

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Металне конструкције

Број индекса: 169/2012

Саша З. Радосављевић

Прорачун и конструкција притиснутог стуба са решеткастом испуном

завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. **др Весна Марјановић - ментор**

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да:

1. Представи начине извођења притиснутих стубова
2. Представи прорачун центрично притиснутих стубова сложеног попречног пресека
3. Прикаже пример прорачуна и конструкције једног притиснутог стуба са решеткастом испуном

Препоручена литература:

[1] Буђевац Д., Марковић З. и др., Металне конструкције, Грађевинска књига, Београд, 2007

[2] Николић Р., Марјановић В., Металне конструкције-Приручник за прорачуне, Машински факултет, Крагујевац, 1998

[3] Николић Р., Вељковић Ј., Марјановић В., Металне конструкције-збирка решених задатака, Машински факултет, Крагујевац, 2013

Крагујевац, датум

ментор:

др. Весна Марјановић, ванр. проф

Резиме рада

У овом раду су детаљно разматрани притиснути штапова сложеног попречног пресека. Проблем стабилности који се јавља при притиску решава се налажењем границе до које је стабилна равнотежа између унутрашњих и спољашњих сила. Посебна пажња посвећена је прорачуну и конструисању притиснутих штапова сложеног попречног пресека (вишеделних штапова) чије су предности у могућности мењања карактеристика променом попречног пресека и момента инерције размицањем елемената. Стуб је изведен са решеткастим ојачањем. За један конкретан пример у раду је дат комплетан прорачун спојних лимова, главе и подножја стуба.

Кључне речи: Стуб, притисак, вишеделни штап

Summary of work

In this work are considered in detail pressed sticks of a complex cross-section. The problem of stability which occur at a pressure. it's been solved by finding a bounary untill the balance between inside and outside forces are stable. Special attention is dedicated to estimate and design of a pressed sticks of the cross-section (multipart sticks) whose benefits lays in a possibility of the variable features (moment of inertia) by displacement of the elements. Interior of the pole is consteuctured like a grid. For one particular example in work is given calculation of a extremal sheet metal, the top and a bottom of the pole.

Key words: Pole, pressure, multipart stick

Садржај

1. Увод.....	6
2. Извијање аксијално притиснутих штапова.....	8
2.1 Линеарна теорија еластичног извијања.....	9
2.2 Извијање у пластичној области.....	12
3. Конструктивно обликовање стубова оптерећених аксијално притискујућом силом вишеделног попречног пресека.....	14
3.1 Аксијално притиснути штапови константног вишеделног попречног пресека..	15
3.2 Прорачун стабилности аксијално притиснутих штапова константног вишеделног пресека према JUS U.E7. 091/1986.....	18
4. Пример прорачуна притиснутог стуба са решеткастом испуном.....	25
Закључак.....	33
Литература.....	34

1. Увод

Под појмом металних конструкција најчешће се подразумева челик а у последње време и његове легуре, због мање специфичне тежине. Алуминијум је применљив код конструкција код којих тежина има значајну улогу. Такође јављају се и спрегнуте конструкције код којих имамо употребу више материјала.

Металне конструкције нашле су своју примену у областима:

-мостоградње

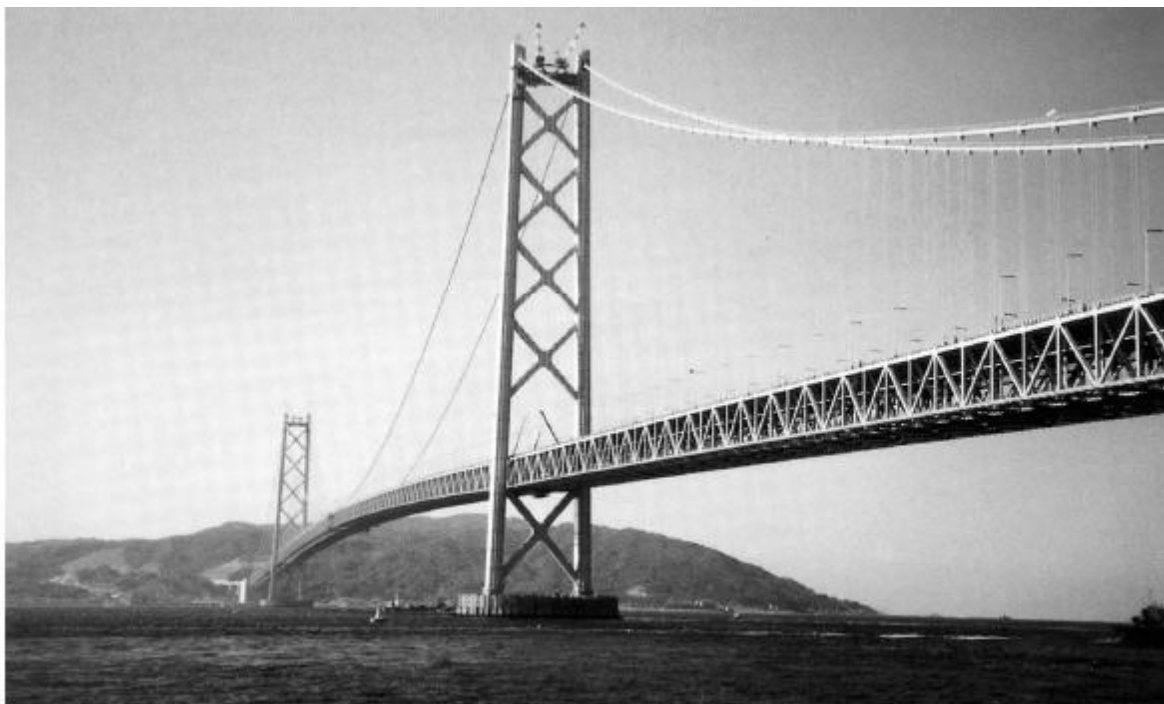
-зградарству

-машиноградњи

транспортним уређајима

-спортским објектима

-специјалним објектима.



Слика 1. Мост Akashi-Kaikyo

Под појмом штапа подразумева се онај елемент конструкције, чије су попречне димензије занемарљиве у односу на дужину, а оптерећени су већином подужним силама у правцу њихове тежишне осе, затезним или притисним силама.

Када су у питању притиснути штапови, слично затегнутим, разликујемо *центрично* притиснуте штапове, односно аксијално притиснуте штапове у којима се нападна линија притискујуће силе поклапа са тежишном осом штапа и *ексцентрично* притиснуте штапове код којих нападна линија силе одступа од тежишне осе штапа.

Притиснути штапови се димензионишу на основу провере стабилности штапа која се састоји у налажењу границе до које је задовољена равнотежа између спољашњих и унутрашњих сила које делују на притиснути штап.

Уколико се штап састоји од два или више делова, који су међусобно повезани, онда се такав штап назива сложеним штапом. За случај да се састоји само од два дела, онда штап називамо дводелним штапом.

С обзиром да стубови представљају основу већине металних конструкција, од њих се захтевају најстрожи критеријуми у погледу чврстоће и крутости. Обзиром да се преко стубова преноси читаво оптерећење конструкције, јасно је зашто представљају најодговорнији део конструкције.

Предности примене притиснутих штапова сложеног попречног пресека су:

- Могућност примене стандардних ваљаних профила
- Уштеда у материјалу при изради и уградњи
- Остваривање велике крутости
- Знатно искоришћење попречног пресека
- Могућност реализације стубова како у радионици, тако и на терену

Сложени штапови могу да се изводе на два начина:

- Поједини саставни елементи се везују у целину по читавој дужини штапа, конструктивним закивцима или шавовима
- Саставн делови су самостални и везују се међу собом само с места на место, да би се одржало јединство пресека, спречило савијање, размицање и излажење елемената из своје равни.

2. Извијање аксијално притиснутих штапова

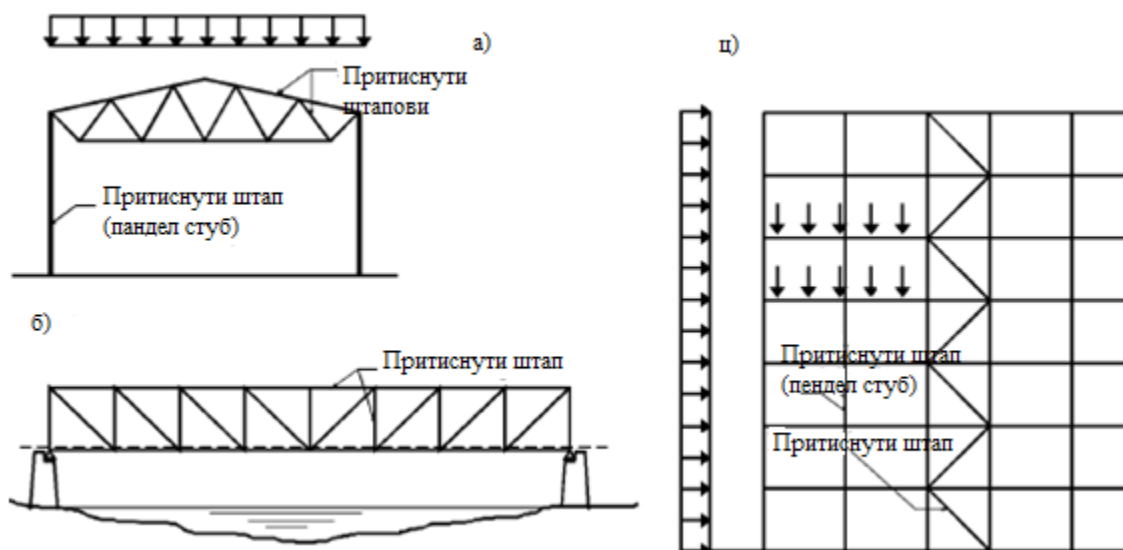
Делимичном или потпуном притиску изложен је велики број елемената у носећим челичним конструкцијама или њиховим деловима. Притиснути штапови решеткастог носача (појасни и штапови испуне), стубови као и лучни носачи подлежу сили притиска по целој дужини попречног пресека, док су ригле, гредни носачи и стубови оквира као и остали елементи оптерећени на савијање само делимично притиснути (попречни пресеци изложени притиску и затезању). Када је у питању разматрање елемената чији су макар и поједини делови попречног пресека притиснути, мора се водити рачуна о њиховој *стабилности*. Може се рећи да напон притиска изазива појаве нестабилности конструкција.

