонатор, код којег се одређује промена фреквенције док се код FOG гироскопа за простирање светлости користе фибер-оптичка влакна.



Слика 2.4 Fibber Optic Gyro

Данас се моћни гироскопски уређаји и прибори користе за аутоматско управљање кретањем авиона, пројектила, бродова, торпеда и др. а гироскопи су основни елемент ових уређаја. На принципу гироскопа заснована је конструкција бројних уређаја у војној индустрији као и у индустрији мобилне телефоније на пример.

У једној епизоди Симпсонових (The Simpsons) ефекат пијанства осетио је Барт са неколико својих другова тако што је убачен у гироскоп док у епизоди South Park-a, Mr. Garrison конструише возило на бази гироскопа.



Слика 2.5 *Model number: JG7044N Spinning Mass Vertical Gyroscope из 1950's*

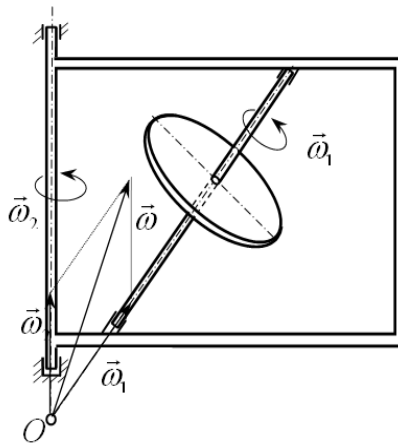
Гироскопи у општем случају изводе обртање око непомичне тачке, сферно кретање, које се може описати једначинама динамике крутог тела које се могу написати применом теореме о промени момента количине кретања за непокретну тачку око које тело изводи ротацију, Лагранжевим једначинама II врсте и сл.

3.0 Динамика гироскопа

3.1 Ротација крутог тела око две осе које се секу

3.1.1 Кинематика крутог тела које се обрће око две осе које се секу

Теоријски гироскоп је хомогено обртно тело које се обрће око непомичне тачке. При таквом кретању свака тачка тела се креће по некој путањи која лежи на сфери чији је полупречник једнак растојању посматране тачке од непомичне тачке. Зато се овакво кретање назива и сферним кретањем [5].

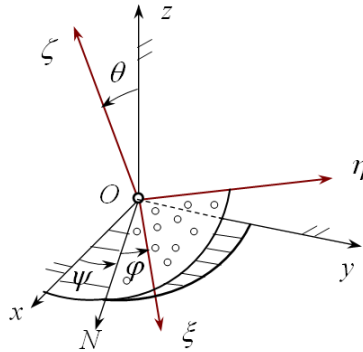


Слика 3.1 Слагање обртања око оса које се секу

За дефинисање положаја тела које се обрће око непомичне тачке потребна су три параметра и то су, обзиром на карактер кретања тела, три угла. Такав систем има три степена слободу кретања, па је потребно користити три независне, тј. три генерализане координате. Као генерализане координате се могу узети три угла, у литератури позната као Euler-ови углови.

Три Euler-ова угла ψ , θ и φ којима као генерализаним независним координатама дефинишемо обртање крутог тела око непомичне тачке су три угла ротације око једне непокретне осе и две покретне осе (Слика 3.2) и то су:

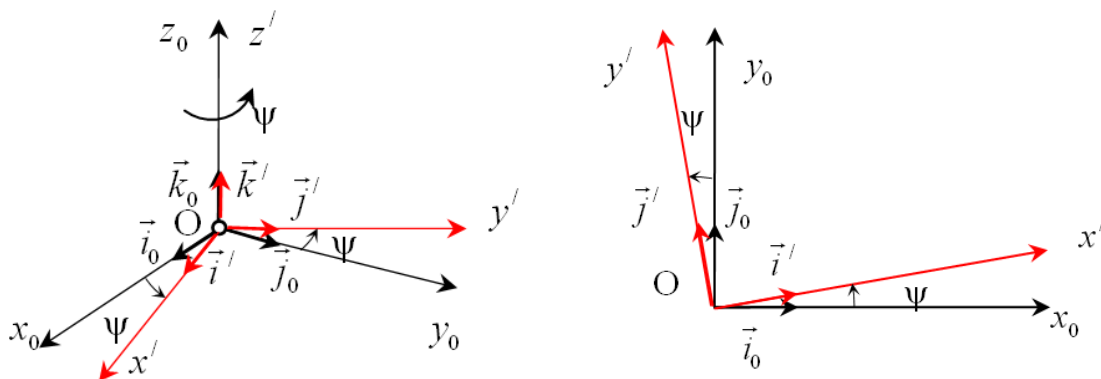
- ψ – угао прецесије (угао скретања, енгл. *roll*) – угао обртања око непокретне осе Oz , која је оса прецесије;
- θ – угао нутације (угао пропињања, енгл. *pitch*) – угао обртања око чворне осе управне на осу Oz прецесије;
- φ – угао сопствене ротације (угао ваљања, енгл. *yaw*) – угао обртања око сопствене осе ротације крутог тела која са осом прецесије Oz заклапа угао нутације θ .



Слика 3.2 Ojler-ови углови: ψ – угао прецесије, θ – угао нутације и φ – угао сопствене ротације

Посматрањем сваког обртања понаособ можемо да одредимо везу угаоних брзина у непокретном и у покретном координатном систему.

Посматрајмо прво обртање за угао ψ (угао скретања) око осе z_0 угаоном брзином $\vec{\omega}_\psi = \dot{\psi} \cdot \vec{k}_0$ што је приказано на Слици 3.3.



Слика 3.3 Обртање око осе z_0 за угао ψ

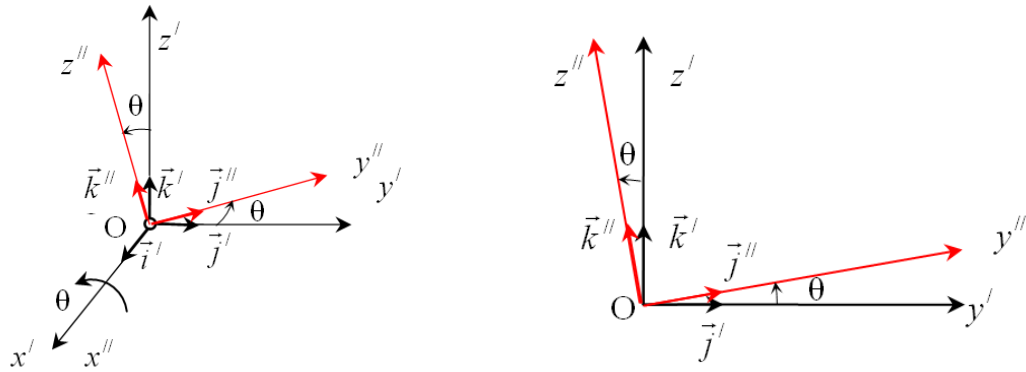
Веза између јединичних вектора покретног и непокретног координатног система сагласно слици, може да се напише у матричном облику на следећи начин:

$$\begin{bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Везу између координатних система, при обртању под углом φ представља матрица трансформације облика:

$$R(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Обртање за угао θ (угао нутације) око осе x' по [10], Слика 3.4.



Слика 3.4 Обртање око осе x' за угао θ

Друго обртање око осе x' угаоном брзином $\vec{\omega}_\theta = \dot{\theta} \cdot \vec{i}'$ приказано је на Слици 3.4.

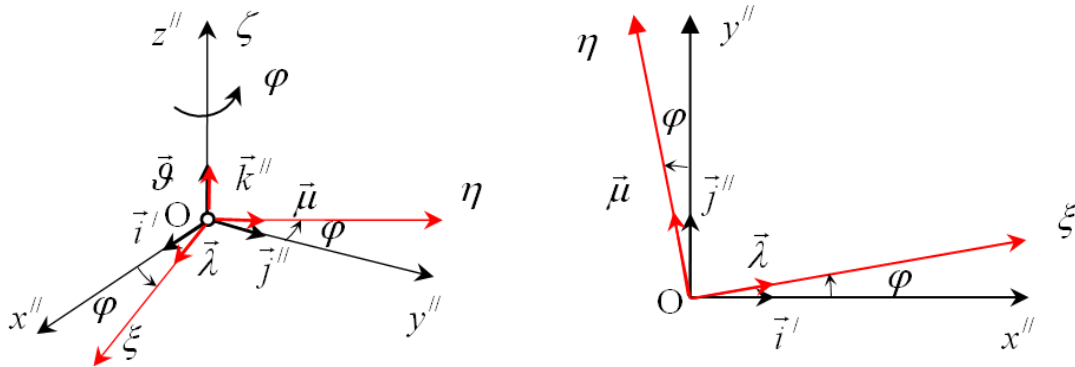
Веза између јединичних вектора новог и старог координатног система на основу слике може да се напише у матричном облику:

$$\begin{bmatrix} \vec{i}'' \\ \vec{j}'' \\ \vec{k}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Везу између координатних система, при обртању под углом θ представља матрица трансформације облика:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Обртање око осе z'' за угао φ (угао сопствене ротације), угаоном брзином $\vec{\omega}_\varphi = \dot{\varphi} \cdot \vec{k}''$, представљено је на Слици 3.5



Слика 3.5 Обртање око осе z'' за угао φ

Веза између јединичних вектора новог и старог координатног система на основу слике може да се напише у матричном облику:

$$\begin{bmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \\ \vec{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i}'' \\ \vec{j}'' \\ \vec{k}'' \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Матрица трансформације нам даје везу између координатних система, при обртању за угао φ и има облик:

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Потпуна трансформација, која узима у обзир све три ротације истовремено, добија се као производ три матрице и зове се матрица ротације и може се представити у следећем облику:

$${}_0R^1 = R(\psi)R(\theta)R(\varphi) \quad (3.7)$$

Вектор положаја $\vec{r}$ у непокретном (x_0, y_0, z_0) координатном систему и вектор положаја $\vec{r}'$ у покретном (ξ, η, ζ) координатном систему везани су релацијом:

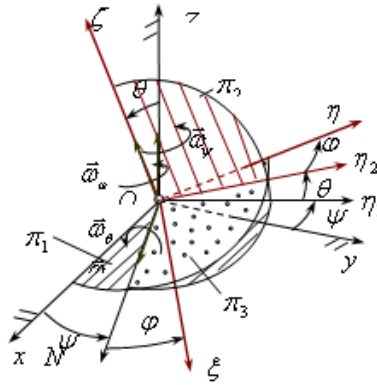
$$\vec{r} = R\vec{r}'.$$

Тренутна угаона брзина тела које се обрће око непомичне тачке одређена је векторским збиром компонентних угаоних брзина, тј.:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\varphi = \dot{\psi} \cdot \vec{k}_0 + \dot{\theta} \cdot \vec{i}' + \dot{\varphi} \cdot \vec{k}'', \quad (3.8)$$

где су:

- $\dot{\psi}$ - угаона брзина прецесије (угаона брзина скретања, енгл. *roll*)
- $\dot{\theta}$ - угаона брзина нутације (угаона брзина пропињања, енгл. *pitch*)
- $\dot{\varphi}$ - угаона брзина сопствене ротације (угаона брзина ваљања, енгл. *yaw*)



Слика 3.6 Компоненте угаоне брзине тела које се обрће око непомичне тачке

Пројекције вектора тренутне угаоне брзине на осе непокретног координатног система (x_0, y_0, z_0) се одређују помоћу једначина трансформације у следећем облику:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \vec{\omega} \cdot \vec{i}_0 = (\dot{\psi} \vec{k}_0 + \dot{\theta} \vec{i}' + \dot{\phi} \vec{k}'') \cdot \vec{i}_0 \\
\omega_y &= \vec{\omega} \cdot \vec{j}_0 = (\dot{\psi} \vec{k}_0 + \dot{\theta} \vec{i}' + \dot{\phi} \vec{k}'') \cdot \vec{j}_0 \\
\omega_z &= \vec{\omega} \cdot \vec{k}_0 = (\dot{\psi} \vec{k}_0 + \dot{\theta} \vec{i}' + \dot{\phi} \vec{k}'') \cdot \vec{k}_0
\end{aligned} \tag{3.9a}$$

Уврштавајући одговарајуће једначине трансформације, изрази у коначној форми су:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\
\omega_y &= -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi, \\
\omega_z &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Пројекције вектора угаоне брзине на осе покретног координатног система (ξ, η, ζ) се одређују помоћу једначина трансформације у следећем облику:

$$\begin{aligned}
\omega_\xi &= \vec{\omega} \cdot \vec{\lambda} = (\dot{\psi} \vec{k}_0 + \dot{\theta} \vec{i}' + \dot{\phi} \vec{k}'') \cdot \vec{\lambda} \\
\omega_\eta &= \vec{\omega} \cdot \vec{\mu} = (\dot{\psi} \vec{k}_0 + \dot{\theta} \vec{i}' + \dot{\phi} \vec{k}'') \cdot \vec{\mu} \\
\omega_\zeta &= \vec{\omega} \cdot \vec{\nu} = (\dot{\psi} \vec{k}_0 + \dot{\theta} \vec{i}' + \dot{\phi} \vec{k}'') \cdot \vec{\nu}
\end{aligned} \tag{3.10a}$$

Уврштавајући одговарајуће једначине трансформације, изрази у коначној форми су:

$$\begin{aligned}
\omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\
\omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\
\omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Пројекције угаоне брзине на координатне осе називају се кинематичким једначинама Ојлера [7].

