

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Аутомобилско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Предмет: Основе динамике моторних возила

Број индекса: 801/2015

Немања Ж. Вучић

Равански модели динамике моторних ВОЗИЛА

завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. **Др Данијела Милорадовић, ванр. проф. -ментор**

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да:

- изложи основне принципе моделирања динамике моторних возила,
- прикаже врсте и област употребе раванских модела вертикалне динамике моторних возила, уз извођење одговарајућих диференцијалних једначина кретања и израза за најзначајније преносне функције модела,
- развије програм за решавање диференцијалних једначина кретања за равански модел са три масе и
- прикаже и анализира резултате симулације кретања модела возила са три масе

Препоручена литература:

- [1] Јанковић, А.: Динамика аутомобила, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2008.
- [2] Симић, Д.: Динамика моторних возила, Научна књига, Београд, 1998.
- [3] Wong, J. Y.: Theory of ground vehicles, John Wiley & Sons Inc., New York, 2001

Крагујевац, септембар, 2017. г.

Ментор:
др Данијела Милорадовић, ванр. проф.

РЕЗИМЕ

Предмет истраживања овог завршног рада су равански осцилаторни модели динамике возила. Полазећи од најчешће коришћених врста раванских модела, основни циљ рада је извођење одговарајућих диференцијалних једначина кретања и преносних функција модела. Циљ истраживања овог рада представља и развијање програма за решавање диференцијалних једначина кретања и приказ и анализа резултата симулација понашања појединих параметара осцилаторних модела. Завршни рад је структуриран у четири дела. Први део бави се концептом моделирања возила како би се обезбедило разумевање његовог осцилаторног понашања, као и карактеристикама које возило мора поседовати не би ли имало квалитетно ослањање. У другом делу, пажња је посвећена раванским моделима осциловања, као и извођењу једначина кретања и преносних функција за три посматране врсте раванских осцилаторних модела. У наредном делу рада, садржано је извођење једначина кретања по Даламберовом принципу за равански модел са четири степена слободе кретања, након чега је развијен програм за решавање диференцијалних једначина кретања. Последњи део рада посвећен је приказу и анализи резултата симулације понашања возила Yugo Florida.

Кључне речи: динамика возила, равански модели, једначине кретања, преносне функције

ABSTRACT

The subjects of the study of this final paper are planar oscillatory models of the motor vehicle dynamics. Starting from the most commonly used types of planar models, the main goal of the work is to present appropriate differential equations of motion and transfer functions of the models. Also, the aim of the paper is to develop programs for solving differential equations of motion and to show and analyse the results of simulation of the behaviour of individual parameters of oscillatory models. The final paper is structured in four parts. The first part deals with the concept of vehicle modelling in order to provide an understanding of its oscillatory behaviour, as well as with the characteristics that the vehicle must own to have reliable suspension. In the second part, attention is paid to the planar oscillatory models, as well as to derivation of the equations of motion and transfer functions for the three observed types of planar oscillatory models. In the next part of the paper, the equations of motion according to the D'alambert principle for a planar model with four degrees of freedom are contained, after which a program for solving differential equations of motion is developed. The last part of the paper is dedicated to the presentation and analysis of the results of simulation of the dynamic behaviour of Yugo Florida vehicle.

Key words: vehicle dynamics, planar models, equations of motion, transfer functions

Садржај

1. УВОД.....	1
1.1 ГЕНЕРАЛИСАНЕ КООРДИНАТЕ	1
1.2 ОГРАНИЧЕЊА И ЈЕДНАЧИНЕ ОГРАНИЧЕЊА	2
1.3 ХОЛОНОМНА И НЕХОЛОНОМНА ОГРАНИЧЕЊА.....	2
1.4 СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ	2
1.5 ВИРТУЕЛНО ПОМЕРАЊЕ	2
1.6 ЊУТНОВА МЕХАНИКА	2
1.7 АНАЛИТИЧКА МЕХАНИКА	3
2. РАВАНСКИ ОСЦИЛАТОРНИ МОДЕЛИ ВОЗИЛА.....	4
2.1 ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА РАВАНСКИХ МОДЕЛА ВОЗИЛА	5
2.1.1 Једначине кретања двоосовинског модела возила са једном масом, без пригушења	5
2.1.2 Једначине кретања двоосовинског модела возила са једном масом и пригушењима	9
2.1.3 Једначине кретања двоосовинског модела возила са три масе	12
2.2 ПРЕНОСНЕ ФУНКЦИЈЕ РАВАНСКИХ МОДЕЛА ВОЗИЛА	14
2.2.1 Преносна функција двоосовинског модела једном масом без пригушења.....	14
2.2.2 Преносна функција двоосовинског модела са једном масом и пригушењима	16
2.2.3 Преносна функција двоосовинског модела са три масе	17
3. РАВАНСКИ МОДЕЛ ВОЗИЛА СА ТРИ МАСЕ – РАЗВОЈ ПРОГРАМА ЗА РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА КРЕТАЊА.....	20
3.1 ПРИПРЕМА ЈЕДНАЧИНА КРЕТАЊА ЗА РЕШАВАЊЕ У ПРОГРАМУ MATHCAD	23
4. ПРИКАЗ И АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА СИМУЛАЦИЈЕ	27
4.1 ДИЈАГРАМИ ПОБУДА ОД НЕРАВНИНА ПУТА НА ПРЕДЊИМ И ЗАДЊИМ ТОЧКОВИМА	27
4.2 ДИЈАГРАМИ ВЕРТИКАЛНОГ ОСЦИЛОВАЊА ПРЕДЊИХ И ЗАДЊИХ ТОЧКОВА	28
4.3 ДИЈАГРАМ ВЕРТИКАЛНОГ ОСЦИЛОВАЊА ОСЛОЂЕНЕ МАСЕ.....	29
4.4 ДИЈАГРАМ ГАЛОПИРАЊА ОСЛОЂЕНЕ МАСЕ	29
5. ЗАКЉУЧАК.....	30
ЛИТЕРАТУРА	31

1. УВОД

Моделирање возила ради изучавања његовог осцилаторног понашања има веома битну улогу у пројектовању ослањања возила, тј. у избору еластичних и пригушних параметара система еластичног ослањања. Да би возило имало квалитетно ослањање потребно је обезбедити следеће:

- одговарајућу осцилаторну удобност, тј. да се обезбеди минимални пренос осцилација у путнички простор (уколико еластични елементи ослањања имају мању крутост, то проузрокују већа релативна померања између ослоњених и неослоњених маса, али и ниже сопствене учестаности и надградње које могу негативно да се одразе на осцилаторну удобност);
- минималне промене динамичких сила које се преносе на надградњу како због удобности, тако и због трајности и безбедности;
- обезбедити такав ход система еластичног ослањања који би одговарао конструктивно дефинисаној геометрији унутрашњих блатобрана.

Проучавање вертикалних и угаоних осцилација у подужној равни симетрије возила, равни (x,z) , има за циљ одређивање преносних функција између улазне функције (побуде изазване неравнинама пута) и карактеристичних излазних функција (апсолутних и релативних померања, апсолутних или релативних убрзања, како ослоњених тако и неослоњених маса). Функцију побуде сматрамо познатом величином, задатом у временском или фреквентном домену [1].

Традиционалне методе формулисања једначина динамике моторних возила базиране су на теоријама Њутнове механике и аналитичке механике. Неке од ових дефиниција које се користе у динамици моторних возила су представљене у наредном тексту.

1.1 Генералисане координате

Скуп генералисаних координата представља било који скуп параметара који јединствено дефинишу положај и оријентацију система у односу на референтни положај. Оне могу бити зависне или независне.

За систем у покрету, генералисане координате које одређују систем могу варирати током времена. За означавање генералисаних координата користи се вектор-колона означен као $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$, где n представља укупан број генералисаних координата.

У Декартовим координатама, да би се описао равански систем који се састоји од b тела, максималан потребан број генералисаних координата је $n = 3 \times b$.

Укупни вектор координата система означен је са $q = [q_1^T, q_1^T, \dots, q_b^T]^T$, где вектор q_i представља вектор координата за i -то тело у систему [2].

1.2 Ограничења и једначине ограничења

Механички систем који је у покрету може бити подвргнут одређеним геометријским ограничењима и ограничењима кретања. Она се једноставно називају – ограничења. Када су ова ограничења представљена математичким једначинама, оне се називају једначине ограничења. Обично се ове једначине означавају на следећи начин:

$$\Phi \equiv \Phi(q) = 0. \quad (1.1)$$

1.3 Холономна и нехолономна ограничења

Холономна и нехолономна ограничења (везе) су класични механички концепти који се користе за класификацију ограничења и система. Ако једначине ограничења не садрже чланове са изводима, или су чланови са изводима интеграбилни, ова ограничења се називају холономна ограничења и таква ограничења су геометријска. Међутим, уколико једначине ограничења садрже изразе са изводима који нису интеграбилни у затвореном облику, таква ограничења се називају нехолономна. Таква ограничења су ограничења кретања, као што су услови брзине и убрзања који се намећу систему [2].

1.4 Степени слободе

Генералисане координате које задовољавају једначине ограничења у систему не морају увек бити независне. Минимални број координата потребан за описивање система представља број степени слободе.

1.5 Виртуелно померање

Виртуелно померање представља претпостављено инфинитезимално померање система на одређеној позицији са ограничењима, док је време константно. Услови наметнути виртуелном померању од стране једначина ограничења називају се једначине виртуелног померања. Виртуелно померање може бити транслаторно или угаоно, и обично се означава симболом δ .

1.6 Њутнова механика

Да би се успоставиле једначине динамике возила помоћу Њутнових закона, потребно је пратити следеће кораке. Прво, треба поједноставити систем и доћи до одговарајућег математичког модела који описује једноставан систем са крутим телима и масама које су повезане опругама и амортизерима. Затим, масе и тела се ослободе веза и црта се дијаграм слободног тела. На крају, примењују се формуле за масе и тела који су приказани на дијаграму слободног тела.

Динамичке једначине крутог тела у равни су [2]:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \sum F_i, \quad (1.2)$$

$$J \dot{\omega} = \sum M_i, \quad (1.3)$$

где је m - маса тела, r - померај тежишта, F_i - i -та сила која делује на тело, J - момент инерције тела око осе која пролази кроз тежиште, ω - угаона брзина тела, M_i - момент i -те силе која делује на тежиште тела.

