

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Примењена механика и аутоматско управљање

Предмет: Механика флуида

Број индекса: 87/2015

Даница В. Бзенић

**Струјање нестишљивог флуида кроз
цеви**

завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Проф. др Слободан Савић - ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да

- ❖ проучи одговарајућу литературу везану за проблеме струјања течности,
- ❖ теоријски обради једначину кретања течности као и губитке струјне енергије,
- ❖ на основу прикупљених и систематизованих података из препоручене и друге литературе ове области неопходно је да размотри све аспекте струјања течности кроз цеви.

Препоручена литература:

[1] Ашковић Т., Ашковић П., *Хидраулика и пнеуматика*, Машински факултет у Београду, Београд, 1994.

[2] Обровић Б., Шашић М., *Хидраулика*, Научна књига, Београд, 1990.

[3] Обровић Б., *Механика флуида*, Машински факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац, 2007.

Крагујевац, септембар 2018.

Ментор:

Проф. др Слободан Савић

Изјављујем да сам овај завршни рад урадила самостално, служећи се литературом и својим стеченим знањем.

Бзенић Даница 87/2015

САДРЖАЈ:

Увод	7
1. Физичка својства нестишљивог флуида	8
1.1 Непрекидност, хомогеност и изотропност.....	8
1.2 Температура.....	8
1.3 Силе које делују на флуид	8
1.4 Густина	10
1.5 Стишљивост.....	11
1.6 Вискозност	12
1.6.1 Њутнов закон за вискозност.....	12
1.6.2 Стоксов закон за вискозност – отпор средине	13
2. Закони струјања флуида	14
2.1 Савршени флуид.....	14
2.2 Кинематика флуида.....	14
2.3 Једначина континуитета	15
2.4 Запремински и масени проток	16
2.5 Динамика кретања флуида	19
2.5.1 Ојлерова једначина кретања	19
2.5.2 Бернулијево решење Ојлерових једначина	21
2.6 Закон о промени количине кретања	23
3. Струјање флуида кроз цеви	27
3.1 Ламинарно струјање флуида	27
3.2 Турбулентно струјање флуида	29
3.3 Појаве при струјању течности.....	31
3.3.1 Хидраулични удар.....	31
3.3.2 Кавитација	31
4. Губици струјне енергије	33
4.1 Бернулијева једначина за реалне течности	35
4.2 Прорачун губитака струјне енергије	36
4.2.1 Прорачун отпора услед трења	36
4.2.1.1 Коефицијент отпора услед трења λ код ламинарног струјања реалне течности кроз праву кружну цев.....	37
4.2.1.2 Коефицијент отпора услед трења λ код турбулентног кретања реалне течности кроз хидраулички глатке и хидраулички храпаве цеви	38
4.2.2 Губици струјне енергије услед локалних отпора.....	39
4.2.2.1 Губици струјне енергије услед наглог проширења.....	40

4.2.2.2 Локални губици услед постепеног проширења (у дифузору).....	41
4.2.2.3 Локални губитак услед наглог сужења	42
4.2.2.4 Локални губитак у колену	42
4.2.2.5 Локални губитак у кривини.....	43
4.2.2.6 Локални губитак у славини	43
4.2.2.7 Локални губитак у засуну.....	44
4.2.2.8 Локални губитак у заштитној корпи	44
4.2.2.9 Локални губитак на улазу у цилиндричну косу цев	45
4.2.2.10 Локални губитак при истицању течности из цеви у резервоар	45
4.2.2.11 Локални губици у рачвама	45
5. Закључак.....	47
6. Литература	48
7. Ознаке.....	49

Резиме

У овом раду обрађене су основне теме из Механике флуида и Хидраулике: физичка својства нестишљивог флуида, теорија струјања флуида, струјање флуида кроз цеви као и губици струјне енергије. Дефинише се савршени флуид, говори се о основним законима кинематике и динамике флуида као и о прорачуну губитака струјне енергије.

Кључне речи: *струјање флуида, цеви, ламинарно и турбулентно струјање, губици струјне енергије, кинематика флуида, динамика флуида*

Abstract

In this paper the basic topics from the Mechanics of fluid and Hydraulics are discussed: the physical properties of the incompressible fluid, fluid flow theory, fluid flow through the pipes as well as the losses of energy flow. The perfect fluid is defined, the basic laws of kinematics and fluid dynamics are discussed, as well as the calculation of the losses of energy flow.

Key words: *fluid flow, pipes, laminar and turbulent flow, losses of energy flow, fluid kinematics, fluid dynamics*

Увод

Захваљујући природи, примећено је да постоји огроман број различитих мировања и струјања флуида попут ваздуха, воде, нафте, гаса итд. Вероватно постоји и много већи број случајева принудног мировања и струјања флуида. Примери из техничке праксе су различита акумулација масе и енергије, производња и преношење масе и енергије или управљачки сигнали, хлађење, подмазивање итд.

С обзиром на широку распрострањеност како у природи тако и у техничкој пракси, проучавање струјања флуида има огроман теоретски и практични значај.

У овом раду размортиће се свеобухватно прихваћено струјање кроз цеви као и аналитичко решење једначина савреног флуида.

Када се говори о флуидима, најпре се треба истаћи њихова подела на гасове и течности. Често се каже за гасове да су стишљиви флуиди зато што се они могу лако сабити и ширити а за течности да су нестишљиви флуиди зато што се тешко сабијају.

Покретљивост флуидних делића није једнака за све флуиде, она зависи од стања и врсте флуида, нпр. хладно и загрејано уље имају различиту покретљивост.

Корисно се показало да се прво проучава понашање идеално – покретљивог (невискозног) флуида тзв. савреног флуида. Извођење диференцијалних једначина кретања је релативно лако и оне се могу интегралити под одређеним условима. Релативно мали број проблема се може решити математички егзактно, углавном се, на основу претпоставки, изврше одређена упрошћавања једначина.

1. Физичка својства нестишљивог флуида

Због доброг праћења и разумевања како коришћених величина тако и извођења једначина, потребно је да се наведу и обраде основне физичке особине (величине) флуида.

1.1 Непрекидност, хомогеност и изотропност

Течности се у нормалним условима (атмосферски притисак и собна температура) сматрају непрекидном средином. То омогућује да се користе познате математичке операције непрекидних функција. Макроскопски гледано, то је оправдано с обзиром да се флуидни делић састоји из небојено много молекула. Да би се приказала висока концентрација молекула, наводи се следећа чињеница: у једном кубном микрону има око 34 милијарде молекула воде, када је притисак 1 bar и температура 20°C [1].

Хомогеност и изотропност материје представљају особину да су физичка својства сваког флуидног делића иста у целом посматраном флуидном простору и у свим правцима.

1.2 Температура

Појам температуре је прецизно тешко дефинисати, те се може објаснити уопштено. Гледано са микроскопске стране, температура флуида у некој његовој тачки је пропорционална кинетичкој енергији трансляторног кретања молекула. Макроскопски температуру је могуће објаснити индиректно: за два тела која су у непосредном контакту се каже да имају исту температуру када су у топлотној равнотежи.

Мерењем се одређују различите манифестације топлотног стања, којима се у стању топлотне равнотеже придају неке вредности температуре.

Успостављањем топлотне равнотеже између мешавине вода-лед и живиног термометра у тој мешавини – дилатација живе се узима као показивање температуре и усвојено је да то буде 0°C. Када се успостави топлотна равнотежа између кључале воде и живиног термометра у њој – дилатација живе се узима као показивање температуре и усвојено је да то буде 100°C или 375 K. Разлика дилатације живе (скала) између та два стања дели се на сто једнаких подељака и један подељак се усваја као јединица мере температуре [1].

Веза између апсолутне температуре T (K) и температуре t (°C) је : $T = 273 + t$

1.3 Силе које делују на флуид

За анализу сила које делују на течност посматра се запремина V испуњена масом m (Сл.1). У мировању на флуид делује *сила земљине теже* и *силе притиска* околног флуида. Ако се флуид креће на њега делују још и *силе инерције* и *силе трења*.

Сила земљине теже делује на сваки делић флуида, а самим тим и на укупну масу флуида. Ова сила је сразмерна маси флуида (као и сила инерције) и назива се **запреминском силом**. Ове силе су заправо последица дејства поља (поље земљине теже) у коме се флуид налази [2].

Ако је $\vec{f}$ сила која делује на јединицу масе, онда на елементарну масу dm делује запреминска сила:

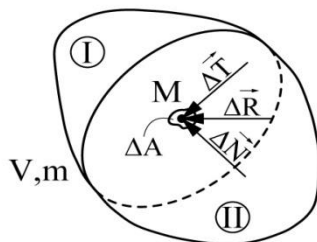
$$\vec{f} \cdot dm$$

Јединична сила $\vec{f}$ има своје пројекције у Декартовом координатном систему $f(X, Y, Z)$

$$\vec{f} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad (1.1)$$

Поред запреминских сила на флуид делују друге силе. На слици 1, која представља неку запремину флуида V масе m , уклонимо део 2, његов утицај на део 1 замењује се силом $\Delta\vec{R}$. Сила која делије на одговарајућу површ ΔA назива се **површинска сила**. Компоненте површинске силе су $\Delta\vec{N}$ – нормална и $\Delta\vec{T}$ – тангенцијална сила. Када се површина ΔA смањује и тежи нули, граничне вредности $\Delta N/\Delta A$ и $\Delta T/\Delta A$ у ствари представљају нормални и тангенцијални напон

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA} = \sigma \text{ и } \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} = \frac{dT}{dA} = \tau \quad (1.2)$$



Слика 1 - Запремина флуида V [3]

Нормални напон σ представља **притисак** p , јер код флуида напон на истезање нема никаквог смисла. Према изложеном притисак се, за произвољну тачку M чије су координате положаја $M(x, y, z)$ дефинише као:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} \quad (1.3)$$

и као такав зависи од положаја тачке M , па је самим тим и притисак функција координата у Декартовом координатном систему, односно:

$$p = p(x, y, z) \quad (1.4)$$

Из израза (1.3) добијамо израз за елементарну силу

$$d\vec{P} = -p \cdot dA \quad (1.5)$$

у којем знак минус означава супротне смерове притисних сила по нормали на површину dA . Притисак је скаларна величина, чија је изведена величина Паскал (Pa) дефинисан као

$$1\text{Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Флуид се често налази под притиском који је већи од атмосферског, па се такав притисак назива надпритисак односно манометарски притисак:

$$p_m = p - p_a \quad (1.6)$$

а у случајевима када се налази под притиском мањим од атмосферског (нпр. код усисне гране цевовода) такав притисак се назива потпритисак и за њега важи релација [1]:

$$p_v = p_a - p \quad (1.7)$$

1.4 Густина

Основно физичко својство течности јесте свакако **густина** [2]. У случају коначне запремине течности, средња густина по дефиницији је

$$\rho_s = \frac{m}{V} \quad (1.8)$$

Код течности густина је у свим тачкама посматране запремине једнака односно:

$$\rho = \rho(x, y, z, t) = \text{const.} \quad (1.9)$$

Густина представља скаларну величину димензија:

$$[\rho] = \frac{\text{M}}{\text{L}^3}$$

где је M - димензија масе, а L - димензија дужине.