Аксијално притиснути штапови могу се јавити у облику:

- појасни штапови и неки штапови испуне решеткастих носача у зградарству и мостogradњи (слика 2.а,б)
- неки штапови хоризонталних и вертикалних спрегова у зградарству (слика 2.ц) и мостogradњи
- стубови код индустријских и спратних зграда

Гранична носивост је код већине притиснутих елемената условљена критеријумом стабилности а не критеријумом носивости. Појам стабилности, може се најједноставније дефинисати као проблем „превременог“ лома конструкције. Ово значи да долази до исцрпљења носивости попречног пресека пре достизања допуштених напона, све због нестабилности притиснутих елемената.

Пошто је челик материјал са високим механичким карактеристикама, али и релативно скуп, онда се ови елементи изводе као танкозидни (отворени или затворени), па се јављају сви проблеми везани за стабилност танкозидних елемената, као што су бочно извијање и избочавање. У даљем делу рада биће описани проблеми стабилности центрично притиснутих штапова.



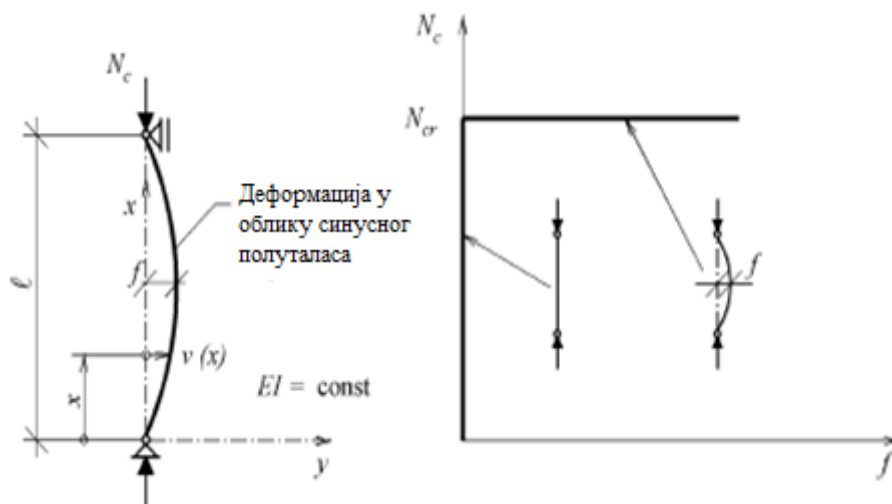
Слика 2. Неке могућности примене аксијално притиснутих штапова у челичним конструкцијама

2.1 Линеарна теорија еластичног извијања

Још 1744. године Ојлер је први обрадио проблем извијања аксијално притиснутог штапа у еластичној области. Притом је користио идеални аксијално притиснути штап. Основне претпоставке на којима се заснива Ојлерова теорија еластичног извијања су:

- штап је идеално прав(нема геометријских имперфекција),
- штап је зглобно ослоњен на оба краја,
- попречни пресек је константан и једноделан
- спречене су торзионе деформације
- материјал је хомоген, изотропан и линеарно еластичан

Такође, користи се претпоставка да је крива $N-f$ (Нормална сила-угиб) билинеарна, као што је приказано на слици 3. Наиме, за све силе $N < N_{cr}$, нема бочних померања f , што значи да нема ни извијања све док се не достигне $N = N_{cr}$. Овако формулисан проблем назива се проблем бифуркационе стабилности.



Слика 3.- Извијање аксијално притиснутог штапа

Да би се одредила вредност критичног оптерећења мора се посматрати деформационо стање штапа. Услови равнотеже дају основну диференцијалну једначину овог проблема. Момент савијања при дејству нормалне силе у произвољном попречном пресеку је:

$$M = N_c \cdot v(x) \quad (1)$$

Ако се у диференцијалну једначину савијања штапа:

$$v''(x) = -M / EI \quad (2)$$

уврсти момент у функцији померања v , добија се следећа диференцијална једначина:

$$v''(x) + k^2 v(x) = 0 \quad (3)$$

где је:

$$k^2 = N_c / EI \quad (4)$$

Једначина (3) је диференцијална једначина извијања аксијално притиснутог штапа. Она представља једначину другог реда са константним коефицијентима (N_c и EI су константе) чије се опште решење може представити у облику:

$$v(x) = A \cdot \sin kx + B \cdot \cos kx \quad (5)$$

Увођењем граничних услова:

$$v(0) = 0 \text{ и } v(l) = 0 \quad (6)$$

из услова о егзистенцији нетривијалних услова добија се

$$N_{cr} = N_E = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (7)$$

где су:

E -модул еластичности,

I -момент инерције попречног пресека у равни извијања,

l -дужина штапа.

Основни случај извијања представља извијање обострано зглобно ослоњеног штапа. Уколико уведемо појам дужине извијања l_i , онда је могуће одредити критичну силу за штапове другачије ослоњене. Ако у изразу (7) заменимо дужину штапа са дужином извијања, можемо добити критичну силу и за штапове који су другачије ослоњени. На слици 4. приказани су различити начини ослањања штапова.

Уколико познајемо критичну силу лако можемо добити вредност критичног напона:

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{l_i^2 A} = \pi^2 \frac{E}{\lambda_i^2} \quad (8)$$

где су:

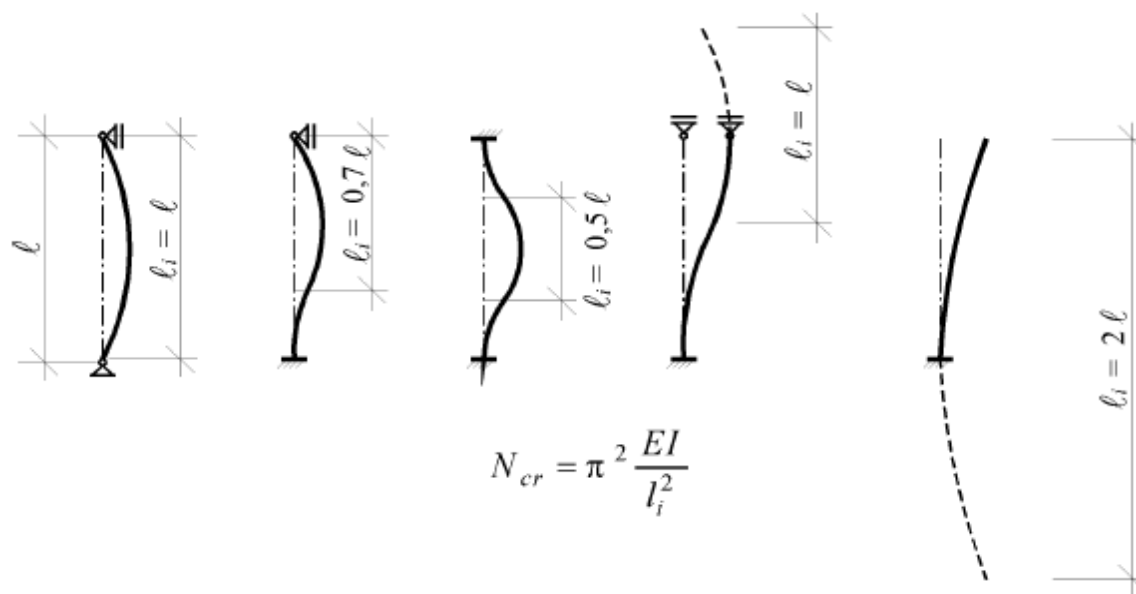
A -површина попречног пресека,

$i = \sqrt{I/A}$ -полупречник елипсе инерције,

λ_i -виткост штапа.

На основу једначине (8) видимо да критични напон извијања зависи само од виткости елемента јер је у линеарно еластичној области модул еластичности константан. Ова промена критичног напона у функцији виткости елемента, може се представити законом хиперболе (Ојлерове хиперболе).

Челик је, међутим, као и већина материјала еласто-пластичан. Ово значи да он поседује еластичне особине само до одређених нивоа напрезања ($\sigma < f_p$), а при вишим напонима он постаје пластичан. У пластичној области не важи више претпоставка о линеарној еластичној вези напона и деформације, па је примена Ојлерове хиперболе самим тим ограничена.