1.7 Аналитичка механика

Теорије аналитичке механике су се доказале као користан метод у решавању проблема кретања система тела са ограничењима и кретања деформабилних тела. Аналитичка механика садржи углавном методе општих једначина динамике и Лагранжеве једначине прве и друге врсте, при чему се Лагранжеве једначине друге врсте највише користе.

За систем од b тела и n степени слободе, $q_1, q_2, \dots, q_n$ је скуп генералисаних координата. Лагранжеве једначине друге врсте могу се изразити као [2]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.4)$$

где су: T - кинетичка енергија и V - потенцијална енергија система.

2. РАВАНСКИ ОСЦИЛАТОРНИ МОДЕЛИ ВОЗИЛА

Како су возила комплексни осцилаторни системи са већим бројем степени слободe, теоријски, ови системи се могу поистоветити са реалним моделима, како се број степени слободe повећава. Стога је нормално моделе возила представити и са десетинама степени слободe. Уколико се разматра удобност путника, човек се, такође, може укључити у модел.

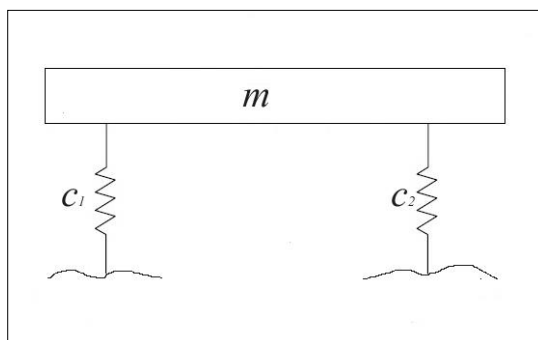
Пут се представља као модел који задаје улазне сигнале са једним точком или четири точка (у зависности од комплексности модела) који су узроковани неправилностима на путевима. Ради прецизности истраживања, користе се што вернији, детаљнији динамички модели, што изискује повећање броја степени слободe. Повећање броја степени слободe указује на то да је потребан већи број параметара за прорачун. Поред тога, ефикасност прорачуна се може смањити повећањем прецизности рачунања. Због тога, често се прибегава поједностављењу динамичких модела, тако да буду једноставни за прорачуне, али и да буду приближни реалним моделима [3].

Најједноставнији модели треба да обухвате само најутицајније параметре, док мање утицајне треба занемарити. На тај начин добијамо једноставан модел за који су, како аналитичка обрада, тако и практична провера релативно једноставни, а материјални трошкови и временски губици минимални [4].

Равански осцилаторни модели су дводимензионални модели са два или више степени слободe који, осим одговарајућих померања у равни, укључују и ротацију око осе нормалне на раван модела [1]. Ови модели узимају у обзир вертикална померања ослоњених и неослоњених маса, узимајући у обзир угаоно померање око попречне осе (галопирање). У даљем тексту могу се видети једначине кретања и преносне функције за три раванска модела која се најчешће примењују у прорачунима.

Класични, двоосовински модел, се може посматрати као механички систем са три основне масе, међусобно повезане еластичним елементима. Осцилације аутомобила су углавном проузроковане дејством неравнина пута. Оне изазивају додатно динамичко оптерећење возила и пута с једне стране, односно оптерећење и замор возача и путника с друге стране.

На слици 1 приказан је најједноставнији модел осциловања возила масе m са два степена слободe кретања. Крутости опруга система еластичног ослањања су означене са c_1 и c_2 .



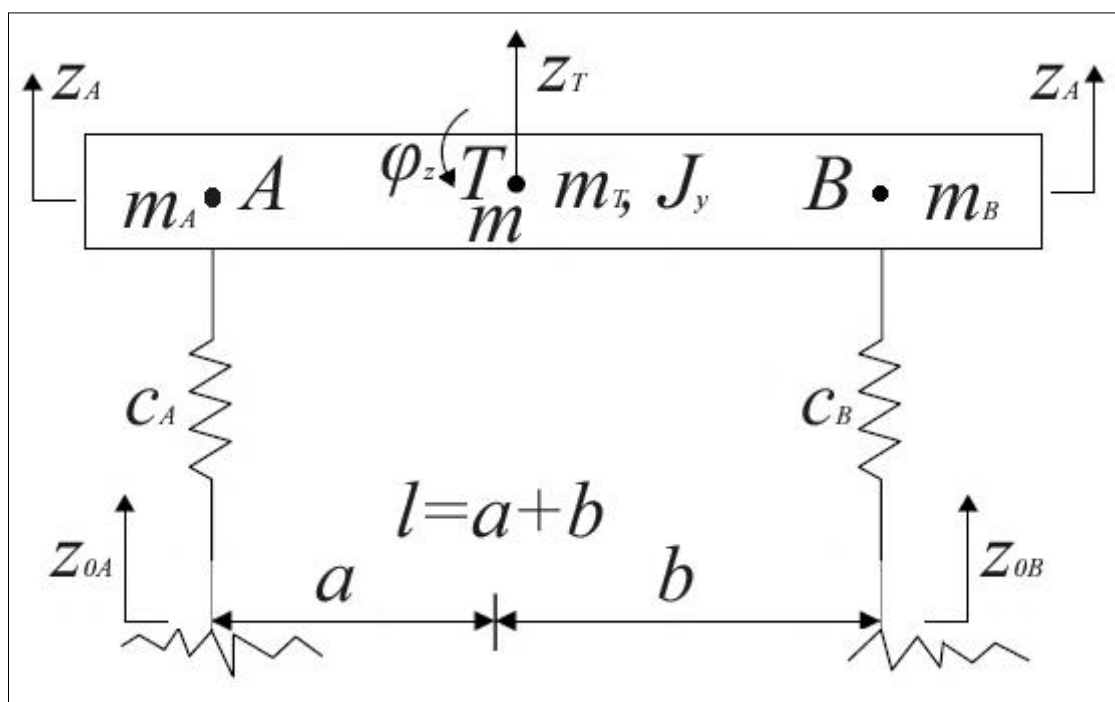
Слика1:Најједноставнији дводимензионални осцилаторни модел возила

2.1 Једначине кретања раванских модела возила

Дводимензионални модел возила у подужној равни узима у обзир вертикална померања ослоњених и неослоњених маса, као и угаоно померање ослоњене масе око попречне осе, у („галопирање“). У аутомобилском инжењерству, уобичајено је дефинисати и заменски модел који се састоји из маса које се транслаторно померају. Маса тела у заменском моделу је замењена са три масе. Ове масе су повезане крутом, бестежинском гредом [5].

2.1.1 Једначине кретања двоосовинског модела возила са једном масом, без пригушења

Двоосовински модел возила масе m са једном масом, без пригушења, приказан је на слици 2.



Слика 2: Двоосовински модел возила са једном масом, без пригушења

Ознаке на слици 2 су следеће:

a, b - подужна растојања тежишта од предње и задње осовине, респективно,

l - међуосовинско растојање возила,

z_{0A}, z_{0B} - вертикална побуда од неравнина пута на предњој и задњој осовини, респективно,

z_A, z_B - вертикална померања тачака A и B , респективно,

z_T - вертикално кретање тежишта,

φ - угаоно заокретање масе око попречне тежишне осе,

c_A, c_B - еквивалентне крутости система еластичног ослањања напред и позади, респективно.

Силе пригушења код овог модела су занемарене ($k_1 = k_2 = 0$).

Код овог модела, надградња је представљена крутим штапом масе m , момента инерције заокретања масе око попречне тежишне осе, $J_y = m \cdot \rho_y^2$, где је ρ_y - полупречник инерције за у-осу. Опруге представљају упрошћен систем еластичног ослањања, без узимања у обзир пригушења у систему. Управо то овај модел чини најједноставнијом раванским осцилаторним моделом возила. Маса надградње m може да се замени еквивалентним масама: масом која оптерећује предњу осовину (m_A), задњу осовину (m_B) и тежиште (m_T). Услови који морају бити задовољени су:

$$m_A + m_B + m_T = m,$$

$$J_y = m \cdot \rho_y^2 = m_A \cdot a^2 + m_B \cdot b^2, \quad (2.1)$$

$$m_A \cdot g \cdot a - m_B \cdot g \cdot b = 0.$$

На основу зависности (2.1) могу се извести релације за масе m_A , m_B и m_T , које износе:

$$m_A = m \frac{\rho_y^2}{a \cdot l}, \quad (2.2)$$

$$m_B = m \frac{\rho_y^2}{b \cdot l}, \quad (2.3)$$

$$m_T = m \left(1 - \frac{\rho_y^2}{a \cdot b} \right) \quad (2.4)$$

Масе предњег и задњег дела ће осциловати независно једино уколико је маса m_T једнака нули. Тада долази до распрезања осциловања. То значи да побуда на једној осовини не изазива померање друге осовине:

$$m \left(1 - \frac{\rho_y^2}{a \cdot b} \right) = 0, \quad (2.5)$$

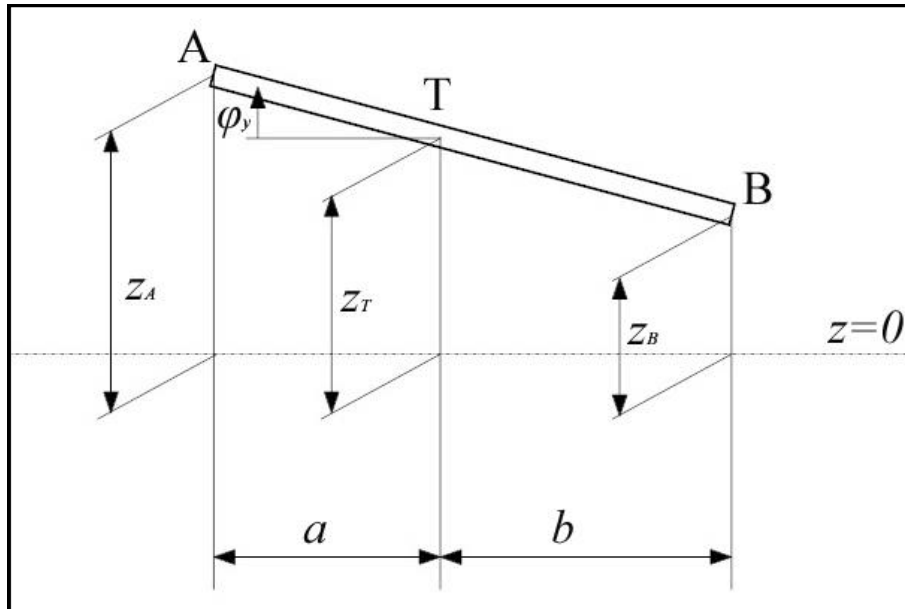
$$1 - \frac{\rho_y^2}{a \cdot b} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\rho_y^2}{a \cdot b} = 1, \quad (2.7)$$

$$\rho_y^2 = a \cdot b - \text{услов распрезања осциловања.} \quad (2.8)$$

Однос $\frac{\rho_y^2}{a \cdot b} = \varepsilon$ представља коефицијент расподеле масе. Статистички гледано, за путничке аутомобиле вредност коефицијента расподеле масе ε се креће од 0,8 до 1,2. У случају да је вредност коефицијента расподеле масе $\varepsilon = 1$, вертикални помаци z_A и z_B неће бити усклађени, док ће фреквенција ослоњене масе бити иста као фреквенција код осциловања тачака A и B [2].