Из израза за густину, посматрану за бесконачно малу запремину dV добијамо израз за елементарну масу непрекидног флуида

$$dm = \rho \cdot dV \quad (1.10)$$

којом је одређена маса флуидног делића. Флуидни делић има увек исту масу, па на основу једначине (1.10) добијамо **Закон о одржању масе.**

$$dm = \rho \cdot dV = \text{const.} \quad (1.11)$$

Значајан утицај на промену густине имају притисак и температура $\rho = \rho(p, T)$ ако говоримо о гасовима, али у овом излагању посматрају се течности, на које промена притиска нема значајнијег утицаја, док утицај температуре не би смео да буде занемарен. Температурне разлике у режимима који ће се овде пратити, релативно су мале, па ће се температура сматрати константном величином тј. $T = \text{const.}$ Утицај температуре на густину дат је у табели 1, на пример за воду:

Табела 1. *Густина воде при разним температурама* [2].

$t [^{\circ}\text{C}]$	0	2	4	10	20	40	60	80	100
ρ [kg/m ³]	999,87	999,97	1000	999,73	998,23	992,24	983,24	971,83	958,38

Густине осталих течности на оптималним температурама:

Табела 2. *Густина неких течности* [2].

Течност	$t [^{\circ}\text{C}]$	ρ [kg/m ³]
Чиста вода	15	999
Морска вода	15	1020
Жива	15	13595
Бензин	15	680-720
Сирова нафта	20	700-1000

Претходно излагање доводи нас до **карактеристичне једначине течности**:

$$\rho = \rho_0 = \text{const.} \quad (1.12)$$

Ова једначина важи само за течности, односно нестишљиве флуиде и то при константним температурама.

1.5 Стишљивост

Стишљивост је својство течности и гасова која се манифестује променом запремине под дејством спољашњих сила:

$$s = - \frac{dV}{V \cdot dp} \quad (1.13)$$

Као мера овог својства користи се **коэффициент стишљивости** s . Испитивања су показала, да стишљивост течности опада са повећањем температуре, али посто се у овом излагању, како је већ речено, температура креће у оптималним вредностима то она неће имати битног утицаја на промену стишљивости код течности. Реципрочна вредност коефициента стишљивости назива се **модулом стишљивости** ε .

$$\varepsilon = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad (1.14)$$

Табела 3. *Вредности коефицијента и модула стишљивости за воду [2].*

t [°C]	10	20	30
s [m^2/N]	$4,93 \cdot 10^{-10}$	$4,74 \cdot 10^{-10}$	$4,66 \cdot 10^{-10}$
ε [N/m^2]	$20,30 \cdot 10^8$	$21,08 \cdot 10^8$	$21,48 \cdot 10^8$

Такође за промену коефицијента (модула), потребни су врло велики притисци на течности, да би промена износила једва 1%. Због оваквих особина, везано за коефицијент стишљивости, течности су сврстане у тзв. **нестишљиве флуиде**. Зато се за густину нестишљивог флуида користи константна густина односно по карактеристичној једначини

$$\rho = \rho_0 = \text{const.} \quad (1.15)$$

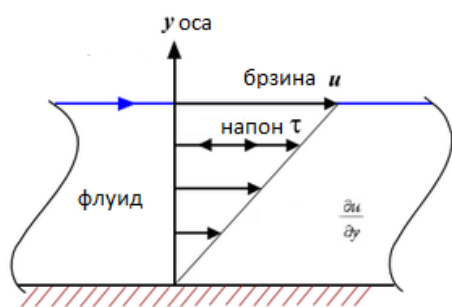
О стишљивости има много више да се каже када су у питању гасови, али овде је наведена највише због објашњења појма нестишљив флуид.

1.6 Вискозност

Када се прати протицање течности кроз цев, показује се да се сви делови течности не крећу истом брзином. Највећу брзину имају делови течности дуж осе цеви, а најмању делови уз зидове цеви. Течност се кроз цев не креће као целина, него у слојевима који клизе један по другоме различитим брзинама. При протицању течности као да долази до њеног „раслојавања“. Нешто слично се дешава и при кретању, на пример равне даске, танкера или справа по мирном језеру. Када се тело покрене, почиње и вода да се креће, али не као целина, већ по деловима (слојевима) који имају различите брзине.

У свакодневном животу користе се реалне течности и оне заиста имају посебна својства. Њихови делићи су веома покретљиви и са малим силама, већ се изазива померање једних у односу на друге. При томе нису сви делићи једнако покретљиви па се јавља трење између делића. Ово трење се назива **вискозност**, а као мерило вискозности неког флуида користе се **коефицијент динамичке вискозности** μ (Ns/m^2) и **коефицијент кинематичке вискозности** ν (m^2/s) између којих је веза:

$$\mu = \rho \cdot \nu \quad (1.16)$$



Слика 2 – Струјање [4]

1.6.1 Њутнов закон за вискозност

Динамичку вискозност дефинисао је Њутн као коефицијент сразмерности између напона и промене брзине у правцу нормале у односу на смер струјања. Ову тврдњу дефинисао је аналитичким изразом (Слика 2), на коме се заснива цела наука о струјању течности и гасова

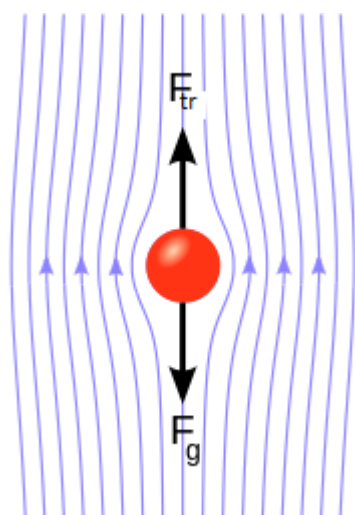
$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.17)$$

И динамичка и кинематичка вискозност зависе од природе течности (гаса), од притиска и топлотног стања. Код нестишљивог флуида утицај притиска је занемарљив јер густина течности остаје константна, али утицај температуре је знатан и то: са *порастом температуре вискозност опада* и обратно. Ова појава се користи код транспорта изразито вискозних течности. Међутим на константним температурама, код течности, вискозност се не мења. У овом излагању, вискозност ће бити константна за одговарајућу течност, јер су и температуре у оптималном опсегу.

Повећањем растојања од пловног објекта брзина слојева течности се смањује. У течностима се јављају и силе које се супротстављају кретању тела кроз течности.

Набројане чињенице и појаве објашњавају се као последица постојања силе унутрашњег трења у течностима, вискозност. Сила вискозности успорава протичање течности и кретање тела кроз течност.

1.6.2 Стоксов закон за вискозност – отпор средине



Слика 3 – Струјање покрај сфере, струјне линије, сила отпора F_{tr} и сила Земљине теже F_g [5].

Сила вискозности течности утиче на кретање тела која се у њој налазе (подморница, ронилац). Наиме, течност пружа отпор таквом кретању, а тај отпор потиче од вискозности. Танак слој течности „прилепљен“ за тела креће се заједно са телом и истом брзином као тело. Услед тога се покрећу и остали слојеви течности. Сила отпора средине (унутрашњег трења) пропорционална је брзини кретања тела

$$F = k \cdot v \quad (1.18)$$

k - коефицијент сразмерности који зависи од облика и димезија тела које се креће и вискозности средине кроз коју се тело креће. За тело сферног облика полупречника r

$$k = 6\pi\eta r \quad (1.19)$$

За куглу полупречника r која се креће у флуиду брзином v важи

$$F_{tr} = 6\pi\eta r v \quad (1.20)$$

што представља Стоксову формулу.

Сила F_g је сила Земљине теже.

2. Закони струјања флуида

2.1 Савршени флуид

Термин савршени флуид се уводи и користи зарад једноставнијег решавања проблема реалног флуида. Иако савршеног флуида у природи нема (не постоји флуид у коме нема трења између делића), сасвим је релевантно искористити његово решење додавањем одговарајућих коефицијената добијених мерењем као решење проучавања кретања реалног флуида.

Сви важни закони су првобитно објашњени на примеру савршеног флуида.

2.2 Кинематика флуида

У кинематици флуида проучава се кретање флуидних делића и целе флуидне масе кроз успостављање математичких функционалних веза између разних кинематских величина (проток, брзина, убрзање итд.) и положаја (x, y, z) и времена (t) , не интересујући се о узроцима настајања и одржавања кретања. То је доста тежак и комплексан задатак, с обзиром да флуидни делићи, осим обртног и транслаторног кретања, посматрано макроскопски – при кретању се деформишу.

Значајна су два приступа проблематици струјања флуида: Лагранжов и Ојлеров.

Лагранжов начин прати понашање и кретање флуидних делића понаособ (као систем материјалних тачака), а за резултат добија се за сваки поједини флуидни делић једначина трајекторије : $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$. Изгледа једноставно али такав начин решавања је неприменљив јер се посматра небројиво много флуидних делића те би се добило небројиво много једначина [1].

Према Ојлеру посматра се једна тачка, и на њој се одређују – брзина v , притисак p , густина ρ и друге физичке величине. Како је положај тачке одређен координатама $M(x, y, z)$ то је и брзина сваког делића функција положаја и функција времена t , односно

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) \quad (2.1)$$

Заправо, проучавање струјања према Ојлеру своди се на одређивање векторског поља брзине односно њених пројекција:

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, t) \\ v_y &= v_y(x, y, z, t) \\ v_z &= v_z(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Такође је потребно одредити поље притиска p и поље густине ρ односно:

$$\begin{aligned} p &= p(x, y, z, t) \\ \rho &= \rho(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решавање проблема струјања своди се на одређивање пет величина v_x, v_y, v_z, ρ и p

па је потребно да се има затворен систем од пет једначина. Прве три једначине су једначине пројекција брзина (2.2) а друге две су карактеристична једначина $\rho = \rho_0 = \text{const.}$ (1.12) за течности и једначина континуитета која ће бити изведена у овом поглављу.

Осим што је важно нагласити да је струјање *непрекидно*, овде треба истаћи и то, да ако брзина зависи, осим од положаја тачке, још и од времена t , струјање је *неустаљено*. Ако брзина не зависи од времена t , него само од геометријских координата

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) \quad (2.4)$$

што значи да се струјно поље не мења. За струјање тада кажемо да је *устаљено*.

2.3 Једначина континуитета

При кретању флуида као непрекидне средине, маса произвољног делића се не мења. Овај закон који се иначе и зове *Закон о одржању масе* је у предходном поглављу дат као једначина (1.10).

$$dm = \rho \cdot dv$$

Други назив тог закона је **једначина континуитета**. Овом једначином успоставља се веза између поља густине и поља брзине, независно од врсте сила које делују на флуид. Једначином континуитета изражава се услов непрекидности флуида.

То у математичком смислу значи да је извод елементарне масе по времену једнак нули, односно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(dm) &= \frac{d}{dt}(\rho \cdot dV) = \frac{d\rho}{dt} dV + \rho \frac{d}{dt}(dV) = 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d(dV)}{dt \cdot dV} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

где су: $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \rho$ и $\frac{d(dV)}{dt \cdot dV} = \text{div} \vec{v}$ - дивергенција вектора брзине која представља вишак истекле запремине флуида из јединичне запремине у јединици времена [1].