3.1.2 Динамика крутог тела које се обрће око две осе које се секу

Да би се одредили закони кретања крутог тела треба наћи везу између пројекција угаоне брзине тела којима се дефинише кретање крутог тела и спољашњих сила које дејствујући на тело изазивају кретање. До једначина кретања при обртању крутог тела око непомичне тачке најчешће се долази применом теореме о промени момента количине кретања.

Момент количине кретања (замах) за непомићну тачку O се дефинише као вектор:

$$\vec{L}_O = \iiint_m [\vec{r}, \vec{v}] dm = \iiint_m [\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] dm, \quad dm = \rho dV \quad (3.11)$$

и може да се изрази у зависности од тензора инерције, тј.

$$\vec{L}_O = \vec{J}^{(O)} \vec{\omega} \quad (3.12)$$

где је тензор инерције тензор чије су компоненте моменти инерције:

$$\vec{J}^{(O)} = \begin{pmatrix} \vec{J}_{\xi}^{(O)} \\ \vec{J}_{\eta}^{(O)} \\ \vec{J}_{\zeta}^{(O)} \end{pmatrix} = \left(\left\{ \vec{J}_{\xi}^{(O)} \right\} \quad \left\{ \vec{J}_{\eta}^{(O)} \right\} \quad \left\{ \vec{J}_{\zeta}^{(O)} \right\} \right) = \begin{pmatrix} J_{\xi}^{(O)} & -J_{\xi\eta}^{(O)} & -J_{\xi\zeta}^{(O)} \\ -J_{\eta\xi}^{(O)} & J_{\eta}^{(O)} & -J_{\eta\zeta}^{(O)} \\ -J_{\zeta\xi}^{(O)} & -J_{\zeta\eta}^{(O)} & J_{\zeta}^{(O)} \end{pmatrix}$$

Пројекције вектора момента количине кретања на осе покретног координатног система су:

$$\begin{aligned} L_{\xi} &= J_{\xi} \omega_{\xi} - J_{\xi\eta} \omega_{\eta} - J_{\xi\zeta} \omega_{\zeta}, \\ L_{\eta} &= -J_{\xi\eta} \omega_{\xi} + J_{\eta} \omega_{\eta} - J_{\eta\zeta} \omega_{\zeta}, \\ L_{\zeta} &= -J_{\xi\zeta} \omega_{\xi} - J_{\zeta\eta} \omega_{\eta} + J_{\zeta} \omega_{\zeta}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ако су покретне осе главне осе инерције, центрифугални моменти инерције су једнаки нули, па су пројекције вектора момента количине кретања

$$\begin{aligned} L_{\xi} &= J_{\xi} \omega_{\xi}, \\ L_{\eta} &= J_{\eta} \omega_{\eta}, \\ L_{\zeta} &= J_{\zeta} \omega_{\zeta}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Теорема о промени момента количине кретања гласи:

Извод по времену момента количине кретања за непомићну тачку O једнак је моменту спољашњих сила за исту тачку

што се математички може изразити на следећи начин:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{L}_O + [\vec{\omega}, \vec{L}_O] = \vec{M}_O \quad (3.15)$$

Ова векторска једначина представља Euler-ову једначину Динамике крутог тела око непомичне тачке. Једначина садржи три скаларне диференцијалне једначине како их је Euler поставио. Оне представљају систем од три спрегнуте нелинеарне диференцијалне једначине по непознатим пројекцијама угаоне брзине тела на осе координатног система:

$$\begin{aligned}\frac{dL_{\xi}}{dt} - (L_{\eta}\omega_{\zeta} - L_{\zeta}\omega_{\eta}) &= M_{\xi}, \\ \frac{dL_{\eta}}{dt} - (L_{\zeta}\omega_{\xi} - L_{\xi}\omega_{\zeta}) &= M_{\eta}, \\ \frac{dL_{\zeta}}{dt} - (L_{\xi}\omega_{\eta} - L_{\eta}\omega_{\xi}) &= M_{\zeta}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

где су $(M_{\xi}, M_{\eta}, M_{\zeta})$ пројекције главног момента спољашњих сила на осе покретног координатног система.

Ако су покретне осе главне осе инерције, заменом (3.14) у (3.16) се добија

$$\begin{aligned}J_{\xi}\frac{d\omega_{\xi}}{dt} - (J_{\eta} - J_{\zeta})\omega_{\eta}\omega_{\zeta} &= M_{\xi}, \\ J_{\eta}\frac{d\omega_{\eta}}{dt} - (J_{\zeta} - J_{\xi})\omega_{\xi}\omega_{\zeta} &= M_{\eta}, \\ J_{\zeta}\frac{d\omega_{\zeta}}{dt} - (J_{\xi} - J_{\eta})\omega_{\xi}\omega_{\eta} &= M_{\zeta}\end{aligned}\tag{3.17}$$

У свим једначинама система се истовремено јављају све три непознате које фигуришу и у облику производа што проблем чини веома сложеним за решавање. Ако се из једначина ипак одреде пројекције угаоне брзине на осе изабраног координатног система, треба узети у обзир кинематичке једначине (3.10) које су нелинеарне и спрегнуте тако да је веома тешко одредити углове Ојлера а самим тим и једначине кретања крутог тела. Због наведених математичких тешкоћа је само неколико специјалних проблема кретања решено до краја.

Постоје три класична решења ових једначина и то за посебне случајеве обртања при чему су у сва три случаја уведени услови којима се општи случај динамике крутог тела око непомичне тачке своди на посебан и ограничен на постављање непомичне тачке у центру масе тела, или је непомична тачка на једној главној централној оси или је релација главних аксијалних момената инерције масе тела у одређеном односу.

3.1.3 Euler-ово (Ојлерово) решење

За случај када на тело не дејствују спољашње силе или су силе такве да главни вектор сила пролази кроз непомићну тачку, Euler је 1758. године извео једначине динамике крутог тела око непомићне тачке и дао њихово решење. Године 1851. Poisson је дао геометријску представу овог решења тако да је ово решење познато као Euler-Poisson-ово решење.

Круто тело је симетрично у односу на O_ζ осу, тј. $J_\xi = J_\eta$, па су Euler-ове једначине

$$\begin{aligned} J_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} - (J_\xi - J_\zeta) \omega_\eta \omega_\zeta &= 0, \\ J_\xi \frac{d\omega_\eta}{dt} - (J_\zeta - J_\xi) \omega_\xi \omega_\zeta &= 0, \\ J_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из треће једначине се добија један интеграл кретања

$$\omega_\zeta = c = \text{const}. \quad (3.19)$$

док се диференцирањем прве једначине и елиминисањем угаоне брзине ω_η из друге једначине добија

$$\frac{d^2\omega_\xi}{dt^2} + \frac{(J_\xi - J_\zeta)(J_\xi - J_\zeta)}{J_\xi J_\xi} c^2 \omega_\xi = 0, \quad (3.20)$$

тј.

$$\frac{d^2\omega_\xi}{dt^2} + k^2 \omega_\xi = 0, \quad k = \frac{(J_\xi - J_\zeta)}{J_\xi} c. \quad (3.21)$$

Један партикуларни интеграл ове једначине је

$$\omega_\xi = a \cos kt, \quad (3.22)$$

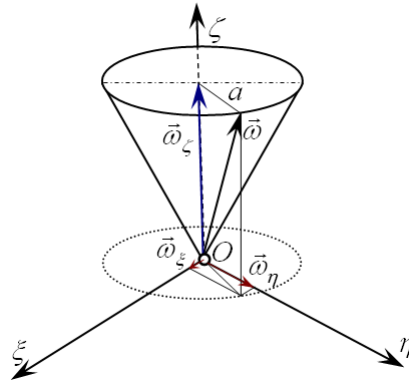
а из прве једначине се одређује

$$\omega_\eta = a \cos kt, \quad \omega_\eta = \frac{J_\xi}{(J_\xi - J_\zeta)c} \frac{d\omega_\xi}{dt} = -\frac{1}{k}(-ak \sin kt), \quad (3.23)$$

тј,

$$\omega_\eta = a \sin kt. \quad (3.24)$$

Добијени резултати показују да је пројекција угаоне брзине на осу O_ζ константна док пројекција на раван (ξ, η) описује кружницу полупречника a . Угаона брзина равномерно ротира око осе симетрије крутог тела. Такво кретање се назива регуларна прецесија.



Слика 3.7 Еулер-ово (Ојлерово) решење - регуларна прецесија

3.1.4 Lagrange-ово (Лагранжово) решење

Lagrange-ово решење је дато за случај када се тешко тело обрће под утицајем сопствене тежине. Непомична тачка око које се тело обрће налази се на геометријској оси обртног елипсоида инерције тела.

Lagrange-ово решење проистиче из претпоставки да се тешко тело обрће под утицајем сопствене силе тежине при чему се средиште инерције тела (тежиште) налази на геометријској оси обртног елипсоида инерције за непомичну тачку.

Непокретни координатни систем је систем O_{xyz} где је вертикална оса оса O_z . Покретни координатни систем $O_{\xi\eta\zeta}$ одабран је тако да се једна оса тог система поклапа са геометријском осом обртног елипсоида инерције (оса O_ζ).

Обртање крутог тела око непомичне тачке има три степена слободe па се три једначине којима се одређују закони кретања овог тела могу добити применом закона о одржању механичке енергије кретања тела и применом теореме о промени момента количине кретања за непомичну тачку.

Како је $J_1 = J_2$ то је кинетичка енергија система

$$E_K = \frac{1}{2} J_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 \quad (3.25)$$

Осе O_z и O_ζ граде угао θ па је положај тежишта одређен координатом $z_C = s \cos \theta$ где је s растојање тежишта од непомичне тачке. Потенцијална енергија система је

$$E_p = mgs \cos \theta \quad (3.26)$$

Како је укупна енергија система константна следи једнакост:

$$\frac{1}{2} J_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + mgs \cos \theta = h = \text{const.} \quad (3.27)$$

Момент силе тежине за осу O_z једнак је нули, јер је сила паралелна оси, тако да је $L_z = \text{const.}$, па се у овом случају може писати:

$$L_z = J_1 (\omega_1 \sin \theta \sin \varphi + \omega_2 \sin \theta \cos \varphi) + J_3 \omega_3 \cos \theta = \text{const.} \quad (3.28)$$

Како је $J_1 = J_2$ а $M_\zeta = M_3 = 0$, то је

$$J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 = 0 \quad (3.29)$$

одакле следи да је компонента угаоне брзине $\omega_3 = \text{const.}$ Када се у ове једначине уврсте једначине кинематике Euler-а, добија се диференцијална једначина чијим се решавањем одређује угао нутације θ као елиптичка функција времена t .

За случај кретања тела на које дејствују спољашње силе такве да њихова резултанта пролази кроз непомичну тачку, главни момент је једнак нули, $\vec{M} = 0$, па је момент количине кретања константан. Такође је и $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{const.}$, па је интензитет угаоне брзине константан, $\omega = \text{const.}$

Из једначина добијених пројектовањем момента количине кретања на главне осе следи да је угао нутације константан ($\theta = \theta_0 = \text{const.}$). Из кинематичких једначина

Euler-а се тада одређују Euler-ови углови у зависности од времена као: $\psi = \Omega t + \psi_0$; $\varphi = \omega_s t + \varphi_0$, где су ψ_0 и φ_0 интеграционе константе. Како они линеарно зависе од времена, то је кретање регуларна прецесија. Константа Ω је брзина прецесије док је ω_s сопствена угаона брзина обртања тела око фигурне осе [7].