Да би се извеле једначине кретања, потребно је уочити зависности које постоје између вертикалних померања тачака A и B и померања тежишта возила (z_T, φ_y) , што се може уочити на слици 3.



Слика 3: Померања тачака A и B и тежишта возила T

За мале вредности угла φ важе следеће зависности:

$$z_A = z_T + a \cdot \operatorname{tg} \varphi_y \approx z_T + a \cdot \varphi_y,$$

$$z_B = z_T - b \cdot \operatorname{tg} \varphi_y \approx z_T - b \cdot \varphi_y,$$

(2.9)

$$\dot{z}_a = \dot{z}_T + a \cdot \dot{\varphi}_y$$

$$\dot{z}_b = \dot{z}_T - b \cdot \dot{\varphi}_y.$$

Кинетичка и потенцијална енергија се могу представити као:

$$E_K = \frac{1}{2} m \cdot \dot{z}_T + \frac{1}{2} J_y \dot{\phi}_y^2 \quad (2.10)$$

$$E_P = \frac{1}{2} c_A (z_A - z_{0A})^2 + \frac{1}{2} c_B (z_B - z_{0B})^2 \quad (2.11)$$

Нека су генералисане координате у овом систему z_A и z_B . У том случају из (2.9) следи:

$$z_T = \frac{a \cdot z_B + b \cdot z_A}{l}, \quad \phi_y = \frac{z_A - z_B}{l} \quad (2.12)$$

$$\dot{z}_T = \frac{a}{l} \cdot \dot{z}_B + \frac{b}{l} \cdot \dot{z}_A, \quad \dot{\phi}_y = \frac{1}{l} \cdot \dot{z}_A - \frac{1}{l} \cdot \dot{z}_B. \quad (2.13)$$

Заменом израза (2.12) и (2.13) у израз (2.10), следи:

$$E_K = \frac{1}{2} \frac{m}{l^2} (a \cdot \dot{z}_B + b \cdot \dot{z}_A)^2 + \frac{1}{2} \frac{J_y}{l^2} (\dot{z}_A - \dot{z}_B)^2 \quad (2.14)$$

Ако се изрази (2.10) и (2.14) диференцирају по z_A и по z_B , а затим замене у израз за Лагранжеве једначине друге врсте:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial E_P}{\partial q} + \frac{\partial E_\phi}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (2.15)$$

добија се систем једначина кретања у облику:

$$\frac{m \cdot b}{l^2} (a \cdot \ddot{z}_B + b \cdot \ddot{z}_A) + \frac{J_y}{l^2} (\ddot{z}_A - \ddot{z}_B) + c_A (z_A - z_{0A}) = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{m \cdot a}{l^2} (a \cdot \ddot{z}_B + b \cdot \ddot{z}_A) + \frac{J_y}{l^2} (\ddot{z}_A - \ddot{z}_B) + c_B (z_B - z_{0B}) = 0, \quad (2.17)$$

Уколико се узме у обзир да је $J_y = m \cdot \rho_y^2$, изрази (2.16) и (2.17) могу да се напишу у следећем облику:

$$\frac{m}{l^2} (b^2 + \rho_y^2) \cdot \ddot{z}_A + \frac{m}{l^2} (a \cdot b - \rho_y^2) \cdot \ddot{z}_B + c_A \cdot z_A = c_A \cdot z_{0A}, \quad (2.18)$$

$$\frac{m}{l^2}(a^2 + \rho_y^2) \cdot \ddot{z}_B + \frac{m}{l^2}(a \cdot b - \rho_y^2) \cdot \ddot{z}_A + c_B \cdot z_B = c_B \cdot z_{0B}. \quad (2.19)$$

Нека важе релације:

$$\begin{aligned} M_1 &= m \frac{b^2 + \rho_y^2}{l^2}, \\ M_2 &= m \frac{a^2 + \rho_y^2}{l^2}, \\ M_3 &= m \frac{a \cdot b - \rho_y^2}{l^2}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

тако да изрази (2.18) и (2.19) могу да се напишу у облику:

$$M_1 \cdot \ddot{z}_A + M_3 \cdot \ddot{z}_B + c_A \cdot z_A = H_1, \quad (2.21)$$

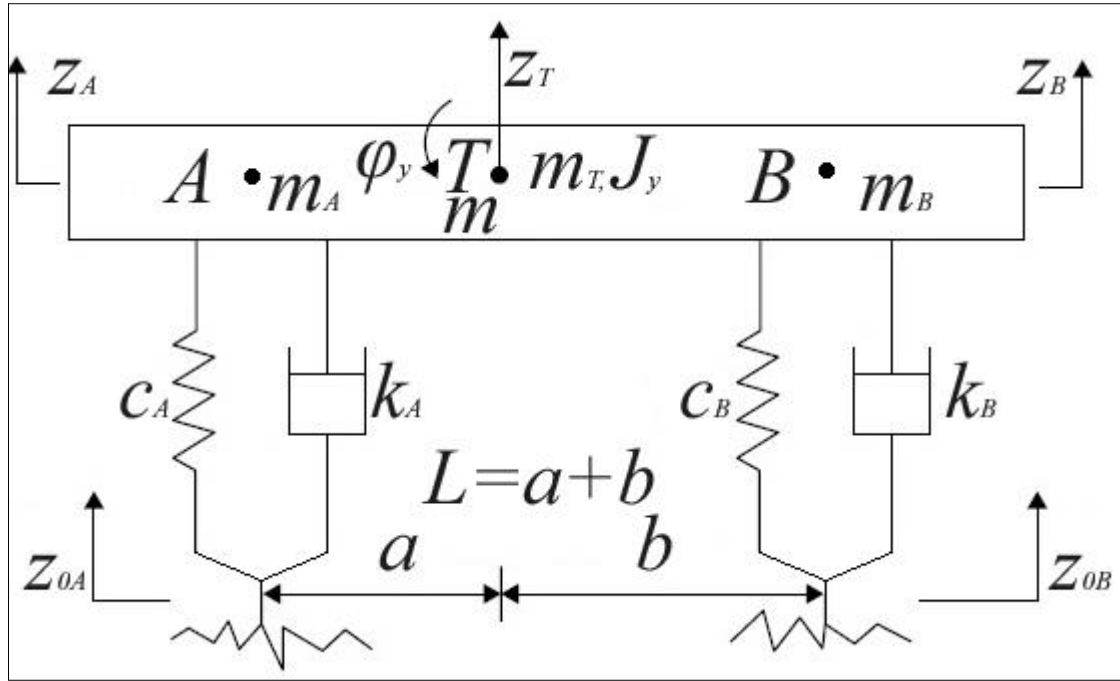
$$M_2 \cdot \ddot{z}_B + M_3 \cdot \ddot{z}_A + c_B \cdot z_B = H_2. \quad (2.22)$$

Добијене једначине осцилаторног кретања међусобно су спрегнуте, јер обе једначине садрже обе променљиве z_A и z_B . Следи закључак да на осцилаторно померање тачке А утиче померање тачке В и обратно. Уколико би ишчезао члан $M_3 \cdot \ddot{z}_A$ из обе једначине, осцилаторна кретања тачака А и В била би међусобно независна. Као што смо видели тај услов је испуњен уколико је $a \cdot b = \rho_y^2$ [4].

2.1.2 Једначине кретања двоосовинског модела возила са једном масом и пригушењима

Двоосовински модел возила са једном масом и пригушењима приказан је на слици 4. Пригушења у амортизерима система еластичног ослањања напред и позади означена су са k_A , k_B , респективно. Остале ознаке су идентичне одговарајућим ознакама на слици 3.

И у овом случају маса надградње, m , може се заменити еквивалентним масама и то: масом тежишта (m_T), масом која оптерећује предњу осовину (m_A) и масом која оптерећује задњу осовину (m_B).



Слика 4: Двоосовински модел возила са једном масом и пригушењима

Код система са слике 4, поред кинетичке и потенцијалне енергије, уводи се и енергија дисипације, E_Φ :

$$E_K = \frac{1}{2} m \cdot \dot{z}_T^2 + \frac{1}{2} J_y \dot{\varphi}_y^2, \quad (2.23)$$

$$E_P = \frac{1}{2} c_A (z_A - z_{0A})^2 + \frac{1}{2} c_B (z_B - z_{0B})^2, \quad (2.24)$$

$$E_\Phi = \frac{1}{2} k_A (\dot{z}_A - \dot{z}_{0A})^2 + \frac{1}{2} k_B (\dot{z}_B - \dot{z}_{0B})^2. \quad (2.25)$$

У изразима за кинетичку, потенцијалну и енергију дисипације, независне координате могу бити или z_A и z_B , или z_T и φ_y . Нека су генералисане координате z_A и z_B . Онда је:

$$z_T = \frac{a \cdot z_B + b \cdot z_A}{l}, \quad \varphi_y = \frac{z_A - z_B}{l} \quad (2.26)$$

$$\dot{z}_T = \frac{a}{l} \cdot \dot{z}_B + \frac{b}{l} \cdot \dot{z}_A, \quad \dot{\varphi}_y = \frac{1}{l} \cdot \dot{z}_A - \frac{1}{l} \cdot \dot{z}_B. \quad (2.27)$$

Заменом израза (2.27) у израз (2.23) добиће се релација за кинетичку енергију која је идентична релацији за кинетичку енергију у случају двоосовинског возила једном масом без пригушења:

$$E_K = \frac{1}{2} \frac{m}{l^2} (a \cdot \dot{z}_B + b \cdot \dot{z}_A)^2 + \frac{1}{2} \frac{J_y}{l^2} (\dot{z}_A \cdot \dot{z}_B)^2. \quad (2.28)$$

Изрази за потенцијалну и енергију дисипације се не мењају.