Када се последње две једначине уврсте у једначину (2.5) добија се једначина континуитета облика:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad} \rho) + \rho \cdot \text{div} \vec{v} = 0 \quad (2.6)$$

Ова једначина може да се напише и у следећем облику:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.7)$$

При устаљеном струјању физичке величине не зависе од времена, па је члан $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, а за нестишљив флуид $\rho = \rho_0 = \text{const.}$ па једначина континуитета добија облик:

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (2.8)$$

Једначина (2.8) представља **једначину континуитета нестишљивог флуида при устаљеном струјању**. У Декартовом координатном систему једначина континуитета је

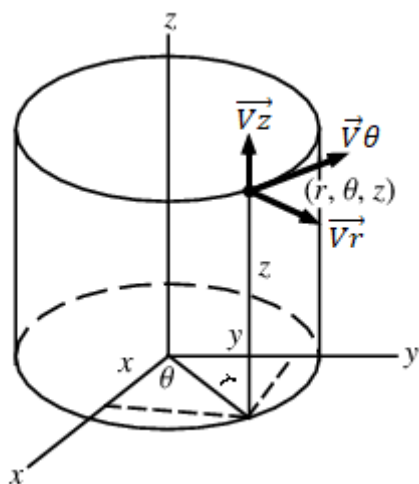
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

Ако уместо Декартових уведемо цилиндрични координатни систем $Or\theta z$ између којих са слике 4 постоји веза:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

изрази за брзине биће:

$$v_x = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta, \quad v_y = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta, \quad v_z = v_z$$



Заменом ових брзина у једначину (2.9), после сређивања добија се **једначина континуитета нестишљивог флуида у цилиндричним координатама**:

$$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

Овај облик једначине континуитета има важну примену у динамици флуида, посебно у случају решавања проблема струјања течности кроз праве цеви кружног попречног пресека.

Слика 4 - Поларно-цилиндрични координатни систем [6]

2.4 Запремински и масени проток

Једна од најзначајнијих основних величина која карактерише струјање флуида је **проток**. Проток се дефинише као количина флуида која проструји кроз неку отворену односно затворену површ у јединици времена. За меру се може узети његова запремина или његова маса. Код нестишљивог флуида усвојена је његова запремина, па се проток назива **запремински проток** или само **проток**. Масени се користи код стишљивих флуида. За одређивање протока посматра се струјна површ и на њој елементарна површина $d\vec{A}$ око тачке М. У тачки М, брзина $\vec{v}$ са површином $d\vec{A}$ заклапа угао α .

За бесконачно мали временски интервал dt , запремина протеклог флуида дата је изразом (слика 5)

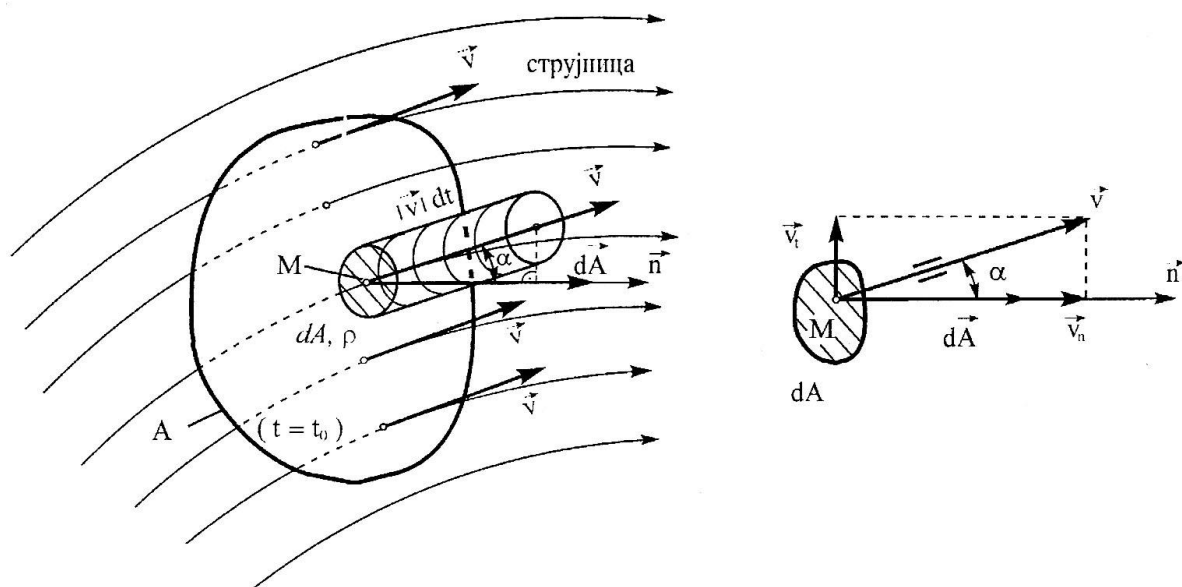
$$dV = dA \cdot v \cdot dt \cdot \cos \alpha = (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \cdot dt \quad (2.11)$$

одакле после дељења са dt следи

$$dQ = \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (2.12)$$

односно у интегралном облику за коначну површину:

$$\int_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = Q \quad (2.13)$$



Слика 5 - Одређивање протока флуида [3]

У случају праволиниског струјања што и јесте случај код цевовода $\cos \alpha = 1$, па скаларни производ постаје обичан

$$\int_A v \, dA = Q \quad (2.14)$$

Ако се узме у обзир маса флуида, која струји кроз елементарну површ

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot (\vec{v} \cdot d\vec{A}) dt \quad (2.15)$$

елементарни масени проток биће:

$$dQ_m = \rho \cdot (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \quad (2.16)$$

а по укупној површини A:

$$Q_m = \int_A \rho \cdot (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \quad (2.17)$$

па је у случају константне густине :

$$Q_m = \rho \cdot Q \quad (2.18)$$

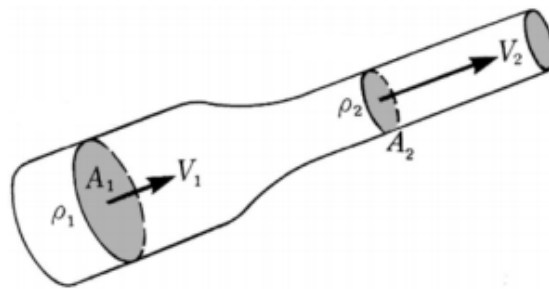
Код устаљеног струјања нестишљивог флуида, $\text{div} \vec{v} = 0$ и $\rho = \rho_0 = \text{const.}$ па се може закључити да је и запремински проток у овом случају константан, односно:

$$dQ = v dA = \text{const.} \quad (2.19)$$

$$v_1 dA_1 = v_2 dA_2 = \dots = v_n dA_n \quad (2.20)$$

Добијена једначина представља једначину континуитета за нестишљив флуид.

Из ове једначине се може закључити да је елементарни запремински проток непроменљив. Наиме, при смањењу попречног пресека, брзина струјања нестишљивог флуида се повећава и обрнуто (Сл. 6).



Слика 6 – Смањење попречног пресека [7]

Код техничких цеви у рачун се уводе средње вредности појединих физичких величина. Средња брзина v_s у пресеку струјне цеви дефинише се као замишљена континуална брзина, која помножена са површином попречног пресека A даје исти проток Q као стварна расподела брзина.

$$\int_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = Q = v_s \cdot A \quad (2.21)$$

$$v_s = \frac{1}{A} \cdot \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (2.22)$$

Из ове једначине у пракси се рачуна проток као

$$Q = v_s \cdot A = \text{const.} \quad (2.23)$$

Ова једначина представља једначину континуитета у хидраулици.

2.5 Динамика кретања флуида

У динамици кретања флуида проучава се кретање флуидних делића и коначне масе флуида, при чему се води рачуна о силама које дејствују на флуид и узрокују његово кретање. Проблем струјања флуида је решен када се одреде вектор брзине или њене пројекције, и три скаларне величине, густина, притисак и температура. За успешно решавање проблема, треба располагати са следећим једначинама:

- карактеристичном једначином стања $\rho = \frac{p}{RT}$
- једначином континуитета
- Ојлерова векторска или три скаларне једначине
- Једначина биланса енергије (не разматра се јер се не узима у обзир утицај температуре, што је оправдано када се одржава тзв, равна температура при струјању)

2.5.1 Ојлерова једначина кретања

За извођење ових једначина, у струјном пољу, посматра се маса m , запремине V ограничене површином A . Сила $\vec{f}$ је запреминска сила која делује на јединицу масе флуида, а $p=p(x,y,z)$ притисак којим околни флуид делује на сваки елемент dA , онда на флуид делују укупна запреминска сила и укупна сила притиска.

Збир ових сила износи:

$$\int_V \rho \vec{f} dV - \int_A p d\vec{A} = \int_V (\rho \vec{f} - \text{grad} p) dV \quad (2.24)$$

Ако се флуид креће, онда на њега делује и сила инерције. Силе једнаке производу масе и убрзања, док је убрзање једнако тоталном изводу брзине, па за флуидни делић елементарне масе dm , биће:

$$dm \vec{a} = dm \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV \quad (2.25)$$

а укупна инерциска сила на запремину V износи $\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV$, па ће по Њутновом закону бити

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V (\rho \vec{f} - \text{grad} p) dV$$

$$\int_V \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{f} + \text{grad} p \right) dV = 0 \quad (2.26)$$

Овај интеграл је једнак нули ако је подинтегрална функција једнак нули па следи

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (2.27)$$

Добијена једначина је **Ојлерова диференцијална једначина за кретање флуида у векторском облику**.

У скаларном облику ова једначина има облик:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Овде треба напоменути да чланови са леве стране представљају тоталне изводе пројекција брзине нпр. на x осу:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (2.29)$$

а градијент неке скаларне функције:

$$\text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \quad (2.30)$$

Из свега изложеног види се да су Ојлерове једначине за кретање веома сложене. Ове једначине представљају систем диференцијалних нелинеарних парцијалних једначина које до данас нема јединствено решење.

2.5.2 Бернулијево решење Ојлерових једначина

У Механици флуида Бернулијева једначина се изводи на такозваној трансформисаној Ојлеровој једначини чиме се добијају једначине кретања које важе за једну струјницу $d\vec{L} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ и мењају се од струјнице до струјнице. Ова једначина је изведена са претпоставкама да струјање мора да буде устаљено $\frac{\partial}{\partial t}=0$, да је флуид баротропан $\rho=\rho(p)$ и да флуид струји у пољу конзервативних сила $\vec{f}=\vec{f}(X, Y, Z)$ и гласи

$$d\left(\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho}\right) = 0 \quad (2.31)$$

односно

$$\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const} = e. \quad (2.32)$$

Добијена једначина представља **уопштену Бернулијеву једначину**. Међутим за нестишљив флуид имамо да је густина $\rho=\rho_0=\text{const.}$ и да течност струји у пољу земљине теже $U = -gz$ па се до Бернулијево једначине долази на следећи начин.