Проучавање кретања у случају када постоје моменти спољашњих сила је веома сложено јер захтева решавање система нелинеарних и спрегнутих диференцијалних једначина. Често се врше одређене апроксимације које олакшавају проучавања при чему физикалност проблема остаје очувана. Тако на пример, за симетрично тело које се обрће великом угаоном брзином око своје осе симетрије, може да се, са довољно великом тачношћу, момент количине кретања сматрати вектором који има правац осе симетрије тела и интензитет једнак производу интензитета сопствене угаоне брзине и момента инерције за сопствену осу симетрије.

3.1.5 Решење Соње Ковалевски

Решење Соње Ковалевски дато је за основну претпоставку да је елипсоид инерције обртни са условом $J_1 = J_2 = 2J_3$, при чему се непомична тачка налази на главној осе инерције тела. У свом раду „О ротацији крутог тела око фиксиране тачке“, Софија Ковалевска је развила теорију о ротацији несиметричног крутог тела код кога се центар масе не налази на осе ротације. Нова алгебарска једначина четвртог реда, коју је увела, омогућила је да се квадратуром дође до решења система од шест диференцијалних једначина. У каснијим радовима показала је да је решење могуће и у случајевима када је $J_3 = J_1/2n$, $n > 2$. Софија Ковалевски је разматрала време као комплексно променљиву што ју је довело до до сада најопштијег решења обртања око непомичне тачке.

4.0 Обртање уравнотеженог тела

4.1 Ојлерове једначине у случају обртања уравнотеженог симетричног тела

Када се уравнотежено симетрично тело обрће око непомицне тачке која је истовремено његово тежиште у одсуству спољашњих сила момент количине кретања је константан вектор, тј.

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{const} , \quad (4.1)$$

За описивање кретања оваквог тела се могу применити Ојлерове динамичке једначине (3.18). Пројекција угаоне брзине на осу O_ζ је константна као и пројекција на раван (ξ, η) која, како је већ речено, описује кружницу полупречника a . Интензитет угаоне брзине је константан.

$$\omega = \sqrt{(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + \omega_\zeta^2} = \sqrt{a^2 + c^2} = const , \quad (4.2)$$

Обзиром да је пројекција угаоне брзине на осу O_ζ константна и да је интензитет угаоне брзине константан, то је угао између вектора угаоне брзине и осе симетрије тела, угао β , такође константан. Угао између вектора угаоне брзине $\vec{\omega}$ и вектора момента количине кретања $\vec{L}_O$ је такође константан што се показује полазећи од израза за кинетичку енергију (3.25) и израза за момент количине кретања при чему се може успоставити веза

$$2E_K = (\vec{L}_O, \vec{\omega}) , \quad (4.3)$$

односно

$$2E_K = L_O \omega \cos \alpha , \quad (4.4)$$

тј.

$$\cos \alpha = \frac{2E_K}{L_O \omega} . \quad (4.5)$$

Угао α је оштар угао.

Угао нутације θ се може одредити преко пројекције вектора момента количине кретања на осу O_ζ . Обзиром да је пројекција вектора момента количине кретања на осу O_ζ $L_\zeta = L_O \cos \theta$ као и да је $L_\zeta = J_\zeta \omega_\zeta$, то је угао нутације θ одређен изразом

$$\theta = \arccos \frac{J_\zeta \omega_\zeta}{L_O} , \quad (4.6)$$

такође константан.

Угаона брзина прецесије се може одредити из прве две једначине (3.10)

$$\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 = \omega_p^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta = a^2 , \quad (4.7)$$

Пошто је $\dot{\theta} = 0$, следи да је угаона брзине прецесије такође константна

$$\dot{\psi} = \frac{a}{\sin \theta} . \quad (4.8)$$

Из треће једначине (3.10) следи да је

$$\omega_\zeta = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta . \quad (4.9)$$

па је и угаона брзина сопствене ротације $\dot{\varphi}$ такође константна

$$\dot{\varphi} = \omega_{\zeta} - \operatorname{actg} \theta . \quad (4.10)$$

Euler-ови углови у функцији времена су

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 , \\ \psi &= \frac{a}{\sin \theta_0} t + \psi_0 , \\ \varphi &= (c - \operatorname{actg} \theta) t + \varphi_0 . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ове једначине описују регуларну прецесију. Котрљање кружног конуса по непокретном кружном конусу је пример регуларне прецесије пошто се у сваком тренутку конуси додирују дуж заједничке изводнице у правцу које је вектор угаоне брзине [9].

4.2 Стабилност обртања уравнотеженог симетричног тела

Када је оса симетрије тела вертикална а угаона брзина око те осе велика, момент количине кретања је

$$\vec{L}_O = J_{\xi} \vec{\omega} = J_{\xi} \omega_{\xi} \vec{v} , \quad (4.12)$$

јер су пројекције угаоне брзине на осе ξ и η једнаке нули. Пошто су осе ξ, η и ζ главне осе инерције, то је уобичајено да се означавају бројевима (1), (2) и (3), док су моменти инерције у односу на те осе $J_{\xi} = J_1$, $J_{\eta} = J_2$ и $J_{\zeta} = J_3$. Како је тело симетрично, то је $J_{\xi} = J_{\eta} = J_1$. Момент спољашњих сила за непомићну тачку O једнак је нули па се такво кретање назива инерцијалним и описано је једначином (2.1). Ова једначина изражава једну од основних особина уравнотеженог симетричног тела а то је да оса обртног тела одржава сталан правац у простору.

Ако се овакво кретање поремети из било ког разлога (на пример услед удара може да се промени правац осе обртања), угаона брзина која је пре поремећаја била

$$\vec{\omega} = \omega_{\xi} \vec{\nu} = \omega_3 \vec{\nu} , \quad (4.13)$$

ће да се незнатно промени и биће

$$\vec{\omega} = \omega_3 \vec{\nu} + \vec{\omega}^*(t) . \quad (4.14)$$

Вектор поремећаја угаоне брзине одређен је изразом

$$\vec{\omega}^*(t) = \omega_1^*(t) \vec{\lambda} + \omega_2^*(t) \vec{\mu} + \omega_3^*(t) \vec{\nu} . \quad (4.15)$$

Све три компоненте поремећаја $\omega_1^*(t)$, $\omega_2^*(t)$ и $\omega_3^*(t)$ су мале у поређењу са непоремећеним кретањем $\omega_3(t)$.

Ојлерове динамичке једначине су сада

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_1^*}{dt} - (J_1 - J_3) \omega_2^* (\omega_3 + \omega_3^*) &= 0 , \\ J_1 \frac{d\omega_2^*}{dt} - (J_3 - J_1) \omega_1^* (\omega_3 + \omega_3^*) &= 0 , \\ J_3 \frac{d\omega_3^*}{dt} &= 0 . \end{aligned} \quad (4.16)$$

После множења и занемаривањем чланова другог реда, добија се

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1^*}{dt} + \frac{(J_3 - J_1)}{J_1} \omega_3 \omega_2^* &= 0 , \\ \frac{d\omega_2^*}{dt} - \frac{(J_3 - J_1)}{J_1} \omega_3 \omega_1^* &= 0 , \\ \frac{d\omega_3^*}{dt} &= 0 . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Из треће једначине следи да је $\omega_3^* = \text{const} = 0$, што значи да нема поремећаја у интензитету угаоне брзине ω_3 .

Трансформацијом прве две једначине добија се диференцијална једначина

$$\frac{d^2 \omega_1^*}{dt^2} + \frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_3 \frac{d\omega_2^*}{dt} = \frac{d^2 \omega_1^*}{dt^2} + \left(\frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_3 \right)^2 \omega_1^* = 0 , \quad (4.18)$$

која се може написати у облику

$$\frac{d^2 \omega_1^*}{dt^2} + k^2 \omega_1^* = 0 , \quad (4.19)$$

и која је позната као диференцијална једначина поремећеног кретања чије је решење дато у облику

$$\omega_1^* = a \sin(kt + b) , \quad (4.20)$$

где су a и b константе које се одређују из почетних услова кретања.

Такође се одређује да је

$$\omega_2^* = -ak \cos(kt + b) . \quad (4.21)$$

Како су поремећаји у почетном тренутку мали, то су и константе a и b величине малог реда па се може рећи да је положај осе обртања стабилан положај будући да оса описује конус врло малог отвора око почетног правца.

Ова особина да уравнотежено тело које се обрће око осе симетрије задржава правац ове осе у простору, често се користи у примени (стабилизација торпеда, стабилизација осе артиљеријског оруђа).

4.3 Стабилност обртања уравнотеженог несиметричног тела

Ојлерове динамичке једначине у случају када је обртно тело несиметрично се могу написати у облику

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_1}{dt} - (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 &= 0, \\ J_2 \frac{d\omega_2}{dt} - (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3 &= 0, \\ J_3 \frac{d\omega_3}{dt} - (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

У почетном тренутку времена $t = 0$ тело се обрћало око главне осе (3). Тада је

$$\omega_1(t_0) = \omega_2(t_0) = 0, \quad (4.23)$$

док је

$$\omega_3(t) = \omega_3(t_0) = \text{const.}, \quad (4.24)$$

Вектор угаоне брзине је константан током читавог кретања. Овакво кретање се назива стационарно обрћање. Да би обрћање било стационарно, довољно је да буде инерцијално и да се врши дуж једне од главних оса инерције. Истовремено ово је и потребан услов, тј. ако у почетном тренутку угаона брзина није била усмерена дуж главне осе инерције, кретање није стационарно. Тада угаона брзина није константна и разликује се од почетне вредности.

Као и при стационарном обрћању симетричног тела тако и при обрћању несиметричног тела важно је испитати стабилност кретања.

Нека се тело обрће око главне осе инерције (3). Тада је угаона брзина непоремећеног кретања

$$\vec{\omega} = \omega_3 \vec{V} = \omega_3 \vec{V}. \quad (4.25)$$

Услед поремећаја у почетном тренутку времена угаона брзина ће да се промени за мали поремећај $\vec{\omega}^*(t)$ и биће

$$\vec{\omega} = \omega_3 \vec{V} + \vec{\omega}^*(t). \quad (4.26)$$

И у овом случају су све три компоненте поремећаја $\omega_1^*(t)$, $\omega_2^*(t)$ и $\omega_3^*(t)$ мале у поређењу са непоремећеним кретањем $\omega_3(t)$.

Ојлерове динамичке једначине поремећеног кретања у овом случају после занемаривања чланова другог реда се могу написати у облику

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_1^*}{dt} - (J_2 - J_3)\omega_2^*\omega_3 &= 0, \\ J_2 \frac{d\omega_2^*}{dt} - (J_3 - J_1)\omega_1^*\omega_3 &= 0, \\ J_3 \frac{d\omega_3^*}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Из треће једначине следи да је $\omega_3^* = \text{const} = 0$, што значи да нема поремећаја у интензитету угаоне брзине ω_3 .

Диференцијалне једначине поремећеног кретања су

$$\begin{aligned} \frac{d^2\omega_1^*}{dt^2} - \frac{(J_2 - J_3)(J_3 - J_1)}{J_2 J_1} \omega_1^* \omega_3 \omega_3 &= 0, \\ \frac{d^2\omega_2^*}{dt^2} - \frac{(J_2 - J_3)(J_3 - J_1)}{J_1 J_2} \omega_2^* \omega_3 \omega_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Обе једначине су истог типа

$$\frac{d^2\omega^*}{dt^2} + \alpha\omega^* = 0, \quad (4.29)$$

где је

$$\alpha = \frac{(J_3 - J_2)(J_3 - J_1)}{J_1 J_2} \omega_3^2. \quad (4.30)$$

Решење диференцијалних једначина је

$$\omega^* = a \cos(\sqrt{\alpha}t + b) . \quad (4.31)$$

Константе a и b се одређују из почетних услова кретања.

Опште решење диференцијалних једначина (4.29) је облика (4.31) само ако је $\alpha > 0$ што је услов стабилности обртања уравнотеженог несиметричног тела.

Ова неједначина ће бити задовољена ако је $J_3 > J_1$ и $J_3 > J_2$ или $J_3 < J_1$ и $J_3 < J_2$. Када је момент инерције за главну осу инерције око које се тело обрће или највећи или најмањи од три постојећа, инерцијално обртање уравнотеженог крутог тела биће стабилно. У случају да се тело обрће око осе којој одговара средњи момент инерције J_2 , обртање би било нестабилно а произвољно мали поремећај изазвао би померање тренутне угаоне брзине у односу на почетну угаону брзину за неку коначну величину [9].