Општа форма Лагранжевих једначина друге врсте гласи:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial E_P}{\partial q} + \frac{\partial E_\phi}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (2.29)$$

Диференцирањем израза за потенцијалну енергију, енергију дисипације и израза (2.28) по z_A и z_B и мењајући их у једначину (2.29) добија се систем једначина у облику:

$$\frac{m \cdot b}{l^2} (a \cdot \ddot{z}_B + b \cdot \ddot{z}_A) + \frac{J_y}{l^2} (\ddot{z}_A - \ddot{z}_B) + c_A (z_A - z_{0A}) + k_A (\dot{z}_A - \dot{z}_{0A}) = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{m \cdot a}{l^2} (a \cdot \ddot{z}_B + b \cdot \ddot{z}_A) + \frac{J_y}{l^2} (\ddot{z}_A - \ddot{z}_B) + c_B (z_B - z_{0B}) + k_B (\dot{z}_B - \dot{z}_{0B}) = 0. \quad (2.31)$$

Уколико се узме у обзир да је $J_y = m \cdot \rho_y^2$, изрази (2.30) и (2.31) могу се написати у следећем облику:

$$\frac{m}{l^2} (b^2 + \rho_y^2) \cdot \ddot{z}_A + \frac{m}{l^2} (a \cdot b - \rho_y^2) \cdot \ddot{z}_B + k_A \cdot \dot{z}_A + c_A \cdot z_A = k_A \cdot \dot{z}_{0A} + c_A \cdot z_{0A}, \quad (2.32)$$

$$\frac{m}{l^2} (a^2 + \rho_y^2) \cdot \ddot{z}_B + \frac{m}{l^2} (a \cdot b - \rho_y^2) \cdot \ddot{z}_A + k_B \cdot \dot{z}_B + c_B \cdot z_B = k_B \cdot \dot{z}_{0B} + c_B \cdot z_{0B}. \quad (2.33)$$

Увођењем ознака:

$$\begin{aligned} M_1 &= m \frac{b^2 + \rho_y^2}{l^2}, \\ M_2 &= m \frac{a^2 + \rho_y^2}{l^2}, \\ M_3 &= m \frac{a \cdot b - \rho_y^2}{l^2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

једначине (2.32) и (2.33) се могу написати у следећем облику:

$$M_1 \cdot \ddot{z}_A + M_3 \cdot \ddot{z}_B + k_A \cdot \dot{z}_A + c_A \cdot z_A = H_1, \quad (2.35)$$

$$M_2 \cdot \ddot{z}_B + M_3 \cdot \ddot{z}_A + k_B \cdot \dot{z}_B + c_B \cdot z_B = H_2 \quad (2.36)$$

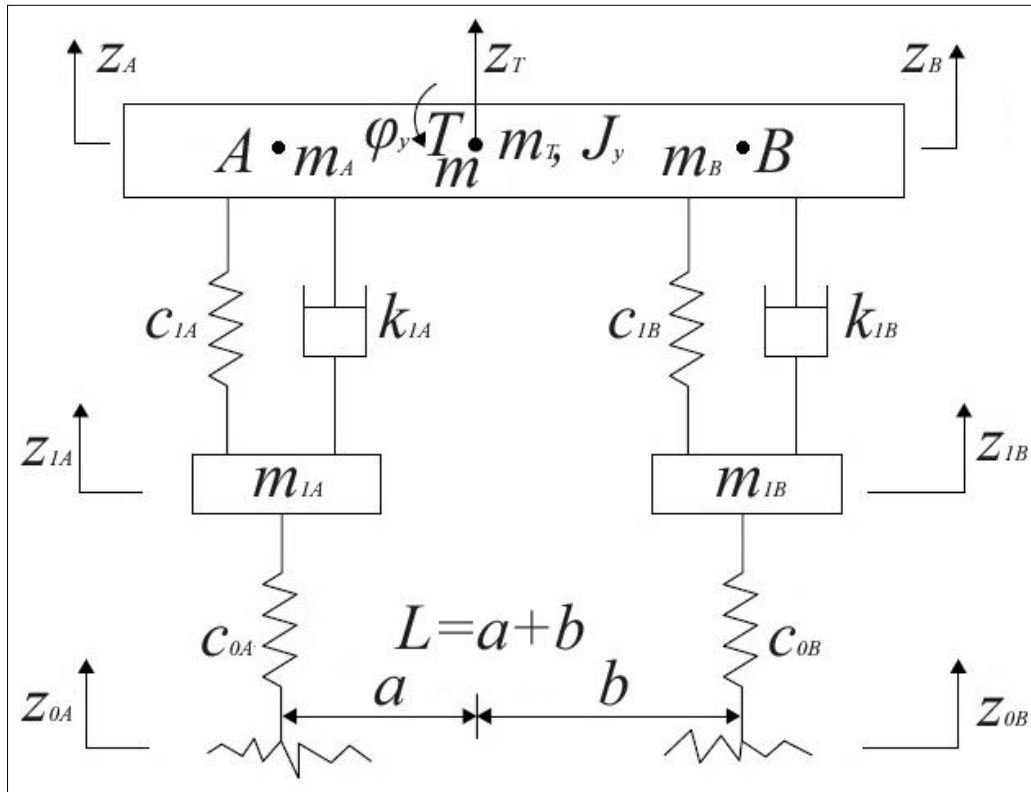
и оне представљају једначине кретања двоосовинског модела возила са једном масом и пригушењима. У изразима (2.35) и (2.36), H_1 и H_2 представљају побудне функције:

$$H_1 = k_A \cdot \dot{z}_{0A} + c_A \cdot z_{0A}, \quad (2.37)$$

$$H_2 = k_B \cdot \dot{z}_{0B} + c_B \cdot z_{0B}. \quad (2.38)$$

2.1.3 Једначине кретања двоосовинског модела возила са три масе

Двоосовински модел возила са три масе приказан је на слици 5. Модел возила сада има и пнеуматике еквивалентне масе m_{1A} , m_{1B} и крутости c_{0A} и c_{0B} , напред и позади, респективно. Утицај пригушења пнеуматика се може занемарити. Остале ознаке су еквивалентне ознакама на слици 4.



Слика 5: Двоосовински модел возила са три масе

На основу Даламберовог принципа постоје следеће релације:

$$-m_A \ddot{z}_A - m_B \ddot{z}_B - k_{1A}(\dot{z}_A - \dot{z}_{1A}) - k_{1B}(\dot{z}_B - \dot{z}_{1B}) - c_{1A}(z_A - z_{1A}) - c_{1B}(z_B - z_{1B}) = 0, \quad (2.39)$$

$$-J_y \cdot \ddot{\alpha} - (c_{1A}(z_A - z_{1A}) + k_{1A}(\dot{z}_A - \dot{z}_{1A})) \cdot a + (c_{1B}(z_B - z_{1B}) + k_{1B}(\dot{z}_B - \dot{z}_{1B})) \cdot b = 0, \quad (2.40)$$

$$F_{c_{1A}} + F_{k_{1A}} - F_{1A}^{in} - F_{c_{0A}} = 0, \quad (2.41)$$

$$F_{c_{1B}} + F_{k_{1B}} - F_{1B}^{in} - F_{c_{0B}} = 0. \quad (2.42)$$

Како је $m_A = m \frac{b}{l}$ и $m_B = m \frac{a}{l}$ израз (2.39) се може даље написати као:

$$m \left(\frac{a \cdot \ddot{z}_B + b \cdot \ddot{z}_A}{l} \right) - k_{1A}(\dot{z}_A - \dot{z}_{1A}) - k_{1B}(\dot{z}_B - \dot{z}_{1B}) - c_{1A}(z_A - z_{1A}) - c_{1B}(z_B - z_{1B}) = 0, \quad (2.43)$$

а изрази (2.41) и (2.42):

$$m_{1A} \ddot{z}_{1A} - k_{1A}(\dot{z}_A - \dot{z}_{1A}) - c_{1A}(z_A - z_{1A}) + c_{0A}(z_{1A} - z_{0A}) = 0, \quad (2.44)$$

$$m_{1B} \ddot{z}_{1B} - k_{1B}(\dot{z}_B - \dot{z}_{1B}) - c_{1B}(z_B - z_{1B}) + c_{0B}(z_{1B} - z_{0B}) = 0. \quad (2.45)$$

Након множења и сређивања диференцијалних једначина (2.39) и (2.40) и трансформације те две једначине тако што се прва множи са b и сабере са другом, а затим множи са a и одузме од друге, добија се систем једначина:

$$m \frac{b^2 + \rho_y^2}{l^2} \ddot{z}_A + k_{1A} \cdot \dot{z}_A + c_{1A} \cdot z_A + m \frac{a \cdot b - \rho_y^2}{l^2} \ddot{z}_B - k_{1A} \cdot \dot{z}_{1A} - c_{1A} \cdot z_{1A} = 0, \quad (2.46)$$

$$m \frac{a + \rho_y^2}{l^2} \ddot{z}_B + k_{1B} \cdot \dot{z}_B + c_{1B} \cdot z_B + m \frac{a \cdot b - \rho_y^2}{l^2} \ddot{z}_A - k_{1B} \cdot \dot{z}_{1B} - c_{1B} \cdot z_{1B} = 0, \quad (2.47)$$

$$m_{1A} \ddot{z}_{1A} + k_{1A} \dot{z}_{1A} + c_{1A} z_{1A} - k_{1A} \dot{z}_A - c_{1A} z_A = c_{0A}(z_{0A} - z_{1A}), \quad (2.48)$$

$$m_{1B} \ddot{z}_{1B} + k_{1B} \dot{z}_{1B} + c_{1B} z_{1B} - k_{1B} \dot{z}_B - c_{1B} z_B = c_{0B}(z_{0B} - z_{1B}). \quad (2.49)$$

На основу до сада изведених релација, може се закључити да осцилације тачке А зависе од осцилација тачке В, и обратно, тако да побуђивање осцилација једне тачке изазива осцилације друге тачке.

2.2 Преносне функције раванских модела возила

Преносна функција неког система представља однос излаза и улаза система у комплексном облику, што се може представити следећом (општом) релацијом:

$$H(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_1}. \quad (2.50)$$

2.2.1 Преносна функција двоосовинског модела са једном масом без пригушења

За двоосовински модел са једном масом који је приказан на слици 2, функције побуде од неравнина пута су z_{0A} и z_{0B} , док су функције одзива, као осцилације предњег и задњег дела возила означене са z_A и z_B или као кретања ослоњене масе као z и φ .