Слика 4.- Дужина извијања штапова у функцији ослањања

2.2 Извијање у пластичној области

Домен примене Ојлерове линеарне теорије еластичног извијања ограничен је само на напоне мање од границе пропорционалности ($\sigma < f_p = 0,8 \cdot f_y$) јавља се потреба за дефинисање закона промене критичног напона извијања у области нелинарног понашања материјала. Баушингер (*Baushinger*) вршио је прве експерименте у овој области, док је Тетмајер (*Tetmayer*) дао прве изразе за везу напона и виткости у пластичној области. Графичка презентација ових израза приказана је на слици 5. Веза између критичног напона и виткости у пластичној области је по Тетмајеровој теорији била линеарна:

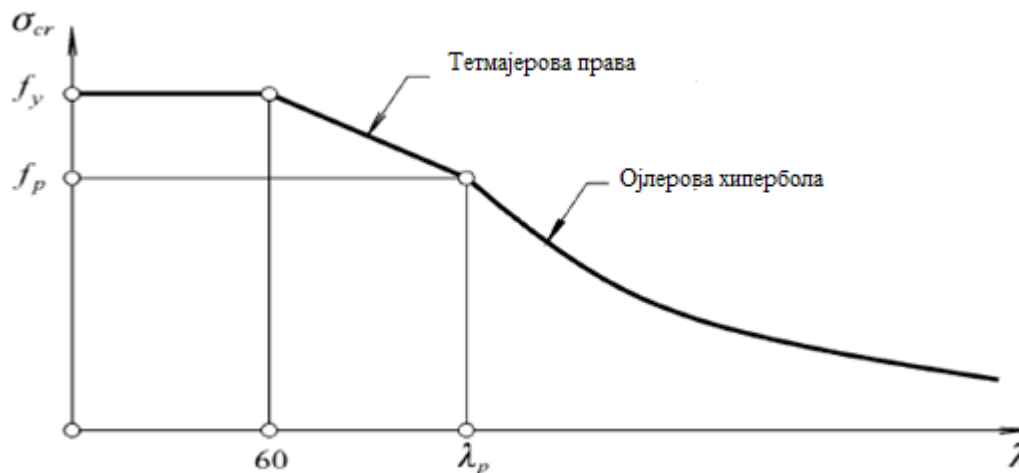
$$\sigma = f_y \quad \text{за} \quad 0 < \lambda < 60$$

$$\sigma_{cr} = C_1 - C_2 \cdot \lambda \quad \text{за} \quad 60 < \lambda < \lambda_p$$

Где је $\lambda_p = \pi \sqrt{E/f_p}$ виткост на граници пропорционалности.

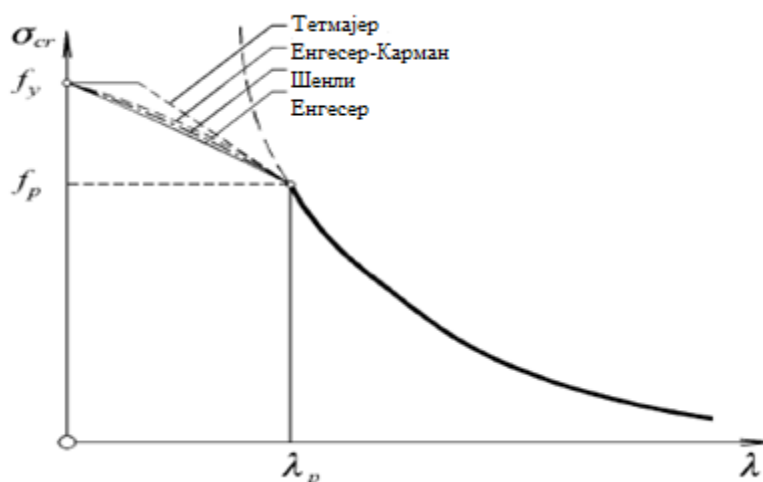
Увођењем тангентног модула еластичности ($E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$) у већ познате Ојлерове изразе за критичну силу и напон Енгесер (*Engeser*) је обухватио промену модула

еластичности у пластичној области. Ослањајући се на Енгесерова истраживања и многи научници касније су се бавили овом проблематиком. Модификацију Енгесерове криве извршили су Карман (Karman) и Шенли (Shanley).



Слика 5. Графичка презентација Татмајерових израза за σ_{cr}

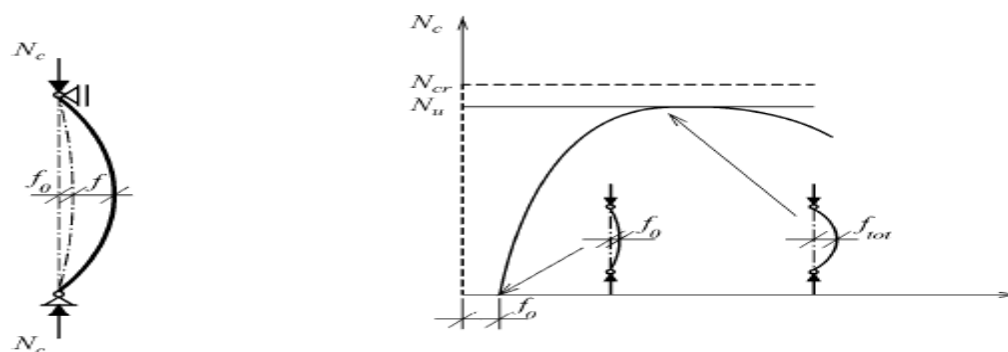
Na slici 6. prikazane su neke od najznačajnijih krivih izvijanja u plastičnoj oblasti.



Слика 6. Криве извијања у пластичној области

Сва ова разматрања заснована су на претпоставци да је штап идеално прав, да је центрично оптерећен и да је материјал идеално хомоген. У пракси је ипак немогуће постићи да осе штапа буду апсолутно праве и да оптерећење буде идеално центрично унесено. Што доводи до додатних савијања условљеним ексцентричним силама N . Реална

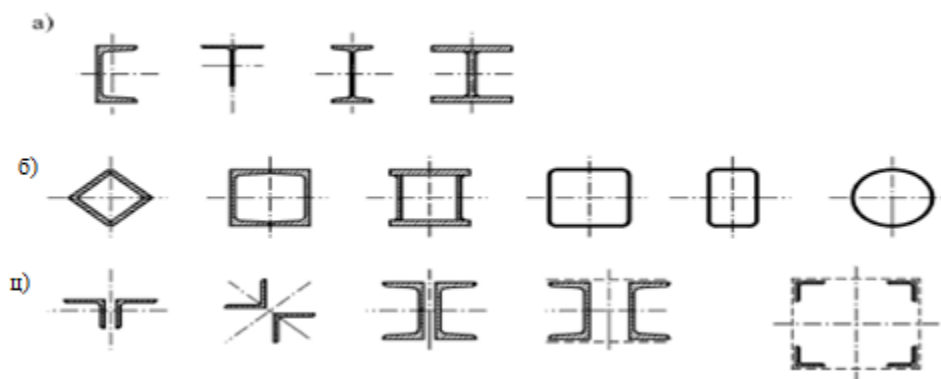
крива $N-f$ (слика 7.) дефинише механизам извијања. Јасно се види да је стварна критична сила N_u мања од теоријске (N_{cr}) услед ових несавршености.



Слика 7. Смањење носивости реалних штапова – стварна крива $N-f$

3. Конструктивно обликовање стубова оптерећених аксијално притискујућом силом вишеделног попречног пресека

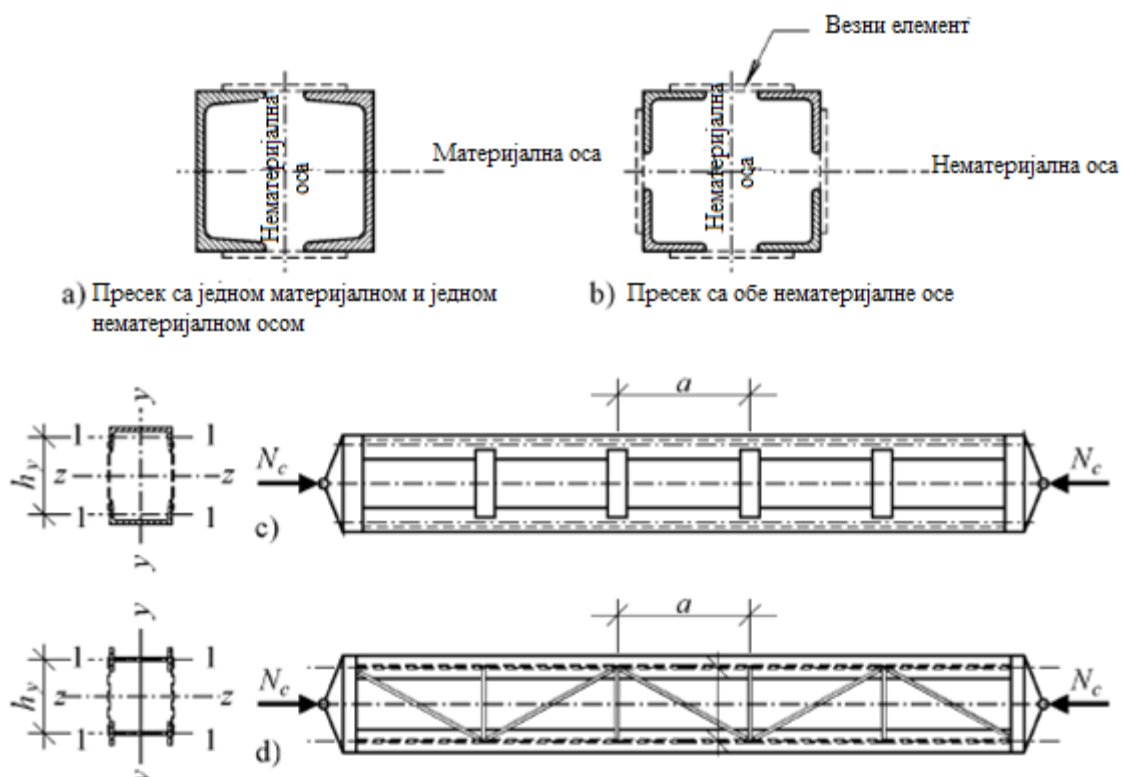
Попречни пресек штапова може се изводити од једног или од више међусобно повезаних делова. Тако да се врши подела на једноделне и вишеделне штапове. Начин прорачуна једноделних и вишеделних штапова се битно разликује тако да ова подела није само систематска већ и суштинска. Као једноделни користе се ваљани или заварени профили отвореног попречног пресека приказани на слици 8.а. Због уједначених геометријских карактеристика за обе главне осе користе се и шупљи профили слика 8.б. Вишеделни штапови који ће бити коришћени у овом раду приказани су на слици 8.ц.