Прво се Ојлерове једначине кретања (2.28) помноже редом са dx , dy , dz и све три се саберу:

$$\frac{dv_x}{dt} dx + \frac{dv_y}{dt} dy + \frac{dv_z}{dt} dz = Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \quad (2.33)$$

Пошто су брзине дефинисане кинематичким једначинама кретања:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (2.34)$$

можемо да их заменимо у предходној једначини на места dx , dy , и dz која се тада своди на

$$\frac{dv_x}{dt} v_x dt + \frac{dv_y}{dt} v_y dt + \frac{dv_z}{dt} v_z dt = v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = \frac{1}{2} d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2} d(v^2) = d\left(\frac{v^2}{2}\right), \quad (2.35)$$

где је v интензитет брзине. Израз на десној страни почетне једначине овог извођења, представља тотални диференцијал притиска p ако је струјање устаљено, тако да добијемо израз:

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} dp \quad (2.36)$$

Када су у питању свакодневни практични проблеми који се односе на течност, од спољашњих сила делује само сила Земљине теже, тако да постоји само сила дуж z осе заправо

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=-g$$

односно:

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -g dz - \frac{1}{\rho} dp \quad (2.37)$$

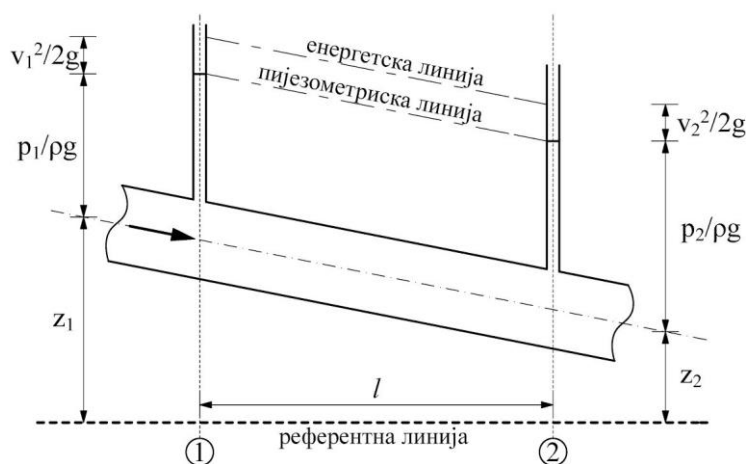
и како је, већ речено густина је константа $\rho = \text{const.}$ и $g = \text{const.}$, то се може писати

$$d\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0 \quad (2.38)$$

а интеграљењем, добијамо једначину за савршене течности односно **Бернулијеву једначину**.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.} = e \quad (2.39)$$

Ова једначина се може применити за било која два пресека струјног влакна. За два пресека 1-1 и 2-2 са слике 2 важи једначина:



Слика 7 – Бернулијева једначина са два пресека 1-1 и 2-2 [3]

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \quad (2.40)$$

Бернулијева једначина у овом облику представља енергетску једначину па се тако и исказује, као Закон о одржању енергије при струјању течности. У овој једначини члан са квадратом брзине ($\frac{v^2}{2}$) представља кинетичку енергију по јединици масе, а друга два члана представљају потенцијалне енергије поља (gz) и притиска ($\frac{p}{\rho}$) сведене на јединичну масу. При устаљеном струјању савршене течности у пољу Земљине теже, збир кинетичке

енергије, притисне и потенцијалне енергије има исту вредност дуж струјног влакна [3]. Ове енергије у току струјања могу да се трансформишу једна у другу, али њихов збир остаје непромењен, код савршене течности. За реалне течности ће бити другачије.

Ако једначину (2.39) поделимо са g , добијамо једначину у којој сваки члан има димензију дужине

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{g\rho} + z = \text{const.} = H_u \quad (2.41)$$

У овој једначини први члан ($\frac{v^2}{2g}$) је тзв. брзинска висина (напор), ($\frac{p}{g\rho}$) представља пијезометриску висину (пиезометријски напор) и (z) геодезиску висину односно напор. Збир свих наведених висина чини укупни или пуни напор H_u струјне течности. На основу новог облика, помоћу висина, Бернулијева једначина може се овако исказати: при устаљеном струјању течности у пољу Земљине теже, збир брзинске, пијезометријске и геодезиске висине има исту вредност за било који пресек струјног влакна [3].

У случају хоризонталног струјања ($z = \text{const.}$) Бернулијева једначина добија облик

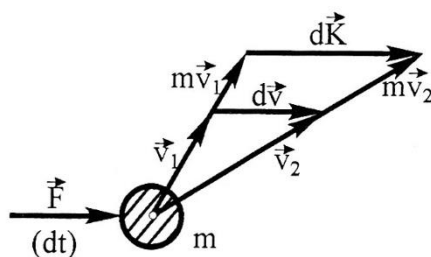
$$p + \rho \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (2.42)$$

у којој оба члана имају димензију притиска - струјни притисак p и динамички притисак ($\rho \frac{v^2}{2}$). Значајно је да је струјни притисак максималних вредности, када флуид мирује и обрнуто, развија максималну брзину када је притисак нула. У ствари притисак увек опада са порастом брзине па при пројектовању хидрауличких постројења о овоме се мора водити рачуна да не би дошло до тзв. кавитације.

У Хидраулици Бернулијева једначина се примењује на целокупни ток струјне течности односно за два пресека техничке цеви кроз коју течност протиче. Тада физичке величине у једначини (2.40) не представљају стварне притиске нити брзине, већ њихове средње вредности у уоченим пресецима.

2.6 Закон о промени количине кретања

Закон о промени количине кретања у техничкој пракси често се користи за решавање разних проблема. Назива се још и Закон импулса и у Механици флуида користи се при проучавању проблема као што су дејство струјне течности на равне површине, проучавање млаза за време истицања флуида и др. Закон о промени количине кретања гласи: *промена количине кретања у неком временском интервалу, једнака је импулсу сила које делују на систему том истом временском интервалу* [3] и односи се на сваки систем материјалних тачака, па тако и у Хидраулици.



Слика 8 – промена количине кретања [2]

Ако се материјална тачка са слике 8, масе m креће брзином $\vec{v}_1$ онда је количина кретања ове масе $\vec{K} = m\vec{v}_1$. Ако на ту тачку делује сила $\vec{F}$, тачка добије брзину $\vec{v}_2$, па је количина кретања $\vec{K} = m\vec{v}_2$. Промена количине кретања за време dt , услед дејства силе $\vec{F}$ дата је једначином:

$$d(m\vec{v}) = m d\vec{v} = m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F} dt \quad (2.43)$$

Како течност посматрамо као систем материјалних тачака са различитим брзинама кретања, то је елементарна количина кретања масе dm делића

$$\vec{v} dm = \rho \vec{v} dV \quad (2.44)$$

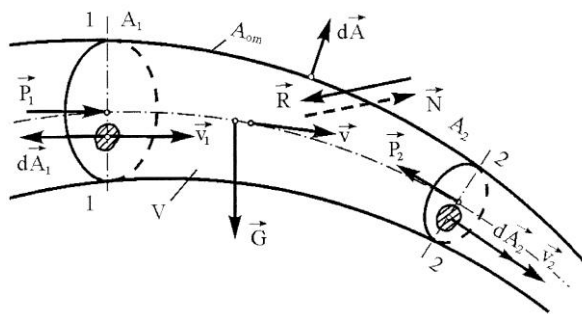
а количина кретања укупне масе:

$$\vec{K} = \int_V \rho \vec{v} dV \quad (2.45)$$

По наведеној дефиницији Закона о промени количине кретања следи да је:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_V \rho \vec{v} dV \right) = \vec{F}_R \quad (2.46)$$

За случај устаљеног струјања израз може се трансформисати у другачији облик, знатно погоднији за решавање задатака



Слика 9 - Промена количине кретања у струјној цеву [2]

Ако посматрамо струјну цев, као на слици 9, увођењем средње брзине и употребом једначине протока (2.23) према којој је:

$$v_{s1}A_1 = Q_1 = v_{s2}A_2 = Q_2 = Q \quad (2.47)$$

између површина A_1 и A_2 односно преска 1-1 и 2-2 добиће се

$$\int_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \rho \cdot Q \cdot (\vec{v}_{s2} - \vec{v}_{s1}) \quad (2.48)$$

На основу везе $dV = dA \cdot v dt \cos \alpha = (\vec{v} \cdot d\vec{A}) dt$, интеграл по запремини V преведен је у интеграл по површини A .

На овај начин добијен је Закон о промени количине кретања који се користи у Хидраулици и који гласи

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \rho \cdot Q (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}_R \quad (2.49)$$

У овој једначини $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ представљају средње брзине главног струјања нестишљивог флуида. При струјању течности кроз стварну техничку цев резултујућа сила износи

$$\vec{F}_R = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{G} + \vec{R} \quad (2.50)$$

где су: $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ силе притиска течности у пресеку 1-1 односно 2-2

$\vec{G}$ – сила Земљине теже

$\vec{R}$ – реакција омотача цеви која је заправо резултанта силе притиска и силе трења по омотачу.

Течност на зидове цеви између 1-1 и 2-2 делује силом $\vec{N} = -\vec{R}$, а силе $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ рачунају се са надпритисцима у одговарајућим цевима и усмерене су ка пресеку.

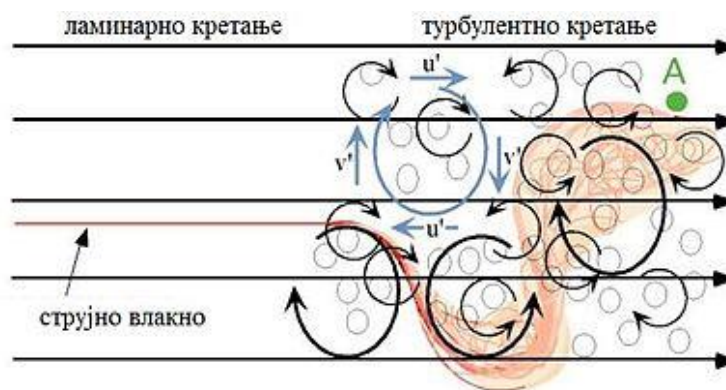
3. Струјање флуида кроз цеви

Струјање флуида кроз цеви може да буде устаљено и неустаљено. Устаљено струјање може, пак, да буде једнолико (равномерно) и неједнолико (неравномерно).

Под једноликим кретањем флуида подразумева се такво кретање које има исту средњу брзину у свим управним пресецима цеви. Брзине се разликују у разним тачкама истог пресека. Да би кретање флуида кроз цеви било једнолико, не сме да се мења попречни пресек цеви ни по величини ни по облику, и неопходно је и да храпавост унутрашњих зидова цеви буде иста по њеној дужини.

Код једноликог кретања течности, распоред притисака у попречном пресеку струјног тока приближно се померава хидростатичком закону, при чему се узима да притисак флуида у одговарајућем пресеку има вредност притиска у тежишту пресека. Претпоставља се да трење не зависи од притиска.

Зависно од вредности Рејнолдсовог броја, једнолико кретање течности може да буде турбулентно или ламинарно (Сл.10).



Слика 10 – Приказ ламинарног и турбулентног струјања [8]

3.1 Ламинарно струјање флуида

Ламинарно (стационарно) струјање је струјање када се свака честица флуида која се нађе у некој струјној линији наставља да се креће у правцу струјнице као и претходна честица, тј. ако се слика струјнице у току времена не мења. Код стационарног струјања, струјнице се не мењају у току времена и поклапају се са путањом честица флуида. Ако постоји стационарни ток, то не значи да се брзина једне честице флуида неће променити у различитим тачкама струјнице. Управо закривљене линије описују те промене.

Било који флуид може протицати (струјати) стационарно ако су испуњени општи услови:

1. брзина је довољно мала и,
2. препреке су такве да не узрокују превише нагле промене брзине.

Уколико ови услови нису испуњени, протицање флуида знатно је сложеније и то струјање називамо турбулентно. Облик струјних линија зависи од тога ког је тело

облика, тако да то доводи до тога да ће струјне линије имати најправилнији облик код тела у облику рибе/авионског крила, док код тела у облику лопте струјнице имају потпуно другачији облик [8].

Ламинарно струјање у стварности се јавља само код врло малих брзина струјања (гравитацијски побуђена струјања, ако брзина није превелика), струјања у капиларама, кроз филтре, код течења вискозних течности (мед, лава, катран и смоле). У свим другим случајевима реални флуиди теку вртложно.

Проблем ламинарног струјања се може математички у целости описати, стога се решење за ламинарно струјање често користи приликом решавања проблема турбулентног струјања.