5.0 Приближна теорија гироскопских појава

5.1 Приближна теорија гироскопских појава

Диференцијалне једначине којима је описано обртање крутог тела око непомичне тачке су, као што се могло закључити, нелинеарне и спрегнуте по генералисаним координатама и изводима генералисаних координата. У ограниченом броју случајева и са одређеним претпоставкама те једначине се могу решити у затвореном облику. Извесне апроксимације које не утичу на физикалност олакшавају проучавања и дају довољно тачне резултате за велики број проблема који се јављају у пракси.

Основна претпоставка приближне теорије гироскопа је да је угаона брзина симетричног гироскопа око осе симетрије веома велика па се може сматрати да вектор момента количине кретања има правац осе симетрије, тј. да је

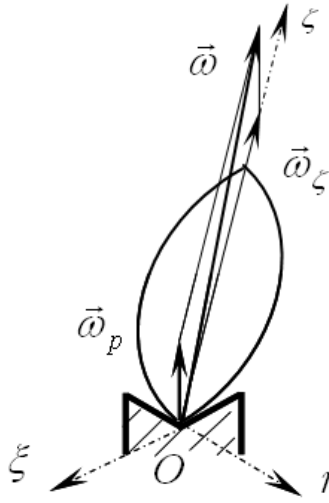
$$\vec{L}_O = J_\zeta \vec{\omega} . \quad (5.1)$$

Када се телу саопшти веома велика угаона брзина око сопствене осе симетрије, тело изводи сложено кретање: обртање око сопствене осе симетрије великом угаоном брзином ω_ζ као и обртање око осе прецесије угаоном брзином $\vec{\omega}_p$. При томе је

$$\omega_\zeta \gg \omega_p , \quad (5.2)$$

тако да је

$$\vec{\omega} = \omega_\zeta \vec{\lambda} + \omega_\eta \vec{\mu} + \omega_\zeta \vec{\nu} = \omega_\zeta \vec{\lambda} + \omega_\zeta \vec{\nu} \approx \omega_\zeta \vec{\nu} . \quad (5.3)$$



Слика 5.1 Тело при сферном кретању

5.2 Карактеристике гироскопа са три степена слободе

Гироскоп са три степена слободе кретања има особину да се противи промени правца своје осе у простору.

Када на гироскоп дејствује сила $\vec{F}$, применом теореме о промени момента количине кретања добија се

$$\frac{dL_O}{dt} = J_x \frac{d\omega}{dt} = F d \quad (5.4)$$

па се интеграцијом одређује да је

$$\omega = \frac{F d t}{J_x} + \omega_0 \quad (5.5)$$

што значи да гироскоп врши равномерно убрзано обртање. У тренутку t_1 када престане да дејствује сила угаона брзина је

$$\omega_1 = \frac{F d t_1}{J_x} \quad (5.6)$$

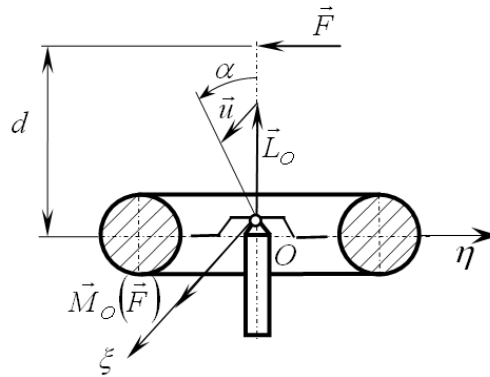
Ако се гироскоп обрће око своје осе материјалне симетрије веома великом угаоном брзином, тада је

$$\vec{L}_O = J_\zeta \omega_\zeta \vec{v}. \quad (5.7)$$

Применом теореме о промени момента количине кретања добија се

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = J_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} \vec{v} = \vec{M}_O(\vec{F}). \quad (5.8)$$

По Резаловој теореме је брзина краја вектора момента количине кретања, $\vec{u}$, једнака моменту спољашњих сила које дејствују на тело. Како је момент количине кретања у правцу осе симетрије тела, то ће се исти, а са њим и оса тела, померати у правцу момента силе за непомићну тачку O а не у правцу силе под чијим дејством долази до померања.



Слика 5.2 Илустрација Резалове теореме

Оса гироскопа се помера у равни која је нормална на раван дејства силе. За неки мали интервал времена τ тачка на оси гироскопа ће да се помери у правцу осе ξ за

$$\Delta\xi = u\tau = Fd\tau. \quad (5.9)$$

Истовремено се оса гироскопа заокреће у вертикалној равни која садржи осу ξ за мали угао α , тако да је

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha = \frac{\Delta\xi}{L_O} = \frac{Fd\tau}{J_\zeta \omega_\zeta}. \quad (5.10)$$

Очигледно је да оса гироскопа престаје да се обрће чим спољашњи момент престаје да дејствује. Такође, када је време дејства силе веома кратко, скретање осе гироскопа се може занемарити. Оса уравнотеженог симетричног гироскопа поседује висок степен стабилности. Угаона брзина којом се обрће око осе одређена је изразом

$$\dot{\alpha} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\Delta \xi}{L_O} \right) = \frac{F d}{J_\zeta \omega_\zeta}. \quad (5.11)$$

Овим изразом дефинисана је угаона брзина прецесије, тј. она угаона брзина којом оса гироскопа ротира око осе која је паралелна линији дејства силе.

5.3 Регурална прецесија тешког симетричног гироскопа

Када гироскоп није уравнотежен, центар инерције се не поклапа са непомичним тачком (сл. 5.3). Оса симетрије заклапа са непомичним осом угао θ . Гироскоп се обрће веома великом угаоном брзином око осе симетрије тако да се сагласно приближној теорији гироскопа може писати да је промена момента количине кретања

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{v}_M = \vec{M}_O(\vec{F}). \quad (5.12)$$

где је сагласно Резаловој теореме $\vec{v}_M$ брзина краја M вектора момента количине кретања а $\vec{M}_O(\vec{F})$ момент спољашњих сила за непомичну тачку O . Како је момент спољашњих сила момент силе тежине интензитета

$$M_O(\vec{F}) = mg \overline{OC} \sin \theta, \quad (5.13)$$

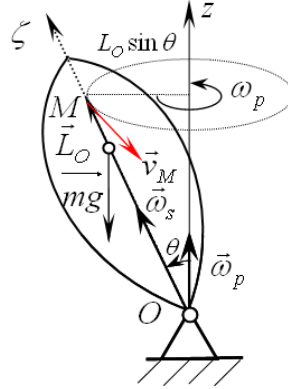
правца нормале на раван $MO\zeta$ и смера ка читаоцу, сагласно већ реченом сила тежине ће изазвати скретања гироскопа у правцу момента. Гироскоп врши прецесионо кретање око вертикалне осе z . Како момент константног интензитета, то је и брзина тачке M такође константног интензитета. Интензитет брзине тачке M је одређен изразом

$$v_M = L_O \sin \theta \omega_p = J_\zeta \omega_s \sin \theta \omega_p. \quad (5.14)$$

Угаона брзина прецесије гироскопа је

$$\omega_p = \frac{mg \overline{OC}}{J_\zeta \omega_s}. \quad (5.15)$$

Ова угаона брзина је мања ако је угаона брзина сопствене ротације већа и ако је момент инерције већи.



Слика 5.3 Неуравнотежен гироскоп који ротира под дејством силе тежје

Угаона брзина сопствене ротације и угаона брзина прецесије су константних интензитета, па је и угао θ , угао нутације, константан [3].

5.4 Гироскопско клатно

Гироскопско клатно је гироскоп са три степена слободе чије је тежиште испод непомичне тачке О (сл. 5.4) који врши прецесионо кретање угаоном брзином (5.15). Период обртања осе симетрије око вертикалне осе z , период гироскопског клатна, је одређен изразом

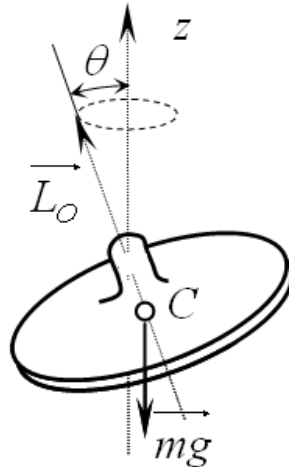
$$T = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi L_O}{mgOC}. \quad (5.16)$$

Период гироскопског клатна зависи од параметара гироскопа али не и од угла нутације.

Познато је да је период осциловања физичког клатна $T = 2\pi\sqrt{\ell_r/g}$, где је ℓ_r редукована дужина клатна. Ако се периоди осциловања гироскопског и физичког клатна поклапају, за гироскопско клатно се каже да је еквивалентно физичком клатну. Тада је редукована дужина физичког клатна одређена изразом

$$\ell_r = g \left(\frac{L_O}{mgOC} \right)^2. \quad (5.17)$$

Период гироскопског клатна може да буде веома велики. Угаона брзина гироскопа у том случају је велика, гироскоп се не би обртао око своје осе већ би осциловао као обично физичко клатно.



Слика 5.4 Гироскопско клатно

Гироскопско клатно је један од најважнијих прибора гироскопске навигације. Клатно служи за одређивање правца вертикале, што је веома важно у бродској и авио-навигацији.

У савременим навигационим уређајима период гироскопског клатна се изједначава са периодом математичког клатна дужине једнаке полупречнику Земље, тако да је $T = 2\pi\sqrt{R/g} = 84,4[\text{min}]$.

Развојем ваздухопловства развијали су се инструменти пред које су постављани нови захтеви за прецизност и отпорност на вибрације, убрзања, промене притиска и температуре. Преокрет у њиховом развоју настаје са применом гироскопских показивача. Специјално подешено гироскопско клатно користи се за одређивање вертикале. Када линија хоризонта није видљива, за одређивање вертикале користи се висак. Међутим, када се платформа креће, висак се не може користити. У таквим ситуацијама (авион, брод) да би се одредила географска ширина места где се објекат налази, неопходно је гироскопско клатно. Када се на пример, креће возило и када оно почне да мења брзину кретања услед преносне инерцијалне силе и Кориолисове инерцијалне силе долази до скретања осе гироскопског клатна и клатно почиње да врши прецесионо кретање. Како је редукована дужина гироскопског клатна веома велика, период осциловања клатна такође је велики. Ако је време убрзавања или успоравања возила кратко, угао скретања је веома мали што значи да краткотрајно убрзање не изазива приметно скретање гироскопског клатна. Због тога се гироскопско клатно велике редуковане дужине може примењивати као вештачка вертикала што се и чини у ваздухопловству.

6.0 Гироскоп са два степена слободе

6.1 Гироскопски момент

Основна карактеристика гироскопа са три степена слободе је стабилност. Гироскоп са два степена слободе нема могућност да се супротстави дејствујућим силама које теже да промене правац његове осе.

Кретање гироскопа је обично унапред познато а да би такво кретање било и остварено треба одредити одговарајуће моменте спољашњих сила.

Замајац у облику хомогеног диска (сл. 6.1) може да се обрће око хоризонталне осе BD која пролази кроз његово средиште великом угаоном брзином. Оса BD може да се обрће око вертикалне осе z_1 релативно малом угаоном брзином $\omega_p = \omega_2$.

Момент количине кретања, сагласно приближној теорији гироскопа, је у правцу осе симетрије BD а по интензитету је одређен изразом

$$L_O = J_z \omega_1. \quad (6.1)$$

са смером који има угаона брзина сопствене ротације $\vec{\omega}_1$. За познато кретање рама осе гироскопа брзина тачке A , краја вектора момента количине кретања $\vec{L}_O$, је

$$v_A = L_O \omega_p = J_z \omega_1 \omega_2. \quad (6.2)$$

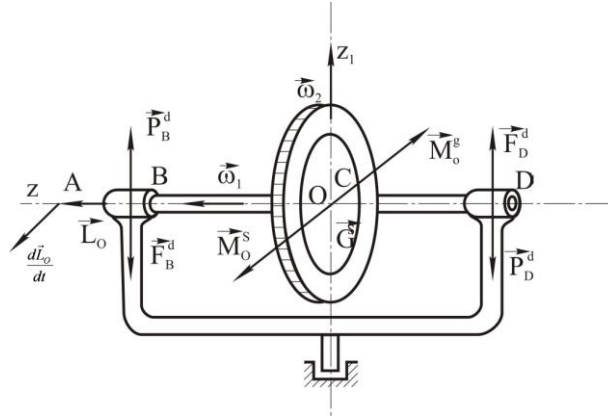
По Резаловој теореме је

$$\vec{v}_A = \vec{M}_O(\vec{F}_i). \quad (6.3)$$

Момент спољашњих сила који чине силе $\vec{F}_B$ и $\vec{F}_D$ којима лежишта B и D притискују осу је

$$M_O(\vec{F}_i) = J_z \omega_1 \omega_2. \quad (6.4)$$

Силе $\vec{F}_B$ и $\vec{F}_D$ образују спрег интензитета $F \cdot \overline{BD} = F\ell$ који треба да буде истог смера као вектор брзине $\vec{v}_A$.