На основу Даламберовог принципа, за масе m_A и m_B важиће следеће релације:

$$m_A \ddot{z}_A + c_A (z_A - z_{0A}) = 0, \quad (2.51)$$

$$m_B \ddot{z}_B + c_B (z_B - z_{0B}) = 0. \quad (2.52)$$

Претпостављајући да су z_A , z_{0A} , z_B и z_{0B} хармонијске функције:

$$z_{0A} = A_0 e^{j\omega t}, \quad (2.53)$$

$$z_A = A e^{(j\omega t + \alpha)}, \quad (2.54)$$

$$z_{0B} = B_0 e^{j\omega(t-\tau)}, \quad (2.55)$$

$$z_B = B e^{(j\omega(t-\tau) + \beta)}. \quad (2.56)$$

где су:

A_0, B_0, A, B - одговарајуће амплитуде функција,

ω - кружна фреквенција побуде од неравнина пута,

α и β - фазна кашњења између вертикалних осцилација точка и одговарајућег дела возила, предњег или задњег, респективно,

$\tau = \frac{l}{v}$ - време кашњења побуде на задњим точковима у односу на предње, под условом да се возило међуосовинског растојања, l , креће константном брзином, v .

Изводи ових функција су:

$$\dot{z}_A = j\omega z_A, \quad (2.57)$$

$$\ddot{z}_A = -\omega^2 z_A, \quad (2.58)$$

$$\dot{z}_B = j\omega z_B, \quad (2.59)$$

$$\ddot{z}_B = -\omega^2 z_B. \quad (2.60)$$

Заменом израза (2.53), (2.54) и (2.58) у (2.51); и израза (2.55), (2.56) и (2.60) у (2.52), добијају се следеће релације:

$$-m_A \omega^2 z_A + c_A z_A - c_A z_{0A} = 0, \quad (2.61)$$

$$-m_B \omega^2 z_B + c_B z_B - c_B z_{0B} = 0. \quad (2.62)$$

Даљим сређивањем једначина (2.61) и (2.62) добија се:

$$(c_A - m_A \omega^2) z_A = c_A z_{0A}, \quad (2.63)$$

$$\frac{z_A}{z_{0A}} = \frac{c_A}{c_A - m_A \omega^2}, \quad (2.64)$$

$$(c_B - m_B \omega^2) z_B = c_B z_{0B}, \quad (2.65)$$

$$\frac{z_B}{z_{0B}} = \frac{c_B}{c_B - m_B \omega^2}. \quad (2.66)$$

Релације (2.64) и (2.66) представљају преносне функције за двоосовински модел са једном масом, без пригушења.

2.2.2 Преносна функција двоосовинског модела са једном масом и пригушењима

На основу Даламберовог принципа, за еквивалентне масе m_A и m_B са слике 3 важе следеће релације:

$$m_A \ddot{z}_A + k_A (\dot{z}_A - \dot{z}_{0A}) + c_A (z_A - z_{0A}) = 0, \quad (2.67)$$

$$m_B \ddot{z}_B + k_B (\dot{z}_B - \dot{z}_{0B}) + c_B (z_B - z_{0B}) = 0. \quad (2.68)$$

Претпостављајући да су z_A , z_{0A} , z_B и z_{0B} хармонијске функције:

$$z_{0A} = A_0 e^{j\omega t}, \quad (2.69)$$

$$z_A = A e^{(j\omega t + \alpha)}, \quad (2.70)$$

$$z_{0B} = B_0 e^{j\omega(t-\tau)}, \quad (2.71)$$

$$z_B = B e^{(j\omega(t-\tau) + \beta)}, \quad (2.72)$$

и да су изводи:

$$\dot{z}_A = j\omega z_A, \quad (2.73)$$

$$\ddot{z}_A = -\omega^2 z_A, \quad (2.74)$$

$$\dot{z}_B = j\omega z_B, \quad (2.75)$$

$$\ddot{z}_B = -\omega^2 z_B, \quad (2.76)$$

Заменом израза (2.69), (2.70), (2.73) и (2.74) у (2.67) и заменом израза (2.71), (2.72), (2.75) и (2.76) у (2.68) добијају се следеће релације:

$$-m_A \omega^2 z_A + jk_A \omega z_A - jk_A \omega z_{0A} + c_A z_A - c_A z_{0A} = 0, \quad (2.77)$$

$$-m_B \omega^2 z_B + jk_B \omega z_B - jk_B \omega z_{0B} + c_B z_B - c_B z_{0B} = 0. \quad (2.78)$$

Даљим сређивањем израза (2.77) и (2.78) добија се:

$$(c_A - m_A \omega^2 + jk_A \omega) z_A = (c_A + jk_A \omega) z_{0A}, \quad (2.79)$$

$$\frac{z_A}{z_{0A}} = \frac{c_A + jk_A \omega}{c_A - m_A \omega^2 + jk_A \omega}, \quad (2.80)$$

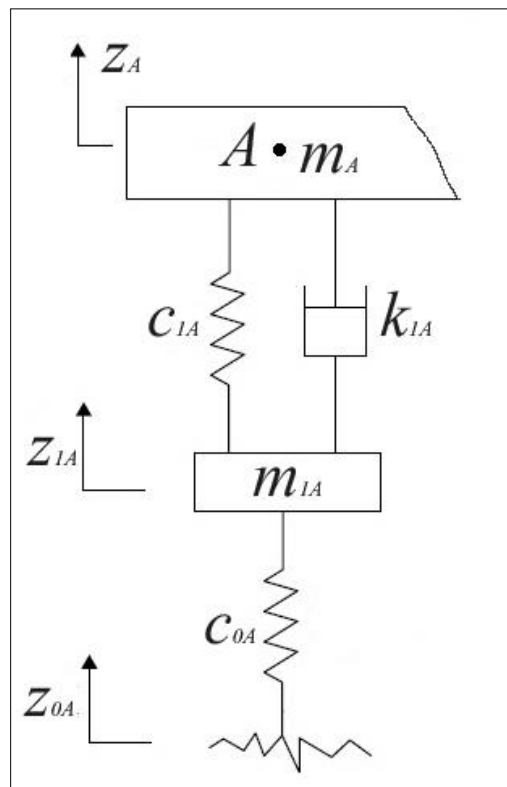
$$(c_B - m_B \omega^2 + jk_B \omega) z_B = (c_B + jk_B \omega) z_{0B}, \quad (2.81)$$

$$\frac{z_B}{z_{0B}} = \frac{c_B + jk_B \omega}{c_B - m_B \omega^2 + jk_B \omega}. \quad (2.82)$$

Релације (2.80) и (2.82) представљају преносне функције за двоосовински модел са једном масом и пригушењима.

2.2.3 Преносна функција двоосовинског модела са три масе

За добијање преносних функција двоосовинског модела приказаног на слици 5, потребно је распрегнути модел на два дела, део везан за масу m_A и део везан за масу m_B , тако да ће бити довољно приказати само део модела везан за масу m_A . Тај модел је приказан на слици 6.



Слика 6: Део двоосовинског модела возила са три масе везан за масу m_A

На основу слике 6 могу се извести следеће две једначине:

- за масу m_A

$$F_A^{in} + F_{c_{1A}} + F_{k_{1A}} = 0, \quad (2.83)$$

$$m_A \ddot{z}_A + k_{1A} (\dot{z}_A - \dot{z}_{1A}) + c_{1A} (z_A - z_{1A}) = 0, \quad (2.84)$$

$$m_A \ddot{z}_A + k_{1A} \dot{z}_A + c_{1A} z_A = k_{1A} \dot{z}_{1A} + c_{1A} z_{1A}. \quad (2.85)$$

- за масу m_{1A}

$$F_{c_{1A}} + F_{k_{1A}} - F_{1A}^{in} - F_{c_{0A}} = 0, \quad (2.86)$$

$$m_{1A} \ddot{z}_{1A} - k_{1A} (\dot{z}_A - \dot{z}_{1A}) - c_{1A} (z_A - z_{1A}) + c_{0A} (z_{1A} - z_{0A}) = 0, \quad (2.87)$$

$$m_{1A} \ddot{z}_{1A} - k_{1A} \dot{z}_A + k_{1A} \dot{z}_{1A} - c_{1A} z_A + c_{1A} z_{1A} + c_{0A} z_{1A} - c_{0A} z_{0A} = 0, \quad (2.88)$$

$$m_{1A} \ddot{z}_{1A} + k_{1A} \dot{z}_{1A} + (c_{1A} + c_{0A}) z_{1A} - k_{1A} \dot{z}_A - c_{1A} z_A = c_{0A} z_{0A}. \quad (2.89)$$

Заменом потребних релација (2.69) до (2.76) у (2.85) и (2.89) добија се:

$$-m_A \omega^2 z_A + j k_{1A} \omega z_A + c_{1A} z_A = j k_{1A} \omega z_{1A} + c_{1A} z_{1A}, \quad (2.90)$$

$$-m_{1A} \omega^2 z_{1A} + j k_{1A} \omega z_{1A} + (c_{1A} + c_{0A}) z_{1A} - j k_{1A} \omega z_A - c_{1A} z_A = c_{0A} z_{0A}. \quad (2.91)$$

Из претходне две релације могу се уочити међусобне зависности. Њиховим сређивањем добија се следеће:

$$(c_{1A} - m_A \omega^2 + j k_{1A} \omega) z_A = (c_{1A} + j k_{1A} \omega) z_{1A} \Rightarrow z_{1A} = \frac{c_{1A} - m_A \omega^2 + j k_{1A} \omega}{c_{1A} + j k_{1A} \omega} z_A, \quad (2.92)$$

$$(c_{1A} + c_{0A} - m_{1A} \omega^2 + j k_{1A} \omega) z_{1A} - (c_{1A} + j k_{1A} \omega) z_A = c_{0A} z_{0A}, \quad (2.93)$$

$$\left((c_{1A} + c_{0A} - m_{1A}\omega^2 + jk_{1A}\omega) \frac{c_{1A} - m_A\omega^2 + jk_{1A}\omega}{c_{1A} + jk_{1A}\omega} - (c_{1A} + jk_{1A}\omega) \right) z_A = c_{0A} z_{0A}, \quad (2.94)$$