Када је Re број мањи од 2320, кретање флуида у цевима константног пречника је ламинарно – слојевито. Ако се претпостави да је кретање устаљено, онда ће се струјнице поклапати са путањама и биће паралелне оси цеви. Струјање је и осносиметрично, тј. струјна слика је истоветна у свим меридијанским равнима.

Коефицијент отпора усред трења при ламинарном кретању флуида зависи само од Рејнолдсовог броја, не зависи од храпавости унутрашњих површина цевовода.

Када течност из резервоара улази у неку цев, онда се параболични закон брзине успоставља тек на неком растојању l_p од уласка у цев. Ако је улаз у цев довољно заобљен, тада је у пресеку до самог улаза промена брзине скоро равномерна. Затим, под дејством вискозности долази до издужења профила брзине да би се најзад успоставио параболични профил. Почетна дужина успостављања параболичног профила брзине може да се одреди по Шилеровој формули:

$$l_p = 0,029 D Re \quad (3.1)$$

Експерименти су показали да је отпор услед трења на овој деоници цевовода већи од отпора када би у истој цеви било стабилно ламинарно струјање. При тачним прорачунима дужих цевовода губитак механичке енергије услед трења се рачуна по обрасцу

$$R_v = \left(1,09 \lambda \frac{l_p}{D} + \lambda \frac{l - l_p}{D} \right) \frac{v^2}{2} \quad (3.2)$$

ако је $l = l_p$, онда следи

$$R_v = 109 \frac{l}{D} \frac{v^2}{2} \quad (3.3)$$

одакле следује да је отпор услед трења на почетној дужини цеви, на којој се формира параболични профил брзине, за 9% већи од отпора услед трења на истој дужини цеви, у којој је струјање са већ формираним параболичним профилем брзине.

3.2 Турбулентно струјање флуида

Турбуленција је неправилно вртложно струјање које се јавља у течности када се оно успорава због проласка поред чврстих тела или када брзина струјања прелази одређену границу. За турбулентно струјање карактеристично је да поред средње брзине струјања, свака честица течности има још и додатну брзину која може бити делимично у смеру главног струјања, делимично супротна смеру струјања. По томе се разликује турбулентно од ламинарног струјања, у којем нема додатних брзина. Под одређеним условима уз турбуленцију појављује се и кавитација.

У атмосфери је струјање ваздуха (ветра) готово увек турбулентно. Турбулентно кретање се јавља при већим брзинама, јавља се због препрека на путу, наглих промена брзина, вискозности. Бездимензиони Рејнолдсов критеријум омогућава одређивање режима струјања.

Посматрањем струјног влакна, у зависности од брзине којом вода протиче кроз цев може се уочити један нов феномен, постојање неправилних флукуационих импулса чији утицај на стабилност тока расте са порастом брзине. У области малих брзина, флукуациони импулси су веома слабо изражени и влакно мирно и глатко тече дуж цеви[8].

Повећањем брзине, повећава се и утицај импулса, влакно прво почиње да се повија, а при још већим брзинама да се кида. Квалитативна и квантитативна испитивања су показала да је појава кидања нити управо пропорционална средњој брзини струјања флуида у цеви (w), пречнику цеви (d) и густини флуида (ρ), а обрнуто пропорционална вискозитету флуида (μ) а да кидање нити настаје онда када количник ових величина достигне вредност од око 2000. Овај бездимензионални количник и данас познајемо као Рејнолдсов број Re

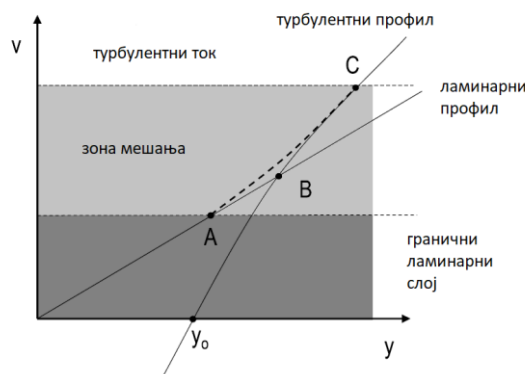
$$Re = \frac{d \cdot w \cdot \rho}{\mu} \quad (3.4)$$

Рејнолдсов број је бездимензиона величина и кључни параметар струјања вискозног флуида. Тим бројем се дефинише граница између ламинарног и турбулентног струјања. На његову бројну вредност утиче више параметара струјања флуида. Користи се за довођење карактеристика струјања на упоредиве услове. Физички смисао Рејнолдсовог броја је однос инерцијалних и вискозних сила флуида.

Када се ради о струјању флуида кроз цеви кружног пресека, оно је при $Re \leq 2300$ ламинарно. У овоме режиму слојеви флуида глатко клизе један преко другог и у њему се количина кретања преноси само молекулским механизмом. Прекорачењем $Re = 2300$ улази се у област у којој све изразитије постаје учешће другог-конвективног механизма преноса количине кретања који потпуно преовладава при $Re \geq 10000$ када струјање постаје изразито турбулентно [9].

Турбулентни струјни ток течности кроз цеви састоји се из три области и може се видети на слици 11. Непосредно поред зидова цеви формира се ламинарни гранични слој,

тј. тачније ламинарни гранични подслој (вискозни подслој) који је сасвим мале дебљине. Затим се протеже прелазна област (зона мешања) док највећу област, у средини цеви заузима турбулентно језгро струје.



Слика 11 – Турбулентни струјни ток [10]

Стантон је први показао експерименталним путем да ламинарни гранични подслој постоји при турбулентном струјању кроз цеви.

У ламинарном граничном слоју профил брзине је параболичан, али се може апроксимирати правцем, јер је дебљина граничног слоја далеко мања од полупречника цеви. С друге стране, у турбулентном делу тока профил брзине је логаритамски. Тај профил у близини зида сече у-осу у тачки y_0 у којој турбулентна брзина ишчезава. Решење проблема са негативним вредностима које уз зид даје израз је да од зида до тачке В, у којој се ова два профила брзине секу, користи ламинарни профил брзине, а од тачке В па све до осе цеви турбулентни. У стварности је тај прелаз поступан (нема лома у профилу брзине који у овом моделу имамо у тачки В) и приказан је испрекиданом кривом која иде од тачке А до тачке С. За рачун је претпоставка ипак довољно добра, пе се неће ићи у додатну компликацију конструкције глатке криве која повезује тачке А и С [10].

Дебљина ламинарног граничног слоја δ_{gs} зависи од пречника цеви D , Re броја и коефицијента отпора услед трења. Ова се зависност може изразити полуемпиријском формулом

$$\delta_{gs} \approx \frac{30D}{Re\sqrt{\lambda}}, \text{ односно } \delta_{gs} = \frac{30D}{\sqrt{Re}\sqrt{64}} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (3.5)$$

дакле, дебљина ламинарног граничног слоја обрнуто је сразмерна квадратном корену из Re броја.

И прелазна област је, такође, релативно мале дебљине. У овој области поред хаотичног кретања, местимично се одржава и слојевито кретање течности. Величина смицајног напона на граници турбулентног језгра и прелазне области битно утиче на отпор турбулентног струјања и на расподелу брзина по пресеку цеви.

Највећу област при турбулентном струјању заузима турбулентно језгро. У њему се струјање одликује интензивним стварањем и нестајањем струјница, које је праћено преносом количине кретања коначних маса кроз границе између појединих делова флуида. При томе, делићи течности који имају веће брзине залазе у суседне слојеве у

којима је кретање спорије или обрнуто, што доводи до извесног изравнања просечних брзина у разним тачкама пресека турбулентног језгра. Код струјања са већим степеном турбуленције профил брзине је уједначенији [10].

3.3 Појаве при струјању течности

При струјању течности у хидросистемима могу настати штетне појаве. Једне од најкарактеристичнијих и најопаснијих су: абсорпција, кавитација, стварање пене и хидраулични удар [1].

3.3.1 Хидраулични удар

Свака нагла промена протока течности кроз цевовод, праћена наглим повећањем притиска, као и великим осцилацијама се назива хидраулични удар. Када се у цевоводу нагло промени брзина струјања, може доћи до повећања притиска. Пошто се то догађа веома брзо, праћено је буком и вибрацијама па је могући настанак хаварије цевовода (Сл. 12).

Комплекс појава које настају у цевоводу због нагле промене брзине струјања руски научник Жуковски назвао је хидрауличним ударом. Жуковски је први (1889. год.) теоријски обрадио проблематику хидрауличног удара, односно, поставио диференцијалне једначине и нашао њихова решења. Због већих промена притисака до којих долази при хидрауличном удару, при објашњењу овог феномена мора се узети у обзир и стишљивост течности, као и еластичност цевовода. Кретање течности за време хидрауличног удара је осцилаторно, а захваљујући постојању трења осцилације се пригушују и током времена ишчежавају [11].



Слика 12 – Експанзионни спојевци уништени услед хидрауличног удара [12]

3.3.2 Кавитација

То је процес стварања микроудара високе учестаности, веома високог притиска и високе температуре на местима ниског присиска. Када кроз одређени цевовод, вентил, и др. радна течност почне да испарава у зонама ниског притиска, то значи да је притисак у течности на тим местима опао испод вредности притиска испаравања радне течности.

У течности која струји може да настане појава која се назива кавитација. Под кавитацијом се подразумева нестационарни процес стварања, раста и кондензације парних мехурова. При кавитацији формира се парни мехура. Кавитација је у хидросистемима непожељна појава јер је праћена шумом, вибрацијама, ерозијом материјала, повећањем губитака енергије итд. Кавитација почиње када притисак течности има критичну вредност, тј. када достиже вредност притиска испаравања на датој температури течности.

Када при струјању течности, из било којих разлога, дође до смањења притиска, али таквог да притисак достигне вредност притиска испаравања на одређеној температури течности, формираће се први мехурићи паре који представљају почетак кавитације. Смањење притиска може бити проузроковано прекомерним падом притиска или локалним убрзањем струје течности. Наиме, при локалном убрзању течности брзина струјања расте што је пропраћено смањењем притиска, чиме се ствара плодно тло за настајање кавитације. Места у хидросистемима на којима се јавља кавитација су усисни цевоводи, пумпе, локални отпори, сифони турбина, опструјавана тела и сл.

Формирање првих мехурова паре представља почетни стадијум кавитације, и он зависи од много фактора, и то: поља притиска, поља брзина, температуре течности, врсте флуида, површинских напона, режима струјања, садржајане растворених гасова и времена пролаза течности кроз зону кавитације.

У условима сталног настајања паре процес кавитације се интензификује а таква кавитација назива се развијеном. Створени мехурови паре бивају ношени струјом течности. Када они дођу у поље повећаног притиска престају услови за опстанак мехурова паре, па зато долази до њихове кондензације. Ако се кондензација завршава близу чврсте границе, или на њој, долази до оштећења материјала а та се појава назива *кавитацијска ерозија* [1].

Испаравање течности врши се, у већој или мањој мери, на свим температурама. Међутим, само се бурно испаравање течности назива кључање. Са аспекта проучавања кавитације интересантно је кључање на нижим температурама, које се назива "хладно кључање". Притисак кључања течности зависи од температуре, и то тако што је већи притисак већа је и температура кључања, и обрнуто. Зависност притиска кључања воде, као најчешће коришћеног радног флуида, од температуре дата је у табели 4.

Табела 4. Зависност притиска кључања воде од температуре [1].