Слика 6.1 Гироскоп са два степена слободе

Силе које притискују осу су интензитета

$$F = \frac{J_z \omega_1 \omega_2}{\ell} . \quad (6.5)$$

Оса гироскопа врши притисак на лежишта силама $\vec{P}_B$ и $\vec{P}_D$ које образују спрег који се назива гироскопски спрег и чији је интензитет

$$M_O^g = J_z \omega_1 \omega_2 , \quad (6.6)$$

док је интензитет сила

$$P = \frac{J_z \omega_1 \omega_2}{\ell} . \quad (6.7)$$

Смер гироскопских притисака може се одредити применом правила Жуковског: ако се гироскопу који се обрће врло брзо, наметне принудно прецесионо кретање, на лежишта у којима је причвршћена оса гироскопа деловаће спрег сила момента који тежи да најкраћим путем осу сопствене ротације гироскопа постави у положај у коме је паралелна оси прецесије при чему се правци вектора $\vec{\omega}_p = \vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega}_s = \vec{\omega}_1$ поклапају. Настајање гироскопског момента назива се гироскопски ефекат. Гироскопски ефекат се јавља увек када се мења правац обртне осе гироскопа. Уколико је та промена бржа гироскопски притисци у лежиштима су већег интензитета а могу бити много већи од статичких. Због тога се при прорачуну лежишта узимају у обзир и гироскопских притисци.

7.0 Примена гироскопа

Гироскоп има поред обртања око сопствене осе бар још један степен слободе кретања. Због тога гироскоп поседује одређена својства, а то су велика стабилност и прецесија. Стабилност гироскопа се огледа у супротстављању свим спољашњим утицајима који теже да промене положај његове осе. Прецесија гироскопа је својство гироскопа да при промени положаја једне његове осе скреће око друге, управне на њој. Због својих особина гироскопи се користе у техници на оним местима где треба обезбедити стабилност неког кретања, на пример подморница и васионских бродова. Савршен гироскоп који ротира без отпора чија је оса усмерена ка некој звезди остао би у истом положају заувек.

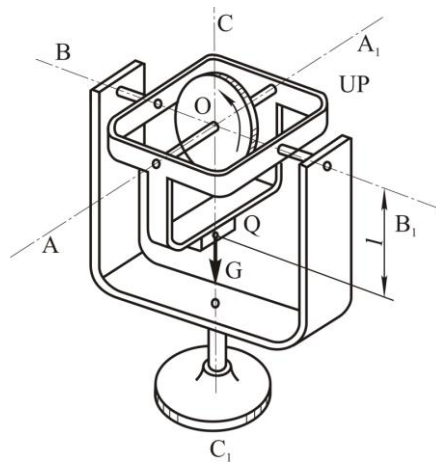
Дејство гироскопа јавља се код ротора турбина, возила, авиона, бицикла, обруча, чигре, итд. У торпеду се гироскоп користи да би се обезбедило стабилно кретање по унапред одређеној путањи. Да би се обезбедила стабилна путања гранате, у цеви оруђа урезани су завојни жлебови и када граната напусти цев добија велику угаону брзину обртања око своје осе материјалне симетрије чиме се обезбеђује њена гироскопска стабилност. Гироскопи служе да би се умањило љуљање брода, као стабилизатори код возила.

7.1 Гирокомпас

Гирокомпас је инструмент који се појавио почетком XX века за потребе поларних експедиција. Користи се за идентификацију меридијана. Да би гироскоп могао послужити као показивач смера, оса око које се okreће мора бити стално хоризонтална и мора да показује исти одређени смер на Земљи, смер север-југ. Због заобљености Земље као и због трења оса гироскопа се издиже из хоризонталне равни. Да би се очувао сталан смер, слободни гироскоп се контролише и врши се корекција његових одступања по висини и страни па се његова оса враћа у основни положај север-југ. То враћање врши се стално или повремено тако да краткотрајна одступања (за време окретања, на пример) не долазе до изражаја, а последица је дејства гироскопских притисака насталих услед постојања електромагнета или електромотора који су саставни делови уређаја. Компаси се првенствено користе на авионима и на мањим бродовима већих брзина.

Немачки проналазач Н. Anschutz-Каемпфе конструисао је гирокомпас који се примењивао код подводних пројектила. Гирокомпаси марке Sperry појавили су се 1911. године. Гироротор је трофазни асинхрони мотор са 10000 o/min који је смештен у вакуумираном кућишту. Две спојене посуде у којима је жива (балистички елемент) служе као пригушивачи осцилација и истовремено ограничавају могућност померања ротора.

Овај компас је гироскоп са три степена слободe који је постављен у Карданов рам. За одржавање гироскопске осе у хоризонталној равни о унутрашњи прстен Кардановог оквира UP обешен је специјални терет Q чија је тежина G . Тежиште ротора и унутрашњи прстен померају се у односу на осу вешања гироскопа на растојање ℓ . Када се овакав прибор постави на било коју тачку Земљине површине, оса гироскопа ће после извесног времена заузети правац географског меридијана.



Слика 7.1 Сперијев гироскопски компас

Сперијев компас може да се постави на било којем месту Земљине површине (1). Оса гироскопа је хоризонтална и усмерена у правцу исток-запад. У том положају правац силе тежине $\vec{G}$ пролази кроз непомићну тачку O . Тада је момент спољашњих сила које дејствују на гироскоп једнак нули. Када се гироскоп нађе у положају (2), правац осе гироскопа ће затварати неки угао са хоризонталном равни услед тежње да задржи сталан правац у односу на звездани координатни систем. Источни крај главне осе гироскопа AA_1 подиже се изнад хоризонталне равни а западни крај се спушта. Услед овог кретања долази до померања терета Q који је спојен са комором K . Сила тежине $\vec{G}$ не пролази кроз непомићну тачку O услед чега се јавља спољашњи момент. Гироскоп почиње да врши прецесионо кретање ка северном полу које траје све док се оса гироскопа не постави у правац географског севера (3). У том положају момент силе тежине за осу BB_1 је једнак нули и кретање гироскопа престаје.

7.3 Возила

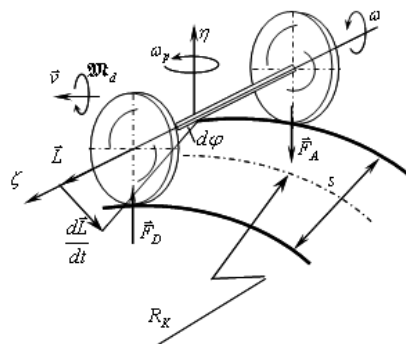
Сваки пар точкова локомотиве може се сматрати гироскопом који се обрће угаоном брзином која је пропорционална брзини воза а обрнуто пропорционална полупречнику точка, тј. $\omega = v/r$. Момент количине кретања је одређен изразом $L = J\omega = mr^2v/r$. При кретању воза у кривини наступа скретање око вертикалне осе O_η па се јавља девијациони отпор који изазива притиске на шине а који је интензитета

$$F_D = \frac{M_d}{s} = \frac{J\omega\omega_p}{s} = \frac{mv^2r}{Rs}. \quad (7.1)$$

Спољашња шина је више оптерећена него унутрашња. Због тога се та шина издиже у кривини па се јавља и угаона брзина скретања осе точкова ω_p . Ова брзина изазива допунски девијациони отпор што повећава интензитет силе притиска тако да је укупан интензитет

$$F_D = \frac{mv^2r}{Rs} \left(1 + \frac{v^2}{gL} \right), \quad (7.2)$$

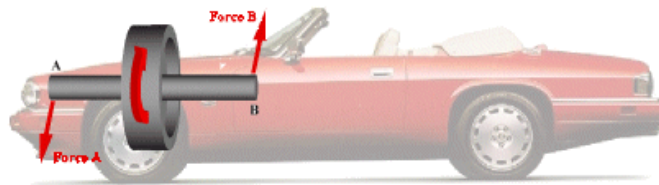
где је L дужина кривине. Што је брзина воза већа, то је сила притиска већа. Ако се повећа дужина кривине, нарочито код електричних возова код којих је нешто већи момент инерције, повећање силе притиска се може и занемарити.



Слика 7.4 Гироскопско дејство код возила

Гироскопски ефекат се јавља и код тркачких аутомобила. Тркачке стазе су са мноштвом кривина, а брзине којима се крећу аутомобили су доста велике услед чега долази до појаве гироскопских сила. Ако се одабере прави смер обртања мотора, обезбеђује се останак аутомобила на стази.

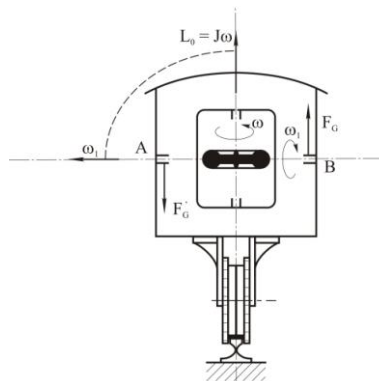
Ротор аутомобила се обрће великом угаоном брзином у приказаном смеру. Када аутомобил скреће у десно, на аутомобил дејствују силе које теже да предњи крај аутомобила помере на доле док би се задњи крај аутомобила померао на горе.



Слика 7.5 Гироскопска прецесија код аутомобила

Гироскопска прецесија се јавља само у случају када аутомобил скреће лево или десно или када се предњи, односно задњи крај аутомобила креће горе-доле [7].

Вагон на једној шини би био у положају нестабилне равнотеже када у њему не би био гироскоп. Када се гироскопу саопшти веома велика угаона брзина ω , долази до нарушавања равнотеже вагона. Да би се обртање вагона око шине удесно услед нарушене равнотеже вагона зауставило, гироскопу се саопшти прецесионо кретање око осе AB у приказаном смеру. Услед прецесионог кретања јавља се гироскопски момент $M_g = J\omega\omega_1$ који враћа вагон у равнотежни положај. Ако вагон почне да пада удесно, у равнотежни положај ће се вратити тако што ће се рам гироскопа кретати супротно претходном обртању. Ово обртање врши се преко аутоматских уређаја чије техничке појединости нису познате. Гироскопска железница није у експлоатацији због нерешених проблема везаних за стабилност при великим брзинама.



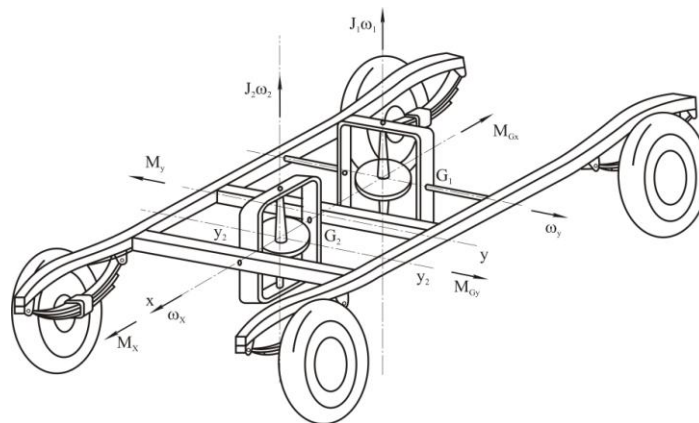
Слика 7.6 Вагон на једној шини

Године 1926. у Немачкој је био предложен уређај који се састоји од два гироскопа са вертикалним осама који су монтирани на рам (Слика 7.7). Сваки гироскоп има по два степена слободе. Ови гироскопи су имали улогу амортизера када би се аутомобил кретао по неравном путу.

Када предњи точкови наиђу на препреку, ударни импулс се преко точкова преноси на рам у виду момента M_y који тежи да окрене аутомобил око попречне осе y . Гироскопска оса гироскопа G_2 почиње да врши прецесионо кретање у правцу дејства момента M_y . Услед овог прецесионог кретања јавља се гироскопски

момент $M_{Gy} = J_2 \omega_2 \omega_x$, где је ω_x угаона брзина прецесије, $\omega_x = M_y / J_2 \omega_2$. Смер гироскопског момента одређен је по правилу Жуковског и супротног је смера од смера момента спољашњих сила. Момент спољашњих сила се тренутно уравнотежава са гироскопским моментом тако да нема никаквог померања аутомобила услед удара, рам задржава хоризонтални положај.