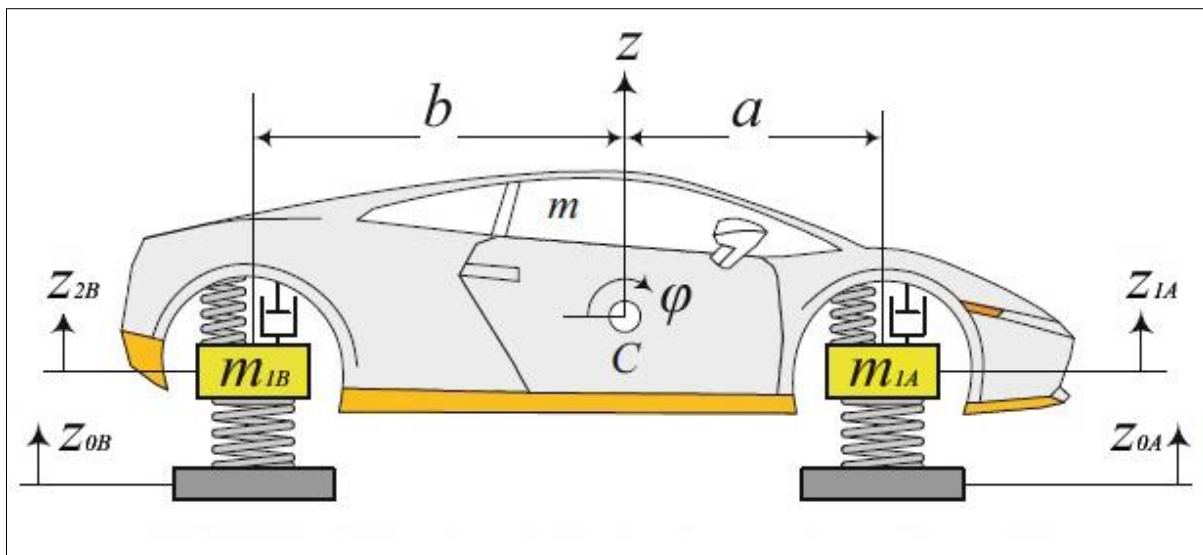
из чега се коначно може добити сложена релација за преносну функцију предњег дела двоосовинског модела возила три масе:

$$\frac{z_A}{z_{0A}} = \frac{c_{0A}}{(c_{1A} + c_{0A} - m_{1A}\omega^2 + jk_{1A}\omega) \frac{c_{1A} - m_A\omega^2 + jk_{1A}\omega}{c_{1A} + jk_{1A}\omega} - (c_{1A} + jk_{1A}\omega)}. \quad (2.95)$$

3. РАВАНСКИ МОДЕЛ ВОЗИЛА СА ТРИ МАСЕ – РАЗВОЈ ПРОГРАМА ЗА РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА КРЕТАЊА

Равански модел возила са три масе је одличан за испитивање и оптимизацију пригушења возила услед вибрација. Међутим, осцилаторни модел возила се може проширити тако да укључује и галопирање и остале врсте вибрација [5].

Модел на слици 7 представља равански модел возила са три масе у коме се узимају у обзир пригушења система еластичног ослањања.



Слика 7: Равански модел возила са три масе [6]

Једначине кретања модела са слике 7 су:

$$m\ddot{z} + k_{1A}(\dot{z} - \dot{z}_{1A} - a\dot{\varphi}) + k_{1B}(\dot{z} - \dot{z}_{1B} + b\dot{\varphi}) + c_{1A}(z - z_{1A} - a\varphi) + c_{1B}(z - z_{1B} + b\varphi) = 0, \quad (3.1)$$

$$J_y\ddot{\varphi} - ak_{1A}(\dot{z} - \dot{z}_{1A} - a\dot{\varphi}) + bk_{1B}(\dot{z} - \dot{z}_{1B} - b\dot{\varphi}) - ac_{1A}(z - z_{1A} - a\varphi) + bc_{1B}(z - z_{1B} - b\varphi) = 0 \quad (3.2)$$

$$m_{1A}\ddot{z}_{1A} - k_{1A}(\dot{z} - \dot{z}_{1A} - a\dot{\varphi}) + c_{0A}(z_{1A} - z_{0A}) - c_{1A}(z - z_{1A} - a\varphi) = 0, \quad (3.3)$$

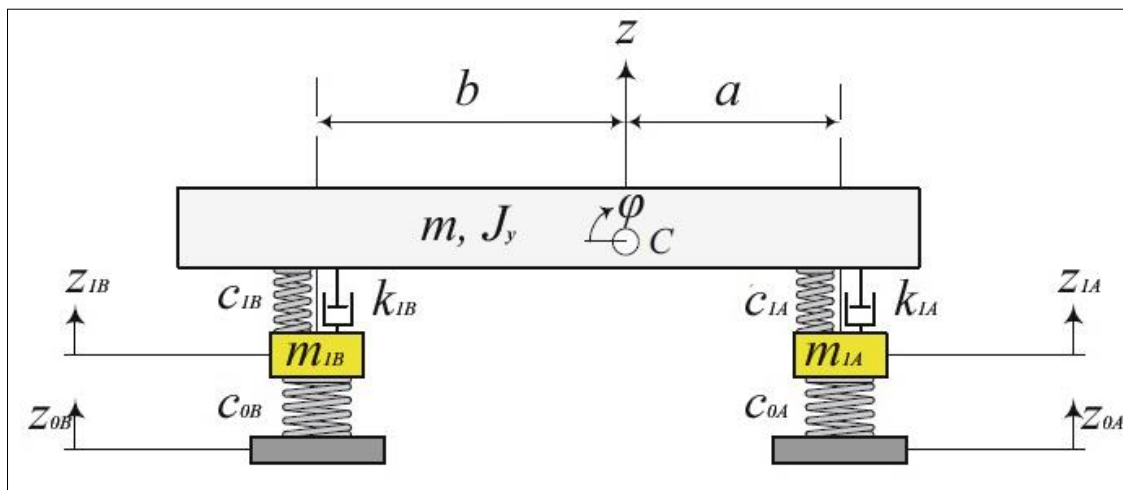
$$m_{1B}\ddot{z}_{1B} - k_{1B}(\dot{z} - \dot{z}_{1B} + b\dot{\varphi}) + c_{0B}(z_{1B} - z_{0B}) - c_{1B}(z - z_{1B} + b\varphi) = 0. \quad (3.4)$$

У табели 1 могу се видети значења ознака са слика 7 и 8.

Табела 1: Значење ознака са слика 7 и 8

Ознака	Значење
m	ослоњена маса возила
m_{1A}	маса предњих точкова
m_{1B}	маса задњих точкова
z	вертикално кретање ослоњене масе
z_{1A}	вертикално кретање предњих точкова
z_{1B}	вертикално кретање задњих точкова
φ	галомирање ослоњене масе
z_{0A}	побуда од неравнина пута на предњим точковима
z_{0B}	побуда од неравнина пута на задњим точковима
J_y	момент инерције ослоњене масе возила при заокретању око попречне тежишне осе
a	растојање тежишта од предње осовине
b	растојање тежишта од задње осовине

На слици 8, тело возила масе m је приказано као крута греда. Предњи и задњи точкови имају масе m_{1A} и m_{1B} . Крутост пнеуматика означена је са c_{0A} и c_{0B} . Пригушења пнеуматика се не узимају у обзир јер је њихова вредност много мања у односу на вредност пригушења амортизера. Крутости предњег и задњег система еластичног ослањања означене су са c_{1A} , c_{1B} , респективно, док су пригушења амортизера напред и позади k_{1A} , k_{1B} , респективно.



Слика 8: Равански модел возила са три масе - детаљи [6]

Кинетичка и потенцијална енергија система са слике 8 се може представити следећим изразима:

$$E_K = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m_{1A} \dot{z}_{1A}^2 + \frac{1}{2} m_{1B} \dot{z}_{1B}^2 + \frac{1}{2} J_y \dot{\phi}^2, \quad (3.5)$$

$$E_P = \frac{1}{2} c_{0A} (z_{1A} - z_{0A})^2 + \frac{1}{2} c_{0B} (z_{1B} - z_{0B})^2 + \frac{1}{2} c_{1A} (z - z_{1A} - a\phi)^2 + \frac{1}{2} c_{1B} (z - z_{1B} + b\phi)^2. \quad (3.6)$$

Израз за енергију дисипације гласи:

$$E_\phi = \frac{1}{2} k_{1A} (\dot{z} - \dot{z}_{1A} - a\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} k_{1B} (\dot{z} - \dot{z}_{1B} + b\dot{\phi})^2. \quad (3.7)$$

Применом Лагранжевих једначина друге врсте у облику:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_r} + \frac{\partial E_\phi}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial E_P}{\partial q_r} = f_r, \quad r = 1, 2, \dots, 4, \quad (3.8)$$

добијају се једначине осциловања (3.1), (3.2), (3.3) и (3.4). Ова група једначина може се представити:

$$[M]\{\ddot{z}\} + [K]\{\dot{z}\} + [C]\{z\} = \{F\}, \quad (3.9)$$

где су матрице система дате изразима:

$$z = \begin{bmatrix} z \\ \phi \\ z_{1A} \\ z_{1B} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{1A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{1B} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{1A} + k_{1B} & bk_{1B} - ak_{1A} & -k_{1A} & -k_{1B} \\ bk_{1B} - ak_{1A} & k_{1A}a^2 + k_{1B}b^2 & ac_{1A} & bc_{1B} \\ -c_{1A} & ac_{1A} & c_{1A} + c_{0A} & 0 \\ -c_{1B} & -bc_{1B} & 0 & c_{1B} + c_{0B} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{1A} + c_{1B} & bc_{1B} + ac_{1A} & -c_{1A} & -c_{1B} \\ bc_{1B} + ac_{1A} & a^2c_{1A} + b^2c_{1B} & ac_{1A} & bc_{1B} \\ -c_{1A} & ac_{1A} & c_{1A} + c_{0A} & 0 \\ -c_{1B} & -bc_{1B} & 0 & c_{1B} + c_{0B} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{0A}z_{0A} \\ c_{0B}z_{0B} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Систем диференцијалних једначина другог реда (3.9) се решава нумеричким путем, уз помоћ неког од компјутерских програма као што су: MATCAD, Matlab и сл. При томе, за потребе програмирања, на пример у програмима MathCad и Matlab, потребно је да се овај систем од четири диференцијалне једначине другог реда, увођењем подесних смена претвори у систем од осам диференцијалних једначина првог реда, док програм Matlab/Simulink решава систем једначина у оригиналном облику.