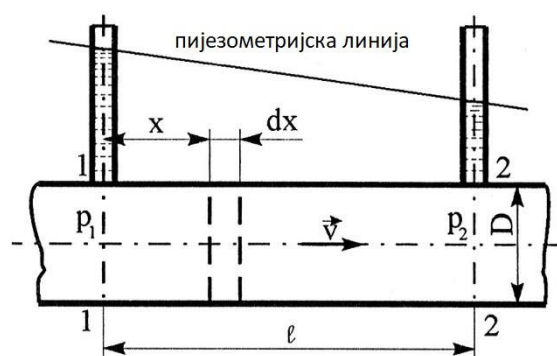
t	°C	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
p _g	Pa	872	1227	2337	4241	7375	12335	19917	31170	47360	70110	101310

4. Губици струјне енергије

Сви вискозни флуиди при кретању губе струјну енергију, делом на пружању отпора померању својих делића а више на трење о зидове цеви или канала кроз које се крећу. Зато се флуиду, који струји мора непрестано додавати енергија што се постиже струјном пумпом или нагибом. Због тога што је дејство силе трења увек у супротном смеру од кретања течности, долази до појаве смањења притиска у цеви кроз коју флуид тече.

Методом димензиске анализе, постављен је аналитички израз који у потпуности описује појаву **пада притиска при устаљеном кретању флуида кроз праве кружне цеви**. Овом методом то се постиже помоћу димензија физичких величина.

Једноставним мерењем лако се уочава да при струјању течности кроз цев дужине l и пречника D долази до пада притиска $\Delta p = p_1 - p_2$ (Сл.13) На местима 1 и 2, постављени пиезометри показују да притисак пада у правцу струјања течности, чиме је и p_1 веће од p_2 . Линија која их спаја назива се пиезометарска линија. Пад притиска сведен на јединицу дужине је $\Delta p/l$ а елементарни пад притиска на деоници dx биће dp/dx . Величине које утичу на пад притиска су: v_s , D , ρ , μ и δ -храпавост.



Слика 13 – Пад притиска у цеви [3]

Средња храпавост δ унутрашње површине цеви је средња висина неравнина која зависи од начина израде и ову величину даје произвођач.

Применом димензиске анализе имаћемо:

$$f\left(\frac{dp}{dx}, D, v, \delta, \mu, \rho\right) = 0 \quad (4.1)$$

На ову појаву утиче шест величина од којих су три независне а то су D , v , ρ па се помоћу π -теореме формира функција од три бездимензиска монома, односно:

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \quad (4.2)$$

$$1) \pi_1 = \frac{dp}{dx} D^{x_1} v^{y_1} \rho^{z_1}, \quad 2) \pi_2 = \delta D^{x_2} v^{y_2} \rho^{z_2}, \quad 3) \pi_3 = \mu D^{x_3} v^{y_3} \rho^{z_3},$$

где су x_i, y_i, z_i ($i=1, 2, 3$) експоненти чији збир мора да буде такав, да π_1, π_2 и π_3 буду мономи без димензија (М-димензија масе, L-димензија дужине, Т-димензија времена) па се редом добија за

	1) π_1	2) π_2	3) π_3
[M] :	$0 = 1 + z_1$	$0 = z_2$	$0 = 1 + z_2$
[L] :	$0 = -2 + x_1 + y_1 - 3z_1$	$0 = 1 + x_2 - y_2 - 3z_2$	$0 = -1 + x_3 + y_3 - 3z_3$
[T] :	$0 = -2 - y_1$	$0 = -y_2$	$0 = -1 - y_3$

Решењем ова три ситема једначина добијамо тражене мономере:

$x_1=1, y_1=-2, z_1=-1$	$x_2=-1, y_2=0, z_2=0$	$x_3=-1, y_3=-1, z_3=-1$
$\pi_1 = \frac{dp}{dx} \frac{D}{\rho v^2}$	$\pi_2 = \frac{\delta}{D}$	$\pi_3 = \frac{v}{Dv}$

$$\Phi\left(\frac{dp}{dx} \frac{D}{\rho v^2}, \frac{\delta}{D}, \frac{v}{Dv}\right) = 0,$$

$$\frac{dp}{dx} \frac{D}{\rho v^2} = \Phi_1\left(\frac{\delta}{D}, \frac{v}{Dv}\right),$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho v^2}{D} \cdot \frac{1}{2} 2\Phi_1\left(\frac{\delta}{D}, \frac{v}{Dv}\right), \quad (4.3)$$

У овом изразу су: $\frac{\delta}{D}$ – релативна храпавост цеви, а $\frac{v}{Dv} = \frac{l}{Re} - R_e$ већ познати Рејнолдсов број. Ове величине су за исти режим струјања, једне течности (v), кроз цев полупречника D исте храпавости (δ) константне, па је део израза $2\Phi_1\left(\frac{\delta}{D}, \frac{v}{Dv}\right)$, обухваћен бездимензиским коефициентом, λ – коефициент отпора услед трења. Коефициент λ , као што се види зависи од режима струјања, храпавости цеви, природе течности, посебно се израчунава за сваки случај струјања, па ће се у каснијем излагању овоме посветити посебна пажња.

Елементарни пад притиска услед трења, на деоници dx , пошто са повећањем растојања опада, добија знак минус и у елементарном облику добија изглед:

$$- dp = \lambda \frac{dx}{D} \frac{v^2}{2} \rho, \quad (4.4)$$

Овај израз представља *Дарсијев образац* за елементарни пад притиска услед трења у диференцијалном облику. Одређени интеграл у границама за $p=p_1$ до $p=p_2$, и $x=(0 \div l)$ лако се добија Дарсијев образац у коначном облику:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2} \rho, \quad (4.5)$$

овај образац представља основ за „транспорт цевима“, може се примењивати и код цеви које нису кружног попречног пресека (код вентилационих гасовода), као и код делимично испуњених цеви, само се тада води рачуна о еквивалентном пречнику па у том случају израз за пад притиска добија изглед:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{4R_h} \frac{v^2}{2} \rho \quad (4.6)$$

4.1 Бернулијева једначина за реалне течности

Реални флуид при струјању губи енергију, па се намеће питање "исправности" Бернулијеве једначине изведене за савршен флуид. Запрво, огледи са реалним флуидом (теčnostима) показали су да бројне вредности добијене посредством Бернулијеве једначине, нису једнаке са стварним вредностима. Енергија струјне течности смањује се низводно дуж струјног влакна односно

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 > \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \quad (4.7)$$

Механичка енергија струјањем течности прелази у друге облике енергије нпр. топлоту, што је за ове услове потпуно бескорисно. Главни узрок овом губитку је трење између делића, чије је деловање занемарено приликом извођења Бернулијеве једначине. Десној страни горње неједначине, недостаје изгубљена енергија, која је у ствари рад сила трења. Овај рад рачунат по јединици масе течности обележен је са R_v , па једначина може да се напише :

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + R_v \quad (4.8)$$

Струјна енергија се такође губи на местима промене попречног пресека, на промени правца струјања R_{ml} , па за вредност свих отпора на путу реалне течности по јединици масе између два узастопна пресека 1-1 и 2-2 струјног влакна усвојена је ознака R_m тако да енергетска Бернулијева једначина гласи:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + R_m \quad (4.9)$$

Ако Бернулијеву једначину напишемо у облику који изражава висине (дељењем енергетске једначине са g) добијамо :

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_m \quad (4.10)$$

при чему је $h_m = R_m/g$, и назива се **изгубљена висина**.

Предходне једначине потпуно су тачне, ако се примењују на струјно влакно, што није случај код струјне цеви. Разлог за то је што се код струјне цеви користе средње брзине v_s , па је потребно вршити преправку. То се постиже Кориолисовим коефициентом α који коригује средњу кинетичку енергију (4.4), из тог разлога се везује за члан $\frac{v^2}{2}$ па потпуна Бернулијева једначина за струјну цев гласи:

$$\alpha \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \alpha \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + R_m \quad (4.11)$$

У овој једначини v_1 и v_2 су средње брзине, p_1 и p_2 притисци у тежиштима струјних пресека, z_1 и z_2 висине тежишта у односу на уппоредну раван. У овом изразу неопходно је одреди израз за R_m односно R_v (R_{tr}) и R_{ml} .

4.2 Прорачун губитака струјне енергије

4.2.1 Прорачун отпора услед трења

Рад вискозних сила $R_v = R_{tr}$ (отпор услед трења) лако се дефинише на правој, хоризонталној кружној цеви кроз коју струји флуид за коју важи једначина протока:

$$v_{s1} A_1 = v_{s2} A_2; \quad A_1 = A_2; \quad v_{s1} = v_{s2} \quad (4.12)$$

тада је Бернулијева једначина сведна на :

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_2}{\rho} + R_v$$

одакле је:

$$R_v = \frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho} = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2} \quad (4.13)$$

односно изгубљена висина:

$$h_v = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (4.14)$$

Даљи проблем се наставља у налажењу коефицијента отпора услед трења λ , који највише зависи од режима струјања флуида.

4.2.1.1 Коефицијент отпора услед трења λ код ламинарног струјања реалне течности кроз праву кружну цев

Ламиларно, као и турбулентно струјање течности може да буде и устаљено и неустаљено. Овде ће се разматрати коефицијент λ при устаљеном струјању.

Теорија о кретању вискозног флуида кроз праве кружне цеви добро се слаже са огледима, када је у питању ламиларно струјање. Зато се при налажењу коефицијента λ у потпуности користе, већ изведени изрази за кретање вискозног флуида кроз праве кружне цеви.

Изведени и објашњени аналитички изрази, који су овде потребни су:

$$v(r) = \frac{k}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (4.15)$$

$$v_{max} = \frac{kR^2}{4\mu} \quad (4.16)$$

$$v_{sr} = \frac{1}{2} v_{max} = \frac{kR^2}{8\mu} = \frac{kD^2}{32\mu} \quad (4.17)$$

$$\frac{dp^*}{dx} = -k = const. \quad (4.18)$$

$$p^* = p - \rho U \quad (4.19)$$

$$\vec{f} = grad U \quad (4.20)$$

за које у посматраном струјању важи:

$\frac{dp^*}{dx} = \frac{dp}{dx} - \rho X$, ($\rho X = 0$), па је $\frac{dp^*}{dx} = \frac{dp}{dx} = -k$, односно $dp = -k dx$, $\int_0^l dx = - \int_{p_1}^{p_2} dp$, добија се:

$$kl = p_1 - p_2 = \Delta p = \rho R_v$$

$$R_v = \frac{kl}{\rho} \quad (4.21)$$

Заменом коефициента k израз за отпор услед трења добија облик

$$R_v = \frac{32\mu v_s}{D^2} \cdot \frac{l}{\rho} \quad (4.22)$$

изједначавањем последње једначине са једначином (4.13) добијамо једнакост из које се лако добија тражени израз за коефициент трења при устаљеном ламиларном струјању реалне течности кроз праве кружне цеви.

$$\frac{32\mu v_s}{D^2} \cdot \frac{l}{\rho} = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2},$$

$$\lambda = \frac{64}{R_e} \quad (4.23)$$

с обзиром да је већ изведено $R_e = \frac{Dv_s}{\nu} < 2320$ код ламиларног струјања течности. Још закључујемо да релативна храпавост зидова цеви не утиче на коефициент трења, већ на њега највише утиче вискозност флуида

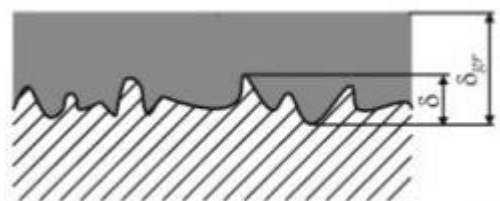
$$\lambda = \lambda(R_e) \quad (4.24)$$

4.2.1.2 Коефицијент отпора услед трења λ код турбулентног кретања реалне течности кроз хидраулички глатке и хидраулички храпаве цеви

Димензиска анализа показала је да коефициент λ , зависи од R_e броја и релативне храпавости δ/D . Храпавост код ламиларног струјања нема утицаја због дебљине граничног слоја, који је у том случају довољно дебео, да прекрива све неравнине, па се цев понаша као да је глатка.