Слика 8. Попречни пресеци притиснутих штапова

3.1 Аксијално притиснути штапови константног вишеделног попречног пресека

Употребу вишеделних штапова условила је потреба за конструисањем притиснутих штапова са минималним утрошком материјала. Они се састоје од два или више елемената који су повезани местимично и налазе се на одрађеном растојању (слика 9.). Пошто се ови самостални елементи налазе на одређеном растојању од тежишта укупног попречног пресека, на тај начин је повећан момент инерције у односу на једну главну осу без повећања утрошка материјала. Веома битна карактеристика вишеделних штапова је постојање нематеријалне осе која не сече ни један самостални елемент односно не пролази кроз пуни део попречног пресека. Друга главна оса може такође бити нематеријална, али је чешће материјална. Материјална оса је супротност нематеријалној, што значи да она сече самостални елемент односно пролази кроз пуни део попречног пресека. Повезивање самосталних елемената врши се помоћу везних елемената који се постављају нормално у односу на нематеријалну осу.



Слика 9. Различити типови вишеделних штапова и њихових попречних пресека

Спојни елементи могу бити у облику везних лимова, код штапова раванског типа (слика 9.ц.) или као решеткаста испуна код решетастих вишеделних штапова (слика 9.д.).

Ако је растојање везних елемената $a < 15 \cdot i_1$, онда се гранична носивост вишеделног штапа на извијање може одредити као и код једноделног монолитног штапа.

Уколико ово није случај постоји битна разлика, јер код једноделног штапа постоји ребро које прима трансверзалне силе, па се њихов утицај може занемарити на деформацију штапа. Дакле код вишеделног штапа услед непостојања ребра, мора се узети и утицај смицања на деформације штапа. Отуда је:

$$v = v_M + v_V \quad (9)$$

v_M -угиб услед момента савијања

v_V -угиб услед трансверзалне силе

Гранична носивост вишеделног штапа је достигнута када се исцрпи носивост, односно, стабилност најоптерећенијег штапа испуне. Уколико се уведе утицај трансверзалне силе на деформацију, онда се диференцијална једначина извијања вишеделног штапа може свести на Ојлерову диференцијалну једначину извијања једноделног штапа. Геометријске имперфекције се претпостављају у облику синусног полуталаса:

$$v_0(x) = f_0 \cdot \sin \frac{\pi}{l} x \quad (10)$$

где је f_0 почетна стрела штапа.

Трансверзална сила и момент савијања могу да се напишу у следећем облику:

$$M = N_c \cdot (v + v_0) \quad (11)$$

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (12)$$

Укупна кривина штапа представља збир кривина услед момента и трансверзалне силе

$$\chi = \chi_M + \chi_V = v_M'' + v_M' = v'' \quad (13)$$

Део који настаје услед деловања момента износи:

$$v_M'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{N_c}{EI} \cdot (v + v_0) \quad (14)$$

Део који настаје као последица деловања трансверзалне силе одређује се на основу клизања:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = k \cdot \frac{V}{GA} \quad (15)$$

При чему је:

k -коэффицијент смицања зависан од облика попречног пресека

G -модул клизања

Кривина услед смицања добија се једноструким диференцирањем клизања у следећем облику:

$$v_V'' = \gamma' = \frac{k}{GA} \cdot \frac{dV}{dx} = \frac{k}{GA} \cdot \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{k}{GA} \cdot N_c \cdot (v'' + v_0'') \quad (16)$$

Уколико се у једначини (13) унесу кривине услед савијања и кривине услед трансверзалне силе из израза (14) и (15) и уз увођење да је $k/GA = \gamma/V = const$, добија се диференцијална једначина извијања око нематеријалне осе у следећем облику:

$$v'' + \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{N_c}{N_{cr}} \cdot \frac{1}{1 - N_c \cdot \frac{\gamma}{V}} \cdot v = - \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{N_c}{N_{cr}} \cdot \frac{1 + N_{cr} \cdot \frac{\gamma}{V}}{1 - N_c \cdot \frac{\gamma}{V}} f_0 \cdot \sin \frac{\pi}{l} x \quad (17)$$

Решење се претпоставља у облику:

$$v(x) = (f - f_0) \cdot \sin \frac{\pi}{l} x \quad (18)$$

Па се добија израз за стрелу у средини распона f . Критична сила N_{cr} добија се из услова да стрела f тежи бесконачности:

$$N_{cr,V} = \frac{N_{cr}}{1 + N_{cr} \cdot \frac{\gamma}{V}} = \frac{1}{\frac{1}{N_{cr}} + \frac{\gamma}{V}} \quad (19)$$

Уколико се уведе крутост вишеделног штапа на смицање $S_y = V/\gamma$ добија се следећи израз:

$$\frac{1}{N_{cr,V}} = \frac{1}{N_{cr}} + \frac{1}{S_y} \quad (20)$$

Уколико израз за Ојлерову критичну силу ($N_{cr} = \pi^2 \cdot EI/l^2$) се уврсти у израз (19) добија се:

$$N_{cr,V} = \pi^2 \cdot \frac{EI}{l^2(1 + \frac{\gamma}{V} \cdot N_{cr})} = \pi^2 \cdot \frac{EI}{l_v^2} \quad (21)$$

При чему је :

$$l_v^2 = l^2 \cdot (1 + \frac{\gamma}{V} \cdot N_{cr}).$$

Члан $\frac{\gamma}{V} \cdot N_{cr}$ представља разлику у односу на Ојлерову силу извијања без утицаја трансверзалних сила. Такође је уочљиво да је $N_{cr,V} < N_{cr}$, јер је $\frac{\gamma}{V} \cdot N_{cr} > 0$. За случај када је $\frac{\gamma}{V} \rightarrow 0$ (утицај смицања се може занемарити), једначина (21) прелази у већ познат израз за Ојлерову силу.

Уколико су обе главне осе штапа вишеделног попречног пресека нематеријалне, онда се прорачун стабилности спроводи за сваку од њих. Уколико пак пресек вишеделног штапа садржи једну материјалну осу онда се прорачун стабилности на извијање око те материјалне осе своди на прописе за централно притиснуте константног једноделног пресека (JUS U.E7.081). Осим провере стабилности на извијање око нематеријалне и материјалне осе, уколико она постоји, неопходно је испитати и локалну стабилност самосталних елемената.

3.2 Прорачун стабилности аксијално притиснутих штапова константног вишеделног пресека према JUS U.E7. 091/1986

У овом делу биће описане провере локалне стабилности вишеделних централно притиснутих штапова и провера глобалне (извијање око нематеријалне осе) стабилности. Подела штапова извршена је у четири групе на основу њиховог попречног пресека. Ова подела приказана је у оквиру табеле 1.

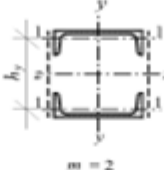
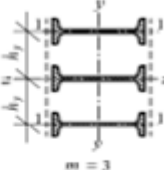
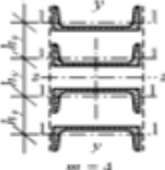
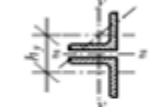
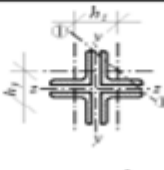
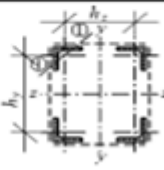
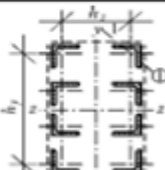
За штапове типа 1 и 2 провера стабилности на извијање око материјалне осе врши се на основу стандарда за аксијално притиснуте штапове једноделног пресека. За штап 3, који је састављен од 2 угаоника такође се може извршити доказ стабилности према JUS U.E7.081 под условом да је растојање везних елемената $\alpha \leq 70i_{\min}$, $i_{\min}$ где је минимални полупречник инерције самосталног елемента. На основу следећег израза може се одредити виткост штапова:

$$\lambda_y = \frac{l_i}{i_y} \quad (22)$$

где је i_y полупречник инерције око материјалне осе у-у, а l_i дужина извијања штапа која је једнака средњој вредности дужина извијања штапа у равни носача и изван ње ($\beta_i = 0,9$).

Одређивање коефицијента извијања χ добија се према кривама извијања а на основу попречног пресека штапа (JUS E7.081).