У случају када аутомобил својим левим точком наиђе на неравнину, услед сила на рам дејствује момент M_x услед чега би се аутомобил заокренуо око уздужне осе x . Услед дејства овог момента оса гироскопа G_1 најкраћим путем заузима правац овог момента, тј. гироскоп изводи прецесионо кретање угаоном брзином $\omega_y = M_x / J_1 \omega_1$. Услед овог прецесионог кретања јавља се гироскопски момент M_{Gx} , интензитета $M_{Gx} = J_1 \omega_1 \omega_y = J_1 \omega_1 \frac{M_x}{J_1 \omega_1} = M_x$, који уравнотежава момент спољашњих сила M_x тако да аутомобил остаје у хоризонталном положају.



Слика 7.7 Гироскопи као амортизери

Маса оваквих гироскопа је реда 1–2 % укупне масе аутомобила.

Овакви гироскопски уређаји могу се наћи код специјалних санитарних возила.

Бицикл је нестабилан у стању мировања јер има само две тачке ослањања. Када се креће, бицикл постаје стабилан а то се објашњава прецесијом гироскопа и његовим скретањем око вертикалне осе нормалне на волан. Обртни точак бицикла се понаша као гироскоп. Момент количине кретања точка одређује количину ротационог кретања и усмерен је улево. Када бицикл почиње да се нагиње на једну страну, на пример на лево, тло које дејствује силом на тачкове бицикла, настоји да усмери точак у супротном смеру од смера кретања казаљке на сату. Овај момент силе доводи до прецесије управљача бицикла. Тако се и точак креће улево. Бицикл који се креће унапред скреће у смеру у коме се нагиње.



Слика 7.8 Гироскопски ефекат код бицикла



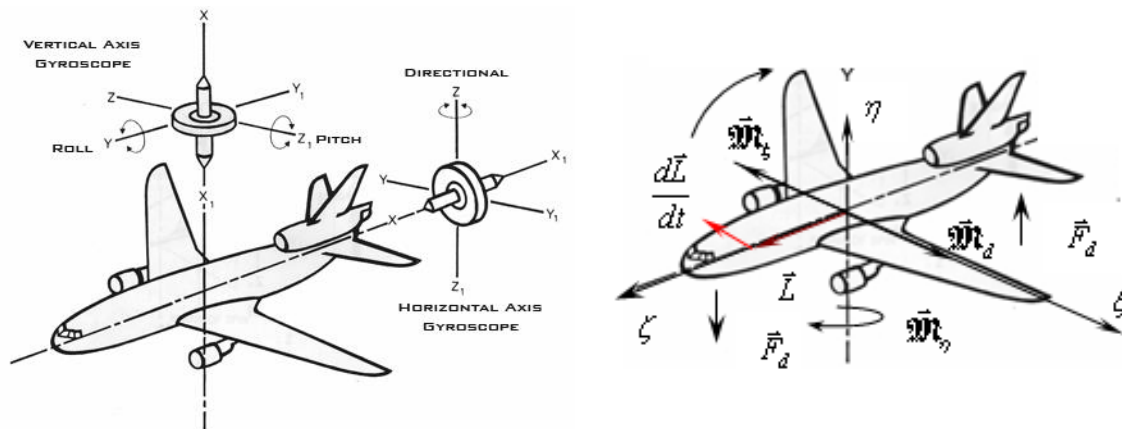
Слика 7.9 Точак бицикла



Слика 7.10 Моноцикл

7.4 Авиони

Елиса авиона се обрће великом угаоном брзином око подужне осе авиона. Када авион скреће, на пример на лево, пилот мора да делује на крму за правац тако да ствара момент који је управан на подужну осу авиона (сл 7.11) . Скретање авиона изазива спрег $\vec{M}_\xi$ коме се супротставља девијациони спрег $\vec{M}_d$, $\vec{M}_d = J\omega\Omega$, тако да се предњи део авиона подиже а задњи спушта. Ова кретања пилот парира употребом висинских крма [10].



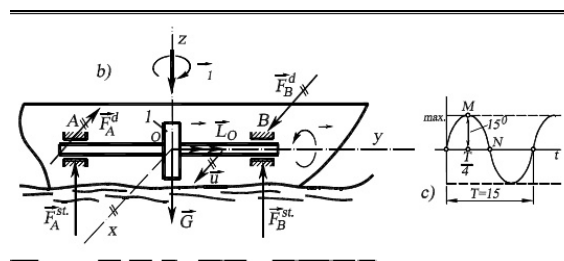
Слика 7.11 Гироскопски ефекат код авиона

7.5 Бродови

Брод може да осцилује око подужне осе (ваљање, rolling), око попречне осе (њихање, pitching) и око вертикалне осе скретање (вијугање, yawing) па се гироскопски утицаји могу јавити у свим обртним деловима брода па и у ротору брзоходе парне турбине што изазива допунске притиске на лежишта турбине.

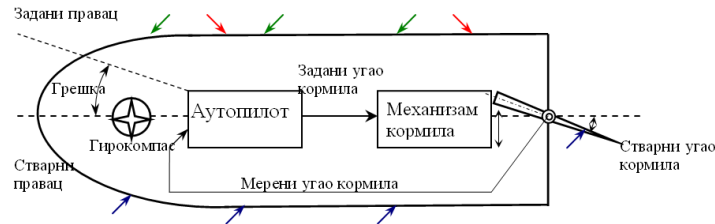
Пропелери великих бродова се доводе у кретање помоћу турбина које су постављене по дужини брода и обрћу се са n o/min у смеру кретања казаљке на сату. Момент количине кретања турбине има правац осе Oz , као и угаона брзина сопствене ротације $\vec{\omega}_1$. Када се брод љуља по дужини (око осе Oy_1), онда закон обртања може бити $\varphi = \varphi_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t)$, где је T период љуљања брода а φ_0 максимално одступање. Овако дефинисаном закону обртања одговара угаона брзина $\omega_2 = \frac{2\pi}{T} \varphi_0 \cos(\frac{2\pi}{T}t)$ која је ортогонална на осу сопствене ротације. Услед љуљања брода јавља се гироскопски момент који је усмерен ка негативној оси Oz а који изазива гироскопске притиске на лежишта турбина који могу бити веома велики [4].

Појава гироскопских момената користи се за стабилизацију покретних конструкција. Наиме, једно лежиште може бити покретно тако да се услед дејства гироскопских сила може померати у правцу којим се оса брода најкраћим путем помера ка оси Oy_1 .



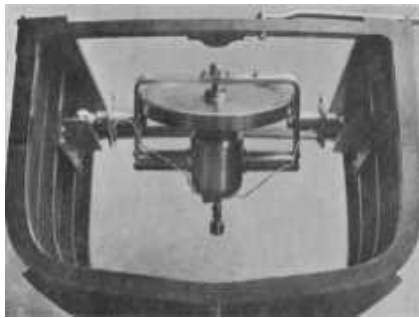
Слика 7.12 Љуљање брода

Деловање ветра, таласа, водене струје може изазвати додатно кретање брода, ваљање, пропињање и скретање брода са задатог курса. На бродовима постоје уређаји чија је намена да одржавају брод на задатом курсу. Уређаји су познати под именом аутопилот. Аутопилот може да се користи и приликом промене курса на нови правац (промена курса). Основни елементи аутопилотског система су приказани на Слици 7.13 [6].

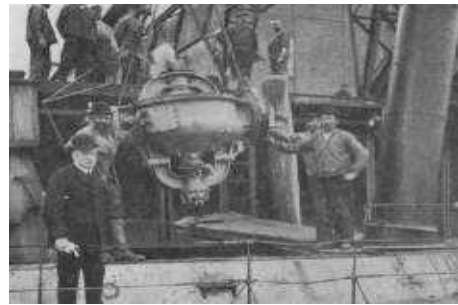


Слика 7.13 Аутоматско управљање бродом

Стварни правац брода се мери гирокомпасом (или магнетни компас на малим пловним објектима) и пореди са жељеним правцем који аутопилоту уноси „кормилар” брода. Аутопилот рачуна потребни угао кормила и шаље управљачки сигнал на механизам кормила. Праћењем угла кормила и његовим поређењем са жељеним углом формира се петља управљања. Кормило даје управљачки момент на труп брода тако да усмерава стварни правац брода у складу са жељеним курсом док ветрови, таласи или струја дају моменте који могу помагати или спречавати такво деловање.



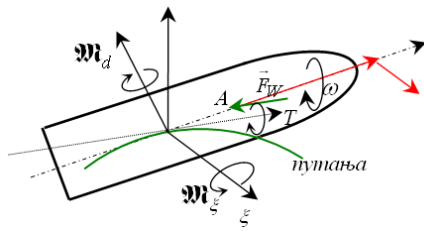
Слика 7.14 From the book: H.Crabtree (1914) "Spinning Tops and Gyroscopic Motion" Photo by: Underwood & Underwood.



Слика 7.15 From the book: H.Crabtree (1914) "Spinning Tops and Gyroscopic Motion" Photo by: Underwood & Underwood.

7.6 Пројектили

На кретање пројектила утиче отпор ваздуха. Сила отпора пропорционална је брзини пројектила, лежи у равни кретања, у правцу је тангенте на линију путање средишта пројектила, а супротног је смера од брзине. Ова сила ствара момент који тежи да обрне пројектил око хоризонталне осе, тј. да га усправи. Са друге стране пројектил још у цеви добија велику угаону брзину, он је гироскоп, тако да услед тога скреће из равни гађања (има деривацију). Замах пада у правац осе симетрије пројектила која се не поклапа са правцем тангенте линије путање средишта пројектила. Моменту отпора ваздуха супротставља се девијациони момент те је пројектил стабилан у погледу обртања око попречне осе али настаје прецесионо кретање осе симетрије око тангенте путање. Прецесија је истог смера као и обртање пројектила.



Слика 7.16 Гироскопско дејство код пројектила



Слика 7.17 Торпедо

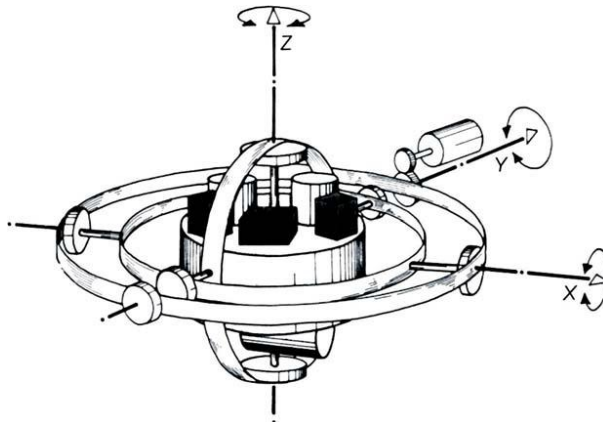
7.7 Инерционе платформе

Подаци о позицији, брзини и висини летелице или возила веома су важни. Када су ови подаци познати, аутопилот може одржавати авион на задатом курсу а систем вођења ракета може ракету лансирати у одређену орбиту. Управо такве податке дају инерциони навигациони системи који се састоје од инерционе јединице за мерење и контролног механизма. Инерциони навигациони системи мере позицију летелице коју контролишу одговарајући механизми. Ови системи су првенствено развијени за навигацију ракета. Инерциони навигациони системи, који се примењују у системима управљања и стабилизације покретних система, у свом саставу имају као неизоставни елемент гиростабилисану платформу. Функција платформе је да обезбеди просторну оријентацију триједра који формирају мерне осе акцелерометра као и да омогући да се одреде параметри оријентације, тј. информације о угаоним померањима објекта у односу на платформу. Параметри који одређују оријентацију објекта су углови који се мере давачима смештеним у лежиштима вешања платформе. Мерни прибори за мерење привидног убрзања покретних објеката монтирају се на гироскопске платформе које су просторно стабилизоване. За неутрализацију гироскопске прецесије најчешће се на платформу монтирају два гироскопа (гироскопски пар: гироскопи истих инерционих особина и угаоних брзина истих интензитета) чије се осе секу под правим углом. Та два гироскопа учврсте се паром ослонаца на платформа остаје крута чак и када се ослонци окрећу у било ком смеру. То је база инерцијалних навигационих система. Када се платформа окрене, реагују сензори на осама ослонаца.