Све техничке цеви су храпаве и висина нервнина зависи од начина производње, стања цеви, материјала и сл. Течност која струји преко овакве површине ствара гранични слој чија се дебљина обележава са δ_{gs} , док је са δ обележава висина неравнина површине цеви. У зависности од степена храпавости цеви, R_e броја, течност се различито понаша.

У првом случају ако је R_e број доста мали, δ_{gs} односно дебљина граничног слоја је велика, па се може десити да $\delta_{gs} > \delta$. Тада трећа област-турбулентно језгро, струји преко прве области-граничног слоја, па храпавост не утиче на струјање. У том случају главни отпор кретању је треће течности о течност и коефициент λ зависи само од R_e броја, односно: $\lambda = \lambda(R_e)$, што важи у случају **хидраулички глатких цеви**(Сл.14).

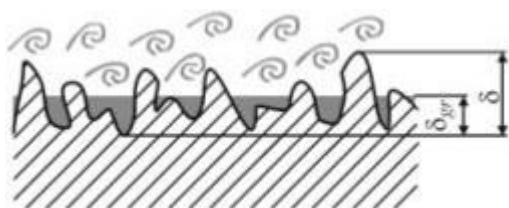


Слика 14 – Хидраулички глатке цеви [13]

У другом случају када је Re број, врло велики, дебљина граничног слоја тежи малој вредности $\delta_{gs} \rightarrow 0$ па не може да прекрије неравнине. Тада гранични слој као да не постоји а неравнине "штрче" у главни део течности, око њих настају вртлози, тако да су неравнине главни узрок отпора. Треће течности о течност је тада занемарљиво па је

$$\lambda = \lambda\left(\frac{\delta}{D}\right) \quad (4.25)$$

при чему се δ/D назива релативна храпавост. У овом случају ће бити $R_{mtr} = f(v^2)$, а струјање се назива "квадратично" и односи се на **хидраулички потпуно храпаве цеви**.



Слика 15 - Хидраулички храпаве цеви [13]

У трећем случају Re број може бити велики, гранични слој формиран али није много велики, дакле има трећа и течности о течност и трећа између течности и нервнина па

$$\lambda = \lambda\left(Re, \frac{\delta}{D}\right) \quad (4.26)$$

у овом случају ради се о **хидраулички храпавим цевима** (Сл.15).

Из свега изложеног долази се до закључка да би требало да постоје три врсте образаца за израчунавање коефициента отпора услед трења, а у ствари их има много више. Сваки од ових образаца добијен је полуемпириским путем, за одређене услове.

Данас постоје многобројне формуле развијене у Хидраулици које су добијене емпириским путем, експериментима чији резултати, дају врло тачне вредности коефициента λ .

4.2.2 Губици струјне енергије услед локалних отпора

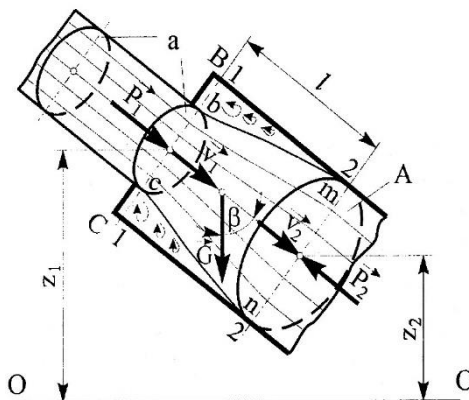
У Хидромеханичкој физици енергија која описује кртање, везана је за кинетичку енергију, па и све промене струјне енергије морају бити оправдане коефициентима који их умањују. Губитак струјне енергије је увек присутан на местима као што су: промена правца кретања, наглих проширења, постепених проширења, наглих сужења, и много других локалних места на путу течности до њене употребне вредности. Као ознака за коефициент пропорционалности губитака струјне енергије усвојен је симбол ξ , који са одговарајућим индесом $\xi_{kl}, \xi_v, \dots$ означава тип локалног места, код кога настају губици. Ови коефициенти везани за кинетичку енергију и по јединици масе течности дају нам образац за израчунавање локалних отпора:

$$R_{ml} = \xi_l \frac{v^2}{2}, \quad (l = k, v, u, np, ns \dots) \quad (4.27)$$

Коефициенти локалних губитака ξ_l углавном се одређују експериментално. Локални губици су последица појаве микровртлога, због којих је струјање на тим местима турбулентно, па самим тим и не зависи од Re броја. Зато су коефициенти

локалних отпора ζ_l константне вредности, у свим случајевима, осим у случају наглог проширења ζ_{np} које се може израчунати.

4.2.2.1 Губици струјне енергије услед наглог проширења



Слика 16 – Нагло проширење [7]

Сам назив овог губитка струјне енергије, говори о томе да течност струји кроз цев, попречног пресека a , која се нагло прошири на пресек A (Сл.16). Од пресека 1-1 до пресека 2-2, на растојању l , струјни ток се постепено шири, јер не може да прати зидове цеви, због појаве јаких инерциских сила. На том делу између струјног тока и зидова цеви, стварају се микровртлози, који су главни узрок губитка струјне енергије.

За пресек 1-1 до 2-2 можемо поставити Бернулијеву једначину за реалне течности

$$R_{mnp} = \left(\alpha \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \right) - \left(\alpha \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \right)$$

$$R_{mnp} = \frac{\alpha}{2} (v_1^2 - v_2^2) + \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) (*)$$

Применом Закона о промени количине кретања, губитак струјне енергије добијамо помоћу средњих брзина v_1 и v_2 у пресецима a и A . Векторска једначина овог закона, пројектована на осу цеви биће:

$$\alpha' \rho Q (v_2 - v_1) = P_1 - P_2 + mg \cos \beta \quad (4.28)$$

При чему су: $P_1 = p_1 A$, $P_2 = p_2 A$, $Q = v_2 A = v_1 a$, $m = \rho A l$, $l \cos \beta = z_1 - z_2$. Када ове величине уврстимо у једначину Закона о промени количине кретања добијамо:

$$\alpha' v_2 (v_2 - v_1) = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g (z_1 - z_2) (**)$$

На основу једначина (*) и (**) добијамо, за губитак струјне енергије наглог проширења:

$$R_{mnp} = \frac{\alpha}{2} (v_1^2 - v_2^2) + \alpha v_2 (v_2 - v_1)$$

после сређивања једноставним математичким трансформацијама, уз то да је $\alpha/\alpha' \approx 1$

$$R_{mnp} = \frac{\alpha'}{2} (v_1 - v_2)^2 \quad (4.29)$$

У сличају турбулентног струјања, што на овом локалном месту и јесте случај $\alpha' \approx 1$,

$$R_{mnp} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} \quad (4.30)$$

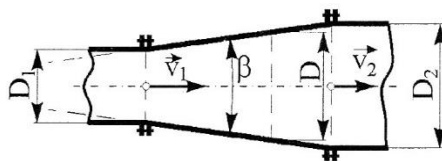
Овај образац представља Борда-Карноову формулу, која се може написати у другачијем облику, ако се узме у обзир једначина протока по којој је, $v_1/v_2 = A/a$,

$$R_{mnp} = \xi_{np} \frac{v_2^2}{2} \quad (4.31)$$

при чему је коефициент ξ_{np} одређен изразом:

$$\xi_{np} = \left(\frac{A}{a} - 1 \right)^2. \quad (4.32)$$

4.2.2.2 Локални губици услед постепеног проширења (у дифузору)



Слика 17 – Дифузор [7]

Код постепеног проширења (Сл.17) попречног пресека струјна енергија се губи, због појаве макровртлога и израчунава се помоћу обрасца

$$R_{md} = \xi_d \frac{v_2^2}{2} = k \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} \quad (4.33)$$

при чему је

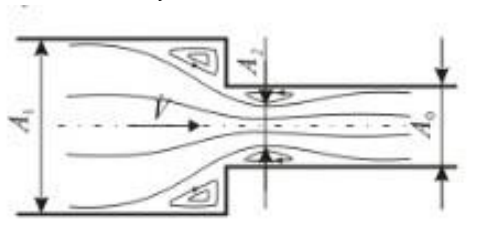
$$\xi_d = k \left[\left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 - 1 \right]^2 \quad (4.34)$$

Коефициент k даје се таблички и зависи од угла ширења дифузора β .

Табела 5. Коефициент k дифузора

$\beta [^\circ]$	3	4	5	6	7	8	10	15	20
k	0,180	0,150	0,140	0,135	0,140	0,145	0,170	0,265	0,429

4.2.2.3 Локални губитак услед наглог сужења



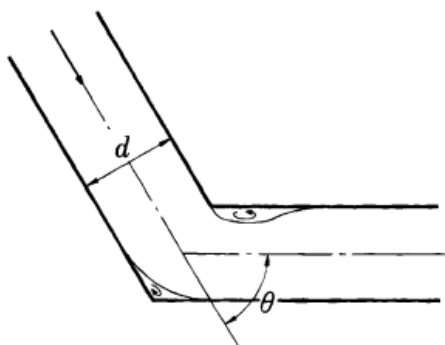
Слика 18 - Нагло сужење [7]

У овом случају се, као код наглог проширења, јављају микровртлози између струјног тока и цеви већег попречног пресека (Сл.18), јер ни овде течност не може да прати зидове цеви, већ се њен ток постепено сужава. Већа разлика у пречницима цеви, условљава и већи губитак струјне енергије па је однос $(A_0/A_1)^2$ и узет као меродаван за налажење коефициента локалног отпора при нагом сужењу ξ_{ns} , и дат је табелом 6.

Табела 6. Коефициент локалног отпора услед наглог сужења ξ_{ns}

$(A_0/A_1)^2$	0,01	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80	0,90
ξ_{ns}	0,50	0,49	0,42	0,33	0,25	0,15	0,09

4.2.2.4 Локални губитак у колену



Слика 19 – Колено [7]

На слици 19 приказана су места где се стварају микровртлози, због којих долази до губитка струјне енергије, а свакако највећи утицај има угао скретања струјног тока θ . Важан утицај има и стање цеви кроз коју протиче течност, па су измерене вредности коефициента, добијене експерименталним путем, ξ_k дате табелом 7.

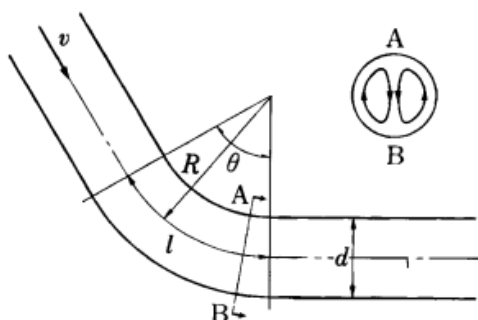
Табела 7. Коефициент отпора колена ξ_k

$\theta [^\circ]$	5	10	15	22,5	30	45	60	90
ξ_k glatke	0,016	0,034	0,042	0,066	0,130	0,236	0,471	1,129
ξ_k hrapave	0,024	0,044	0,062	0,154	0,165	0,320	0,684	1,265

Овај коефициент зависи и од пречника цеви d . Са већим пречницима, установљено је да се ξ_k смањује.