За потребе овог завршног рада развијен је програм за решавање диференцијалних једначина кретања раванског модела возила са три масе коришћењем MathCad окружења.

3.1 Припрема једначина кретања за решавање у програму MathCad

За равански модел возила са три масе који је приказан на слици 8, важе следеће зависности:

$$z_A = z - atg\varphi = z - a\varphi, \quad (3.15)$$

$$z_B = z + btg\varphi = z + b\varphi. \quad (3.16)$$

Једначине кретања раванског модела са слике 8 изведене на основу Даламберовог принципа су:

$$m\ddot{z} + c_{1A}(z_A - z_{1A}) + k_{1A}(\dot{z}_A - \dot{z}_{1A}) + c_{1B}(z_B - z_{1B}) + k_{1B}(\dot{z}_B - \dot{z}_{1B}) = 0, \quad (3.17)$$

$$J_y \ddot{\varphi} + c_{1B} (z_B - z_{1B}) \cdot b + k_{1B} (\dot{z}_B - \dot{z}_{1B}) \cdot b - c_{1A} (z_A - z_{1A}) \cdot a - k_{1A} (\dot{z}_A - \dot{z}_{1A}) \cdot a = 0, \quad (3.18)$$

$$m_{1A} \ddot{z}_{1A} + c_{0A} (z_{1A} - z_{0A}) - c_{1A} (z_A - z_{1A}) - k_{1A} (\dot{z}_A - \dot{z}_{1A}) = 0, \quad (3.19)$$

$$m_{1B} \ddot{z}_{1B} + c_{0B} (z_{1B} - z_{0B}) - c_{1B} (z_B - z_{1B}) - k_{1B} (\dot{z}_B - \dot{z}_{1B}) = 0. \quad (3.20)$$

Уносом зависности (3.15) и (3.16) у релације (3.17) до (3.20) добијају се једначине:

$$m \ddot{z} + c_{1A} (z - a\varphi - z_{1A}) + k_{1A} (\dot{z} - a\dot{\varphi} - \dot{z}_{1A}) + c_{1B} (z + b\varphi - z_{1B}) + k_{1B} (\dot{z} + b\dot{\varphi} - \dot{z}_{1B}) = 0, \quad (3.21)$$

$$J_y \ddot{\varphi} + c_{1B} (z + b\varphi - z_{1B}) \cdot b + k_{1B} (\dot{z} + b\dot{\varphi} - \dot{z}_{1B}) \cdot b - c_{1A} (z - a\varphi - z_{1A}) \cdot a - k_{1A} (\dot{z} - a\dot{\varphi} - \dot{z}_{1A}) \cdot a = 0, \quad (3.22)$$

$$m_{1A} \ddot{z}_{1A} + c_{0A} (z_{1A} - z_{0A}) - c_{1A} (z - a\varphi - z_{1A}) - k_{1A} (\dot{z} - a\dot{\varphi} - \dot{z}_{1A}) = 0, \quad (3.23)$$

$$m_{1B} \ddot{z}_{1B} + c_{0B} (z_{1B} - z_{0B}) - c_{1B} (z + b\varphi - z_{1B}) - k_{1B} (\dot{z} + b\dot{\varphi} - \dot{z}_{1B}) = 0. \quad (3.24)$$

Даљим сређивањем и разврставањем по променљивама добиће се једначине:

$$m \ddot{z} + (k_{1A} + k_{1B}) \dot{z} + (c_{1A} + c_{1B}) z + (k_{1B} b - k_{1A} a) \dot{\varphi} + (c_{1B} b - c_{1A} a) \varphi - k_{1A} \dot{z}_{1A} - c_{1A} z_{1A} - k_{1B} \dot{z}_{1B} - c_{1B} z_{1B} = 0, \quad (3.25)$$

$$(k_{1B} - k_{1A}) \dot{z} + (c_{1B} - c_{1A}) z + J_y \ddot{\varphi} + (k_{1B} b^2 + k_{1A} a^2) \dot{\varphi} + (c_{1A} a^2 + c_{1B} b^2) \varphi + k_{1A} a \dot{z}_{1A} + c_{1A} a z_{1A} - k_{1B} b \dot{z}_{1B} - c_{1B} b z_{1B} = 0, \quad (3.26)$$

$$-k_{1A} \dot{z} - c_{1A} z + k_{1A} a \dot{\varphi} + c_{1A} a \varphi + m_{1A} \ddot{z}_{1A} + k_{1A} \dot{z}_{1A} + (c_{1A} + c_{0A}) z_{1A} - c_{0A} z_{0A} = 0, \quad (3.27)$$

$$-k_{1B} \dot{z} - c_{1B} z - k_{1B} b \dot{\varphi} - c_{1B} b \varphi + m_{1B} \ddot{z}_{1B} + k_{1B} \dot{z}_{1B} + (c_{1B} + c_{0B}) z_{1B} - c_{0B} z_{0B} = 0. \quad (3.28)$$

Да би се релације могле увести у програм MathCad, потребно је систем диференцијалних једначина другог реда, претворити у еквивалентни систем диференцијалних једначина првог реда, увођењем следећих смена:

$$\begin{aligned} z &= x_1, \\ \varphi &= x_2, \\ \dot{z}_1 &= x_3, \\ \dot{z}_4 &= x_4, \end{aligned} \quad (3.29)$$

односно:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= x_5, \\
\dot{\phi} &= x_6, \\
\dot{z}_1 &= x_7, \\
\dot{z}_2 &= x_8.
\end{aligned}
\tag{3.30}$$

Такође, узима се у обзир да је:

$$\begin{aligned}
\ddot{z} &= \dot{x}_5, \\
\ddot{\phi} &= \dot{x}_6, \\
\ddot{z}_1 &= \dot{x}_7, \\
\ddot{z}_2 &= \dot{x}_8.
\end{aligned}
\tag{3.31}$$

Коришћењем релација (3.29) до (3.31) систем једначина (3.25) до (3.28) претвара се у систем од 8 диференцијалних једначина првог реда, који се може решити у софтверском пакету MathCad.

Симулација кретања модела возила марке Yugo Florida извршена је уз коришћење следећих вредности параметара:

$f = 2 \text{ Hz}$	- фреквенција побуде од неравнина пута,
$A = 0,1 \text{ m}$	- амплитуда неравнина пута,
$v = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	- брзина кретања возила,
$a = 1,4 \text{ m}$	- растојање предње осовине од тежишта,
$b = 1,1 \text{ m}$	- растојање задње осовине од тежишта,
$l_1 = 2,5 \text{ m}$	- међуосовинско растојање,
$J_y = 570 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	- момент инерције заокретања возила око попречне тежишне осе,
$m_u = 1180 \text{ kg}$	- укупна (ослоњена) маса возила,
$m_1 = 55 \text{ kg}$	- маса предњих точкова,
$m_2 = 60 \text{ kg}$	- маса задњих точкова,

$$c_1 = 30000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad - \text{крутост предњих опруга система еластичног ослањања},$$

$$c_2 = 38000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad - \text{крутост задњих опруга система еластичног ослањања},$$

$$k_1 = 8120 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \quad - \text{пригушење предњих амортизера},$$

$$k_2 = 8120 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \quad - \text{пригушење задњих амортизера},$$

$$c_{p1} = 260000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad - \text{крутост предњих пнеуматика},$$

$$c_{p2} = 280000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad - \text{крутост задњих пнеуматика}.$$

Побуда од неравнина пута је моделирана синусном функцијом следећег облика:

$$z_{0A} = A \sin(2\pi ft) \quad (3.32)$$

на предњим точковима и

$$z_{0B} = A \sin \left[2\pi f \left(t - \frac{l_1}{v} \right) \right] \quad (3.33)$$

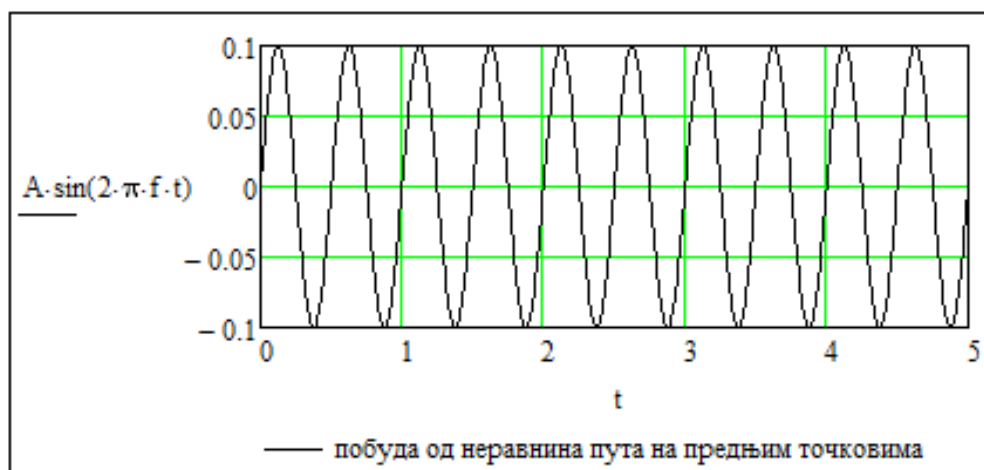
на задњим точковима.

4. ПРИКАЗ И АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА СИМУЛАЦИЈЕ

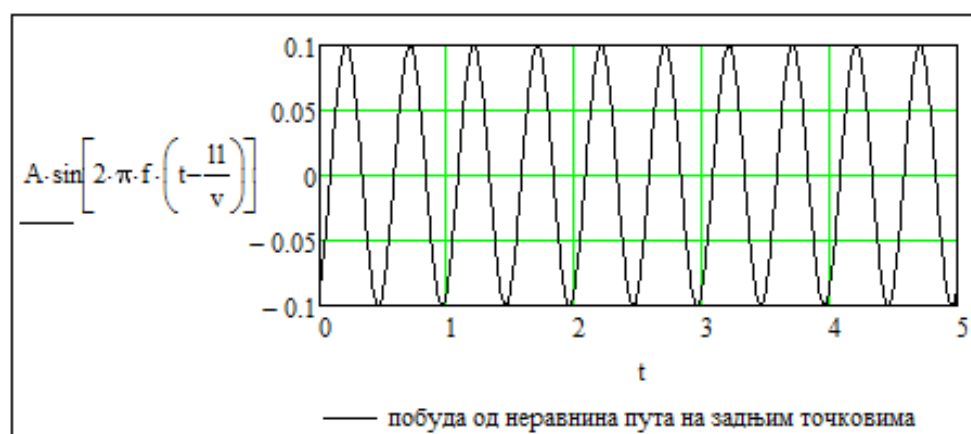
Симулација кретања раванског модела возила Yugo Florida са три масе обављена је уз помоћ програма MathCad 2013. Резултати симулације су дати на дијаграмима приказаним на сликама 9 до 14.

4.1 Дијаграми побуда од неравнина пута на предњим и задњим точковима

На основу дијаграма датих на сликама 9 и 10, може се закључити да на задњим точковима постоји временско кашњење побуде које износи $\tau = \frac{l_1}{v}$ и зависи од брзине кретања возила.



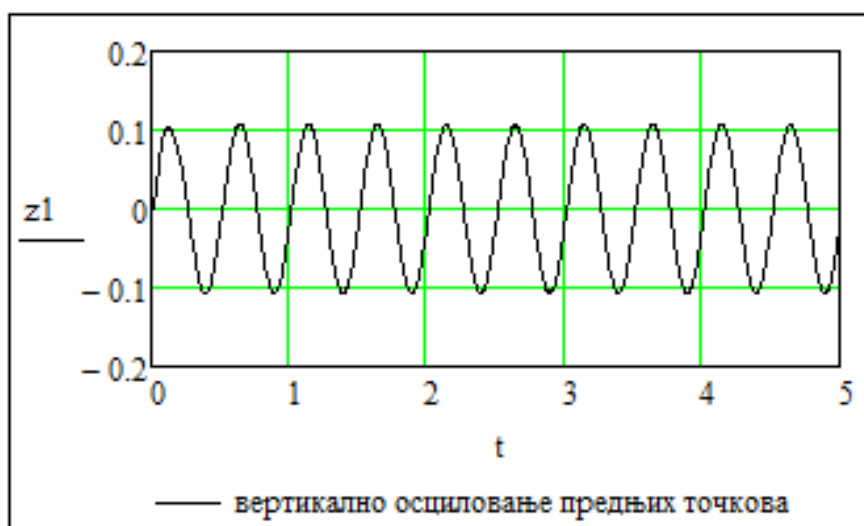
Слика 9: Дијаграм побуда од неравнина пута на предњим точковима



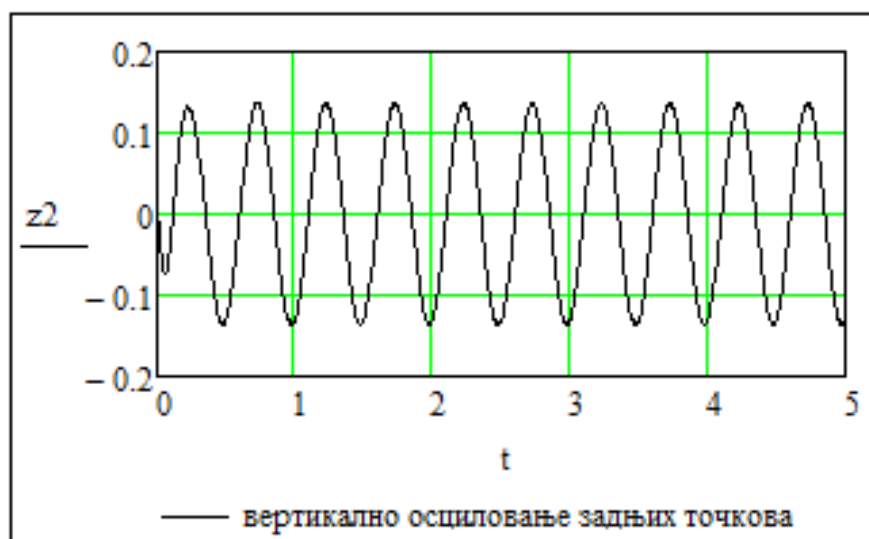
Слика 10: Дијаграм побуда од неравнина пута на задњим точковима

4.2 Дијаграми вертикалног осциловања предњих и задњих точкова

На сликама 11 и 12 приказани су дијаграми вертикалног осциловања предњих и задњих точкова, респективно. Са дијаграма се може закључити да ће предњи точкови осциловати са амплитудом мало већом од задате, док ће задњи точкови осциловати са амплитудом већом од амплитуде осциловања предњих точкова. То је резултат занемаривања пригушних карактеристика пнеуматика и веће крутости задњих у односу на предње пнеуматике.



Слика 11: Дијаграм вертикалног осциловања предњих точкова

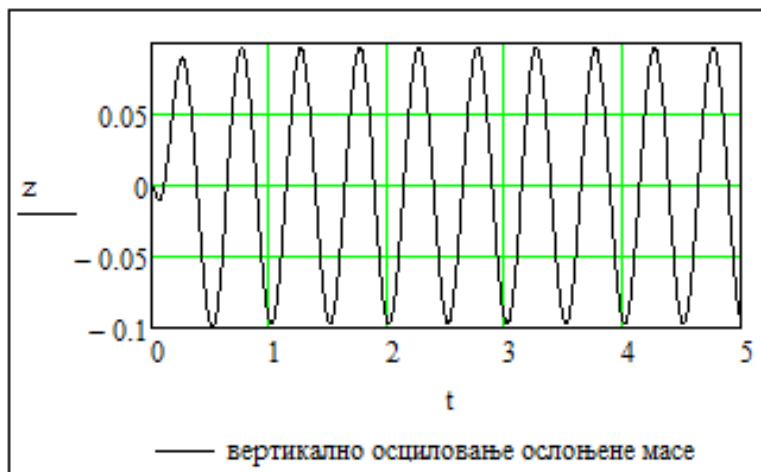


Слика 12: Дијаграм вертикалног осциловања задњих точкова

Такође, са слика 11 и 12 је видљиво временско кашњење које постоји између осциловања предњих и задњих точкова, које је последица фазног кашњења побуда од неравнина пута на задњим точковима.

4.3 Дијаграм вертикалног осциловања ослоњене масе

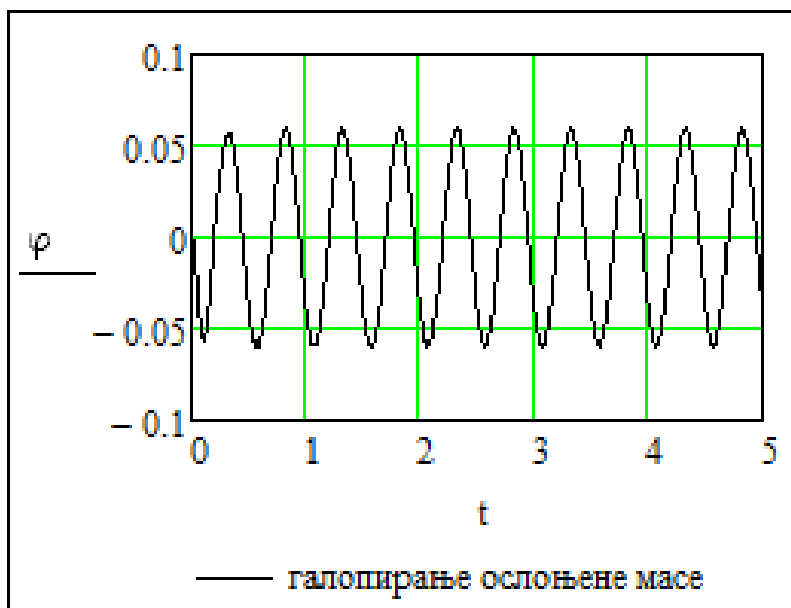
Са слике 13 може се установити како ће се понашати ослоњена маса возила при дејству хармонијске побуде на предњим и задњим точковима возила. На самом почетку осциловања ослоњене масе, амплитуда осциловања биће мањих вредности, док ће се вредност амплитуде временом повећавати до постизања устаљеног стања за дату фреквенцију побуде и брзину кретања возила.



Слика 13: Дијаграм вертикалног осциловања ослоњене масе

4.4 Дијаграм галопирања ослоњене масе

„Галопирање“ возила представља угаоно померање возила око попречне тежишне осе. Резултати симулације угаоних осцилација ослоњене масе око попречне тежишне осе добијених моделирањем возила раванским моделом са три масе, приказани су на слици 14.



Слика 14: Дијаграм галопирања ослоњене масе

5. ЗАКЉУЧАК

Како би се оствариле уштеде у времену и новцу приликом испитивања понашања возила и њиховог система ослањања, примењује се аналитичко испитивање раванских осцилаторних модела.

Равански осцилаторни модели представљају упрошћен приказ возила са два или више степени слободе у попречној равни узимајући у обзир само еластичне и пригушне карактеристике ослоњених маса, односно крутост еластичних елемената и пригушења амортизера.

Посматрајући двоосовински модел са једном масом са и без пригушења, као и двоосовински модел возила са три масе, изведене су одговарајуће диференцијалне једначине кретања. Захваљујући томе, могуће је уочити међузависност осциловања предњих и задњих точкова возила.

Када је реч о преносним функцијама, њихов допринос у разумевању система ослањања је у приказу одзива система на побуду услед неравнина пута.

Ради што реалнијег приказа понашања осцилаторног модела возила, за пример је узет аутомобил Yugo Florida са својим реалним параметрима. Посматран је равански модел са три масе овог возила, те је за њега развијен програм за решавање одговарајућих диференцијалних једначина кретања. Полазну основу су, дакле, представљали фабрички подаци овог аутомобила. Након тога је извршена и анализа резултата симулације.

На крају извршеног истраживања може се закључити да је значај раванских модела осциловања у порасту. Предности које они нуде у односу на вршење експеримената на реалним моделима возила, у виду нижих трошкова, смањења потребног времена за анализу, као и могућности да се истраживање врши путем рачунских метода и компјутерских софтвера, додатни су разлози за њихову све учесталију примену.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Јанковић, А.: Динамика аутомобила, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2008.
- [2] Chen, W.: Integrated vehicle dynamic and control, John Wiley & Sons Inc., Singapore, 2016
- [3] Wong, J. Y.: Theory of ground vehicles, John Wiley & Sons Inc., New York, 2001
- [4] Симић, Д.: Динамика моторних возила, Научна књига, Београд, 1998.
- [5] Meywerk, M.: Vehicle dynamics, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2015
- [6] Jazar, N. Reza: Vehicle dynamics: Theory and Application, Melbourne, 2017