Инерциони навигациони системи имају угаоне и линеарне брзиномере. Угаони брзиномери мере ротацију летелице у простору око све три осе: pitch (врх летелице горе-доле), yaw (врх летелице лево-десно) и roll (у смеру или контрасмеру казальке на сату). Линеарни брзиномери мере померања летелице у правцу све три осе. Компјутери на основу примљених података врше интеграцију у циљу одређивања тренутне позиције летелице. Неки системи стављају линеарне брзиномере на карданске гиростабилисане платформе што дозвољава платформи да се окреће око

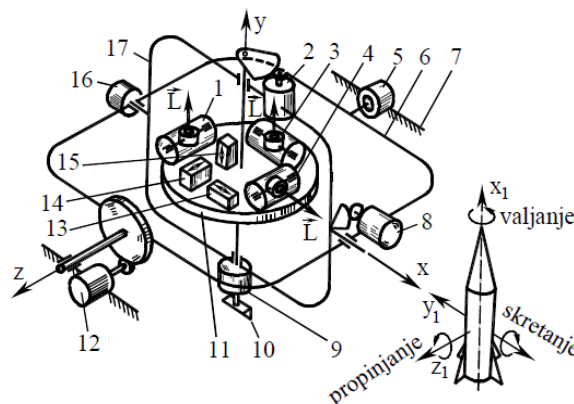
све три осе ротације. Ако се платформи додају три акцелерометра, постоји могућност да се одреди где возило иде и како се мења правац његовог кретања.

Неке Apollo летелице су имале гиростабилисане платформе са три осе при чему се посебна пажња поклањала покретним механичким деловима који су веома осетљиви, хабају се и могу се заглављивати што може изазвати застој кардана. Да би се то избегло, користе се флуидни лежајеви или коморе за плутање за уградњу гиростабилисане платформе. Овакви системи имају велику прецизност.



Слика 7.18 Инерцијална навигациона платформа

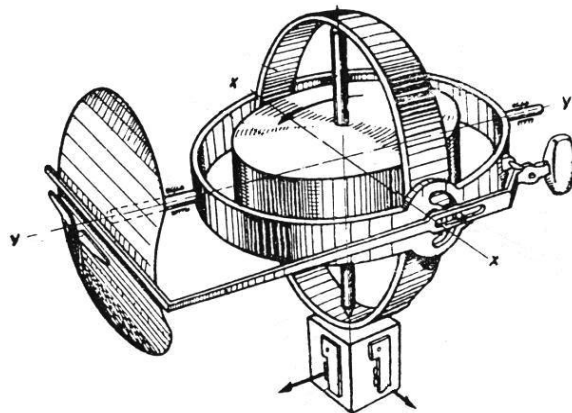
Гиростабилисане платформе примењују се код ракета великог домета због потребе да неки уређаји буду у фиксном положају у односу на апсолутни координатни систем. Шема гиростабилисане платформе ракете „Титан” дата је на Сл 7.17. Гироскоп (1) и мотор (2) стабилишу платформу у односу на осу ваљања (x-x оса), гироскоп (3) и мотор (12) стабилишу платформу у односу на осу пропињања (z-z оса) а гироскоп (4) и мотор (2) стабилишу платформу у односу на осу скретања (y-y оса). Кад на платформу (11) дејствује поремећај који тежи да платформу скрене са задатог правца, долази до прецесије гироскопа. Са давача угла прецесије преко појачавача на мотор за стабилизацију одлази сигнал. Мотор преноси на платформу момент који је супротан моменту поремећаја па тако платформа задржава свој положај.



Слика 7.19 Шема гиростабилисане платформе ракете „Титан”

7.8 Вештачки хоризонт

Вештачки хоризонт је инструмент који показује положај авиона (летелица) у односу на природни хоризонт. Када су временски услови лета такви да пилоти „губе“ хоризонт, треба створити визуелне услове лета одговарајућом заменом за природни хоризонт. Тако је настао инструмент који показује да ли је авион нагнут око своје уздужне или попречне осе. Основни елемент овог инструмента је гироскоп са три степена слободe (три осе обртања). Оса обртања гироскопа тежи да задржи правац нормале на површину земље. На предњој страни инструмента авион је представљен стилизованом силуетом иза које се помера линија вештачког хоризонта. Тако пилот може имати информацију о попречном и уздужном положају авиона. Како би се спречило нагињање сопствене осе гироскопа, специјални исправљачки уређаји стварају одговарајући момент. У авионима који су предвиђени за извођење еволуције вештачки хоризонти имају додатне уређаје којима се блокирају гироскопи. То је потребно због тога што делови гироскопа при већим нагибима (уздужни нагиби већи од 60^0 и попречни нагиби већи од 90^0) ударају у посебне граничнике услед чега долази до њиховог оштећења и избацивања из нормалног положаја па је исправљачима потребно десетак минута да уређај врате у нормалан рад.

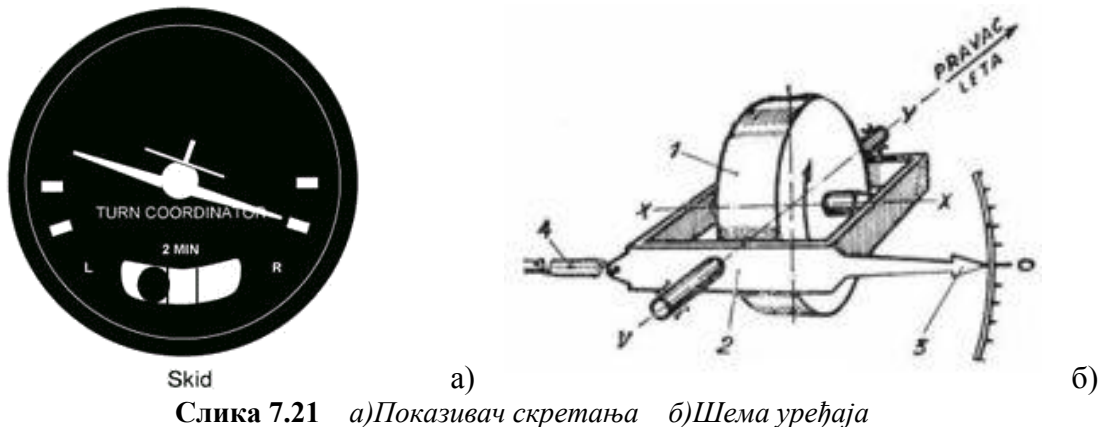


Слика 7.20 а) вештачки хоризонт б) шема уређаја (Wikipedia.hr.)

7.9 Показивач скретања

Показивач скретања је гироскопски инструмент који показује скретање авиона по правцу. Основни погонски елемент је гироскоп са два степена слободe. Гироскоп (1) се великом угаоном брзином окреће око своје главне осе $x-x$, док се његов оквир (2) може окретати око осе $y-y$ нормалне на главну. Обе осе леже у хоризонталној равни, али је главна нормална на уздужну осу авиона. При скретању, оса $x-x$ принудно мења свој положај у простору, услед чега се јавља сила која тежи да окрене оквир око осе $y-y$, и то више што је заокрет оштрији. Слободном окретању

оквира супротставља се уграђена опруга (4) тако да при деформацији ствара момент силе око осе у-у. При одређеном нагибу оквира, долази до изједначења момената сила и казаљка (3), која је чврсто везана за оквир, заузима свој равнотежни положај који одређује величину заокрета. Већем заокрету одговара већи момент и већа деформација опруге.



Слика 7.21 а)Показивач скретања б)Шема уређаја

7.10 Игралке

Чигра је предмет конусног, сферног или овалног облика са шпицастим врхом (клином) чија је намена да се што дуже врти. Најчешће се користи као играчка. Ако се заврти, чигра ће наставити да се окреће око једне осе ротације. Њене физичке особине су сличне као особине гироскопа.



На замисао да створи предмет купастог облика с наменом да се што дуже врти на земљи дошао је неименовани изумитељ загладан у свет око себе. Археолошка ископавања су открила ову играчку на свим континентима, осим на Антарктику. Ако се погледа жир, семе јавора с „лептирићима”, шкољка зашиљеног врха, јасно је да је у природи чигра већ постојала.

Чигра се појављује у неколико облика. Најједноставнија је она направљена у облику купе, с додатком на горњој страни проширеног дела, која се ухвати

прстима, поставља на подлогу, јако заврти и испусти да се окреће док не изгуби убрзање, полако се зауставља и пада „на бок”. Таквим чиграма могу да се похвале различите културе, од Јапана, преко Немачке, Пољске, Кореје, Француске, Шкотске до наше земље.

У Јапану је вештина окретања чигре била више везана за професионалне играче него за децу. Јапанске чигре разликовале су се од других јер су обично имале веома издужен врх на коме су се окретале. Највештији такмичари препознавали су се по томе што би чигру успевали да заврте и на затегнутом ужету, чак и на оштрици мача. Сличне чигре, махом израђене од бамбусовог стабла, могу да се нађу у Кини и Кореји.



Слика 7.22 Јапанска чигра

Занимљиво је да су, између осталог, у класичној Грчкој у игри с чиграма учествовали и мушкарци и жене, док је тај спорт на острвима у Тихом океану или у подручјима Југоисточне Азије био резервисан само за мушкарце. У правилнику једне школе у Енглеској, из 1591. године, пише: „Ученицима није дозвољено да се играју осим понекад четвртком и то уколико је лепо време, затим недељом, о празницима и после молитве. Могу да се забављају окретањем чигре бичем, бацањем лопте или трчањем.”

Некада је окретање чигре била забава за народ. И у новије време су се одржавала такмичења вештих чигромана. Данас су се чигре поново вратиле у моду. Иако се и даље израђују оне које се у мало чему разликују од чигри којима су се забављали у старом Египту, Риму, Грчкој, посебно међу млађим нараштајима знатно су омиљеније и траженије оне које имају посебан механизам који их покреће и чини да се веома дуго врте и врте... Тренутно су код нас најтраженије „бејблејд” чигре, иначе настале 2000. године у Јапану. Произвођач „Такара” пустио их је на тржиште у исто време кад је на телевизији почео да се приказује истоимени цртани серијал. Временом су се „бејблејд” чигре усавршавале да би, кад се повлачењем окидача с механизма једном хитну, наставиле што дуже да се врте на тврдој подлози или, наравно, у посебној „арени”.

Звркови су веома честе играчке. Посебно су атрактивни они који су комбиновани са звучним и светлосним ефектима. Такође је атрактиван зврк који ротира на уској подлози, може и на ивици чаше при чему је оса ротације скоро хоризонтална.



а)



б)

Слика 7.23 Бејблејд



Играчке

Ручни гироскоп је направа која је постала популарна крајем прошлог века. Може да се користи за јачање мишића. Уређај је патентиран 1973. године иако датира из 1909. године, а састоји се од централног замајца и прстена по којем се обрће ротор. Да би направа могла да се држи у руци, конструисан је држач. Неки уређаји имају обртомер. Окретањем зглоба покреће се централна унутрашња кугла и стварају се изузетно јаке силе. Карактеристика ове направе је да има три стања: стање мировања, нормално стање и прецесионо стање. На слици је приказано стање прецесије.

8.0 Савремени гироскопи

Сматра се да су гироскопски системи достигли такав ниво тачности да даља истраживања у том смеру немају смисла. Такође, велики број земаља у свету ограничава улагања у војну индустрију што усмерава развој гироскопа ка свакодневном животу. Наиме, у свакодневном животу сусрећемо се са мобилним телефонима, видеокамерама, фотоапаратима, аутомобилима и другим техничким производима где се микромеханички гироскопи користе за стабилизацију кретања. У сателитској навигацији GPS и GLONASS, када се сателитски сигнал може примати непрекидно нема потребе за аутономним средствима навигације. Систем навигационих сателита треће генерације омогућава данас да се координате објеката на површини земље одреде са тачношћу до неколико центиметара. Тако на основу података које дају два пријемника сателитских сигнала, постављених на растојању од неколико метара, на пример, на крилима авиона, омогућено је да се одреди за колико ће авион скренути по вертикалној оси. То значи да нема ни потребе да се користи гироскоп за одређивање курса.

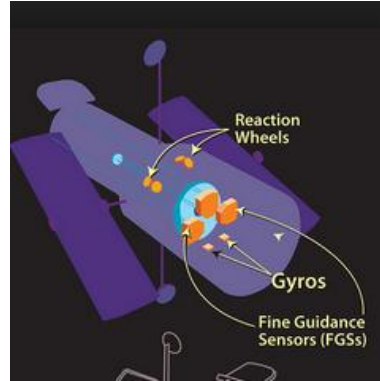
У пракси, системи GPS не могу сасвим тачно да одреде положај у случајевима лоше видљивости, у шумским пределима, у градским условима. Чак и у авионима GPS има одређену дозу непрецизности (некада је непрецизност мерљива у степенима) па се, бар за сада за навигационе системе користе комбиновано и гироскопски и GPS системи.