Табела 1.-Подела вишеделних штапова

Тип	Облик	Облик пресека		
1	Вишеделни штапови који имају бар једну материјалну осу	 $m = 2$	 $m = 3$	 $m = 4$
2	Вишеделни штапови који имају једну материјалну осу и чија је дебљина ђворног лима једнака растојању између спојних елемената	 y	 y	 y
3	Дводелни штапови од укрштених угаоника	 y	 y	
4	Вишеделни штапови који немају материјалну осу	 $m_y = m_z = 2$	 $m_y = m_z = 2$	 $m_y = 2, m_z = 4$

Према стандарду JUS U.E7.081, односно помоћу израза

$$\sigma_N = \frac{N_c}{A} \leq \sigma_{i,dop} = \chi \cdot \sigma_{dop} = \chi \cdot \frac{f_y}{\gamma} \quad (23)$$

$$\frac{\sigma_N}{\chi} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\gamma \cdot N_c}{N_{pl}} \leq 1 \quad (24)$$

Може да се изврши провера опште или глобалне стабилности при извијању око нематеријалне осе. Коефицијент извијања се добија на основу еквивалентне релативне виткости $\lambda_{z,eq}$ за извијање око нематеријалне осе и на тај начин се узима у обзир резултат

смичућих сила. Еквивалента релативна виткост може да се одреди на основу критичне силе за извијање око нематеријалне осе $N_{cr,V}$ (19) на следећи начин:

$$\overline{\lambda_{z,eq}} = \sqrt{N_{pl} / N_{cr,V}} \quad (25)$$

или помоћу еквивалентне виткости:

$$\overline{\lambda_{z,eq}} = \sqrt{\lambda_z^2 + \frac{m}{2} \lambda_f^2} \Rightarrow \overline{\lambda_{z,eq}} = \frac{\lambda_{z,eq}}{\lambda_1} \quad (26)$$

где су:

$\overline{\lambda_{z,eq}}$ - еквивалентна релативна виткост вишеделног штапа за нематеријалну осу $z - z$

N_{pl} - пластична отпорност попречног пресека ($N_{pl} = f_y \cdot A$)

A - укупна површина попречног пресека ($A = \sum_{i=1}^r A_i$)

$N_{cr,V}$ - критична сила извијања вишеделног штапа

λ_z - виткост за осу $z - z$ без утицаја трансверзалних сила ($\lambda_z = l_{i,z} / i_z$ са $i_z = \sqrt{I_z / A}$)

$l_{i,z}$ - дужина извијања штапа управно на нематеријалну осу $z - z$

I_z - момент инерције око нематеријалне осе $z - z$ ($I_z = \sum_{i=1}^r (I_{f,i} + A_{f,i} \cdot y_{f,i}^3)$)

r - број самосталних елемената

$I_{f,i}$ - момент инерције самосталног елемента око осе 1-1

$A_{f,i}$ - површина попречног пресека i -тог елемента

$y_{f,i}$ - растојање од тежишта самосталног елемента i до тежишта вишеделног пресека

m - број самосталних елемената у једном правцу (по табели 1.)

λ_f - виткост самосталног елемента ($\lambda_f = a / i_f$)

a - растојање чворова решеткастог вишеделног штапа (слика 7.)

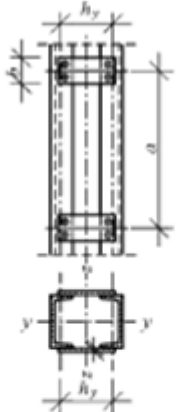
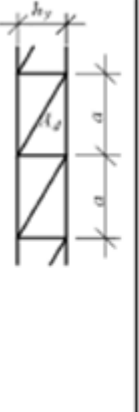
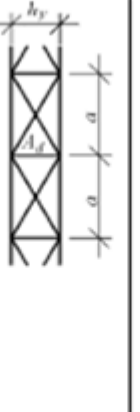
i_f - полупречник инерције самосталног елемента око осе 1-1

λ_1 - виткост на граници развлачења.

У табели 2. приказане су вредности крутости на смицање S_y која фигурише у изразу (20) за критичну силу извијања $N_{cr,V}$, у зависности од типа штапа и врсте испуне.

Такође у овој табели су приказани изрази оји се могу користити за одређивање виткости самосталних елемената λ_f . Са A_d је обележен попречни пресек дијагонале, док A_r представља рачунску дужину на основу које се одређује S_y и λ_f за решеткасте носаче, у зависности од типа испуне.

Табела 2.- Вредности крутости S_y за различите типове вишеделних штапова

	Рамовски штап	Решеткасти штап			
					
S_y	$2 \frac{\pi^2 \cdot EI_f}{a^2}$	$n \cdot EA_r \cdot \frac{a \cdot h_y^2}{d^3}$			
λ_f	$\frac{a}{i_f}$	$\pi \sqrt{\frac{A}{n \cdot A_r} \cdot \frac{d^3}{a \cdot h_y^2}}$			
A_r		A_d	A_d	$2A_d$	$0,5A_d$
n - Број паралелних равни у којима су постављени спојни лимови или штапови d - системна дужина дијагонале					

Врло је важно осим провере глобалне стабилности (извијање око нематеријалне и материјалне осе) извршити контролу локалне стабилности самосталних елемената и то у средини и на крају вишеделног штапа.

Максимални момент савијања $M = N_c \cdot f$ се јавља уз нормалну силу у средини штапа услед извијања. Овај момент изазива додатно аксијално напрезање самосталних елемената као што је приказано на примеру дводелног штапа на слици 10. Један самостални елемент је растерећен услед силе затезања, а други самостални елемент трпи додатну силу притиска услед дејства момента савијања.

Максимална нормална сила у самосталном елементу износи:

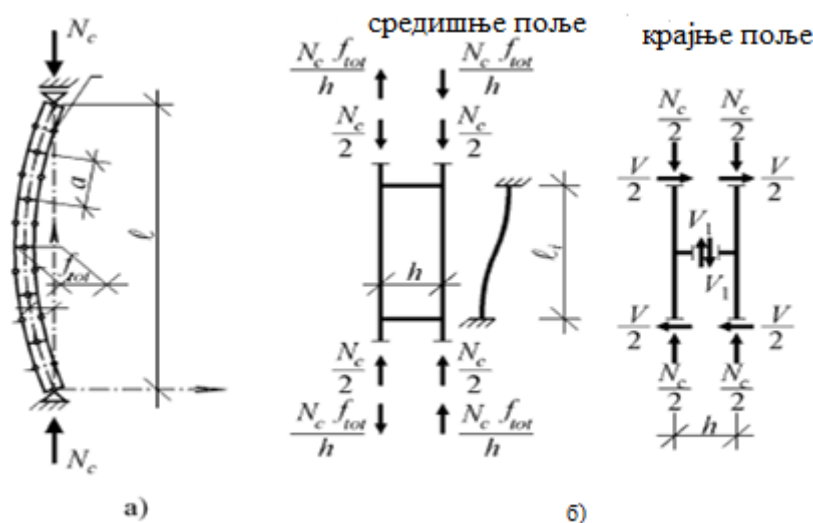
$$N_f = \frac{N_c}{r} + \frac{M_z}{W_z} A_f \text{ или упрошћено } N_f = \frac{N_c}{2} + \frac{M_z}{h} \text{ (за дводелни штап)} \quad (27)$$

где је:

$$M_z = \frac{N_c \cdot f}{1 - \frac{v \cdot N_c}{N_{cr,V}}} = \frac{N_c \cdot f}{1 - \frac{v \cdot N_c}{N_{pl}} \cdot \lambda_{z,eq}^2} \quad (28)$$

W_z - отпорни момент у односу на тежишну осу најудаљенијег елемента

f_0 - почетна геометријска имперфекција ($f_0 = l/500$)



Слика 10.- а) Прорачунски модел; б) Распоред пресечних сила

Провера стабилности самосталног елемента у средини штапа врши се помоћу нормалне силе N_f и виткошћу λ_f (на основу табеле 2.) према JUS U.E7.081.

Утицај трансверзалних сила доминантан је у крајњем пољу вишеделног штапа. Пошто је момент савијања функција угиба, а овај је претпостављен у облику синусне функције, добија се да је:

$$M = N_c \cdot (v + v_0) = N_c \cdot f \cdot \sin \frac{\pi}{l} x \quad (29)$$

На следећи начин можемо одредити трансверзалну силу:

$$V = \frac{dM}{dx} = N_c \cdot f \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \cos \frac{\pi}{l} x \quad (30)$$

Максимална вредност трансверзалне силе је дакле:

$$V_{\max} = N_c \cdot f \cdot \frac{\pi}{l} = \frac{\pi}{l} \cdot \frac{N_c \cdot f_0}{1 - v \frac{N_c}{N_{cr,V}}} \quad (31)$$

Максимални момент савијања у самосталном елементу на крају штапа може да се израчуна као:

$$M_f = \frac{V_{\max}}{r} \cdot \frac{a}{2} \quad (32)$$

Доказ носивости самосталног елемената у крајњем пољу врши се на основу следећег израза:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_c}{r} + \frac{M_f}{W_f} \leq \sigma_{dop} \quad (33)$$

где је W_f отпорни момент самосталног елемента у односу на осу 1-1.

Такође поред провере глобалне и локалне стабилности вишеделног штапа веома је важно извршити контролу напона у спојним елементима. Код штапова са решеткастом испуном, штапови испуне се димензионишу да приме нормалну силу:

$$N_{c,d} = \frac{V_{\max}}{n} \cdot \frac{d}{h_y} \quad (34)$$

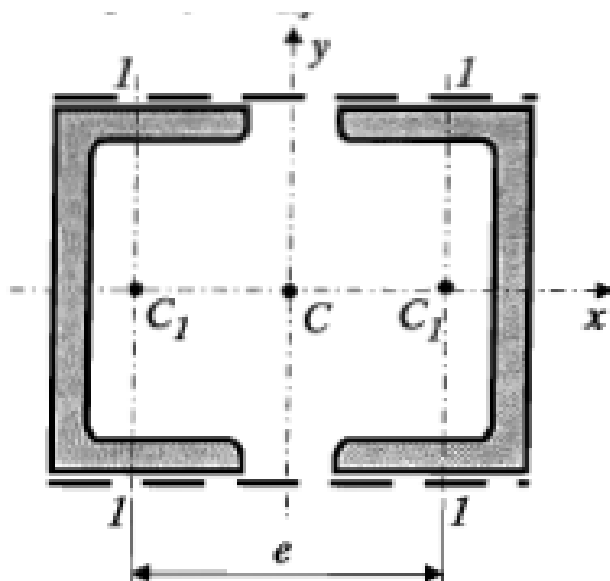
где је n број паралелних равни у којима је постављена решеткаста испуна, а d дужина дијагонале.