4.2.2.5 Локални губитак у кривини

Коефициент локалног губитка у кривини ξ_k , зависи од односа полупречника кривине R и пречника цеви d . Експерименталним путем добијена је табела 8, која се односи на кривине чији је угао закривљености 90° (Сл.20). Ова табела се користи и за другачије углове, тако што се одговарајућа вредност из табеле множи односом $\theta^\circ/90^\circ$.

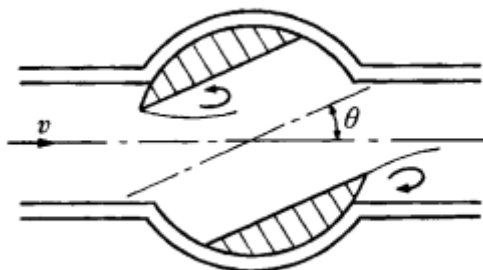


Слика 20 – Кривина [7]

Табела 8. Коефициент отпора кривине ξ_{kr}

R/d	1	2	4	6	10
ξ_{kr} glatke	0,23	0,14	0,10	0,08	0,09
ξ_{kr} hrapave	0,51	0,30	0,23	0,18	0,20

4.2.2.6 Локални губитак у славини



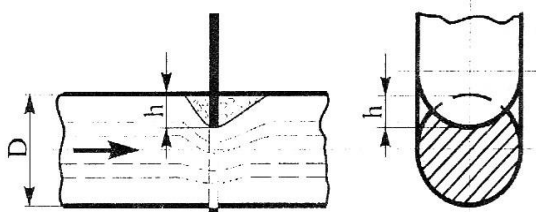
Слика 21 - Струјање кроз славину [7]

Вредности коефициента отпора у славини ξ_s зависе од угла θ под којим је славина отворена (Сл. 21), а измерене вредности, добијене експериментима дате су табелом 9.

Табела 9. **Коефициент отпора славине ξ_s**

$\theta [^\circ]$	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
ξ_s	0,36	0,90	2,70	7,50	18,20	49,20	151	675

4.2.2.7 Локални губитак у засуну



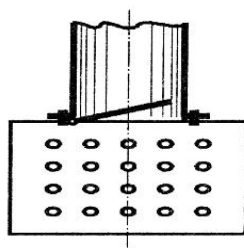
Слика 22 - Струјање у засуну [7]

Засун је врста вентила, који изгледа као на слици 22 и коефициент отпора ξ_z , који настаје на овом месту, зависи од тога колико је засун отворен, односно од односа h/D . Вредности овог коефициента дате су у табели 10.

Табела 10. **Коефициент отпора засуна ξ_z**

h/D	0	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8
ξ_z	0,12	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

4.2.2.8 Локални губитак у заштитној корпи



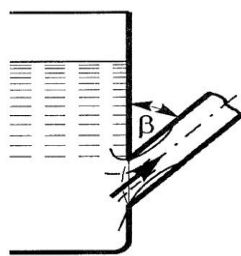
Слика 23 - Заштитна корпа [7]

Заштитна корпа (Сл.23) се поставља на усисном делу цевовода, а улога јој је да заштити пумпу од нечистоћа, које се евентуално налазе у течности. Коефициент отпора заштитне корпе ξ_{zk} , представљени су табелом 11 у зависности од пречника цеви D .

Табела 11. **Коефициент отпора заштитне корпе ξ_{zk}**

$D [mm]$	50	75	100	125	150	200	250	300	400
ξ_{zk}	10	8	7	6,5	6	5	4,5	4	3

4.2.2.9 Локални губитак на улазу у цилиндричну косу цев

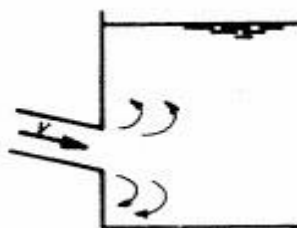


Слика 24 - Улаз у косу цев [14]

Како се види на слици 24, цилиндрична цев је нагнута под углом β у односу на резервоар из кога течност улази у цев. Поред Вајсбахове формуле по којој се коефициент отпора може израчунати, углавном се за угао $\beta=90^\circ$ усваја $\xi_u=0,5$, док код прописно заобљеног улаза у цев за овај коефициент могу се узети вредности

$$\xi_u=0,04 \div 0,10.$$

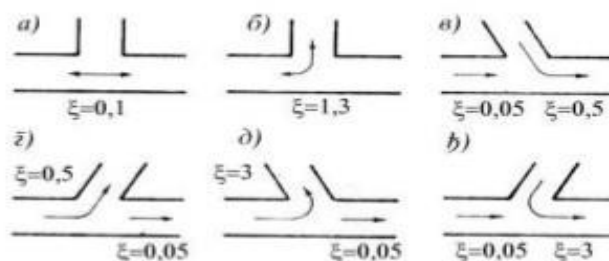
4.2.2.10 Локални губитак при истицању течности из цеви у резервоар



Слика 25 - Истицање цеви у резервоар [7]

При истицању течности из цеви у резервоар (Сл.25), кинетичка енергија коју је флуид поседовао у цеви, губи се у великим димензијама резервоара и остаје неискоришћена. Коефициент губитака у овом случају $\xi_r=1$ за турбулентно, а $\xi_r=2$ за ламинарно струјање.

4.2.2.11 Локални губици у рачвама



Слика 26 - Коефицијенти губитака у рачвама [7]

Рачве су места спајања више цеви истих или различитих пречника под различитим угловима у циљу "развођења" течности у више различитих праваца. Неки од коефициената ξ_r дати су на слици (Сл.26).

5. Закључак

У почетном делу овог рада описане су основне физичке величине које учествују у проучавању струјања флуида као и основни закони кинематике и динамике нестишљивог флуида. Дефинисана је разлика између Ојлеровог и Лагранжовог приступа струјања флуида.

У посебном поглављу кратко су наведена два типа струјања, ламинарно и турбулентно. Ламинарно струјање карактерише довољно мала брзина протока и препреке које не узрокују нагле промене брзине струјања. Турбулентно струјање карактерише то да свака честица течности, поред средње брзине струјања, има и додатну брзину која може бити делимично у смеру главног струјања, делимично супротна смеру струјања.

Након теоријских разматрања закључено је да се на различите начине могу одредити коефицијент трења флуида али уз помоћ експериментално истраживање. Проучавањем физичких својстава различитих савршених флуида као и аналитичко налажење решења диференцијалним једначинама наилази се на решење техничког проблема.

Нема скоро ни једне гране технике у којој се не примењују резултати добијени проучавањем мировања и кретања флуида стога овај рад може користити као јасна литература у даљем проучавању струјања флуида.

6. Литература

- [1] Ашковић Т., Ашковић П., *Хидраулика и пнеуматика*, Машински факултет у Београду, Београд, 1994.
- [2] Обровић Б., Шашић М., *Хидраулика*, Научна књига, Београд, 1990.
- [3] Обровић Б., *Механика флуида*, Машински факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац, 2007.
- [4] <https://bs.wikipedia.org/wiki/Viskoznost>, приступљено у септембру 2018.
- [5] https://bs.wikipedia.org/wiki/Stokesov_zakon, приступљено у септембру 2018.
- [6] <http://mathworld.wolfram.com/CylindricalCoordinates.html>, приступљено у септембру 2018.
- [7] Nakayama Y., *Introduction to Fluid Mechanics*, YOKENDO CO.LTD, Tokyo, 1998.
<https://vscht.cz/uchi/ped/hydroteplo/materialy/introduction.fluid.mech.pdf>, приступљено у септембру 2018.
- [8] https://sr.wikipedia.org/sr/%D0%94%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D0%BA%D0%B0_%D1%84%D0%BB%D1%83%D0%B8%D0%B4%D0%B0, приступљено у септембру 2018.
- [9] <https://sr.wikipedia.org/sr/Turbulencija>, приступљено у септембру 2018.
- [10] Андрејић Ж. *Интерна скрипта из Механике флуида*, Рударско геолошко нафтни факултет, Загреб, 2008.
- [11] <https://dokumen.tips/documents/hidraulicni-udar.html>, приступљено у септембру 2018.
- [12] https://hr.wikipedia.org/wiki/Vodni_udar, приступљено у септембру 2018.
- [13] Вираг З., *Механика флуида*, Факултет стројарства и бродоградње, Загреб, 2001.
- [14] Обровић, Б., Савић, С., *Хидраулика – основи*, Машински факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац, 2005.

7. Ознаке

A	површина, пресек
B	ширина, тачка
b	ширина, константа
D	пречник
d	диференцијал, пречник
E	енергија
E_k	кинетичка енергија
e	струјна енергија јединице масе течности
$\vec{F}$	сила
$\vec{F}_R$	сила отпора услед вискозности
$\vec{F}_w$	сила отпора
f	функција
$\vec{f}$	запреминска сила по јединици масе
$\vec{G}$	сила земљине теже
$\vec{g}$	убрзање земљине теже
H	висина
h	висина, дубина
h_m	висина губитка струјне енергије
h_v	висина губитка струјне енергије услед трења
I	хидраулички нагиб струјног тока
K	модул протока, константа
$\vec{K}$	количина кретања
k	коэффициент, преводни коэффициент, коэффициент притиска, константа
L	дужина, крива линија
L	димензија дужине
$d\vec{L}$	усмерени елемент криве линије
l	дужина

M	тачка,
M	димензија масе
m	маса, изложилац степена
dm	елементарана маса
N	снага, тачка
$\Delta \vec{N}$	сила нормална на површину ΔA
n	број обртаја, коефициент храпавости
$\vec{n}$	вектор нормале
O	координатни почетак, оквашени обим
$\vec{P}$	сила притиска
$d\vec{P}$	елементарна сила притиска
p	притисак
p^*	генералисани притисак
Δp	пад притиска
δp	промена (пораст) притиска
p_a	атмосферски притисак
p_m	натпритисак
p_v	потпритисак
Q	проток
dQ	елементарни проток
Q_m	масени проток
Q_T	транзитни проток
q	специфични проток
R	полупречник
$\vec{R}$	сила реакције
$\Delta \vec{R}$	површинска сила
Re	Рејнолдсов број
Re^*	критични Рејнолдсов број
R_h	хидраулички радијус
R_m	губитак струјне енергије по јединици масе течности

R_v	губитак струјне енергије по јединици масе услед трења
s	коэффициент стишљивости
T	интервал времена
T	димензија времена
$\vec{T}$	сила трења
$\Delta \vec{T}$	тангентна сила
t	време, температура
U	функција силе
V	запремина
dV	елементарна запремина
$\vec{v}$	брзина
v_{max}	максимална брзина
$\vec{v}_r$	радијална брзина
v_s	средња брзина
v_x, v_y, v_z	пројекције брзина
X, Y, Z	пројекције резултанте запреминских сила (по јединици масе)
x, y, z	Декартове координате
α	угао, Кориолисов број, коэффициент
α'	Бусинесков број
β	угао
δ	апсолутна храпавост зидова цеви
δ_{gs}	дебљина граничног слоја
ε	модул стишљивости
η	коэффициент корисности, бездимензиска променљива
θ	угао
λ	коэффициент отпора услед трења
μ	динамичка вискозност
ξ	коэффициент локалног отпора
ρ	густина

σ	нормални напон
τ	напон трења, тангенцијални напон
φ	потенцијал брзине