Развој гироскопске технике дошао је на праг важних промена. Пажња је усмерена ка нестандардној примени у медицини, у археологији за проналажење нових ископина, за предсказивање земљотреса, за одређивање најповољнијих положаја нафтовода, железничких пруга и друго.

Данас се гироскопи срећу у бројним уређајима: у мобилним телефонима, навигационим системима и другим преносивим уређајима. Свемирски телескоп Hubble се налази у орбити око Земље и снима свемирска тела као и друге појаве у свемиру. Земљу обилази под нагибом од 28,5 степени и обиђе је за просечно 96 минута брзином од 28000 km/h. Hubble, има гироскопе који омогућавају веома прецизна мерења. Гироскопи мере степен померања када Hubble менја свој положај са посматраног објекта (звезда или планета) до другог, и помажу при контроли позиционирања телоскопа док научници посматрају одређени објекат или појаву.



Слика 7.24 Свемирски телескоп *Hubble*
(Turkish Wikipediji (Seçkin resimler))

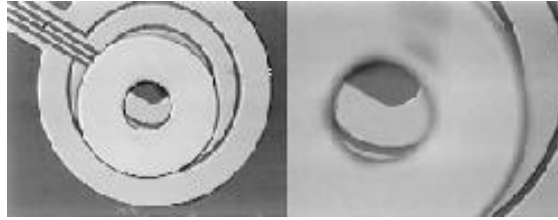


Слика 7.25 Свемирски телескоп *Hubble*

Савремени гироскопи су гироскопи великих перформанси. Не само да их одликује велика прецизност, већ и мале димензије као и ниска цена.

Као делови веома одговорних инструмената, гироскопи су предмет истраживања и иновација. Како ти инструменти раде у разноликим условима, то се изучава и понашање ротора у неким условима рада као што је на пример магнето-хидродинамичко поље [1]. Показано је да се под одређеним условима може јавити и хаотично кретање ротора. Механички делови гироскопа су изложени хабању.

Микро-електро-механички системи (MEMS) су минијатурни електромеханички системи који могу да региструју промене у околини, да их анализирају и процесуирају помоћу микроелектронике. MEMS чине механички елементи, сензори, појачавачи, електрични и електронски уређаји који су смештени на силицијумов супстрат (чип). Уређаји су минијатурни и велике отпорности на вибрације, удар и зрачење. Инерцијални MEMS сензори су гироскопи помоћу којих се мере промене у убрзању, вибрацији и нагибу. Најједноставнији MEMS сензор мерач убрзања је инерцијална маса која је закачена за опруге. Отклон масе при убрзању преводи се у електрични сигнал. MEMS жirosкопи имају облик диска или точка који ротира. Уместо традиционалних ротирајућих дискова користе се вибрирајуће структуре. У инерцијалним системима као и системима вешања у аутомобилима уграђују се углавном оптички гироскопи великих перформанси који су велики и скупи. Гироскопи на принципу Кориолисове силе су јефтинији али и мањих перформанси. Тако се између ове две категорије гироскопа створио простор за нови тип гироскопа. Конструисан је гироскоп са магнетним лебдећим ротором без лежишта који се обрће веома великом брзином. При великим брзинама ротације танки ротор има такав момент количине кретања да се понаша као гироскоп. Због једноставне конструкције уређај се може производити масовно на бази микроелектронике.



Слика 7.26 Диск пречника 400 микрона за време лебдења

Нови типови гироскопа уместо обртних дискова имају веома танке плочице (solid state), а компјутерски чипови замењују механичке компоненте. Машински обрађена шупља лопта од пиезо-електричног материјала као што је кварц основни је елемент Brandy Sniffer гироскопа. Овакав гироскоп скоро да нема покретних делова, веома је прецизан али и скуп.

Нови и јефтинији гироскопи великих перформанси биће далеко значајнији при навигацији аутомобила, подморница и летилица. Научници у свим деловима света већ увелико раде на том пољу.

У САД тим научника из Oak Ridge National Laboratory конструисали су високо сензитиван силиконски гироскоп. Овај тим научника верује да ће новоконструисани гироскоп бити од посебног значаја за навигацију и геолокацију где се глобални позициони системи не могу користити.

На Универзитету у Тел Авиву (TAU) истраживачи су најавили гироскоп уређај који може да стане на врх чиоде а који ће довести до револуционарних промена код паметних телефона и уређаја у медицини и довести до нових решења у software и hardware технологији. С тим у вези, професор Koby Schener са TAU универзитета је своја истраживања усмерио ка тражењу начина на који ће пропорционално смањити оптички гироскоп, уређај који се обично користи у навигацији а који је смештен у грубом кућишту величине од неколико десетина милиметара. Конвенционални гироскопи теже око 1- 2 кг и могу се као такви уграђивати у авионе, али ако је потребно да се гироскоп смести на неки мали део, производ савремене технологије, као што је телефон на пример, уградња оваквих гироскопа би била строго лимитирана. Schener-ов гироскоп се састоји од танких полупроводних ласера, пречника од неколико десетина микрометара, који ротирају око три осе које међусобно заклапају углове од по 90^0 . Мерењем промена таласних дужина кохерентне светлости коју производе обрћући се, могу се одредити величина и угао померања. Тај податак се онда преводи у GPS координате. Сам уређај подсећа на танак компјутерски чип пречника око 1мм. Овакав уређај се може користити не само за одређивање положаја без GPS сигнала (важно за пределе у којима нема сигнала) већ, што се сматра веома важним, и за примену у медицини, уградњом у пилула-камере којима није потребно вантелесно радио-праћење.

STMicroelectronics је лансирао аналогни гироскоп велике прецизности, мале величине и велике стабилности. Троосни гироскоп у комбинацији са троосним акцелерометром омогућава конструисање мерних уређаја који прате и пружају

потпуну информацију о врсти, брзини и правцу кретања људи, возила и других објеката. Овакав гироскоп је намењен детекцији 3D покрета и препознавање кретања и у телефонима и у навигационим системима као и у другим преносивим уређајима.

8.1 Даљи развој гироскопа

Правци даљег развоја биће усмерени и ослоњени на мултидисциплинарне научне тимове састављене од стручњака из области електро, машинског и хемијског инжењерства, као и научника из области физике и материјала, клиничке медицине и биохемије, и на њихову креативну размену знања.

Минимизација, смањење масе и величине, омогућава смештање на места где традиционални системи због великих димензија не могу да се сместе. Деведесетих година прошлог века успешно су почели да се користе мерачи убрзања који су данас прави изазов за даљи развој гироскопа. Посебно је изазовна примена у медицинској дијагностици где осетљиви, брзи, лако применљиви и финансијски повољни системи налазе велику примену. Чини се да у том смислу механички гироскопи губе примат пред гироскопима нове генерације као што су: fiber optic gyroscope (FOG), Hemispherical resonator gyroscope (HRG), MEMS gyroscope, Hemispherical resonator gyroscope (HRG), a London moment gyroscope, a dynamically tuned gyroscope (DTG). У електроници гироскопи се често комбинују са сензорима убрзања за робусне правце - и за детекцију покрета. Примери такве комбинације су тзв. паметни телефони као што су HTC Titan, Nexus 5, iPhone 5s, Nokia 808 Pure View и Sony Xperia, и конзола PlayStation 3 и Wii Remote.

Новине које се очекују у наредним годинама ићи ће у правцима који се могу назрети на основу данашњих познатих сазнања. Свакако ће развој бити условљен новим знањима и будућим технологијама.

9.0 Закључна разматрања

Гироскоп је тело које може да ротира око осе било којег правца у простору при чему је једна тачка на оси непомична. Обично је то диск који се обрће веома великом угаоном брзином око своје осе симетрије. Назив је увео француски научник Leon Foucault за нараву коју је конструисао како би доказао да Земља ротира. То је био први лабораторијски доказ да се земља врти око своје осе. Данас се гироскопима називају било какви уређаји код којих се користи својство брзо ротирајућих тела. Прву теорију гироскопа математички је описао Euler. Небеска тела су велики гироскопи што је била полазна основа за теорију осциловања небеских тела. Оса ротације диска у одсуству спољашњих сила задржава правац у простору а његова стабилност се огледа у снажном одупирању спољњим утицајима који теже да му промене положај. Прецесија гироскопа је особина гироскопа да при насилној промени положаја једне његове осе скреће око друге њој управне осе.

Динамичка својства гироскопа (гироскопска инерција, прецесија, нутација, гироскопски момент) користе се у разне техничке сврхе. Серсон је (1852.) први дао идеју о гироскопском компасу. Гирокомпас је немагнетни компас који показује северни пол тачније од магнетног компаса. Његов рад не зависи од електромагнетног поља па се зато користи у навигацији (бродови, авиони, ракете, и др.). Стабилно кретање по унапред одређеној путањи, код торпеда, остварује се гироскопима. Исто тако, гироскопи се користе као стабилизатори код једношинских возила, код бродова за смањење љуљања. У циљу ои добија велику угаону брзину обртања око своје осе материјалне симетрије, па се на тај начин обезбеђује гироскопска стабилност гранате безбеђења стабилне путање гранате у цев се урезају завојни жлебови тако да граната по напуштању цев.

За чигре, које имају особине гироскопа, су знали стари народи: Кинези, Египћани, Грци, и други. Иако су чигре биле углавном играчке, њихова необична својства привлачила су пажњу како обичних људи тако и научника широм света што је довело до нових открића и примене њене карактеристичне особине у стабилизацији многих уређаја и система, од првих релативно једноставних, до свемирског телескопа Hubble.

Гироскопи нису само играчке већ су и део инструмената и система који наводе ракете и васионске бродове.

Велики број земаља у свету ограничава улагања у војну индустрију, даља истраживања у том пољу су неизвесна, тако да се развој гироскопа усмерава ка свакодневном животу. Данас се гироскопи срећу у бројним уређајима: у мобилним телефонима, навигационим системима и другим преносивим уређајима

Са развојем микро и нано технологија јавила се потреба за новом класом гироскопа велике прецизности и малих димензија. Традиционални гироскопи треба да буду мањих димензија, лакши и покретљивији. У интеграцији механике, оптике, електронике и других наука настали су нови типови гироскопа, мањих димензија и већих перформанси. Нови и јефтинији гироскопи великих перформанси биће далеко значајнији при навигацији аутомобила, подморница и летелица. Научници у свим деловима света већ увелико раде на том пољу. На основу данашњих сазнања могу се назрети правци даљег развоја. Свакако ће развој зависити и од будућих технологија.

Користећи типичне примере без исцрпне анализе сваког појединачног проблема показано је да механичке компоненте и динамика гироскопских система представља основу за технолошке промене. Иако инерцијална навигација, као потпуна и самостална техника, постепено нестаје, интегрисани навигациони системи са вишеструким улазима захтевају на улазу инерцијалне податке као важан ингредијент. Анализа, дата у раду, је део неопходног фундаменталног знања на које се ослања развој модерних како инерцијалних, тако и неинерцијалних навигационих система. Са становишта контроле и очувања пројектованих перформанси и параметара свемирских летелица, изучавање динамике гироскопских система не само да није изгубило на значају, него је покренуло и нова истраживања.

Литература

- [1] Adi S.: *An Overview of Optical Gyroscopes Theory, Practical Aspects, Applications and Future Trends*, May16, 2006, Shamir: adi@gmail.com
- [2] Буљаков Б. В.: *Прикладная теория гироскопов*, Издательство Московского университета, 1976, 400
- [3] Butikov E.: *Precession and nutation of gyroscope*, 2006, <http://www.ifmo.ru/butikov/Applets/Gyroscope>.
- [4] Ђурковић Владо: *Динамика материјалних система*, Војна академија Београд, 2010, стр. 384
- [5] Којић М., Мићуновић М.: 1990, *Кинематика*, Научна књига, 1990, стр. 446
- [6] Milosavljević Č.: *Teorija automatskog upravljanja -2*, Istočno Sarajevo, 2007, str 241
- [7] Рашковић Д.: *Механика III – Динамика*, X издање, Научна књига 1962, стр. 424
- [8] Veljović Lj.: *History and Present of Gyroscopes Models and Vectors Rotators*, Scientific Technical Review, VTI Serbian Army, 2010, Vol.60, No.3-4, pp. 101–111
- [9] Vujanović B., DINAMIKA, Naučna knjiga, Beograd, 1977, str. 438
- [10] Вељовић Љ.: *Нелинеарне осцилације гиро-ротора*, докторски рад, Машински факултет, Ниш, 2011, стр.255