Такође, потребно је израчунати везе штапова испуне за самосталне елементе према утицајима на основу којих су везни елементи димензионисани. Везе решеткастих штапова

испуне димензионишу се на основу $_{\max} N_{c,d}$. Веома је важно водити рачуна о конструктивним детаљима при пројектовању вишеделних штапова. Број поља на који је штап подељен не сме бити мањи од три, а њихове дужине морају бити једнаке. Везе решеткасте испуне за самостални елемент остварују се заваривањем или помоћу завртњева који не дозвољавају проклизавање (упасовани, преднапрегнути). коришћењем неупасованих завртњева долази до наглог бочног померања и повећања почетних геометријских имперфекција (v_0), па је неопходно смањити смичућу крутост S_y дељењем са фактором 1,3 односно увећати веткост самосталног елемента фактором $\sqrt{1,3}$.

4. Пример прорачуна притиснутог стуба са решеткастом испуном

Стуб висине $h=7\text{m}$ прима прима притисак $F=300\text{ kN}$ (први случај оптерећења). Облик попречног пресека је дат на слици 11. Димензионисати и конструисати стуб, главни стуб и ножицу стуба од челика Č0360.



Слика 11. Попречни пресек стуба

- Димензионисање попречног пресека стуба

Усваја се за прву пробу U20 са подацима:

$$I_{x1} = 1910\text{cm}^4, I_{y1} = 148\text{cm}^4$$

$$A_1 = 32,2\text{cm}^2, e_1 = 2,01\text{cm}$$

$$i_{y1} = i_1 = 2,14\text{cm}, i_{x1} = 7,7\text{cm}$$

$$\text{За пресек стуба 2U20 је : } I_x = 2 \cdot I_{x1} = 3820\text{cm}^4$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot I_{x1}}{2 \cdot A_1}} = \sqrt{\frac{I_{x1}}{A_1}} = i_{x1} = 7,7 \text{ cm}$$

$$\lambda_x = \frac{h}{i_x} = \frac{700}{7,7} = 90,9 \Rightarrow \lambda_x = 91 \rightarrow \omega_x = 2,49$$

$$\sigma_{\omega x} = \frac{F}{2 \cdot A_1} \cdot \omega_x = \frac{250}{2 \cdot 32,2} \cdot 1,49 = 5,78 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 57,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\omega x} = 57,8 \text{ MPa} < \sigma_{dop} = 160 \text{ MPa}$$

Пресек 2U20 је добро изабран што се тиче стабилности на извијања око $x-x$ осе. Потребно је испитати и да ли пресек задовољава критеријум стабилности око осе $y-y$. Размак e је непознат, па се одређује из услова да је материјал искоришћен на извијање око осе до $\sigma_{dop} = 160 \text{ MPa}$.

$$\sigma_{\omega y} = \frac{F}{A} \cdot \omega_{yi} = \sigma_{dop}$$

$$\omega_{yi} = \frac{2 \cdot A_1 \cdot \sigma_{dop}}{F} = \frac{2 \cdot 32,2 \cdot 16}{300} = 3,434 \rightarrow \lambda_{yi} = 107$$

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{A}{n \cdot A_r} \cdot \frac{d^3}{a h_x^2}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 32,2}{9 \cdot 4,4} \cdot \frac{39,23^3}{70 \cdot 20^2}} = 5,58 \approx 6$$

$$A_r = 0,5 A_d$$

n - број паралелних равни у којима се постављају решетке испуне

A_r - прорачунски пресек дијагонале у зависности од решеткасте испуне

A_d - површина попречног пресека дијагонале

d - дужина дијагоналне решеткасте испуне

a - растојање између спојних лимова

h_x - растојање између тежишта самосталних елемената

За размак спојних лимова усваја се вредност $c=70\text{mm}$.

$$\lambda_{yi} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_1^2} \Rightarrow \lambda_y = \sqrt{\lambda_{yi}^2 - \lambda_1^2} = \sqrt{107^2 - 6^2} = 106,72$$

$$\lambda_y = \frac{l_{ky}}{i_y} = \frac{h}{i_y}$$

$$i_y = \frac{h}{\lambda_y} = \frac{700}{106,72} = 6,56\text{cm}$$

$$I_y = i_y^2 \cdot A = 6,56^2 \cdot 2 \cdot 32,2 = 2771,36\text{cm}^4$$

$$I_y = 2 \cdot (I_{y1} + x_{c1}^2 \cdot A_1) = 2 \cdot (I_{y1} + \frac{e^2}{4} \cdot A_1)$$

$$I_y = 2 \cdot I_{y1} + \frac{e^2}{2} \cdot A_1 \Rightarrow e^2 \cdot \frac{A_1}{2} = I_y - 2 \cdot I_{y1} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{2 \cdot (I_y - 2 \cdot I_{y1})}{A_1}}$$

$$e = \sqrt{\frac{2 \cdot (2771,36 - 2 \cdot 148)}{32,2}} = 12,4\text{cm}$$

$$e = 16\text{cm} \Rightarrow I_y = 2 \cdot (148 + \frac{16^2}{4} \cdot 32,2) = 4417,6\text{cm}^4$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{4417,6}{2 \cdot 32,2}} = 8,28\text{cm}$$

$$\lambda_y = \frac{h}{i_y} = \frac{700}{8,28} = 84,54$$

- Контрола стабилности на извијање око $y-y$ осе

$$\lambda_{yi} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_1^2} = \sqrt{84,54^2 + 6^2} = 84,75$$

$$\lambda_{yi} = 85 \rightarrow \omega_{yi} = 2,18$$

$$\sigma_{\omega y} = \frac{F}{A} \cdot \omega_{yi} = \frac{300}{2 \cdot 32,2} \cdot 2,18 = 10,15 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 101,5\text{MPa}$$

$$\sigma_{\omega y} = 101,5\text{MPa} < \sigma_{dop} = 160\text{MP}$$

- Контрола размака спојних лимова

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{A}{n \cdot Ar} \cdot \frac{d^3}{ah_x^2}} \leq 50 \cdot (4 - 3 \cdot \frac{\sigma_{\omega}}{\sigma_{dop}}) = 50 \cdot (4 - 3 \cdot \frac{130,9}{160}) = 77,28$$

$$\lambda_1 = 6 < 77,2$$

Усваја се попречни пресек 2U20 са размаком $e=16\text{cm}$

- Прорачун спојних лимова и њихове заковане везе за појасеве стуба

Трансверзална сила у стубу меродавна за димензионисање спојних лимова, према прописима је:

$$Q = \frac{A \cdot \sigma_{dop}}{80} = \frac{2 \cdot 32,2 \cdot 16}{80} = 12,92 \text{ kN}$$

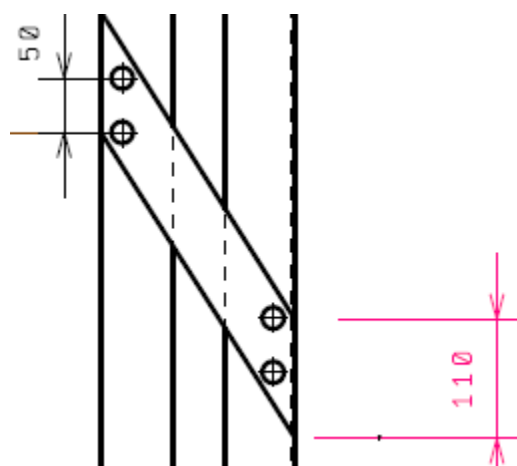
Смичућа сила у средини спојног лима је:

$$T = Q \cdot \frac{c}{e} = 12,92 \cdot \frac{70}{16} = 56,525 \text{ kN}$$

Момент савијања у пресеку спојног лима на месту спољашњег закивка је:

$$M = \frac{T}{2} \cdot \frac{b_1}{2} = \frac{56,525 \cdot 12}{4} = 169,575 \text{ kNcm}$$

Усвајају се спојни лимови следећих димензија:



Слика 12. Димензије спојних лимова и распоред отвора за закивке

- Контрола напона у закованом спојном лиму

$$W_n = \frac{I_n}{\frac{h_0}{2}} = \frac{2 \cdot I_n}{h_0}$$

$$I_n = \frac{\delta \cdot (h_0^3 - h_1^3 + h_2^3)}{12} =$$

$$I_n = \frac{0,8 \cdot (11^3 - 7^3 + 3^3)}{12} = 84,58 \text{ cm}^4$$

$$W_n = \frac{2 \cdot 84,58}{11} = 15,38 \text{ cm}^3$$

$$\sigma = \frac{M}{W_n} = \frac{169,575}{15,38} = 11,026 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 110,26 \text{ MPa} < \sigma_{\text{dop}} = 160 \text{ MPa}$$

- Прорачун закивака

$$M = 169,575 \text{ kNcm}$$

$$Q = \frac{T}{2} = \frac{56,525}{2} = 28,2625 \text{ kN}$$

Оптерећење једног закивка:

$$\text{део од трансверзалне силе } N_Q = \frac{Q}{m \cdot n} = \frac{T}{2 \cdot m \cdot n} = \frac{56,525}{2 \cdot 2 \cdot 1} = 14,13 \text{ kN}$$

$$\text{део од момента савијања } N_M = M \cdot \frac{l_n}{m \cdot \sum_{i=1}^n l_i^2} = 169,575 \cdot \frac{5}{5^2} = 33,915 \text{ kN}.$$

Резултујућа сила:

$$N_R = \sqrt{N_Q^2 + N_M^2} = \sqrt{14,13^2 + 33,915^2} = 36,74 \text{ kN}$$

- Контрола напона

$$\tau = \frac{4 \cdot N_R}{d_1^2 \cdot \pi} = \frac{4 \cdot 36,74}{2,1^2 \cdot \pi} = 10,613 \frac{kN}{cm^2} = 106,13 MPa < \tau_{dop} = 128 MPa$$

$$\sigma_b = \frac{N_R}{d_1 \cdot \delta} = \frac{36,74}{2,1 \cdot 0,8} = 21,869 \frac{kN}{cm^2} = 218,69 MPa < \sigma_{bdop} = 320 MPa$$

Предложена веза спојних лимова закивцима задовољава.

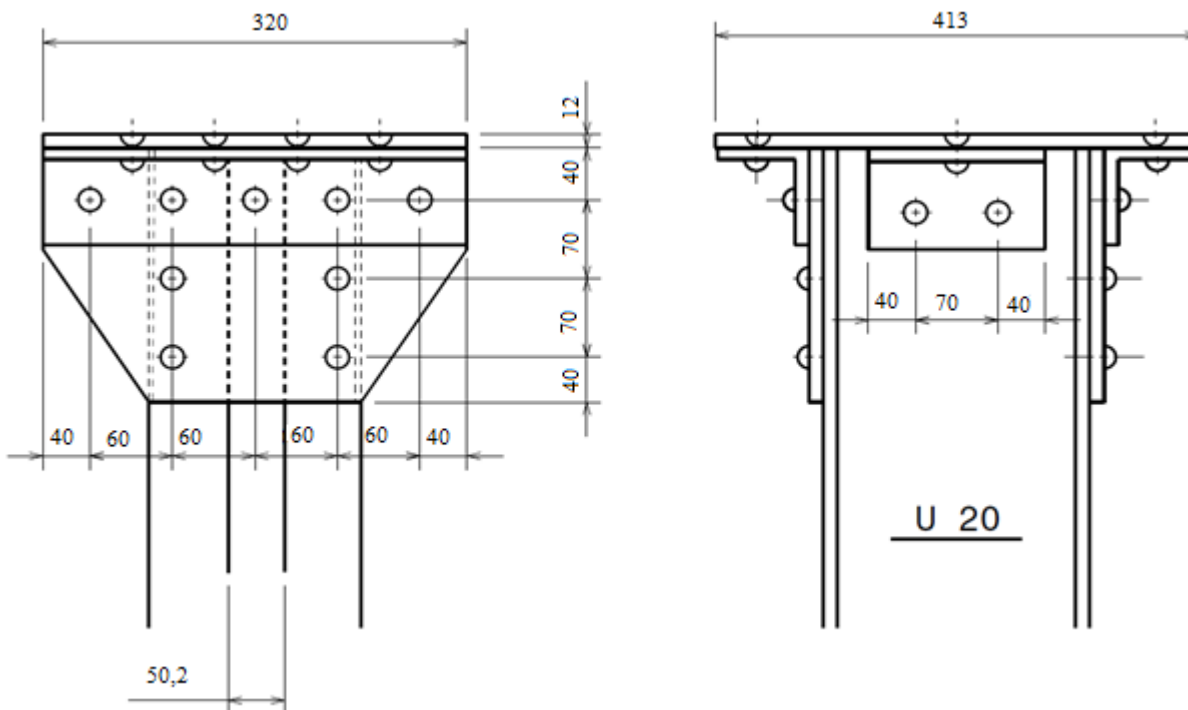
- Прорачун главе стуба

На ребра профила U20 преноси се сила преко 4 двосечних закивака $d_1 = 21mm$

$$F_{tr} = n \cdot \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \cdot \tau_{dop} = 4 \cdot \frac{2,1^2 \cdot \pi}{4} \cdot 12,8 = 160,84 kN$$

$$F_{\sigma br} = n \cdot d_1 \cdot \delta \cdot \sigma_{bdop} = 4 \cdot 2,1 \cdot 0,85 \cdot 32 = 217,6 kN$$

где је: $\delta = 8,5mm$ - дебљина ребра U20 профила.



Слика 13. Конструктивно решење главе стуба изложеног притиску

Меродавна за прорачун је $\min(F_{tr}, F_{\sigma br}) = F_r = 160,84 kN$

Остатак силе се преноси преко чворних лимова на ножице U20 профила.

$$F_p = F - F_r = 300 - 160,84 = 139,16 kN$$

- Потребан број једносечних закивака у ножицама

Усваја се пречник закивака вредности $d_2 = 21 mm$

$$n = \frac{F_p}{\frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \cdot \tau_{dop}} = \frac{139,16}{\frac{2,1^2 \cdot \pi}{4} \cdot 12,8} = 3,46$$

Усваја се $n = 8$ закивака $d_2 = 21 mm$ за везу ножица.

- Прорачун постоља стуба

Усваја се да је дебљина лежишне плоче $12 mm$.

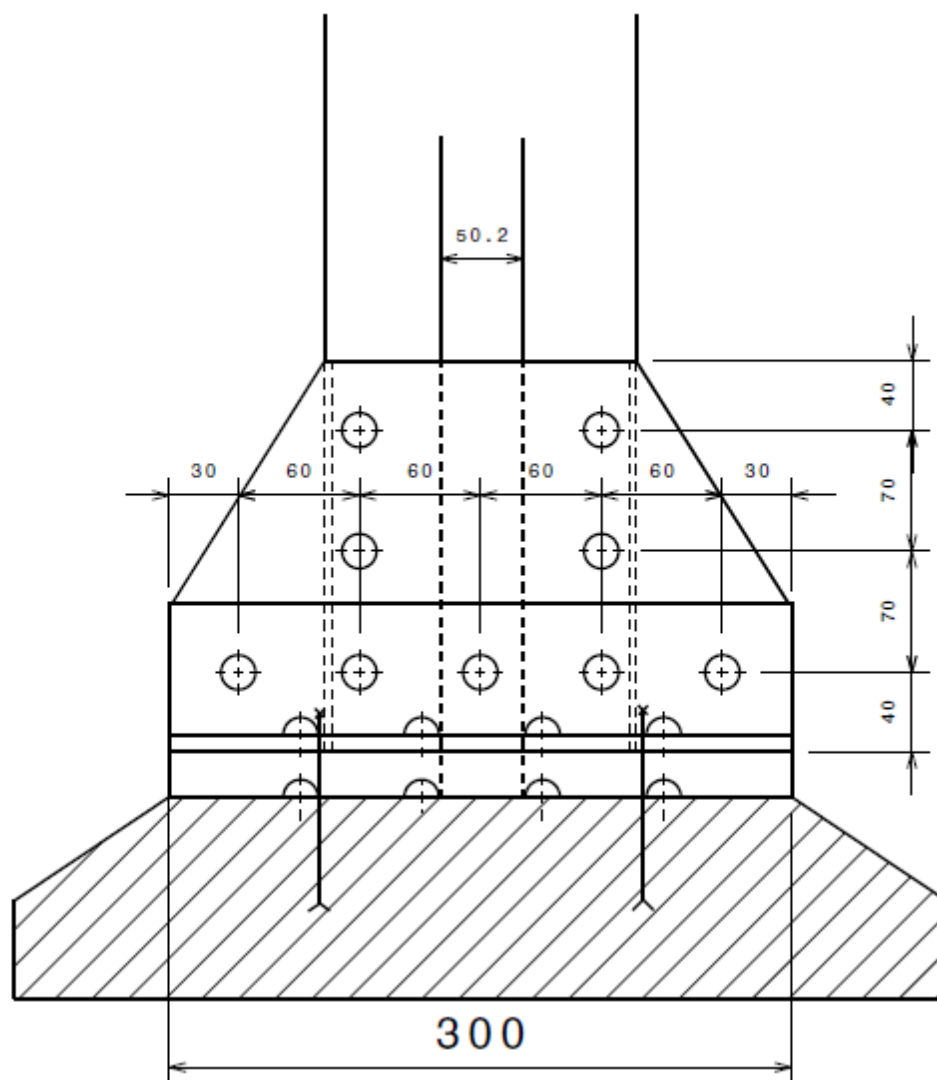
Димензије лежишне плоче су: $a = 200 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + 2 \cdot 7,5 = 413 mm$

Дозвољени притисак на фундамент (темељ) од бетона: $\sigma_{dop}^{bet.} = 3,5 MPa$

Потребна површина лежишне плоче:

$$A_{pot.} = \frac{F}{\sigma_{dop}^{bet.}} = \frac{300}{0,35} = 857,14 cm^2$$

$$b \geq \frac{A_{pot.}}{a} = \frac{857,14}{41,3} = 20,9 cm$$



Слика 14. Конструктивно решење стоне стуба изложеног притиску

Усваја се конструктивно $b = 300\text{ mm}$.

Број закивака је најмање као на глави, ако их из конструктивних разлога не треба више на хоризонталном угаонику.

Закључак

У уводу рада укратко је описан појам штапа и направљена паралела између аксијално притиснутих и аксијално затегнутих штапова. Затим је извршена подела аксијално притиснутих штапова на оне са једноставним и сложеним попречним пресеком. Такође дати су примери примене штапова са сложеним попречним пресеком као и предности примене истих штапова.

У даљем делу рада акценат је стављен на извијању штапова. Направљена је подела на еластично извијање штапа и пластично извијање. У делу у коме се говорило о еластичном извијању штапа дата је Ојлерова теорија са основним претпоставкама на којима се иста заснива. У делу у ком се говорило о пластичном извијању штапа дата је теорија да је еластично извијање ограничено само на напоне мање од границе пропорционалности $\sigma < f_p = 0,8 \cdot f_y$.

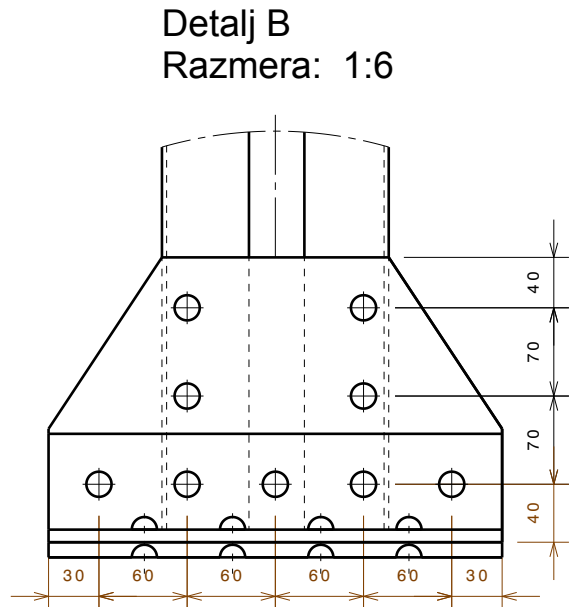
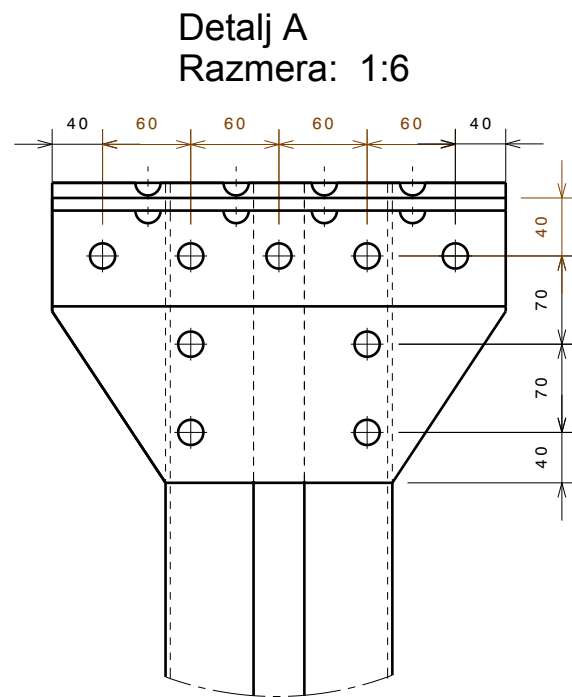
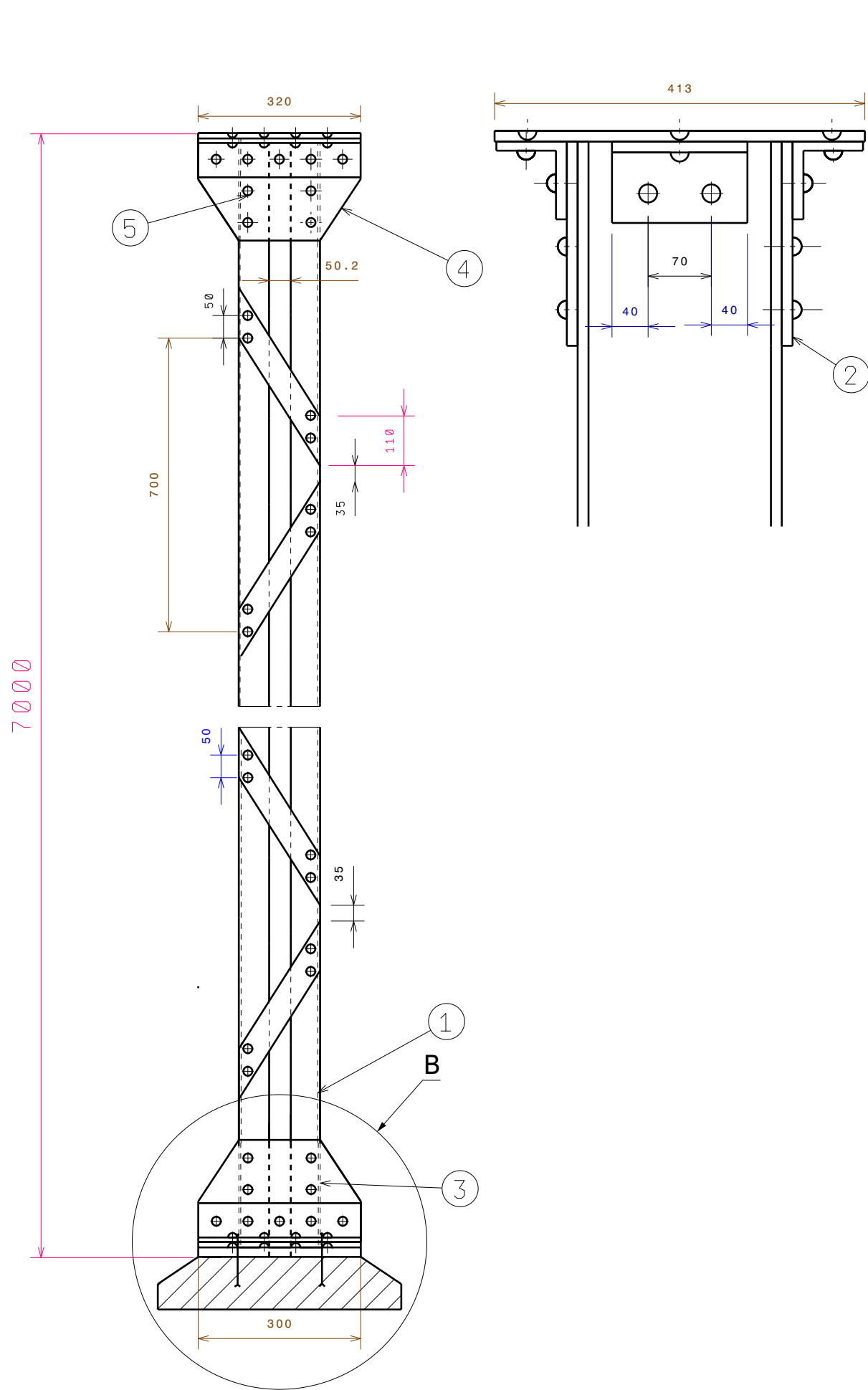
У следећем делу рада дао је конструктивно обликовање стубова, оптерећених аксијално притискујућом силом, вишеделног попречног пресека. Затим је дата подела оса попречног пресека на материјалну и нематеријалну и дефинисање оба појма. На самом крају овог дела дат је прорачун стабилности, аксијално притиснутих штапова, константног попречног пресека.

На самом крају рада дат је пример прорачуна притиснутог стуба са решеткастом испуном. У овом делу дат је целокупан прорачун попречног пресека стуба, полазећи од висине стуба и силе притиска. У даљем делу, дат је прорачун спојних лимова, стопе и главе стуба, као и целокупно конструктивно решење поменутих елемената.

Након готово 30 година, прописи за прорачун челичних конструкција у грађевинарству, који су били заступљени на концепту допуштених напона, замењени су савременим европским стандардима-еврокодovima, утемељеним на теоријама граничних стања. Суштина граничних стања носивости челичних конструкција презентована је кроз анализу носивости попречних пресека, стабилности линијских елемената и избочавању површинских елемената челичних конструкција. Гранична стања носивости попречних пресека су анализирана за све карактеристичне врсте напрезања: затезање, притисак, савијање, смицање, торзију и комбиновано напрезање.

Литература

- [1] Буђевац Д., Марковић З. и др., Металне конструкције, Грађевинска књига, Београд, 2007
- [2] Бабин Н., Бркљач Н., Шоштаков Р., Металне конструкције, ФТН Издаваштво, Нови Сад, 2006.
- [3] Милосављевић М., Радојковић М., Кузмановић Б., Основи челичних конструкција, Грађевинска књига, Београд, 1984
- [4] Николић Р., Марјановић В., Металне конструкције-Приручник за прорачуне, Машински факултет, Крагујевац, 1998.
- [5] Николић Р., Вељковић Ј., Марјановић В., Металне конструкције-збирка решених задатака, Машински факултет, Крагујевац, 2013
- [6] Еврокод 3
- [7] Зарић Б., Стипанић Б., Буђевац Д., Челичне конструкције у грађевинарству, Грађевинска књига, Београд, 1990



5	100		Zakivci		
4	2		Cvorni lim na glavi		
3	2		Cvorni lim na stopi		
2	8		Standardni valjani profil	L 90x90x9	
1	2		Standardni valjani profil	UPN 200	
Poz.	Kol.		Naziv	Standard	
			Format: A3	Masa:	Razmera: 1:12
			Datum	Sasa	Radosavlj.
			Obrad		
			Stand		
			Odobr		
			Fin		Oznaka:
					List:
			Izv.pod.		Zamena za: