

**Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу**

**Марија М. Рафаиловић**  
**Кориговани четвороугаони**  
**четворочворни коначни елемент љуске**  
**завршни рад**

**Крагујевац, 2016.**

**Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу**



**Назив студијског програма: Машинско инжењерство**

**Ниво студија: Основне академске студије**

**Модул: Примењена механика и аутоматско управљање**

**Предмет: Метод коначних елемената 1**

**Број индекса: 109/2013**

**Марија М. Рафаиловић**  
**Кориговани четвороугаони**  
**четворочворни коначни елемент љуске**  
**завршни рад**

**Комисија за преглед и одбрану:**

**1. Др Мирослав Живковић, ред. проф.-ментор**

**2. \_\_\_\_\_**

**3. \_\_\_\_\_**

Датум одбране: \_\_\_\_\_

Оцена : \_\_\_\_\_

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да:

- Опише кориговани четвороугаони елемент четворочворне љуске;
- Детаљно дефинише теоријске поставке истог уз извођење предложене корекције;
- На примерима покаже понашање побољшаног елемента четворочворне љуске уграђеног у програмски пакет РАК са знацима на главне проблеме које елемент прави у односу на кориговани елемент;

Препоручена литература:

- [1] Ko Y, Bathe KJ, Lee PS. The MITC4+ element and its performance. Computers&Structures 2016;169:57-68
- [2] Dvorkin E, Bathe KJ, A Continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. Eng. Comput. 1984;1:77-88
- [3] Којић М, Славковић Р, Живковић М, Грујовић Н. Метод коначних елемената 1. Линеарна анализа. Крагујевац: Машински факултет у Крагујевцу; 2010.

Крагујевац, септембар 2016.

Ментор:

Др Мирослав Живковић, ред. проф.

*Срдачно се захваљујем свом ментору, проф. др Мирославу Живковићу, на избору теме и помоћи приликом реализације завршног рада, који ме је на прави начин упутио и надзирао кроз цели поступак израде. Такође се захваљујем и др Владимиру Миловановићу на помоћи при изради примера.*

# Садржај

|                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Увод.....                                                         | 1  |
| 2. Деформације .....                                                 | 3  |
| 2.1 Компоненте мале деформације .....                                | 3  |
| 2.2 Деформације у Декартовом координатном систему .....              | 4  |
| 2.3 Трансформација компонената тензора деформације .....             | 5  |
| 2.4 Коваријантне деформације .....                                   | 6  |
| 3. Основне једначине коначних елемената.....                         | 8  |
| 4. Изопараметарски четвороугаони коначни елемент љуске .....         | 9  |
| 4.1 Интерполација за геометрију и померања материјалних тачака ..... | 9  |
| 4.2 Деформације у материјалној тачки љуске .....                     | 11 |
| 4.3 Корекција трансверзалних смичућих деформација.....               | 13 |
| 5. Кориговани елемент четворочворне љуске .....                      | 15 |
| 5.1 Дефинисање положаја средишње тачке 5.....                        | 15 |
| 5.2 Интерполација за геометрију и померања троугаоних домена.....    | 19 |
| 5.3 Коваријантне мембранске деформације троугаоних домена .....      | 22 |
| 5.3.1 Коваријантне мембранске деформације троугла А .....            | 23 |
| 5.3.2 Коваријантне мембранске деформације троугла В.....             | 27 |
| 5.3.3 Коваријантне мембранске деформације троугла С.....             | 31 |
| 5.3.4 Коваријантне мембранске деформације троугла D .....            | 35 |
| 5.4 Трансформација деформација .....                                 | 38 |
| 5.5 Предложено поље мембранских деформација .....                    | 40 |
| 6. Нумеричка анализа .....                                           | 41 |
| 6.1 Patch тест.....                                                  | 41 |
| 6.2 Цилиндрична љуска слободних крајева оптерећена притиском.....    | 43 |
| 7. Закључак .....                                                    | 47 |
| Литература.....                                                      | 48 |

## Резиме

У овом раду представљен је четвороугаони четворочворни коначни елемент љуске са корекцијама које се односе на мембранске деформације. Компоненте мембранских деформација средишње површине су претпостављене користећи идеју мешовите интерполације тензорских компонената, а добијају се из четири троугаона домена која деле средишњу површину елемента љуске. Кључна идеја је конструисати претпостављено поље мембранских деформација коришћењем мембранских деформација добијених из четири поддомена која представљају четворочворни четвороугаони елемент љуске, са циљем ублажавања мембранског закључавања које се јавља код дисторзионих елемената при кривој геометрији.

Као увод у тему дате су основе о деформацијама, величинама које су у директној вези са напонима у материјалу. Поред тога су наведене основне једначине на којима почива метода коначних елемената. На крају рада дати су резултати patch теста основног елемента, као и нумерички примери који показују главне проблеме које овај елемент прави у случају веома танких љуски и криве геометрије, који би применом коригованог елемента требало да буду значајно ублажени.

**Кључне речи:** структуре љуске, коначни елемент љуске, четворочворни елемент, мембранско закључавање, понашање при конвергирању

## Abstract

This paper presents a 4-node quadrilateral shell finite element with modifications regarding membrane strains. The mid-surface membrane strain components are assumed using the concept of the MITC (Mixed Interpolation Tensorial Components) method and they are obtained from four triangular domains which subdivide the mid-surface of the 4-node quadrilateral shell finite element. The key idea is to construct the assumed membrane strain field by utilizing the membrane strains obtained from four triangular subdomains representing the four node quadrilateral shell element with the purpose of reducing membrane locking which alleviates locking that happen when the MITC4 shell elements are geometrically distorted in curved geometries, while the element retains good membrane behavior.

As an introduction into the subject some deformation fundamentals are covered using mechanical quantities that are directly related to the stress in the material. Also, some fundamental equations, on which the finite element method is based, are given. At the end of the paper results of the primary element patch test are presented, as well as numerical examples that show main problems of this element with very thin shells and curved geometries, which should be significantly reduced by using the modified element.

**Keywords:** shell structures, shell finite element, four node element, membrane locking, convergence behavior

## 1. Увод

Љуске су структуре које приметну заступљеност имају како у природи тако и у техничкој пракси. Просто речено, то су тродимензионалне структуре, једне димензије, дебљине, знатно мање у односу на друге две.[1] Оваквих структура у обиљу има у природи, слика 1.1.



Слика 1.1 Примери љуске у природи: морске шкољке *Conus Striatus* (лево), *Strombus Erythrinus Elegans* (десно)[2]

У грађевинарству, структуре љуске сачињавају велике кровове и елегантне мостове, слика 1.2.



Слика 1.2 Грађевине направљене од структура љуске[3]

Поред тога, заступљене су и у аутомобилској индустрији (носећа конструкција аутомобила су љуске), као и у аеронаутичком инжењерству (тела авиона су љуске) итд. У сваком од ових примера, танка структура прекрива велику површину и држи велике терете. Наведене особине представљају и главне разлоге њихове примене у техничкој пракси. Циљ при конструисању је направити љуску што тањом како би структура захтевала минималну количину материјала и била што лакша, а ипак добити структуру која би била безбедна, функционална, и када је потребно лепа. Можемо рећи да дебљина, закривљеност и гранични услови љуске имају највише утицаја на њено понашање, те у теоријском смислу, љуске представљају сложен задатак при израчунавању напонског стања и поља деформације, одзива у различитим условима оптерећења, извијању итд.[4]

У методи коначних елемената, љуска представља огромно подручје истраживања.

За развијање успешног елемента љуске, главни циљеви се тичу ублажавања смицајног (енгл. *shear locking*) и мембранског закључавања (енгл. *membrane locking*) који озбиљно погоршавају тачност решења. Појава смицајног закључавања је карактеристична код коначног елемента љуске код којег је савијање доминантно оптерећење, а настаје као последица лоше апроксимације поља померања. Наиме, код елемената са потпуном Гаусовом интеграцијом ( $2 \times 2 \times 2$ ) се може догодити да смичућа деформација у интеграционим тачкама није једнака нули, тако да елементи приказују превише круто понашање јер се енергија троши на смицање елемента, уместо на савијање. Са друге стране, елементи са редукованом интеграцијом ( $1 \times 1 \times 1$ ) не могу детектовати деформације у интеграционој тачки, узрокујући на тај начин ефекат пешчаног сата.

Идеални елемент љуске би требало да задовољи услове елиптичности и конзистентности. Осим тога, једнолико понашање при конвергенцији би требало бити могуће за било који проблем љуске, без обзира на асимптотско понашање које зависи од геометрије љуске, оптерећења и граничних услова, те је веома тешко добити идеалан елемент љуске који даје оптимално понашање при конвергенцији за било који проблем [5]. Предложен је велики број коначних елемената љуске, заснован на различитим теоријским прилазима, као и побољшања основних формулација, те је једно од побољшања представљено у овом раду.

Рад садржајно обухвата седам поглавља организованих на следећи начин. У другом поглављу дате су теоријске поставке везане за деформације. Затим су описане мале деформације, као и њихове компоненте у Декартовом координатном систему. Дата је координатна трансформација тензора деформације, а потом су представљене и деформације у природном координатном систему, коваријантне деформације.

У трећем поглављу дате су основне једначине на којима се заснива метода коначних елемената. Одговарајућим интерполацијама представљене су координате и померања материјалних тачака елемента, дата је веза вектора деформације и вектора померања чворова матрицом која садржи изводе интерполационих функција. Поред тога је представљен израз за добијање матрице крутости елемента, потом и конструкције. На основу једнакости унутрашњих и спољашњих сила у чворовима дата је једначина равнотеже елемента, такође и система.

Четврто поглавље описује основни изопараметарски елемент љуске. Дате су интерполације за геометрију и померања као и деформације у материјалним тачкама.

Пето поглавље представља централни део рада. Представљене су основне поставке коригованог елемента. Изведене су координате тачака троугаоних домена, као и њихових померања, у циљу одређивања коваријантних мембранских деформација сваког троугаоног домена. За сваки троугаони домен изведена је матрица која даје везу између деформације и померања чворова, потом је представљена трансформација деформација троугаоних домена у природни координатни систем елемента, као и одговарајућа матрица трансформације. Дато је предложено поље мембранских деформација као и коначан облик компонената коригованих мембранских деформација. У шестом поглављу дати су резултати *patch* теста основног елемента, спроведена је нумеричка анализа типских тестних проблема на којима је понашање истог тестирано.

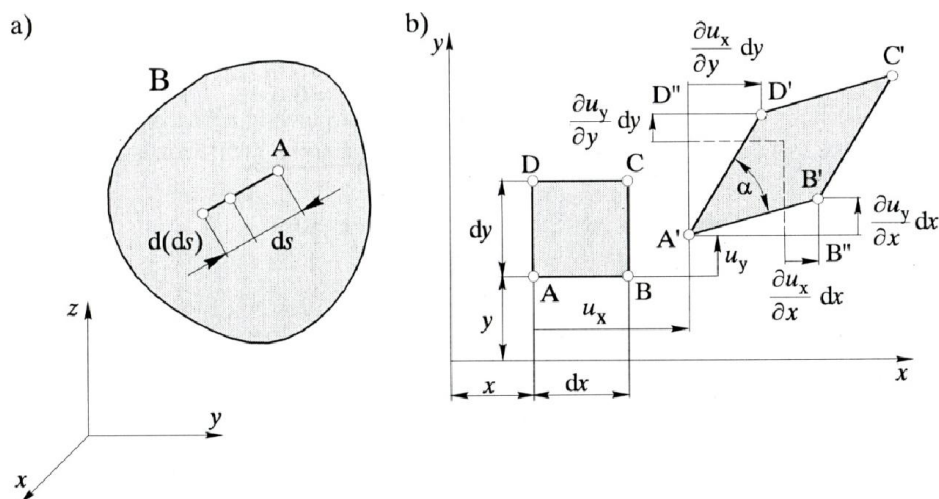
## 2. Деформације

Деформација је механичка величина којом се дефинише стање деформисаности материјала тј. непрекидне средине. Сходно интензитету деформисаности материјала, деформације се могу поделити на мале и велике. Мале деформације налазе примену у великом опсегу практичних проблема и најједноставније су за дефинисање, док се велике деформације користе при изучавању проблема где се материјал значајно деформише.[6]

При проучавању проблема деформисања материјала дефинисање и познавање малих деформација је од великог значаја, јер поред тога што дефинишу степен и величину деформације, представљају и величине које су у директној вези са напонима у материјалу.

### 2.1 Компоненте мале деформације

Посматрајмо чврсто тело В и тачку А, слика 2.1 (а), у којој ћемо дефинисати величину која се зова мала деформација.



Слика 2.1 Мале деформације[6]

По својој природи разликују се две врсте деформација: нормална (линијска) и смичућа (угаона). Нормална деформација у правцу осе  $x$  у тачки А материјала представља однос прираштаја дужине правог линијског елемента  $d(ds)$  и његове почетне дужине  $ds$ . Ако је линијски елемент пре деформације био у правцу осе  $x$ , онда је деформација  $e_{xx}$  једнака

$$e_{xx} = \frac{d(dx)}{dx} \quad (2.1.1)$$

На сличан начин се могу дефинисати нормалне деформације у било ком правцу у тачки А, као и у било којој другој тачки. Скуп свих нормалних деформација у некој тачки даје издужење тј. скраћење свих линијских елемената у посматраној тачки.

Друга врста малих деформација јесте смичућа деформација. Дефинише се као промена угла између два почетно управна линијска елемента. Смичућа деформација која одговара осама  $x$  и  $y$ , слика 2.1 (б), је

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (1.1.2)$$

где је угао  $\alpha$  угао између линијских елемената  $A'B'$  и  $A'D'$  који су се пре деформације поклапали са осама  $x$  и  $y$ . На сличан начин могуће је дефинисати смичућу деформацију за било која два првобитно међусобно управна правца. Скуп свих смичућих деформација у посматраној тачки материјала дефинише кривљење, односно промену облика материјала.

## 2.2 Деформације у Декартовом координатном систему

Компоненте деформација у Декартовом координатном систему могу се представити помоћу поља померања  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  у правцу оса  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Како се тачке  $A$  и  $B$  налазе на малом растојању, померање тачке  $B$  се може изразити преко померања тачке  $A$ . [6] Померања тачке  $B$ , слика 2.1 (б), су

$$u_{B'} = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \text{ и } v_{B'} = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

Дужина линијског елемента  $\overline{AB}$  је после деформације

$$\left(\overline{A'B'}\right)^2 = \left(\overline{A'B''}\right)^2 + \left(\overline{B'B''}\right)^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2$$

Применом дефиниције (2.1.1) следи

$$e_{xx} = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'} - dx}{dx} \text{ или } \overline{A'B'} = (1 + e_{xx}) dx$$

Изједначавањем израза за дужину линијског елемента  $\overline{A'B'}$  у претходним изразима и дељењем са  $dx^2$ , добијамо

$$2e_{xx} + e_{xx}^2 = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

Занемаривањем квадратних чланова као малих величина следи

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Применом истог поступка се могу добити и друге две нормалне деформације,  $e_{yy}$  и  $e_{zz}$ .

Како смичуће деформације дефинишу промену угла између два почетно управна правца, за дефинисање смичуће деформације  $\gamma_{xy}$  посматраћемо углове  $B'A'B''$  и  $D'A'D''$ . С обзиром да су поменути углови мали, следи

$$\gamma_{xy} = B'A'B'' + D'A'D'' = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Аналогним поступком се могу помоћу померања одредити смичуће деформације  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$ .

Изрази за све нормалне и смичуће деформације које одговарају Декартовом координатном систему  $x, y, z$  су

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Смичуће деформације могу бити представљене следећим обликом

$$e_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad e_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} \quad e_{zx} = \frac{\gamma_{zx}}{2}$$

где су компоненте  $\gamma_{ij}$  инжењерске смичуће деформације, док се  $e_{ij}$  називају тензорским.

Коришћењем индексне нотације поменуте деформације се могу написати као

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.2)$$

при чему важи да је  $e_{11} = e_{xx}, e_{22} = e_{yy}, e_{33} = e_{zz}, e_{12} = e_{xy}, e_{23} = e_{yz}, e_{31} = e_{zx}$ .

## 2.3 Трансформација компонената тензора деформације

Под тензорском величином подразумевамо такав скуп функција просторних координата које се при трансформацији координата мењају према одговарајућим, по облику увек истим, релацијама.[6]

Дефинишимо два координатна система, Декартов, у којем су тачке дефинисане координатама  $x_1, x_2, x_3$  и координатни систем заокренут у односу на Декартов са координатама  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ .

Координатна трансформација којом се успостављају релације између координата тачака у два координатна система, дефинисана је системом једначина

$$\bar{x}_i = \beta_{ik} x_k$$

где су  $\beta_{ik} = \cos(\bar{x}_i, x_k)$  косинуси углова између оса два координатна система.

При промени координатног система компоненте деформације се мењају према тензорским правилима, односно важи да је

$$\bar{e}_{ij} = e_{km} \beta_{ik} \beta_{jm} \quad \text{или} \quad \bar{e}_{ij} = e_{km} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_m}$$

Очигледно је да познавањем функција  $e_{ij}(x_i)$  можемо утврдити нормалне и смичуће деформације у односу на било који други координатни систем.

Дефинисаћемо тензор мале деформације  $\mathbf{E}$  као

$$\mathbf{E} = e_{km} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m$$

где су  $\mathbf{i}_k$  и  $\mathbf{i}_m$  јединични вектори оса Декартовог координатног система.

## 2.4 Коваријантне деформације

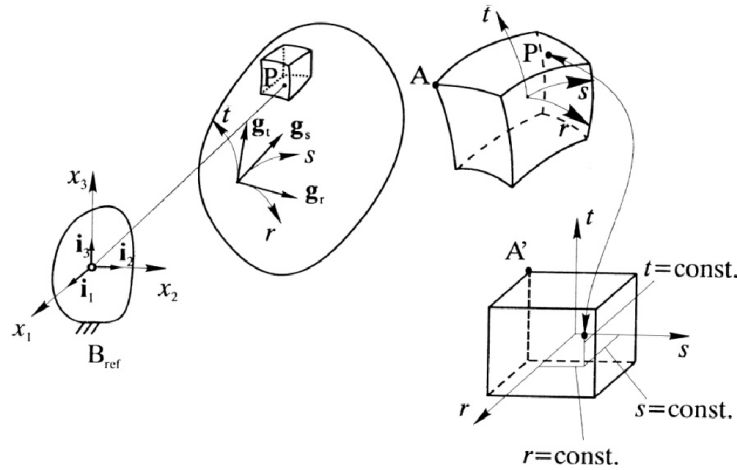
Коваријантне деформације  $\hat{e}_{ij}$  представљају деформације које одговарају природном координатном систему. Природни (материјални, конвективни) координатни систем је систем који је везан за тело, тако да свака материјална тачка у току кретања задржава исту вредност природних координата, тј.

$$r = \text{const.}$$

$$s = \text{const.}$$

$$\bar{t} = \text{const.}$$

Овакав координатни систем назначен је на слици 2.4.



Слика 2.4 Описивање кретања континуума помоћу материјалног координатног система[6]

Кретање материјалне тачке чије се просторне координате, на пример Декартове  $x_i$ , мењају у току времена, може се представити векторском једначином

$${}^t \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{r}, t) \quad (2.4.1)$$

или у компоненталном облику, скупом од три скаларне једначине,

$${}^t x_i = {}^t x_i(r, s, t; t) \quad (2.4.2)$$

где  $\mathbf{r}$  представља вектор положаја у природном координатном систему. Скуп функција које обухватају све материјалне тачке, (2.4.1), односно (2.4.2), представља кретање целокупног континуума.

Да бисмо дефинисали коваријантне деформације, полазимо од дефиниције (2.2.2) и користимо координатну трансформацију (2.4.1),

$$x_i = x_i(r_1, r_2, r_3)$$

тако да добијамо

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.4.3)$$

Изводи се даље могу трансформисати тако да је

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial r_k} &= \frac{\partial u_m}{\partial r_k} \delta_{mi} = \frac{\partial u_m}{\partial r_k} \frac{\partial x_m}{\partial r_p} \frac{\partial r_p}{\partial x_i}, & \delta_{mi} &= \frac{\partial x_m}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u_j}{\partial r_k} &= \frac{\partial u_n}{\partial r_k} \delta_{nj} = \frac{\partial u_n}{\partial r_k} \frac{\partial x_n}{\partial r_p} \frac{\partial r_p}{\partial x_j}, & \delta_{nj} &= \frac{\partial x_n}{\partial x_j}\end{aligned}\quad (2.4.4)$$

где су  $\delta_{mi}, \delta_{nj}$  Кронкерови делта симболи.

Заменом извода (2.4.4) у (2.4.3) добијамо

$$e_{ij} = \hat{e}_{kp} \frac{\partial r_p}{\partial x_i} \frac{\partial r_k}{\partial x_j}$$

Компоненте коваријантне деформације су

$$\hat{e}_{kp} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_m}{\partial r_k} \frac{\partial x_m}{\partial r_p} + \frac{\partial u_n}{\partial r_p} \frac{\partial x_n}{\partial r_k} \right)$$

Коришћењем Јакобијана трансформације ова једначина се може написати у облику

$$\hat{e}_{kp} = \frac{1}{2} \left( J_{pm} \frac{\partial u_m}{\partial r_k} + J_{kn} \frac{\partial u_n}{\partial r_p} \right) \quad (2.4.5)$$

где су  $\frac{\partial u_m}{\partial r_k}$  и  $\frac{\partial u_n}{\partial r_p}$  парцијални изводи померања по природним координатама респективно.

Јакобијан трансформације  $\mathbf{J}$  је одређен релацијама

$$J_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial r_i}$$

при чему је  $r_1 = r, r_2 = s, r_3 = \bar{t}$ . Јакобијева трансформациона матрица између глобалних Декартових и природних координата је

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_3}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} & \frac{\partial x_3}{\partial r_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_3} & \frac{\partial x_2}{\partial r_3} & \frac{\partial x_3}{\partial r_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T \\ \mathbf{g}_2^T \\ \mathbf{g}_3^T \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

где су  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  базни вектори тангентни на природне координатне линије  $r_1 = r, r_2 = s, r_3 = \bar{t}$ . Ови базни вектори,  $\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_i}$ , познати су у тензорском рачуну као коваријантни базни вектори.

Дефинисањем базних вектора, једначину (2.4.5) можемо написати у следећем облику

$$\hat{e}_{ij} = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{u}_{,i}) \quad (2.4.7)$$

при чему је  $\mathbf{u}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i}$ ,  $\mathbf{u}_{,j} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_j}$ ,  $r_1 = r, r_2 = s, r_3 = \bar{t}$ .

### 3. Основне једначине коначних елемената

Наведимо основне релације на којима почива метода коначних елемената изопараметарске формулације. Увођењем природног координатног система за сваки коначни елемент и увођењем одговарајућих интерполационих функција, могуће је на основу познатих вредности неке физичке величине у чворовима коначног елемента одредити вредност те физичке величине у било којој тачки унутар коначног елемента. Полазне једначине изопараметарске формулације могу се написати у облику[6]

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{H}\mathbf{X} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{H}\mathbf{U} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где су:  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{u}$  вектори положаја и померања материјалне тачке елемента,  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{U}$  вектори положаја и померања чворова елемента, док је  $\mathbf{H}$  интерполациона матрица која садржи полиноме природних координата коначног елемента.

Вектор деформације  $\mathbf{e}$ , са одговарајућим бројем компонената, у материјалној тачки унутар елемента је одређен једначином

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (3.2)$$

где је  $\mathbf{B}$  одговарајућа матрица која садржи изводе интерполационих функција, а следи из диференцирања поља померања израженог интерполацијом (3.1).

Напон  $\boldsymbol{\sigma}$  у материјалној тачки је одређен на основу конститутивних релација,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\mathbf{e}$$

где је  $\mathbf{C}$  еластична конститутивна матрица која даје везу између напона и деформације.

На основу принципа виртуалног рада, који се заснива на једнакости виртуалних радова спољашњих и унутрашњих сила елемента, може се извести матрица крутости коначног елемента,  $\mathbf{K}^e$ , која је једнака

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV^e$$

На основу једнакости унутрашњих сила  $\mathbf{F}^u$  и спољашњих сила  $\mathbf{F}^s$  у чворовима елемента, добијамо једначину равнотеже елемента у облику

$$\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{F}^e$$

Ако бисмо посматрали систем коначних елемената, унутрашње силе, односно силе међусобног дејства елемената би се поништиле, јер елементи делују међусобно силама истих интензитета и праваца, само супротних смерова. Тако да сабирањем сила  $\mathbf{F}^e$  у чворовима коначних елемената добијамо да је резултујући вектор једнак вектору спољашњих сила  $\mathbf{F}^s$ . Коначан облик једначине равнотеже система је

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}^s$$

где је  $\mathbf{U}$  вектор померања конструкције,  $\mathbf{F}^s$  вектор спољашњих сила који укључује и реакције спољашњих веза конструкције, док је  $\mathbf{K}$  матрица система конструкције.

Матрицу крутости система можемо формирати сабирањем матрица крутости сваког појединачног коначног елемента, односно

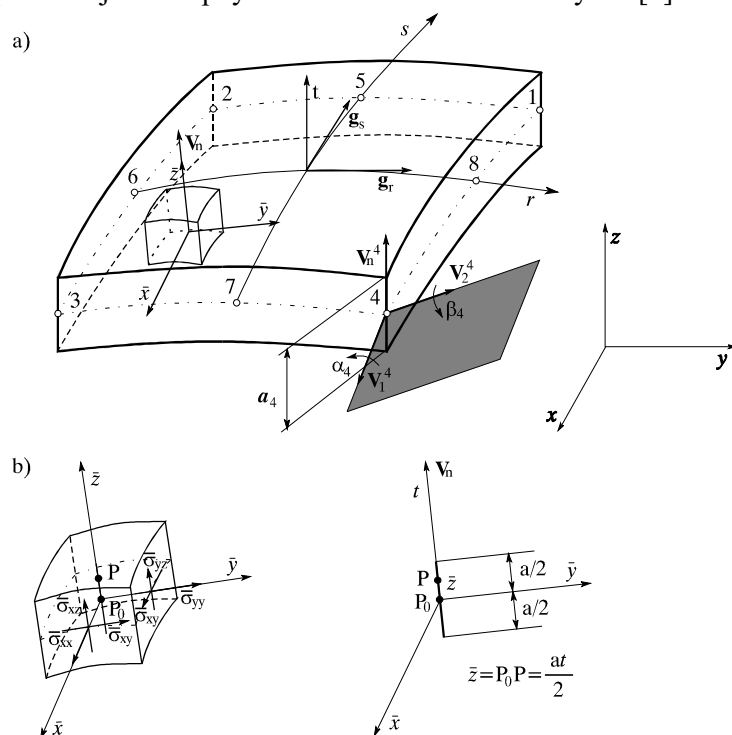
$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e$$

## 4. Изопараметарски четвороугаони коначни елемент љуске

Љуске су тродимензионалне структуре код којих је једна димензија, дебљина, знатно мања од друге две, односно, то су танки површински носачи општег облика. Ова геометријска особина љуски се користи у анализи љуске на неколико начина: за дефинисање геометрије љуски, потребно је да средишња површина и дебљина буду дефинисане, за дефинисање понашања љуске могу се користити претпоставке. Ове претпоставке посебно укључују то да је напон у правцу нормале на љуску једнак нули, што би значило да права влакна, првобитно управна на средишњу површину, остају права током деформисања љуске. Главни проблеми у анализи љуске настају због њене веома мале дебљине. Љуске могу показати променљиву осетљивост са смањењем дебљине, зависно од саме геометрије и граничних услова, те је од великог значаја испитати њихово понашање са смањењем дебљине, тзв. асимптотско понашање.

### 4.1 Интерполација за геометрију и померања материјалних тачака

На слици 4.1 приказан је четвороугаони коначни елемент љуске.[6]



Слика 4.1 Четвороугаони коначни елемент љуске[6]

а) Геометрија елемента

б) Локални координатни систем и напони у локалном систему

Природни координатни систем  $r$ ,  $s$ ,  $t$  се налази у средишту елемента. Како се чворови елемента налазе у средњој површи љуске следи да су угаони чворови одређени вредностима  $\pm 1$  природних координата  $r$  и  $s$ , док се средњи чворови налазе на координатним линијама.

$\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_n^k$  су јединични вектори у чвору "k", при чему  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_2$  леже у тангенцијалној равни, док је  $\mathbf{V}_n^k$  у правцу нормале. У чвору "k" дебљина елемента је једнака  $a_k$ .

Координате  $x_i$  материјалне тачке могу се изразити у следећем облику

$$x_i = \sum_{k=1}^N h_k X_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^N a_k h_k V_{ni}^k \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.1.1)$$

где су  $X_i^k$  координате чвора "k" у глобалном координатном систему  $x, y, z$ ,  $V_{ni}^k$  пројекције вектора нормале на одговарајуће осе, док су интерполационе функције  $h_k(r, s)$  угаоних чворова

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

Очигледно је да први збир у изразу (4.1.1) даје координате  $x_{oi}$  тачака на средњој површи, док други збир представља пројекције вектора релативног положаја тачке у односу на средњу раван.

По аналогiji са интерполацијом која одговара координатама материјалних тачака елемента, померања се могу изразити једначином

$$u_i = \sum_{k=1}^N h_k U_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^N a_k h_k (\boldsymbol{\Phi}^k \times \mathbf{V}_n^k)_i \quad (4.1.2)$$

Векторски производ  $\boldsymbol{\Phi}^k \times \mathbf{V}_n^k$  једнак је

$$\boldsymbol{\Phi}^k \times \mathbf{V}_n^k = \begin{vmatrix} \mathbf{V}_1^k & \mathbf{V}_2^k & \mathbf{V}_n^k \\ \alpha_k & \beta_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \beta_k \mathbf{V}_1^k - \alpha_k \mathbf{V}_2^k$$

при чему су  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  ротације око изабраних оса  $\mathbf{V}_1^k$  и  $\mathbf{V}_2^k$ .

Заменом добијеног векторског производа у поље померања (4.1.2) добијамо

$$u_i = \sum_{k=1}^N h_k U_i^k + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^N a_k h_k (-V_{2i}^k \alpha_k + V_{1i}^k \beta_k) \quad (4.1.3)$$

где су  $V_{1i}^k$  и  $V_{2i}^k$  су пројекције вектора  $\mathbf{V}_1^k$  и  $\mathbf{V}_2^k$  на координатне осе глобалног координатног система  $x, y, z$ .

Из једначине (4.1.3) видимо да чворови љуске имају пет генералисаних померања, три компоненте померања чвора  $U_i^k$  и две ротације  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ .

Вектор померања  $\mathbf{u}$  може бити написан у облику (3.1)

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{U}$$

при чему се матрица  $\mathbf{H}$  и вектор померања могу представити као

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}^1 \mathbf{H}^2 \mathbf{H}^3 \dots \mathbf{H}^N]$$

и

$$\mathbf{U}^T = [\mathbf{U}^{1T} \mathbf{U}^{2T} \mathbf{U}^{3T} \dots \mathbf{U}^{NT}]$$

Подматрица  $\mathbf{H}^k$  и вектор померања  $\mathbf{U}^k$  за чвор  $k$  су

$$\mathbf{H}^k = \begin{bmatrix} h_k & 0 & 0 & -\frac{t}{2}h_k a_k V_{21}^k & \frac{t}{2}h_k a_k V_{11}^k \\ 0 & h_k & 0 & -\frac{t}{2}h_k a_k V_{22}^k & \frac{t}{2}h_k a_k V_{12}^k \\ 0 & 0 & h_k & -\frac{t}{2}h_k a_k V_{23}^k & \frac{t}{2}h_k a_k V_{13}^k \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{U}^{kT} = [U_1^k U_2^k U_3^k \alpha_k \beta_k]$$

## 4.2 Деформације у материјалној тачки љуске

Пошто имамо померања  $u_i(r, s, t)$  одређена једначином (4.1.3), компоненте деформација  $e_{ij}$  у Декартовом координатном систему  $x, y, z$  одређујемо према (2.2.2). Деформацију  $\mathbf{e}$  можемо матрично написати у облику[6]

$$\mathbf{e} = [\mathbf{B}^1 \mathbf{B}^2 \mathbf{B}^3 \dots \mathbf{B}^N] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{U}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{U}^N \end{Bmatrix} \quad (4.2.1)$$

Матрица  $\mathbf{B}^k$  за чвор  $k$  је следећег облика, а следи из (4.1.3)

$$\mathbf{B}^k = \begin{bmatrix} h_{k,1} & 0 & 0 & t g_{11}^k h_{k,1} & t g_{21}^k h_{k,1} \\ 0 & h_{k,2} & 0 & t g_{12}^k h_{k,2} & t g_{22}^k h_{k,2} \\ 0 & 0 & h_{k,3} & t g_{13}^k h_{k,3} & t g_{23}^k h_{k,3} \\ h_{k,2} & h_{k,1} & 0 & t(g_{11}^k h_{k,2} + g_{12}^k h_{k,1}) & t(g_{21}^k h_{k,2} + g_{22}^k h_{k,1}) \\ 0 & h_{k,3} & h_{k,2} & t(g_{12}^k h_{k,3} + g_{13}^k h_{k,2}) & t(g_{22}^k h_{k,3} + g_{23}^k h_{k,2}) \\ h_{k,3} & 0 & h_{k,1} & t(g_{11}^k h_{k,3} + g_{13}^k h_{k,1}) & t(g_{21}^k h_{k,3} + g_{23}^k h_{k,1}) \end{bmatrix}$$

где су

$$h_{k,i} = \frac{\partial h_k}{\partial x_i}, \quad g_{1i}^k = -\frac{1}{2} a_k V_{2i}^k, \quad g_{2i}^k = \frac{1}{2} a_k V_{1i}^k$$

Парцијални изводи  $h_{k,j}$  се одређују применом посредног диференцирања, тј.

$$h_{k,i} = \frac{\partial h_k}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \frac{\partial h_k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_i}$$

Вредности компонената Јакобијана одређујемо на основу (4.1.1)

$$\begin{aligned} J_{1i} &= \sum_{k=1}^N h_{k,r} \left( X_i^k + \frac{t}{2} a_k V_{ni}^k \right) \\ J_{2i} &= \sum_{k=1}^N h_{k,s} \left( X_i^k + \frac{t}{2} a_k V_{ni}^k \right) \\ J_{3i} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k h_k V_{ni}^k \end{aligned}$$

У матрици  $\mathbf{B}^k$  можемо увидети део који не зависи од координате  $t$  и који множи померања  $U_i^k$  чворова, као и део који је пропорционалан координати  $t$ , односно удаљењу тачке од средње површи а множи ротације нормале на љуску.

Вектор деформације се може разложити на мембранске деформације и деформације услед ротације нормале које настају услед савијања и трансверзалног смицања, односно

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^m + \mathbf{e}^{\text{rot}}$$

Очигледно и матрицу  $\mathbf{B}^k$  можемо представити обликом  $\mathbf{B}^{\text{km}}$  и  $\mathbf{B}^{\text{krot}}$ ,

$$\mathbf{B}^k = [\mathbf{B}^{\text{km}} \mathbf{B}^{\text{krot}}]$$

где  $\mathbf{B}^{\text{km}}$  садржи прве три колоне матрице  $\mathbf{B}^k$ , а  $\mathbf{B}^{\text{krot}}$  обухвата последње две колоне матрице  $\mathbf{B}^k$ .

Коваријантне деформације  $\hat{e}_{ij}$  су изражене преко поља померања једначином (2.4.5), тако да заменом интерполације за померања добијамо вектор  $\hat{\mathbf{e}}$  коваријантних деформација у облику

$$\hat{\mathbf{e}} = [\hat{\mathbf{B}}^1 \hat{\mathbf{B}}^2 \hat{\mathbf{B}}^3 \hat{\mathbf{B}}^4] \mathbf{U} \quad (4.2.2)$$

При чему се подматрица  $\hat{\mathbf{B}}^k$  може написати као

$$\hat{\mathbf{B}}^k = [\hat{\mathbf{B}}_k^u \hat{\mathbf{B}}_k^r]$$

Подматрице  $\hat{\mathbf{B}}_u^k$  и  $\hat{\mathbf{B}}_r^k$  одговарају translацијама и ротацијама у чвору  $k$ , и могу се представити у облику

$$\hat{\mathbf{B}}_u^k = \begin{bmatrix} J_{11} h_{k,r} & J_{12} h_{k,r} & J_{13} h_{k,r} \\ J_{21} h_{k,s} & J_{22} h_{k,s} & J_{23} h_{k,s} \\ J_{11} h_{k,s} + J_{21} h_{k,r} & J_{12} h_{k,s} + J_{22} h_{k,r} & J_{13} h_{k,s} + J_{23} h_{k,r} \\ J_{31} h_{k,s} & J_{32} h_{k,s} & J_{33} h_{k,s} \\ J_{31} h_{k,r} & J_{32} h_{k,r} & J_{33} h_{k,r} \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_\varphi^k = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 J_{1i} h_{k,r} t g_{1i}^k & \sum_{i=1}^3 J_{1i} h_{k,r} t g_{2i}^k \\ \sum_{i=1}^3 J_{2i} h_{k,s} t g_{1i}^k & \sum_{i=1}^3 J_{2i} h_{k,s} t g_{2i}^k \\ \sum_{i=1}^3 (J_{1i} h_{k,s} + J_{2i} h_{k,r}) t g_{1i}^k & \sum_{i=1}^3 (J_{1i} h_{k,s} + J_{2i} h_{k,r}) t g_{2i}^k \\ \sum_{i=1}^3 (J_{3i} h_{k,s} t + J_{2i} h_k) g_{1i}^k & \sum_{i=1}^3 (J_{3i} h_{k,s} t + J_{2i} h_k) g_{2i}^k \\ \sum_{i=1}^3 (J_{3i} h_{k,r} t + J_{1i} h_k) g_{1i}^k & \sum_{i=1}^3 (J_{3i} h_{k,r} t + J_{1i} h_k) g_{2i}^k \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

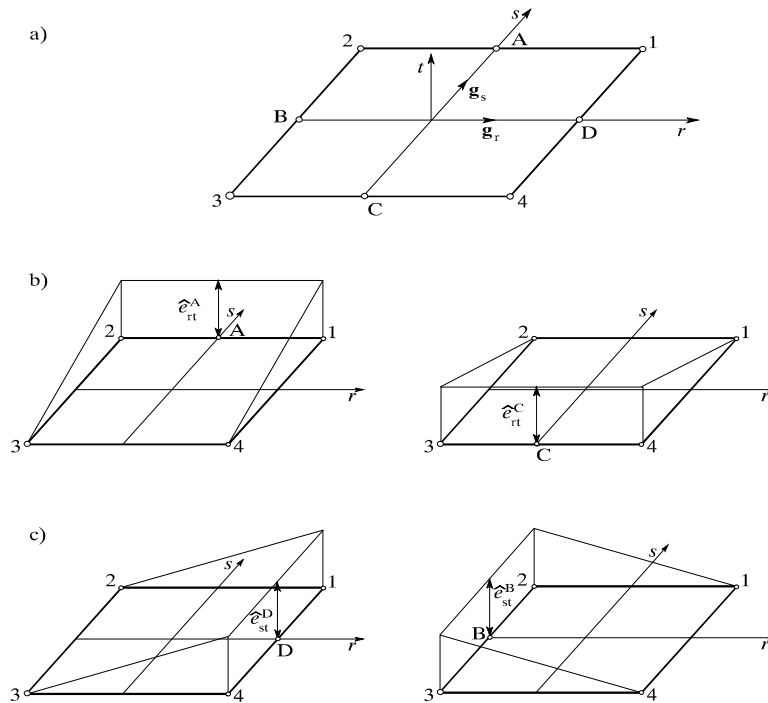
где су  $h_{k,r}$  и  $h_{k,s}$  изводи интерполационих функција по природним координатама, док су  $g_{1i}^k$  и  $g_{2i}^k$  дати у извођењу матрице  $\mathbf{B}^k$ .

### 4.3 Корекција трансверзалних смичућих деформација

Уместо трансверзалних смичућих деформација које се добијају из поља померања према (4.2.1), уводи се интерполација за ове компоненте тако да су поља коваријантних деформација  $\hat{e}_{rt}$  и  $\hat{e}_{st}$ , слика 4.3, облика[7]

$$\hat{e}_{rt} = \frac{1}{2}(1+s)\hat{e}_{rt}^A + \frac{1}{2}(1-s)\hat{e}_{rt}^C \quad (4.3.1)$$

$$\hat{e}_{st} = \frac{1}{2}(1+r)\hat{e}_{st}^D + \frac{1}{2}(1-r)\hat{e}_{st}^B$$



Слика 4.3 Четворочворни коначни елемент љуске: а) Геометрија елемента; б) Поље смичуће деформације  $\hat{e}_{rt}$ ; в) Поље смичуће деформације  $\hat{e}_{st}$  [6]

Услед интерполације (4.3.1) неопходно је кориговати пету и шесту врсту матрице  $\hat{\mathbf{B}}$ , тако да коефицијенти  $\hat{B}_{5j}^k$  и  $\hat{B}_{6j}^k$  постају

$$\hat{B}_{5j}^k = \frac{1}{2}(1+r)\hat{B}_{5j}^{kD} + \frac{1}{2}(1-r)\hat{B}_{5j}^{kB}$$

$$\hat{B}_{6j}^k = \frac{1}{2}(1+s)\hat{B}_{6j}^{kA} + \frac{1}{2}(1-s)\hat{B}_{6j}^{kC}$$

где су  $\hat{B}_{5j}^{kD}$ ,  $\hat{B}_{5j}^{kB}$ ,  $\hat{B}_{6j}^{kA}$  и  $\hat{B}_{6j}^{kC}$  коефицијенти израчунати према (4.2.3) и (4.2.4), у тачкама D, B, A и C, слика 4.3. Заменом у (4.2.2) добијамо коваријантне деформације  $\hat{\mathbf{e}}$ , која узима у обзир интерполацију (4.3.1).

## 5. Кориговани елемент четворочворне љуске

Публикован је велики број радова посвећених корекцији основног изопараметарског елемента љуске у циљу побољшања елемента и отклањања недостатака. У овом раду се кориговање елемента односи на модификацију коваријантних мембранских деформација у циљу решавања мембранског закључавања које се јавља код геометрије која је закривљена. Средња површ четвороугаоног коначног елемента љуске се дели на четири равна троугаона домена, при чему се уместо мембранских деформација које се добијају из поља померања према (4.1.3), усваја ново поље коваријантних мембранских деформација, које је добијено увођењем интерполације поменутих троугаоних домена и одређивањем коваријантних мембранских деформација сваког троугла појединачно. На овај начин се добија могућност одређивања тачније мембранске крутости и елемент који је у погледу мембранског понашања мање осетљив на неправилност облика. Коваријантне деформације представљене једначином (2.4.5) у равни љуске се могу написати у следећем облику

$$\hat{e}_{ij} = \hat{e}_{ij}^m + t\hat{e}_{ij}^{b1} + t^2\hat{e}_{ij}^{b2} \quad i, j = 1, 2$$

где су  $\hat{e}_{ij}^m$  мембранске деформације на средишњој површини љуске ( $t=0$ ), док су  $\hat{e}_{ij}^{b1}$  и  $t^2\hat{e}_{ij}^{b2}$  савојне деформације првог и другог реда.[8]

Ове деформације су једнаке

$$\begin{aligned} \hat{e}_{ij}^m &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial r_j} + \frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial r_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial r_i} \right), \\ \hat{e}_{ij}^{b1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial r_j} + \frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial r_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial r_i} + \frac{\partial \mathbf{x}_b}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial r_j} + \frac{\partial \mathbf{x}_b}{\partial r_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial r_i} \right), \\ \hat{e}_{ij}^{b2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_b}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial r_j} + \frac{\partial \mathbf{x}_b}{\partial r_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial r_i} \right) \end{aligned}$$

где су

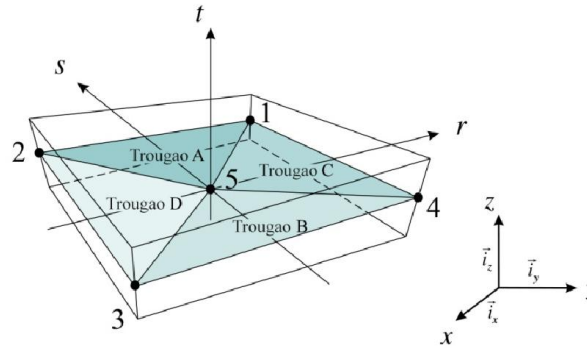
$$\mathbf{x}_m = \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) \mathbf{X}^k, \quad \mathbf{x}_b = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 a_k h_k(r, s) \mathbf{V}_n^k \quad (5.1)$$

$$\mathbf{u}_m = \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) \mathbf{U}^k, \quad \mathbf{u}_b = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 a_k h_k(r, s) (-\mathbf{V}_2^k \alpha_k + \mathbf{V}_1^k \beta_k) \quad (5.2)$$

Векторске једначине (5.1) одговарају једначини (4.1.1) која је представљена у компоненталном облику, док су једначине (5.2) аналогне једначини (4.1.3), написаној такође у компоненталном облику.

### 5.1 Дефинисање положаја средишње тачке 5

На слици 5.1.1 приказана су четири троугаона домена на средњој површи љуске. Домене дефинишемо тако да се у њиховом пресеку налази тачка 5 која представља средиште средње површи љуске.



Слика 5.1.1 Приказ троугаоних домена и средишње тачке 5 на средњој површини[8]

Положај средишње тачке 5 средње површине одређен је векторском једначином

$$\mathbf{X}^5 = \sum_{k=1}^4 \gamma_k \mathbf{X}^k \quad (5.1.1)$$

где  $\mathbf{X}^5$  представља вектор положаја тачке 5, док је  $\mathbf{X}^k$  вектор положаја чвора  $k$  у глобалном координатном систему  $x, y, z$ . [8]

Овој једначини одговарају три скаларне једначине

$$X_i^5 = \sum_{k=1}^4 \gamma_k X_i^k \quad i = 1, 2, 3$$

где  $i = 1$  одговара оси  $x$ ,  $i = 2$  оси  $y$  а  $i = 3$  оси  $z$  глобалног координатног система.

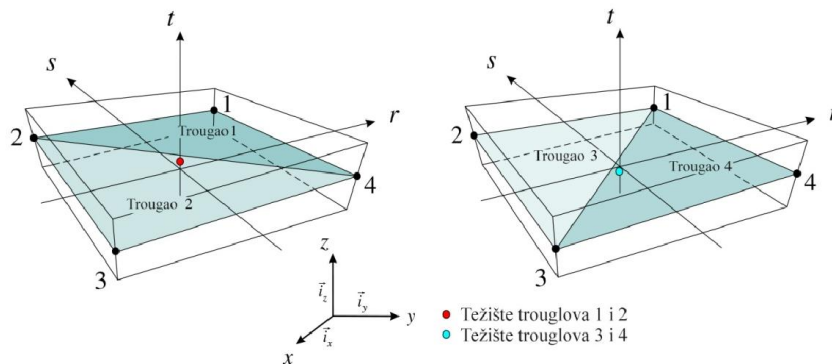
У развијеном облику векторска једначина (5.1.1) има следећи облик

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^5 &= \sum_{k=1}^4 \gamma_k \mathbf{X}^k = \gamma_1 \mathbf{X}^1 + \gamma_2 \mathbf{X}^2 + \gamma_3 \mathbf{X}^3 + \gamma_4 \mathbf{X}^4 = \\ &\gamma_1 (X_1^1, X_2^1, X_3^1) + \gamma_2 (X_1^2, X_2^2, X_3^2) + \gamma_3 (X_1^3, X_2^3, X_3^3) + \gamma_4 (X_1^4, X_2^4, X_3^4) \end{aligned}$$

Коначно, координате тачке 5 су

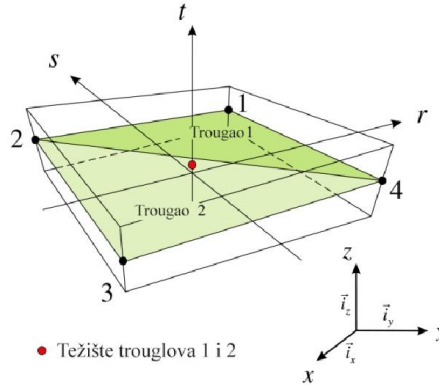
$$\begin{aligned} X_1^5 &= \gamma_1 X_1^1 + \gamma_2 X_1^2 + \gamma_3 X_1^3 + \gamma_4 X_1^4 \\ X_2^5 &= \gamma_1 X_2^1 + \gamma_2 X_2^2 + \gamma_3 X_2^3 + \gamma_4 X_2^4 \\ X_3^5 &= \gamma_1 X_3^1 + \gamma_2 X_3^2 + \gamma_3 X_3^3 + \gamma_4 X_3^4 \end{aligned}$$

За извођење константи  $\gamma_k$  које се користе за одређивање положаја средишње тачке 5, дефинишимо четири троугла, слика 5.1.2, који полове средњу површ елемента.



Слика 5.1.2 Приказ троуглова за одређивање константи  $\gamma_k$  [8]

Како тачка 5 представља средиште средње површи, константе можемо добити одређивањем положаја тежишта сваког дефинисаног троугла. С обзиром да су координате чворова који дефинишу троуглове познате, положаји тежишта поменутих троуглова се могу добити као аритметичка средина координата чворова. Кренимо од троуглова 1 и 2, слика 5.1.3.



Слика 5.1.3 Приказ тежишта троуглова 1 и 2[8]

Вектор положаја тежишта троугла 1 који је дефинисан чворовима 1-2-4 је

$$\mathbf{x}_{T1} = \frac{1}{3}\mathbf{X}^1 + \frac{1}{3}\mathbf{X}^2 + \frac{1}{3}\mathbf{X}^4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^1 & \mathbf{X}^2 & \mathbf{X}^3 & \mathbf{X}^4 \end{bmatrix}^T$$

Слично, положај тежишта троугла 2 је одређен векторском једначином

$$\mathbf{x}_{T2} = \frac{1}{3}\mathbf{X}^2 + \frac{1}{3}\mathbf{X}^3 + \frac{1}{3}\mathbf{X}^4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^1 & \mathbf{X}^2 & \mathbf{X}^3 & \mathbf{X}^4 \end{bmatrix}^T$$

Сада можемо одредити вектор положаја тежишта троуглова 1 и 2 као

$$\mathbf{x}_{T12} = \frac{A_1}{A_1 + A_2} \mathbf{x}_{T1} + \frac{A_2}{A_1 + A_2} \mathbf{x}_{T2}$$

где су  $A_1$  и  $A_2$  површине троуглова 1 и 2.[8]

Површине троуглова 1 и 2 се могу изразити преко координата чворова у односу на координатни систем Оху као

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_1^1 & X_2^1 & 1 \\ X_1^2 & X_2^2 & 1 \\ X_1^3 & X_2^3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2) \right|$$

Наведене једначине следе из дефиниције за површину троуглова

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (5.1.2)$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

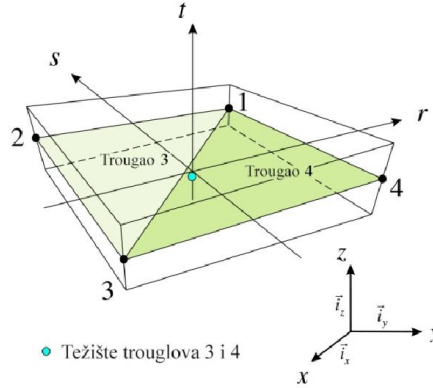
Где су  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  и  $(x_3, y_3)$  координате темена троугла у равни Оху.[9]

Применом дефиниције (5.1.2) површине троуглова 1 и 2 су

$$P_1 = \frac{1}{2} \left| X_1^1 (X_2^2 - X_2^4) + X_1^2 (X_2^4 - X_2^1) + X_1^4 (X_2^1 - X_2^2) \right|$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \left| X_1^2 (X_2^3 - X_2^4) + X_1^3 (X_2^4 - X_2^2) + X_1^4 (X_2^2 - X_2^3) \right|$$

Исти поступак применићемо на троуглове 3 и 4, слика 5.1.4.



Слика 5.1.4 Приказ тежишта троуглова 3 и 4[8]

Положај тежишта троугла 3 одређен је векторском једначином

$$\mathbf{x}_{T3} = \frac{1}{3} \mathbf{X}^1 + \frac{1}{3} \mathbf{X}^2 + \frac{1}{3} \mathbf{X}^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^1 & \mathbf{X}^2 & \mathbf{X}^3 & \mathbf{X}^4 \end{bmatrix}^T$$

Док је вектор положаја тежишта троугла 4

$$\mathbf{x}_{T4} = \frac{1}{3} \mathbf{X}^1 + \frac{1}{3} \mathbf{X}^3 + \frac{1}{3} \mathbf{X}^4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^1 & \mathbf{X}^2 & \mathbf{X}^3 & \mathbf{X}^4 \end{bmatrix}^T$$

Вектор положаја тежишта троуглова 3 и 4 се може представити једначином[8]

$$\mathbf{x}_{T34} = \frac{A_3}{A_3 + A_4} \mathbf{x}_{T3} + \frac{A_4}{A_3 + A_4} \mathbf{x}_{T4}$$

где су  $A_3$  и  $A_4$  су површине троуглова 3 и 4 које се рачунају коришћењем дефиниције (5.1.2),

$$P_3 = \frac{1}{2} \left| X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2) \right|$$

$$P_4 = \frac{1}{2} \left| X_1^1 (X_2^3 - X_2^4) + X_1^3 (X_2^4 - X_2^1) + X_1^4 (X_2^1 - X_2^3) \right|$$

Када смо одредили векторе положаја тежишта троуглова 1 и 2, као и троуглова 3 и 4, вектор координата тачке 5 одређујемо средњом вредношћу поменутих вектора положаја, односно[8]

$$\mathbf{X}^5 = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{T12} + \mathbf{x}_{T34}) = [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4] \begin{bmatrix} \mathbf{X}^1 & \mathbf{X}^2 & \mathbf{X}^3 & \mathbf{X}^4 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^4 \gamma_k \mathbf{X}^k$$

Коначно, коефицијенти  $\gamma_k$  имају следеће вредности[8]

$$[\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4] = \frac{1}{2} \frac{A_1}{A_1 + A_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{A_2}{A_1 + A_2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{A_3}{A_3 + A_4} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{A_4}{A_3 + A_4} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (5.1.3)$$

У коригованом елементу љуске вектор померања средишње тачке 5 представљамо преко вектора померања угаоних чворова, односно

$$\mathbf{U}^5 = \sum_{k=1}^4 \gamma_k \mathbf{U}^k \quad (5.1.4)$$

у којој  $\mathbf{U}^5$  представља вектор померања тачке 5, док је  $\mathbf{U}^k$  вектор померања чвора  $k$  у глобалном координатном систему  $x, y, z$ . [8]

Овој векторској једначини одговарају три скаларне једначине

$$U_i^5 = \sum_{k=1}^4 \gamma_k U_i^k \quad i = 1, 2, 3$$

где  $i = 1$  одговара оси  $x$ ,  $i = 2$  оси  $y$ , а  $i = 3$  оси  $z$  глобалног координатног система.

У развијеном облику једначина (5.1.4) има облик

$$\mathbf{U}^5 = \sum_{k=1}^4 \gamma_k \mathbf{U}^k = \gamma_1 \mathbf{U}^1 + \gamma_2 \mathbf{U}^2 + \gamma_3 \mathbf{U}^3 + \gamma_4 \mathbf{U}^4 = \gamma_1 (U_1^1, U_2^1, U_3^1) + \gamma_2 (U_1^2, U_2^2, U_3^2) + \gamma_3 (U_1^3, U_2^3, U_3^3) + \gamma_4 (U_1^4, U_2^4, U_3^4)$$

односно у компоненталном облику

$$\begin{aligned} U_1^5 &= \gamma_1 U_1^1 + \gamma_2 U_1^2 + \gamma_3 U_1^3 + \gamma_4 U_1^4 \\ U_2^5 &= \gamma_1 U_2^1 + \gamma_2 U_2^2 + \gamma_3 U_2^3 + \gamma_4 U_2^4 \\ U_3^5 &= \gamma_1 U_3^1 + \gamma_2 U_3^2 + \gamma_3 U_3^3 + \gamma_4 U_3^4 \end{aligned}$$

Вредности констати  $\gamma_k$  су одређене једначином (5.1.3). Приметимо да померања код средишње тачке нису степени слободе у формулацији елемента.

## 5.2 Интерполација за геометрију и померања троугаоних домена

Користећи дефинисану средишњу тачку, делимо средњу површ четвороугаоног елемента љуске на четири равна троугаона домена. При чему се уместо (4.1.1), односно (5.1), уводи интерполација за геометрију за сваки троугаони домен следећег облика.[8]

$$\widehat{\mathbf{x}}(r, s, t) = \sum_{k=1}^3 \widehat{h}_k(r, s) \widehat{\mathbf{X}}^k \quad (5.2.1)$$

Једначина (5.2.1) се може у компоненталном облику написати као

$$\widehat{x}_i(r, s, t) = \sum_{k=1}^3 \widehat{h}_k(r, s) \widehat{X}_i^k \quad i = 1, 2, 3$$

где су  $\widehat{x}_i(r, s, t)$  координате материјалних тачака троугаоних домена, а  $\widehat{X}_i^k$  координате чвора  $k$  који дефинише троугаони домен А, В, С или D, при чему  $i = 1$  одговара оси  $x$ ,  $i = 2$  оси  $y$ , а  $i = 3$  оси  $z$  глобалног координатног система.

Приметимо да једначину (5.2.1) можемо написати и у облику

$$\widehat{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \\ \widehat{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \\ \widehat{z} \end{Bmatrix} = \widehat{\mathbf{H}} \widehat{\mathbf{X}}$$

где је интерполациона матрица  $\widehat{\mathbf{H}}$  троугаоних домена

$$\widehat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \widehat{h}_1 & \widehat{h}_2 & \widehat{h}_3 \end{bmatrix}$$

А вектор координата чворова троугаоних домена  $\widehat{\mathbf{X}}$

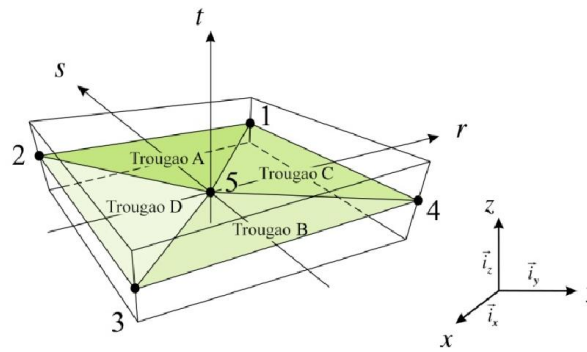
$$\widehat{\mathbf{X}}^T = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{X}}^1 & \widehat{\mathbf{X}}^2 & \widehat{\mathbf{X}}^3 \end{bmatrix} \quad (5.2.2)$$

Интерполационе функције  $\widehat{h}_k(r, s)$  трочворних троугаоних елемената које одговарају чворовима који их дефинишу су[8]

$$\begin{aligned} \widehat{h}_1(r, s) &= r \\ \widehat{h}_2(r, s) &= s \\ \widehat{h}_3(r, s) &= 1 - r - s \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Троугаони домени, слика 5.2.1, су дефинисани тако да важи[8]

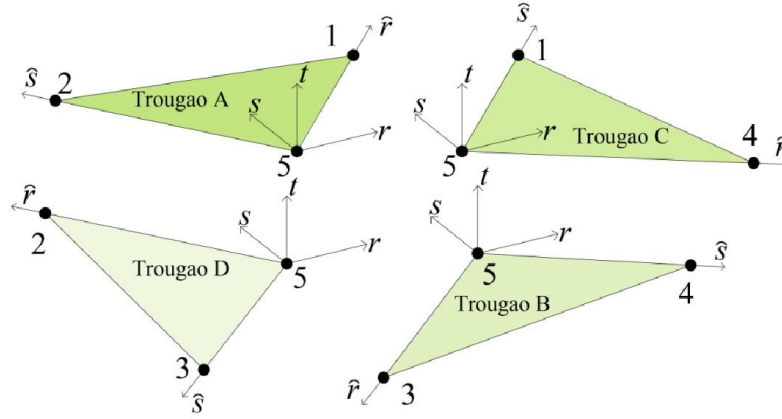
$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{X}}^1 &= \mathbf{X}^1, \widehat{\mathbf{X}}^2 = \mathbf{X}^2, \widehat{\mathbf{X}}^3 = \mathbf{X}^5 \text{ за троугао A} \\ \widehat{\mathbf{X}}^1 &= \mathbf{X}^3, \widehat{\mathbf{X}}^2 = \mathbf{X}^4, \widehat{\mathbf{X}}^3 = \mathbf{X}^5 \text{ за троугао B} \\ \widehat{\mathbf{X}}^1 &= \mathbf{X}^4, \widehat{\mathbf{X}}^2 = \mathbf{X}^1, \widehat{\mathbf{X}}^3 = \mathbf{X}^5 \text{ за троугао C} \\ \widehat{\mathbf{X}}^1 &= \mathbf{X}^2, \widehat{\mathbf{X}}^2 = \mathbf{X}^3, \widehat{\mathbf{X}}^3 = \mathbf{X}^5 \text{ за троугао D} \end{aligned} \quad (5.2.4)$$



Слика 5.2.1 Приказ троугаоних домена A, B, C и D[8]

Вектор координата чворова (5.2.2) одговарајућег троугаоног домена добијамо у складу са (5.2.4).

Како интерполациона функција има вредност 1 у чвору на који се односи, а вредност 0 у свим осталим чворовима, можемо дефинисати положај оса  $\widehat{r}$  и  $\widehat{s}$ , слика 5.2.2, троугаоних домена на основу интерполационих функција (5.2.3).

Слика 5.2.2 Приказ положаја оса  $\hat{r}$  и  $\hat{s}$  троугаоних домена

Интерполација за померања тачака троугаоних домена је [8]

$$\hat{\mathbf{u}}(r, s, t) = \sum_{k=1}^3 \hat{h}_k(r, s) \hat{\mathbf{U}}^k \quad (5.2.5)$$

односно према (3.1) можемо је писати у облику

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{U}}$$

где је интерполациона матрица  $\hat{\mathbf{H}}$  троугаоних домена

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1 & \hat{h}_2 & \hat{h}_3 \end{bmatrix}$$

и вектор померања чворова одговарајућег троугаоног домена  $\hat{\mathbf{U}}$

$$\hat{\mathbf{U}}^T = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}^1 & \hat{\mathbf{U}}^2 & \hat{\mathbf{U}}^3 \end{bmatrix}$$

Вектор померања чворова  $\hat{\mathbf{U}}$  за одговарајући троугаони домен добијамо аналогно са (5.2.4), односно важи да је [8]

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}^1 &= \mathbf{U}^1, \hat{\mathbf{U}}^2 = \mathbf{U}^2, \hat{\mathbf{U}}^3 = \mathbf{U}^5 \text{ за троугао A} \\ \hat{\mathbf{U}}^1 &= \mathbf{U}^3, \hat{\mathbf{U}}^2 = \mathbf{U}^4, \hat{\mathbf{U}}^3 = \mathbf{U}^5 \text{ за троугао B} \\ \hat{\mathbf{U}}^1 &= \mathbf{U}^4, \hat{\mathbf{U}}^2 = \mathbf{U}^1, \hat{\mathbf{U}}^3 = \mathbf{U}^5 \text{ за троугао C} \\ \hat{\mathbf{U}}^1 &= \mathbf{U}^2, \hat{\mathbf{U}}^2 = \mathbf{U}^3, \hat{\mathbf{U}}^3 = \mathbf{U}^5 \text{ за троугао D} \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Приметимо да се једначина (5.2.5) у компоненталном облику може написати као

$$\hat{u}_i(r, s, t) = \sum_{k=1}^3 \hat{h}_k(r, s) \hat{U}_i^k \quad i = 1, 2, 3$$

где  $i = 1$  одговара оси  $x$ ,  $i = 2$  оси  $y$ , а  $i = 3$  оси  $z$  глобалног координатног система.

### 5.3 Коваријантне мембранске деформације троугаоних домена

Услед деловања унутрашњих сила у тангенцијалној равни, равни плоче, јављају се померања тачака средње равни, и одговарајуће деформације  $e_{xx}^m$ ,  $e_{yy}^m$  и  $\gamma_{xy}^m$  које се зову мембранске деформације. Овако написане, дефинисане су за Декартов координатни систем, односно добијају се одговарајућим диференцирањем по Декартовим координатама.

Пошто је средња раван коригованог елемента подељена на четири троугаона домена, одредићемо коваријантне мембранске деформације које се јављају у сваком троугаоном домену. Како су померања материјалних тачака троугаоних домена  $\hat{u}_i(r, s, t)$ , дефинисана једначином (5.2.5), компоненте коваријантних мембранских деформација  $\hat{e}_{ij}^m$  у троугаоним доменима добијамо према једначини (2.4.7), односно[8]

$$\hat{e}_{ij}^{m(\Delta)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_j} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial r_j} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_i} \right) \quad i, j = 1, 2 \quad (5.3.1)$$

У складу са (2.4.6) дефинишимо Јакобијан трансформације  $\hat{\mathbf{J}}$  троугаоних домена који је одређен релацијама

$$\hat{J}_{ij} = \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial r_i}$$

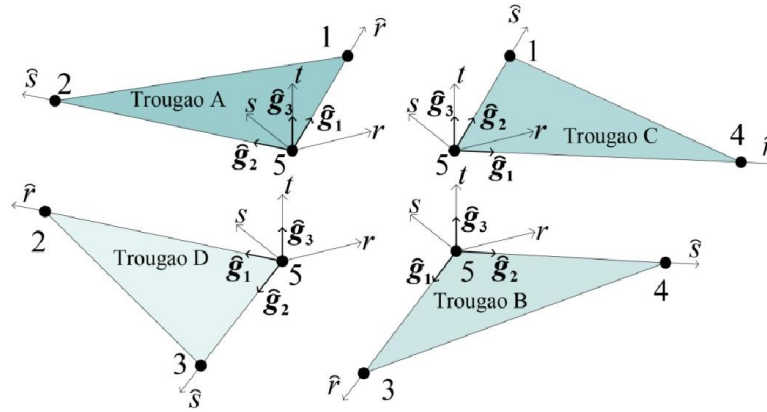
Матрица Јакобијана је

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial r_1} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial r_1} & \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial r_1} \\ \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial r_2} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial r_2} & \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial r_2} \\ \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial r_3} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial r_3} & \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial r_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_{11} & \hat{\mathbf{g}}_{12} & \hat{\mathbf{g}}_{13} \\ \hat{\mathbf{g}}_{21} & \hat{\mathbf{g}}_{22} & \hat{\mathbf{g}}_{23} \\ \hat{\mathbf{g}}_{31} & \hat{\mathbf{g}}_{32} & \hat{\mathbf{g}}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_1^T \\ \hat{\mathbf{g}}_2^T \\ \hat{\mathbf{g}}_3^T \end{bmatrix} \quad (5.3.2)$$

где су  $\hat{\mathbf{g}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{g}}_2$  и  $\hat{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{g}_3$  коваријантни базни вектори тангентни на координатне осе троугаоних домена, при чему базни вектор  $\hat{\mathbf{g}}_3$  има правац нормале, односно поклапа се са коваријантним базним вектором  $\mathbf{g}_3$  природног координатног система  $r, s, t$ , слика 5.3.1.

Дефинишимо и инверзну Јакобијеву трансформациону матрицу троугаоних домена

$$\hat{\mathbf{J}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{r}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{r}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{r}_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \hat{r}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{r}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{r}_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \hat{r}_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \hat{r}_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \hat{r}_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (5.3.3)$$



Слика 5.3.1 Коваријантни базни вектори троугаоних домена

Треба напоменути да се матрица Јакобијана, као и њој инверзна матрица, разликују за сваки троугао јер су координате тачака троуглова различите.

Када смо дефинисали матрицу Јакобијана троугаоних домена, као и коваријантне базне векторе, можемо једначину (5.3.1) написати у облику

$$\hat{e}_{ij}^{m(\Delta)} = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathbf{g}}_i \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_j} + \hat{\mathbf{g}}_j \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_i} \right) \quad i, j = 1, 2 \quad (5.3.3)$$

Овој једначини одговарају три компоненте деформације,  $\hat{e}_{11}^m$ ,  $\hat{e}_{22}^m$  и  $\hat{\gamma}_{12}^m$  које ћемо рачунати за сваки троугаони домен. Оне су једнаке

$$\begin{aligned} \hat{e}_{11}^{m(\Delta)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_1} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_1} \right) = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_1} = \hat{\mathbf{g}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_1} \\ \hat{e}_{22}^{m(\Delta)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_2} \right) = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_2} = \hat{\mathbf{g}}_2 \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_2} \\ \hat{\gamma}_{12}^{m(\Delta)} &= 2\hat{e}_{12}^m = 2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_1} \right) = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_1} = \hat{\mathbf{g}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_2} + \hat{\mathbf{g}}_2 \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial r_1} \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

### 5.3.1 Коваријантне мембранске деформације троугла A

Да бисмо одредили деформације (5.3.4) потребно је најпре на основу интерполације за геометрију троугаоних домена одредити координате тачака троуглова.

Из интерполације за геометрију троугаоних домена (5.2.1) у складу са (5.2.4) следи

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{(A)} &= \sum_{k=1}^3 \hat{h}_k \hat{\mathbf{X}}^k = \hat{h}_1 \hat{\mathbf{X}}^1 + \hat{h}_2 \hat{\mathbf{X}}^2 + \hat{h}_3 \hat{\mathbf{X}}^3 = \hat{h}_1 \mathbf{X}^1 + \hat{h}_2 \mathbf{X}^2 + \hat{h}_3 \mathbf{X}^5 = \\ &= \hat{h}_1 (X_1^1, X_2^1, X_3^1) + \hat{h}_2 (X_1^2, X_2^2, X_3^2) + \hat{h}_3 (X_1^5, X_2^5, X_3^5) \end{aligned}$$

Односно у компоненталном облику

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(A)} &= \hat{h}_1 X_1^1 + \hat{h}_2 X_1^2 + \hat{h}_3 X_1^5 = \hat{h}_1 X_1^1 + \hat{h}_2 X_1^2 + \hat{h}_3 (\gamma_1 X_1^1 + \gamma_2 X_1^2 + \gamma_3 X_1^3 + \gamma_4 X_1^4) = \\ &= X_1^1 (\hat{h}_1 + \hat{h}_3 \gamma_1) + X_1^2 (\hat{h}_2 + \hat{h}_3 \gamma_2) + X_1^3 \hat{h}_3 \gamma_3 + X_1^4 \hat{h}_3 \gamma_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_2^{(A)} &= \widehat{h}_1 X_2^1 + \widehat{h}_2 X_2^2 + \widehat{h}_3 X_2^5 = \widehat{h}_1 X_2^1 + \widehat{h}_2 X_2^2 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 X_2^1 + \gamma_2 X_2^2 + \gamma_3 X_2^3 + \gamma_4 X_2^4) = \\
&= X_2^1 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_1) + X_2^2 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_2) + X_2^3 \widehat{h}_3 \gamma_3 + X_2^4 \widehat{h}_3 \gamma_4 \\
\widehat{x}_3^{(A)} &= \widehat{h}_1 X_3^1 + \widehat{h}_2 X_3^2 + \widehat{h}_3 X_3^5 = \widehat{h}_1 X_3^1 + \widehat{h}_2 X_3^2 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 X_3^1 + \gamma_2 X_3^2 + \gamma_3 X_3^3 + \gamma_4 X_3^4) = \\
&= X_3^1 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_1) + X_3^2 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_2) + X_3^3 \widehat{h}_3 \gamma_3 + X_3^4 \widehat{h}_3 \gamma_4
\end{aligned}$$

Померања тачака троугаоног домена А добијамо на сличан начин, из једначине за интерполацију померања (5.2.5) према (5.2.6) следи

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{u}}^{(A)} &= \sum_{k=1}^3 \widehat{h}_k \widehat{\mathbf{U}}^k = \widehat{h}_1 \widehat{\mathbf{U}}^1 + \widehat{h}_2 \widehat{\mathbf{U}}^2 + \widehat{h}_3 \widehat{\mathbf{U}}^3 = \widehat{h}_1 \mathbf{U}^1 + \widehat{h}_2 \mathbf{U}^2 + \widehat{h}_3 \mathbf{U}^5 = \\
&\widehat{h}_1 (U_1^1, U_2^1, U_3^1) + \widehat{h}_2 (U_1^2, U_2^2, U_3^2) + \widehat{h}_3 (U_1^5, U_2^5, U_3^5)
\end{aligned}$$

Односно у компоненталном облику

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_1 &= \widehat{h}_1 U_1^1 + \widehat{h}_2 U_1^2 + \widehat{h}_3 U_1^5 = \widehat{h}_1 U_1^1 + \widehat{h}_2 U_1^2 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 U_1^1 + \gamma_2 U_1^2 + \gamma_3 U_1^3 + \gamma_4 U_1^4) = \\
&= U_1^1 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_1) + U_1^2 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_2) + U_1^3 \widehat{h}_3 \gamma_3 + U_1^4 \widehat{h}_3 \gamma_4 \\
\widehat{u}_2 &= \widehat{h}_1 U_2^1 + \widehat{h}_2 U_2^2 + \widehat{h}_3 U_2^5 = \widehat{h}_1 U_2^1 + \widehat{h}_2 U_2^2 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 U_2^1 + \gamma_2 U_2^2 + \gamma_3 U_2^3 + \gamma_4 U_2^4) = \\
&= U_2^1 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_1) + U_2^2 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_2) + U_2^3 \widehat{h}_3 \gamma_3 + U_2^4 \widehat{h}_3 \gamma_4 \\
\widehat{u}_3 &= \widehat{h}_1 U_3^1 + \widehat{h}_2 U_3^2 + \widehat{h}_3 U_3^5 = \widehat{h}_1 U_3^1 + \widehat{h}_2 U_3^2 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 U_3^1 + \gamma_2 U_3^2 + \gamma_3 U_3^3 + \gamma_4 U_3^4) = \\
&= U_3^1 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_1) + U_3^2 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_2) + U_3^3 \widehat{h}_3 \gamma_3 + U_3^4 \widehat{h}_3 \gamma_4
\end{aligned}$$

Сада је потребно одредити парцијалне изводе вектора координата и померања тачака троугла А који фигуришу у изразима за деформације.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{x}_1^{(A)}}{\partial r_1} &= X_1^1 (\widehat{h}_{1,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_1) + X_1^2 (\widehat{h}_{2,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_2) + X_1^3 \widehat{h}_{3,r} \gamma_3 + X_1^4 \widehat{h}_{3,r} \gamma_4 = \\
&= X_1^1 (1 - \gamma_1) - X_1^2 \gamma_2 - X_1^3 \gamma_3 - X_1^4 \gamma_4 = \widehat{\mathbf{g}}_{11}^{(A)} \\
\frac{\partial \widehat{x}_2^{(A)}}{\partial r_1} &= X_2^1 (\widehat{h}_{1,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_1) + X_2^2 (\widehat{h}_{2,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_2) + X_2^3 \widehat{h}_{3,r} \gamma_3 + X_2^4 \widehat{h}_{3,r} \gamma_4 = \\
&= X_2^1 (1 - \gamma_1) - X_2^2 \gamma_2 - X_2^3 \gamma_3 - X_2^4 \gamma_4 = \widehat{\mathbf{g}}_{12}^{(A)} \\
\frac{\partial \widehat{x}_3^{(A)}}{\partial r_1} &= X_3^1 (\widehat{h}_{1,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_1) + X_3^2 (\widehat{h}_{2,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_2) + X_3^3 \widehat{h}_{3,r} \gamma_3 + X_3^4 \widehat{h}_{3,r} \gamma_4 = \\
&= X_3^1 (1 - \gamma_1) - X_3^2 \gamma_2 - X_3^3 \gamma_3 - X_3^4 \gamma_4 = \widehat{\mathbf{g}}_{13}^{(A)} \\
\frac{\partial \widehat{x}_1^{(A)}}{\partial r_2} &= X_1^1 (\widehat{h}_{1,s} + \widehat{h}_{3,s} \gamma_1) + X_1^2 (\widehat{h}_{2,s} + \widehat{h}_{3,s} \gamma_2) + X_1^3 \widehat{h}_{3,s} \gamma_3 + X_1^4 \widehat{h}_{3,s} \gamma_4 = \\
&= -X_1^1 \gamma_1 + X_1^2 (1 - \gamma_2) - X_1^3 \gamma_3 - X_1^4 \gamma_4 = \widehat{\mathbf{g}}_{21}^{(A)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{x}_2^{(A)}}{\partial r_2} &= X_2^1 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,r} \gamma_1) + X_2^2 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_2) + X_2^3 \hat{h}_{3,s} \gamma_3 + X_2^4 \hat{h}_{3,s} \gamma_4 = \\ &= -X_2^1 \gamma_1 + X_2^2 (1 - \gamma_2) - X_2^3 \gamma_3 - X_2^4 \gamma_4 = \hat{g}_{22}^{(A)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{x}_3^{(A)}}{\partial r_2} &= X_3^1 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_1) + X_3^2 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_2) + X_3^3 \hat{h}_{3,s} \gamma_3 + X_3^4 \hat{h}_{3,s} \gamma_4 = \\ &= -X_3^1 \gamma_1 + X_3^2 (1 - \gamma_2) - X_3^3 \gamma_3 - X_3^4 \gamma_4 = \hat{g}_{23}^{(A)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_1^{(A)}}{\partial r_1} &= U_1^1 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_1) + U_1^2 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_2) + U_1^3 \hat{h}_{3,r} \gamma_3 + U_1^4 \hat{h}_{3,r} \gamma_4 = \\ &= U_1^1 (1 - \gamma_1) - U_1^2 \gamma_2 - U_1^3 \gamma_3 - U_1^4 \gamma_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_2^{(A)}}{\partial r_1} &= U_2^1 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_1) + U_2^2 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_2) + U_2^3 \hat{h}_{3,r} \gamma_3 + U_2^4 \hat{h}_{3,r} \gamma_4 = \\ &= U_2^1 (1 - \gamma_1) - U_2^2 \gamma_2 - U_2^3 \gamma_3 - U_2^4 \gamma_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_3^{(A)}}{\partial r_1} &= U_3^1 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_1) + U_3^2 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_2) + U_3^3 \hat{h}_{3,r} \gamma_3 + U_3^4 \hat{h}_{3,r} \gamma_4 = \\ &= U_3^1 (1 - \gamma_1) - U_3^2 \gamma_2 - U_3^3 \gamma_3 - U_3^4 \gamma_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_1^{(A)}}{\partial r_2} &= U_1^1 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_1) + U_1^2 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_2) + U_1^3 \hat{h}_{3,s} \gamma_3 + U_1^4 \hat{h}_{3,s} \gamma_4 = \\ &= -U_1^1 \gamma_1 + U_1^2 (1 - \gamma_2) - U_1^3 \gamma_3 - U_1^4 \gamma_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_2^{(A)}}{\partial r_2} &= U_2^1 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_1) + U_2^2 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_2) + U_2^3 \hat{h}_{3,s} \gamma_3 + U_2^4 \hat{h}_{3,s} \gamma_4 = \\ &= -U_2^1 \gamma_1 + U_2^2 (1 - \gamma_2) - U_2^3 \gamma_3 - U_2^4 \gamma_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_3^{(A)}}{\partial r_2} &= U_3^1 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_1) + U_3^2 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_2) + U_3^3 \hat{h}_{3,s} \gamma_3 + U_3^4 \hat{h}_{3,s} \gamma_4 = \\ &= -U_3^1 \gamma_1 + U_3^2 (1 - \gamma_2) - U_3^3 \gamma_3 - U_3^4 \gamma_4\end{aligned}$$

где су са  $\hat{h}_{1,r}$ ,  $\hat{h}_{2,r}$ ,  $\hat{h}_{3,r}$  и  $\hat{h}_{1,s}$ ,  $\hat{h}_{2,s}$ ,  $\hat{h}_{3,s}$  означени, ради лакшег писања, парцијални изводи  $\frac{\partial \hat{h}_1}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial \hat{h}_2}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial \hat{h}_3}{\partial r}$  и  $\frac{\partial \hat{h}_1}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial \hat{h}_2}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial \hat{h}_3}{\partial s}$ . Њихове вредности су према (5.2.3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{h}_1}{\partial r} &= 1 & \frac{\partial \hat{h}_1}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial \hat{h}_2}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial \hat{h}_2}{\partial s} &= 1 \\ \frac{\partial \hat{h}_3}{\partial r} &= -1 & \frac{\partial \hat{h}_3}{\partial s} &= -1\end{aligned}$$

Коваријантне мембранске деформације троугла А су

$$\begin{aligned}
 e_{11}^{m(A)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(A)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(A)}}{\partial r_1} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(A)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(A)}}{\partial r_1} \right) = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(A)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(A)}}{\partial r_1} = \left( \frac{\partial \hat{x}_1^{(A)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{x}_2^{(A)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{x}_3^{(A)}}{\partial r_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}_1^{(A)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{u}_2^{(A)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{u}_3^{(A)}}{\partial r_1} \right) = \\
 &= \frac{\partial \hat{x}_1^{(A)}}{\partial r_1} \frac{\partial \hat{u}_1^{(A)}}{\partial r_1} + \frac{\partial \hat{x}_2^{(A)}}{\partial r_1} \frac{\partial \hat{u}_2^{(A)}}{\partial r_1} + \frac{\partial \hat{x}_3^{(A)}}{\partial r_1} \frac{\partial \hat{u}_3^{(A)}}{\partial r_1} = \hat{g}_{11}^{(A)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(A)}}{\partial r_1} + \hat{g}_{12}^{(A)} \frac{\partial \hat{u}_2^{(A)}}{\partial r_1} + \hat{g}_{13}^{(A)} \frac{\partial \hat{u}_3^{(A)}}{\partial r_1} = \hat{g}_{11}^{(A)} U_1^1 (1 - \gamma_1) - \\
 &\hat{g}_{11}^{(A)} U_1^2 \gamma_2 - \hat{g}_{11}^{(A)} U_1^3 \gamma_3 - \hat{g}_{11}^{(A)} U_1^4 \gamma_4 + \hat{g}_{12}^{(A)} U_2^1 (1 - \gamma_1) - \hat{g}_{12}^{(A)} U_2^2 \gamma_2 - \hat{g}_{12}^{(A)} U_2^3 \gamma_3 - \hat{g}_{12}^{(A)} U_2^4 \gamma_4 + \hat{g}_{13}^{(A)} U_3^1 (1 - \gamma_1) \\
 &- \hat{g}_{13}^{(A)} U_3^2 \gamma_2 - \hat{g}_{13}^{(A)} U_3^3 \gamma_3 - \hat{g}_{13}^{(A)} U_3^4 \gamma_4 = U_1^1 \hat{g}_{11}^{(A)} (1 - \gamma_1) + U_2^1 \hat{g}_{12}^{(A)} (1 - \gamma_1) + U_3^1 \hat{g}_{13}^{(A)} (1 - \gamma_1) - U_1^2 \hat{g}_{11}^{(A)} \gamma_2 - \\
 &U_2^2 \hat{g}_{12}^{(A)} \gamma_2 - U_3^2 \hat{g}_{13}^{(A)} \gamma_2 - U_1^3 \hat{g}_{11}^{(A)} \gamma_3 - U_2^3 \hat{g}_{12}^{(A)} \gamma_3 - U_3^3 \hat{g}_{13}^{(A)} \gamma_3 - U_1^4 \hat{g}_{11}^{(A)} \gamma_4 - U_2^4 \hat{g}_{12}^{(A)} \gamma_4 - U_3^4 \hat{g}_{13}^{(A)} \gamma_4 \\
 \\
 e_{22}^{m(A)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(A)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(A)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(A)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(A)}}{\partial r_2} \right) = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(A)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(A)}}{\partial r_2} = \left( \frac{\partial \hat{x}_1^{(A)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{x}_2^{(A)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{x}_3^{(A)}}{\partial r_2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}_1^{(A)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{u}_2^{(A)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{u}_3^{(A)}}{\partial r_2} \right) = \\
 &= \frac{\partial \hat{x}_1^{(A)}}{\partial r_2} \frac{\partial \hat{u}_1^{(A)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{x}_2^{(A)}}{\partial r_2} \frac{\partial \hat{u}_2^{(A)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{x}_3^{(A)}}{\partial r_2} \frac{\partial \hat{u}_3^{(A)}}{\partial r_2} = \hat{g}_{21}^{(A)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(A)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{22}^{(A)} \frac{\partial \hat{u}_2^{(A)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{23}^{(A)} \frac{\partial \hat{u}_3^{(A)}}{\partial r_2} = -\hat{g}_{21}^{(A)} U_1^1 \gamma_1 + \\
 &\hat{g}_{21}^{(A)} U_1^2 (1 - \gamma_2) - \hat{g}_{21}^{(A)} U_1^3 \gamma_3 - \hat{g}_{21}^{(A)} U_1^4 \gamma_4 - \hat{g}_{22}^{(A)} U_2^1 \gamma_1 + \hat{g}_{22}^{(A)} U_2^2 (1 - \gamma_2) - \hat{g}_{22}^{(A)} U_2^3 \gamma_3 - \hat{g}_{22}^{(A)} U_2^4 \gamma_4 - \hat{g}_{23}^{(A)} U_3^1 \gamma_1 \\
 &+ \hat{g}_{23}^{(A)} U_3^2 (1 - \gamma_2) - \hat{g}_{23}^{(A)} U_3^3 \gamma_3 - \hat{g}_{23}^{(A)} U_3^4 \gamma_4 = -U_1^1 \hat{g}_{21}^{(A)} \gamma_1 - U_2^1 \hat{g}_{22}^{(A)} \gamma_1 - U_3^1 \hat{g}_{23}^{(A)} \gamma_1 + U_1^2 \hat{g}_{21}^{(A)} (1 - \gamma_2) + \\
 &U_2^2 \hat{g}_{22}^{(A)} (1 - \gamma_2) + U_3^2 \hat{g}_{23}^{(A)} (1 - \gamma_2) - U_1^3 \hat{g}_{21}^{(A)} \gamma_3 - U_2^3 \hat{g}_{22}^{(A)} \gamma_3 - U_3^3 \hat{g}_{23}^{(A)} \gamma_3 - U_1^4 \hat{g}_{21}^{(A)} \gamma_4 - U_2^4 \hat{g}_{22}^{(A)} \gamma_4 - U_3^4 \hat{g}_{23}^{(A)} \gamma_4 \\
 \\
 \gamma_{12}^{m(A)} &= 2e_{12}^{m(A)} = 2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(A)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(A)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(A)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(A)}}{\partial r_1} \right) = \left( \frac{\partial \hat{x}_1^{(A)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{x}_2^{(A)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{x}_3^{(A)}}{\partial r_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}_1^{(A)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{u}_2^{(A)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{u}_3^{(A)}}{\partial r_2} \right) + \\
 &\left( \frac{\partial \hat{x}_1^{(A)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{x}_2^{(A)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{x}_3^{(A)}}{\partial r_2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}_1^{(A)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{u}_2^{(A)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{u}_3^{(A)}}{\partial r_1} \right) = \hat{g}_{11}^{(A)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(A)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{12}^{(A)} \frac{\partial \hat{u}_2^{(A)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{13}^{(A)} \frac{\partial \hat{u}_3^{(A)}}{\partial r_2} + \\
 &\hat{g}_{21}^{(A)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(A)}}{\partial r_1} + \hat{g}_{22}^{(A)} \frac{\partial \hat{u}_2^{(A)}}{\partial r_1} + \hat{g}_{23}^{(A)} \frac{\partial \hat{u}_3^{(A)}}{\partial r_1} = -\hat{g}_{11}^{(A)} U_1^1 \gamma_1 + \hat{g}_{11}^{(A)} U_1^2 (1 - \gamma_2) - \hat{g}_{11}^{(A)} U_1^3 \gamma_3 - \hat{g}_{11}^{(A)} U_1^4 \gamma_4 - \\
 &\hat{g}_{12}^{(A)} U_2^1 \gamma_1 + \hat{g}_{12}^{(A)} U_2^2 (1 - \gamma_2) - \hat{g}_{12}^{(A)} U_2^3 \gamma_3 - \hat{g}_{12}^{(A)} U_2^4 \gamma_4 - \hat{g}_{13}^{(A)} U_3^1 \gamma_1 + \hat{g}_{13}^{(A)} U_3^2 (1 - \gamma_2) - \hat{g}_{13}^{(A)} U_3^3 \gamma_3 - \\
 &\hat{g}_{13}^{(A)} U_3^4 \gamma_4 + \hat{g}_{21}^{(A)} U_1^1 (1 - \gamma_1) - \hat{g}_{21}^{(A)} U_1^2 \gamma_2 - \hat{g}_{21}^{(A)} U_1^3 \gamma_3 - \hat{g}_{21}^{(A)} U_1^4 \gamma_4 + \hat{g}_{22}^{(A)} U_2^1 (1 - \gamma_1) - \hat{g}_{22}^{(A)} U_2^2 \gamma_2 - \\
 &\hat{g}_{22}^{(A)} U_2^3 \gamma_3 - \hat{g}_{22}^{(A)} U_2^4 \gamma_4 + \hat{g}_{23}^{(A)} U_3^1 (1 - \gamma_1) - \hat{g}_{23}^{(A)} U_3^2 \gamma_2 - \hat{g}_{23}^{(A)} U_3^3 \gamma_3 - \hat{g}_{23}^{(A)} U_3^4 \gamma_4 = U_1^1 \left( -\hat{g}_{11}^{(A)} \gamma_1 + \hat{g}_{21}^{(A)} (1 - \gamma_1) \right) + \\
 &U_2^1 \left( -\hat{g}_{12}^{(A)} \gamma_1 + \hat{g}_{22}^{(A)} (1 - \gamma_1) \right) + U_3^1 \left( -\hat{g}_{13}^{(A)} \gamma_1 + \hat{g}_{23}^{(A)} (1 - \gamma_1) \right) + U_1^2 \left( \hat{g}_{11}^{(A)} (1 - \gamma_2) - \hat{g}_{21}^{(A)} \gamma_2 \right) + \\
 &U_2^2 \left( \hat{g}_{12}^{(A)} (1 - \gamma_2) - \hat{g}_{22}^{(A)} \gamma_2 \right) + U_3^2 \left( \hat{g}_{13}^{(A)} (1 - \gamma_2) - \hat{g}_{23}^{(A)} \gamma_2 \right) + U_1^3 \left( -\hat{g}_{11}^{(A)} \gamma_3 - \hat{g}_{21}^{(A)} \gamma_3 \right) + U_2^3 \left( -\hat{g}_{12}^{(A)} \gamma_3 - \hat{g}_{22}^{(A)} \gamma_3 \right) + \\
 &U_3^3 \left( -\hat{g}_{13}^{(A)} \gamma_3 - \hat{g}_{23}^{(A)} \gamma_3 \right) + U_1^4 \left( -\hat{g}_{11}^{(A)} \gamma_4 - \hat{g}_{21}^{(A)} \gamma_4 \right) + U_2^4 \left( -\hat{g}_{12}^{(A)} \gamma_4 - \hat{g}_{22}^{(A)} \gamma_4 \right) + U_3^4 \left( -\hat{g}_{13}^{(A)} \gamma_4 - \hat{g}_{23}^{(A)} \gamma_4 \right)
 \end{aligned}$$

У складу са дефиницијом (3.1), вектор деформације одговарајућег троугаоног домена се може представити у облику

$$\widehat{\mathbf{e}}^{m(\Delta)} = \begin{Bmatrix} \widehat{e}_{11}^{m(\Delta)} \\ \widehat{e}_{22}^{m(\Delta)} \\ \widehat{\gamma}_{12}^{m(\Delta)} \end{Bmatrix} = \widehat{\mathbf{B}}^{(\Delta)} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{B}}^{1(\Delta)} & \widehat{\mathbf{B}}^{2(\Delta)} & \widehat{\mathbf{B}}^{3(\Delta)} & \widehat{\mathbf{B}}^{4(\Delta)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{U}^3 \\ \mathbf{U}^4 \end{Bmatrix} \quad (5.3.5)$$

Подматрице  $\widehat{\mathbf{B}}^{k(\Delta)}$  троугаоног домена А су

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{B}}^{1(A)} &= \begin{bmatrix} \widehat{g}_{11}^{(A)} (1-\gamma_1) & \widehat{g}_{12}^{(A)} (1-\gamma_1) & \widehat{g}_{13}^{(A)} (1-\gamma_1) \\ -\widehat{g}_{21}^{(A)} \gamma_1 & -\widehat{g}_{22}^{(A)} \gamma_1 & -\widehat{g}_{23}^{(A)} \gamma_1 \\ -\widehat{g}_{11}^{(A)} \gamma_1 + \widehat{g}_{21}^{(A)} (1-\gamma_1) & -\widehat{g}_{12}^{(A)} \gamma_1 + \widehat{g}_{22}^{(A)} (1-\gamma_1) & -\widehat{g}_{13}^{(A)} \gamma_1 + \widehat{g}_{23}^{(A)} (1-\gamma_1) \end{bmatrix} \\ \widehat{\mathbf{B}}^{2(A)} &= \begin{bmatrix} -\widehat{g}_{11}^{(A)} \gamma_2 & -\widehat{g}_{12}^{(A)} \gamma_2 & -\widehat{g}_{13}^{(A)} \gamma_2 \\ \widehat{g}_{21}^{(A)} (1-\gamma_2) & \widehat{g}_{22}^{(A)} (1-\gamma_2) & \widehat{g}_{23}^{(A)} (1-\gamma_2) \\ \widehat{g}_{11}^{(A)} (1-\gamma_2) - \widehat{g}_{21}^{(A)} \gamma_2 & \widehat{g}_{12}^{(A)} (1-\gamma_2) - \widehat{g}_{22}^{(A)} \gamma_2 & \widehat{g}_{13}^{(A)} (1-\gamma_2) - \widehat{g}_{23}^{(A)} \gamma_2 \end{bmatrix} \\ \widehat{\mathbf{B}}^{3(A)} &= \begin{bmatrix} -\widehat{g}_{11}^{(A)} \gamma_3 & -\widehat{g}_{12}^{(A)} \gamma_3 & -\widehat{g}_{13}^{(A)} \gamma_3 \\ -\widehat{g}_{21}^{(A)} \gamma_3 & -\widehat{g}_{22}^{(A)} \gamma_3 & -\widehat{g}_{23}^{(A)} \gamma_3 \\ \gamma_3 \left( -\widehat{g}_{11}^{(A)} - \widehat{g}_{21}^{(A)} \right) & \gamma_3 \left( -\widehat{g}_{12}^{(A)} - \widehat{g}_{22}^{(A)} \right) & \gamma_3 \left( -\widehat{g}_{13}^{(A)} - \widehat{g}_{23}^{(A)} \right) \end{bmatrix} \\ \widehat{\mathbf{B}}^{4(A)} &= \begin{bmatrix} -\widehat{g}_{11}^{(A)} \gamma_4 & -\widehat{g}_{12}^{(A)} \gamma_4 & -\widehat{g}_{13}^{(A)} \gamma_4 \\ -\widehat{g}_{21}^{(A)} \gamma_4 & -\widehat{g}_{22}^{(A)} \gamma_4 & -\widehat{g}_{23}^{(A)} \gamma_4 \\ \gamma_4 \left( -\widehat{g}_{11}^{(A)} - \widehat{g}_{21}^{(A)} \right) & \gamma_4 \left( -\widehat{g}_{12}^{(A)} - \widehat{g}_{22}^{(A)} \right) & \gamma_4 \left( -\widehat{g}_{13}^{(A)} - \widehat{g}_{23}^{(A)} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 5.3.2 Коваријантне мембранске деформације троугла В

Као и код троугла А, из интерполације за геометрију троугаоних домена у складу са чворовима који дефинишу троуглове следи

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}}^{(B)} &= \sum_{k=1}^3 \widehat{h}_k \widehat{\mathbf{X}}^k = \widehat{h}_1 \widehat{\mathbf{X}}^1 + \widehat{h}_2 \widehat{\mathbf{X}}^2 + \widehat{h}_3 \widehat{\mathbf{X}}^3 = \widehat{h}_1 \mathbf{X}^3 + \widehat{h}_2 \mathbf{X}^4 + \widehat{h}_3 \mathbf{X}^5 = \\ &\quad \widehat{h}_1 (X_1^3, X_2^3, X_3^3) + \widehat{h}_2 (X_1^4, X_2^4, X_3^4) + \widehat{h}_3 (X_1^5, X_2^5, X_3^5) \end{aligned}$$

Односно у компоненталном облику

$$\begin{aligned} \widehat{x}_1^{(B)} &= \widehat{h}_1 X_1^3 + \widehat{h}_2 X_1^4 + \widehat{h}_3 X_1^5 = \widehat{h}_1 X_1^3 + \widehat{h}_2 X_1^4 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 X_1^1 + \gamma_2 X_1^2 + \gamma_3 X_1^3 + \gamma_4 X_1^4) = \\ &= X_1^1 \widehat{h}_3 \gamma_1 + X_1^2 \widehat{h}_3 \gamma_2 + X_1^3 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_3) + X_1^4 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_4) \\ \widehat{x}_2^{(B)} &= \widehat{h}_1 X_2^3 + \widehat{h}_2 X_2^4 + \widehat{h}_3 X_2^5 = \widehat{h}_1 X_2^3 + \widehat{h}_2 X_2^4 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 X_2^1 + \gamma_2 X_2^2 + \gamma_3 X_2^3 + \gamma_4 X_2^4) = \\ &= X_2^1 \widehat{h}_3 \gamma_1 + X_2^2 \widehat{h}_3 \gamma_2 + X_2^3 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_3) + X_2^4 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{x}_3^{(B)} &= \widehat{h}_1 X_3^3 + \widehat{h}_2 X_3^4 + \widehat{h}_3 X_3^5 = \widehat{h}_1 X_3^3 + \widehat{h}_2 X_3^4 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 X_3^1 + \gamma_2 X_3^2 + \gamma_3 X_3^3 + \gamma_4 X_3^4) = \\ &= X_3^1 \widehat{h}_3 \gamma_1 + X_3^2 \widehat{h}_3 \gamma_2 + X_3^3 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_3) + X_3^4 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_4)\end{aligned}$$

Померања тачака троугаоног домена В добијамо на сличан начин, из једначине за интерполацију померања, водећи рачуна о чворовима који дефинишу троугаони домен, следи

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{u}}^{(B)} &= \sum_{k=1}^3 \widehat{h}_k \widehat{\mathbf{U}}^k = \widehat{h}_1 \widehat{\mathbf{U}}^1 + \widehat{h}_2 \widehat{\mathbf{U}}^2 + \widehat{h}_3 \widehat{\mathbf{U}}^3 = \widehat{h}_1 \mathbf{U}^3 + \widehat{h}_2 \mathbf{U}^4 + \widehat{h}_3 \mathbf{U}^5 = \\ &\widehat{h}_1 (U_1^3, U_2^3, U_3^3) + \widehat{h}_2 (U_1^4, U_2^4, U_3^4) + \widehat{h}_3 (U_1^5, U_2^5, U_3^5)\end{aligned}$$

Односно у компоненталном облику

$$\begin{aligned}\widehat{u}_1^{(B)} &= \widehat{h}_1 U_1^3 + \widehat{h}_2 U_1^4 + \widehat{h}_3 U_1^5 = \widehat{h}_1 U_1^3 + \widehat{h}_2 U_1^4 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 U_1^1 + \gamma_2 U_1^2 + \gamma_3 U_1^3 + \gamma_4 U_1^4) = \\ &= U_1^1 \widehat{h}_3 \gamma_1 + U_1^2 \widehat{h}_3 \gamma_2 + U_1^3 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_3) + U_1^4 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_4) \\ \widehat{u}_2^{(B)} &= \widehat{h}_1 U_2^3 + \widehat{h}_2 U_2^4 + \widehat{h}_3 U_2^5 = \widehat{h}_1 U_2^3 + \widehat{h}_2 U_2^4 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 U_2^1 + \gamma_2 U_2^2 + \gamma_3 U_2^3 + \gamma_4 U_2^4) = \\ &= U_2^1 \widehat{h}_3 \gamma_1 + U_2^2 \widehat{h}_3 \gamma_2 + U_2^3 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_3) + U_2^4 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_4) \\ \widehat{u}_3^{(B)} &= \widehat{h}_1 U_3^3 + \widehat{h}_2 U_3^4 + \widehat{h}_3 U_3^5 = \widehat{h}_1 U_3^3 + \widehat{h}_2 U_3^4 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 U_3^1 + \gamma_2 U_3^2 + \gamma_3 U_3^3 + \gamma_4 U_3^4) = \\ &= U_3^1 \widehat{h}_3 \gamma_1 + U_3^2 \widehat{h}_3 \gamma_2 + U_3^3 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_3) + U_3^4 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_4)\end{aligned}$$

Сада је потребно одредити парцијалне изводе вектора координата и померања тачака троугла В који фигуришу у изразима за деформације.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{x}_1^{(B)}}{\partial r_1} &= X_1^1 \widehat{h}_{3,r} \gamma_1 + X_1^2 \widehat{h}_{3,r} \gamma_2 + X_1^3 (\widehat{h}_{1,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_3) + X_1^4 (\widehat{h}_{2,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_4) = \\ &= -X_1^1 \gamma_1 - X_1^2 \gamma_2 + X_1^3 (1 - \gamma_3) - X_1^4 \gamma_4 = \widehat{g}_{11}^{(B)} \\ \frac{\partial \widehat{x}_2^{(B)}}{\partial r_1} &= X_2^1 \widehat{h}_{3,r} \gamma_1 + X_2^2 \widehat{h}_{3,r} \gamma_2 + X_2^3 (\widehat{h}_{1,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_3) + X_2^4 (\widehat{h}_{2,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_4) = \\ &= -X_2^1 \gamma_1 - X_2^2 \gamma_2 + X_2^3 (1 - \gamma_3) - X_2^4 \gamma_4 = \widehat{g}_{12}^{(B)} \\ \frac{\partial \widehat{x}_3^{(B)}}{\partial r_1} &= X_3^1 \widehat{h}_{3,r} \gamma_1 + X_3^2 \widehat{h}_{3,r} \gamma_2 + X_3^3 (\widehat{h}_{1,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_3) + X_3^4 (\widehat{h}_{2,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_4) = \\ &= -X_3^1 \gamma_1 - X_3^2 \gamma_2 + X_3^3 (1 - \gamma_3) - X_3^4 \gamma_4 = \widehat{g}_{13}^{(B)} \\ \frac{\partial \widehat{x}_1^{(B)}}{\partial r_2} &= X_1^1 \widehat{h}_{3,s} \gamma_1 + X_1^2 \widehat{h}_{3,s} \gamma_2 + X_1^3 (\widehat{h}_{1,s} + \widehat{h}_{3,s} \gamma_3) + X_1^4 (\widehat{h}_{2,s} + \widehat{h}_{3,s} \gamma_4) = \\ &= -X_1^1 \gamma_1 - X_1^2 \gamma_2 - X_1^3 \gamma_3 + X_1^4 (1 - \gamma_4) = \widehat{g}_{21}^{(B)} \\ \frac{\partial \widehat{x}_2^{(B)}}{\partial r_2} &= X_2^1 \widehat{h}_{3,s} \gamma_1 + X_2^2 \widehat{h}_{3,s} \gamma_2 + X_2^3 (\widehat{h}_{1,s} + \widehat{h}_{3,s} \gamma_3) + X_2^4 (\widehat{h}_{2,s} + \widehat{h}_{3,s} \gamma_4) = \\ &= -X_2^1 \gamma_1 - X_2^2 \gamma_2 - X_2^3 \gamma_3 + X_2^4 (1 - \gamma_4) = \widehat{g}_{22}^{(B)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{x}_3^{(B)}}{\partial r_2} &= X_3^1 \hat{h}_{3,s} \gamma_1 + X_3^2 \hat{h}_{3,s} \gamma_2 + X_3^3 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_3) + X_3^4 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_4) = \\
&= -X_3^1 \gamma_1 - X_3^2 \gamma_2 - X_3^3 \gamma_3 + X_3^4 (1 - \gamma_4) = \hat{g}_{23}^{(B)} \\
\frac{\partial \hat{u}_1^{(B)}}{\partial r_1} &= U_1^1 \hat{h}_{3,r} \gamma_1 + U_1^2 \hat{h}_{3,r} \gamma_2 + U_1^3 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_3) + U_1^4 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_4) = \\
&= -U_1^1 \gamma_1 - U_1^2 \gamma_2 + U_1^3 (1 - \gamma_3) - U_1^4 \gamma_4 \\
\frac{\partial \hat{u}_2^{(B)}}{\partial r_1} &= U_2^1 \hat{h}_{3,r} \gamma_1 + U_2^2 \hat{h}_{3,r} \gamma_2 + U_2^3 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_3) + U_2^4 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_4) = \\
&= -U_2^1 \gamma_1 - U_2^2 \gamma_2 + U_2^3 (1 - \gamma_3) - U_2^4 \gamma_4 \\
\frac{\partial \hat{u}_3^{(B)}}{\partial r_1} &= U_3^1 \hat{h}_{3,r} \gamma_1 + U_3^2 \hat{h}_{3,r} \gamma_2 + U_3^3 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_3) + U_3^4 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_4) = \\
&= -U_3^1 \gamma_1 - U_3^2 \gamma_2 + U_3^3 (1 - \gamma_3) - U_3^4 \gamma_4 \\
\frac{\partial \hat{u}_1^{(B)}}{\partial r_2} &= U_1^1 \hat{h}_{3,s} \gamma_1 + U_1^2 \hat{h}_{3,s} \gamma_2 + U_1^3 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_3) + U_1^4 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_4) = \\
&= -U_1^1 \gamma_1 - U_1^2 \gamma_2 - U_1^3 \gamma_3 + U_1^4 (1 - \gamma_4) \\
\frac{\partial \hat{u}_2^{(B)}}{\partial r_2} &= U_2^1 \hat{h}_{3,s} \gamma_1 + U_2^2 \hat{h}_{3,s} \gamma_2 + U_2^3 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_3) + U_2^4 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_4) = \\
&= -U_2^1 \gamma_1 - U_2^2 \gamma_2 - U_2^3 \gamma_3 + U_2^4 (1 - \gamma_4) \\
\frac{\partial \hat{u}_3^{(B)}}{\partial r_2} &= U_3^1 \hat{h}_{3,s} \gamma_1 + U_3^2 \hat{h}_{3,s} \gamma_2 + U_3^3 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_3) + U_3^4 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_4) = \\
&= -U_3^1 \gamma_1 - U_3^2 \gamma_2 - U_3^3 \gamma_3 + U_3^4 (1 - \gamma_4)
\end{aligned}$$

Коваријантне мембранске деформације троугла В су

$$\begin{aligned}
e_{11}^{m(B)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(B)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(B)}}{\partial r_1} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(B)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(B)}}{\partial r_1} \right) = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(B)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(B)}}{\partial r_1} = \left( \frac{\partial \hat{x}_1^{(B)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{x}_2^{(B)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{x}_3^{(B)}}{\partial r_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}_1^{(B)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{u}_2^{(B)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{u}_3^{(B)}}{\partial r_1} \right) = \\
&= \frac{\partial \hat{x}_1^{(B)}}{\partial r_1} \frac{\partial \hat{u}_1^{(B)}}{\partial r_1} + \frac{\partial \hat{x}_2^{(B)}}{\partial r_1} \frac{\partial \hat{u}_2^{(B)}}{\partial r_1} + \frac{\partial \hat{x}_3^{(B)}}{\partial r_1} \frac{\partial \hat{u}_3^{(B)}}{\partial r_1} = \hat{g}_{11}^{(B)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(B)}}{\partial r_1} + \hat{g}_{12}^{(B)} \frac{\partial \hat{u}_2^{(B)}}{\partial r_1} + \hat{g}_{13}^{(B)} \frac{\partial \hat{u}_3^{(B)}}{\partial r_1} = -\hat{g}_{11}^{(B)} U_1^1 \gamma_1 - \hat{g}_{11}^{(B)} U_1^2 \gamma_2 + \\
&+ \hat{g}_{11}^{(B)} U_1^3 (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{11}^{(B)} U_1^4 \gamma_4 - \hat{g}_{12}^{(B)} U_2^1 \gamma_1 - \hat{g}_{12}^{(B)} U_2^2 \gamma_2 + \hat{g}_{12}^{(B)} U_2^3 (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{12}^{(B)} U_2^4 \gamma_4 - \hat{g}_{13}^{(B)} U_3^1 \gamma_1 - \hat{g}_{13}^{(B)} U_3^2 \gamma_2 + \\
&\hat{g}_{13}^{(B)} U_3^3 (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{13}^{(B)} U_3^4 \gamma_4 = U_1^1 \left( -\hat{g}_{11}^{(B)} \gamma_1 \right) + U_2^1 \left( -\hat{g}_{12}^{(B)} \gamma_1 \right) + U_3^1 \left( -\hat{g}_{13}^{(B)} \gamma_1 \right) + U_1^2 \left( -\hat{g}_{11}^{(B)} \gamma_2 \right) + U_2^2 \left( -\hat{g}_{12}^{(B)} \gamma_2 \right) + \\
&U_3^2 \left( -\hat{g}_{13}^{(B)} \gamma_2 \right) + U_1^3 \left( \hat{g}_{11}^{(B)} (1 - \gamma_3) \right) + U_2^3 \left( \hat{g}_{12}^{(B)} (1 - \gamma_3) \right) + U_3^3 \left( \hat{g}_{13}^{(B)} (1 - \gamma_3) \right) + U_1^4 \left( -\hat{g}_{11}^{(B)} \gamma_4 \right) + \\
&U_2^4 \left( -\hat{g}_{12}^{(B)} \gamma_4 \right) + U_3^4 \left( -\hat{g}_{13}^{(B)} \gamma_4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{22}^{(B)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(B)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(B)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(B)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(B)}}{\partial r_2} \right) = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(B)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(B)}}{\partial r_2} = \left( \frac{\partial \hat{x}_1^{(B)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{x}_2^{(B)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{x}_3^{(B)}}{\partial r_2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}_1^{(B)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{u}_2^{(B)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{u}_3^{(B)}}{\partial r_2} \right) = \\
&= \frac{\partial \hat{x}_1^{(B)}}{\partial r_2} \frac{\partial \hat{u}_1^{(B)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{x}_2^{(B)}}{\partial r_2} \frac{\partial \hat{u}_2^{(B)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{x}_3^{(B)}}{\partial r_2} \frac{\partial \hat{u}_3^{(B)}}{\partial r_2} = \hat{g}_{21}^{(B)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(B)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{22}^{(B)} \frac{\partial \hat{u}_2^{(B)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{23}^{(B)} \frac{\partial \hat{u}_3^{(B)}}{\partial r_2} = -\hat{g}_{21}^{(B)} U_1^1 \gamma_1 - \hat{g}_{21}^{(B)} U_1^2 \gamma_2 \\
&- \hat{g}_{21}^{(B)} U_1^3 \gamma_3 + \hat{g}_{21}^{(B)} U_1^4 (1 - \gamma_4) - \hat{g}_{22}^{(B)} U_2^1 \gamma_1 - \hat{g}_{22}^{(B)} U_2^2 \gamma_2 - \hat{g}_{22}^{(B)} U_2^3 \gamma_3 + \hat{g}_{22}^{(B)} U_2^4 (1 - \gamma_4) - \hat{g}_{23}^{(B)} U_3^1 \gamma_1 - \hat{g}_{23}^{(B)} U_3^2 \gamma_2 \\
&- \hat{g}_{23}^{(B)} U_3^3 \gamma_3 + \hat{g}_{23}^{(B)} U_3^4 (1 - \gamma_4) = U_1^1 \left( -\hat{g}_{21}^{(B)} \gamma_1 \right) + U_2^1 \left( -\hat{g}_{22}^{(B)} \gamma_1 \right) + U_3^1 \left( -\hat{g}_{23}^{(B)} \gamma_1 \right) + U_1^2 \left( -\hat{g}_{21}^{(B)} \gamma_2 \right) + U_2^2 \left( -\hat{g}_{22}^{(B)} \gamma_2 \right) \\
&+ U_3^2 \left( -\hat{g}_{23}^{(B)} \gamma_2 \right) + U_1^3 \left( -\hat{g}_{21}^{(B)} \gamma_3 \right) + U_2^3 \left( -\hat{g}_{22}^{(B)} \gamma_3 \right) + U_3^3 \left( -\hat{g}_{23}^{(B)} \gamma_3 \right) + U_1^4 \left( \hat{g}_{21}^{(B)} (1 - \gamma_4) \right) + U_2^4 \left( \hat{g}_{22}^{(B)} (1 - \gamma_4) \right) \\
&+ U_3^4 \left( \hat{g}_{23}^{(B)} (1 - \gamma_4) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_{12}^{(B)} &= 2\hat{e}_{12}^{(B)} = 2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(B)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(B)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(B)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(B)}}{\partial r_1} \right) = \left( \frac{\partial \hat{x}_1^{(B)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{x}_2^{(B)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{x}_3^{(B)}}{\partial r_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}_1^{(B)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{u}_2^{(B)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{u}_3^{(B)}}{\partial r_2} \right) + \\
&\left( \frac{\partial \hat{x}_1^{(B)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{x}_2^{(B)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{x}_3^{(B)}}{\partial r_2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}_1^{(B)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{u}_2^{(B)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{u}_3^{(B)}}{\partial r_1} \right) = \hat{g}_{11}^{(B)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(B)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{12}^{(B)} \frac{\partial \hat{u}_2^{(B)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{13}^{(B)} \frac{\partial \hat{u}_3^{(B)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{21}^{(B)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(B)}}{\partial r_1} + \\
&\hat{g}_{22}^{(B)} \frac{\partial \hat{u}_2^{(B)}}{\partial r_1} + \hat{g}_{23}^{(B)} \frac{\partial \hat{u}_3^{(B)}}{\partial r_1} = -\hat{g}_{11}^{(B)} U_1^1 \gamma_1 - \hat{g}_{11}^{(B)} U_1^2 \gamma_2 - \hat{g}_{11}^{(B)} U_1^3 \gamma_3 + \hat{g}_{11}^{(B)} U_1^4 (1 - \gamma_4) - \hat{g}_{12}^{(B)} U_2^1 \gamma_1 - \hat{g}_{12}^{(B)} U_2^2 \gamma_2 \\
&- \hat{g}_{12}^{(B)} U_2^3 \gamma_3 + \hat{g}_{12}^{(B)} U_2^4 (1 - \gamma_4) - \hat{g}_{13}^{(B)} U_3^1 \gamma_1 - \hat{g}_{13}^{(B)} U_3^2 \gamma_2 - \hat{g}_{13}^{(B)} U_3^3 \gamma_3 + \hat{g}_{13}^{(B)} U_3^4 (1 - \gamma_4) - \hat{g}_{21}^{(B)} U_1^1 \gamma_1 - \\
&\hat{g}_{21}^{(B)} U_1^2 \gamma_2 + \hat{g}_{21}^{(B)} U_1^3 (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{21}^{(B)} U_1^4 \gamma_4 - \hat{g}_{22}^{(B)} U_2^1 \gamma_1 - \hat{g}_{22}^{(B)} U_2^2 \gamma_2 + \hat{g}_{22}^{(B)} U_2^3 (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{22}^{(B)} U_2^4 \gamma_4 - \\
&\hat{g}_{23}^{(B)} U_3^1 \gamma_1 - \hat{g}_{23}^{(B)} U_3^2 \gamma_2 + \hat{g}_{23}^{(B)} U_3^3 (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{23}^{(B)} U_3^4 \gamma_4 = U_1^1 \left( -\hat{g}_{11}^{(B)} - \hat{g}_{21}^{(B)} \right) + U_2^1 \left( -\hat{g}_{12}^{(B)} - \hat{g}_{22}^{(B)} \right) + \\
&U_3^1 \left( -\hat{g}_{13}^{(B)} - \hat{g}_{23}^{(B)} \right) + U_1^2 \left( -\hat{g}_{11}^{(B)} - \hat{g}_{21}^{(B)} \right) + U_2^2 \left( -\hat{g}_{12}^{(B)} - \hat{g}_{22}^{(B)} \right) + U_3^2 \left( -\hat{g}_{13}^{(B)} - \hat{g}_{23}^{(B)} \right) + \\
&U_1^3 \left( -\hat{g}_{11}^{(B)} \gamma_3 + \hat{g}_{21}^{(B)} (1 - \gamma_3) \right) + U_2^3 \left( -\hat{g}_{12}^{(B)} \gamma_3 + \hat{g}_{22}^{(B)} (1 - \gamma_3) \right) + U_3^3 \left( -\hat{g}_{13}^{(B)} \gamma_3 + \hat{g}_{23}^{(B)} (1 - \gamma_3) \right) + \\
&U_1^4 \left( \hat{g}_{11}^{(B)} (1 - \gamma_4) - \hat{g}_{21}^{(B)} \gamma_4 \right) + U_2^4 \left( \hat{g}_{12}^{(B)} (1 - \gamma_4) - \hat{g}_{22}^{(B)} \gamma_4 \right) + U_3^4 \left( \hat{g}_{13}^{(B)} (1 - \gamma_4) - \hat{g}_{23}^{(B)} \gamma_4 \right)
\end{aligned}$$

У складу са (5.3.5) подматрице  $\hat{\mathbf{B}}^{k(\Delta)}$  троугаоног домена В су

$$\hat{\mathbf{B}}^{1(B)} = \begin{bmatrix} -\hat{g}_{11}^{(B)} \gamma_1 & -\hat{g}_{12}^{(B)} \gamma_1 & -\hat{g}_{13}^{(B)} \gamma_1 \\ -\hat{g}_{21}^{(B)} \gamma_1 & -\hat{g}_{22}^{(B)} \gamma_1 & -\hat{g}_{23}^{(B)} \gamma_1 \\ \gamma_1 \left( -\hat{g}_{11}^{(B)} - \hat{g}_{21}^{(B)} \right) & \gamma_1 \left( -\hat{g}_{12}^{(B)} - \hat{g}_{22}^{(B)} \right) & \gamma_1 \left( -\hat{g}_{13}^{(B)} - \hat{g}_{23}^{(B)} \right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{B}}^{2(A)} &= \begin{bmatrix} -\widehat{g}_{11}^{(B)} \gamma_2 & -\widehat{g}_{12}^{(B)} \gamma_2 & -\widehat{g}_{13}^{(B)} \gamma_2 \\ -\widehat{g}_{21}^{(B)} \gamma_2 & -\widehat{g}_{22}^{(B)} \gamma_2 & -\widehat{g}_{23}^{(B)} \gamma_2 \\ \gamma_2 \left( -\widehat{g}_{11}^{(B)} - \widehat{g}_{21}^{(B)} \right) & \gamma_2 \left( -\widehat{g}_{12}^{(B)} - \widehat{g}_{22}^{(B)} \right) & \gamma_2 \left( -\widehat{g}_{13}^{(B)} - \widehat{g}_{23}^{(B)} \right) \end{bmatrix} \\
\widehat{\mathbf{B}}^{3(B)} &= \begin{bmatrix} \widehat{g}_{11}^{(B)} (1-\gamma_3) & \widehat{g}_{12}^{(B)} (1-\gamma_3) & \widehat{g}_{13}^{(B)} (1-\gamma_3) \\ -\widehat{g}_{21}^{(B)} \gamma_3 & -\widehat{g}_{22}^{(B)} \gamma_3 & -\widehat{g}_{23}^{(B)} \gamma_3 \\ -\widehat{g}_{11}^{(B)} \gamma_3 + \widehat{g}_{21}^{(B)} (1-\gamma_3) & -\widehat{g}_{12}^{(B)} \gamma_3 + \widehat{g}_{22}^{(B)} (1-\gamma_3) & -\widehat{g}_{13}^{(B)} \gamma_3 + \widehat{g}_{23}^{(B)} (1-\gamma_3) \end{bmatrix} \\
\widehat{\mathbf{B}}^{4(B)} &= \begin{bmatrix} -\widehat{g}_{11}^{(B)} \gamma_4 & -\widehat{g}_{12}^{(B)} \gamma_4 & -\widehat{g}_{13}^{(B)} \gamma_4 \\ \widehat{g}_{21}^{(B)} (1-\gamma_4) & \widehat{g}_{22}^{(B)} (1-\gamma_4) & \widehat{g}_{23}^{(B)} (1-\gamma_4) \\ \widehat{g}_{11}^{(B)} (1-\gamma_4) - \widehat{g}_{21}^{(B)} \gamma_4 & \widehat{g}_{12}^{(B)} (1-\gamma_4) - \widehat{g}_{22}^{(B)} \gamma_4 & \widehat{g}_{13}^{(B)} (1-\gamma_4) - \widehat{g}_{23}^{(B)} \gamma_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### 5.3.3 Коваријантне мембранске деформације троугла C

Координате тачака троугла C у векторском облику су

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{x}}^{(C)} &= \sum_{k=1}^3 \widehat{h}_k \widehat{\mathbf{X}}^k = \widehat{h}_1 \widehat{\mathbf{X}}^1 + \widehat{h}_2 \widehat{\mathbf{X}}^2 + \widehat{h}_3 \widehat{\mathbf{X}}^3 = \widehat{h}_1 \mathbf{X}^4 + \widehat{h}_2 \mathbf{X}^1 + \widehat{h}_3 \mathbf{X}^5 = \\
&\widehat{h}_1 (X_1^4, X_2^4, X_3^4) + \widehat{h}_2 (X_1^1, X_2^1, X_3^1) + \widehat{h}_3 (X_1^5, X_2^5, X_3^5)
\end{aligned}$$

Овој једначини одговарају три скаларне једначине

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_1^{(C)} &= \widehat{h}_1 X_1^4 + \widehat{h}_2 X_1^1 + \widehat{h}_3 X_1^5 = \widehat{h}_1 X_1^4 + \widehat{h}_2 X_1^1 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 X_1^1 + \gamma_2 X_1^2 + \gamma_3 X_1^3 + \gamma_4 X_1^4) = \\
&= X_1^1 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_1) + X_1^2 \widehat{h}_3 \gamma_2 + X_1^3 \widehat{h}_3 \gamma_3 + X_1^4 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_4) \\
\widehat{x}_2^{(C)} &= \widehat{h}_1 X_2^4 + \widehat{h}_2 X_2^1 + \widehat{h}_3 X_2^5 = \widehat{h}_1 X_2^4 + \widehat{h}_2 X_2^1 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 X_2^1 + \gamma_2 X_2^2 + \gamma_3 X_2^3 + \gamma_4 X_2^4) = \\
&= X_2^1 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_1) + X_2^2 \widehat{h}_3 \gamma_2 + X_2^3 \widehat{h}_3 \gamma_3 + X_2^4 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_4) \\
\widehat{x}_3^{(C)} &= \widehat{h}_1 X_3^4 + \widehat{h}_2 X_3^1 + \widehat{h}_3 X_3^5 = \widehat{h}_1 X_3^4 + \widehat{h}_2 X_3^1 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 X_3^1 + \gamma_2 X_3^2 + \gamma_3 X_3^3 + \gamma_4 X_3^4) = \\
&= X_3^1 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_1) + X_3^2 \widehat{h}_3 \gamma_2 + X_3^3 \widehat{h}_3 \gamma_3 + X_3^4 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_4)
\end{aligned}$$

Померања тачака троугла C у векторском облику су

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{u}}^{(C)} &= \sum_{k=1}^3 \widehat{h}_k \widehat{\mathbf{U}}^k = \widehat{h}_1 \widehat{\mathbf{U}}^1 + \widehat{h}_2 \widehat{\mathbf{U}}^2 + \widehat{h}_3 \widehat{\mathbf{U}}^3 = \widehat{h}_1 \mathbf{U}^4 + \widehat{h}_2 \mathbf{U}^1 + \widehat{h}_3 \mathbf{U}^5 = \\
&\widehat{h}_1 (U_1^4, U_2^4, U_3^4) + \widehat{h}_2 (U_1^1, U_2^1, U_3^1) + \widehat{h}_3 (U_1^5, U_2^5, U_3^5)
\end{aligned}$$

Односно у компоненталном

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_1^{(C)} &= \widehat{h}_1 U_1^4 + \widehat{h}_2 U_1^1 + \widehat{h}_3 U_1^5 = \widehat{h}_1 U_1^4 + \widehat{h}_2 U_1^1 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 U_1^1 + \gamma_2 U_1^2 + \gamma_3 U_1^3 + \gamma_4 U_1^4) = \\
&= U_1^1 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_1) + U_1^2 \widehat{h}_3 \gamma_2 + U_1^3 \widehat{h}_3 \gamma_3 + U_1^4 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{u}_2^{(c)} &= \hat{h}_1 U_2^4 + \hat{h}_2 U_2^1 + \hat{h}_3 U_2^5 = \hat{h}_1 U_2^4 + \hat{h}_2 U_2^1 + \hat{h}_3 (\gamma_1 U_2^1 + \gamma_2 U_2^2 + \gamma_3 U_2^3 + \gamma_4 U_2^4) = \\
&= U_2^1 (\hat{h}_2 + \hat{h}_3 \gamma_1) + U_2^2 \hat{h}_3 \gamma_2 + U_2^3 \hat{h}_3 \gamma_3 + U_2^4 (\hat{h}_1 + \hat{h}_3 \gamma_4) \\
\hat{u}_3^{(c)} &= \hat{h}_1 U_3^4 + \hat{h}_2 U_3^1 + \hat{h}_3 U_3^5 = \hat{h}_1 U_3^4 + \hat{h}_2 U_3^1 + \hat{h}_3 (\gamma_1 U_3^1 + \gamma_2 U_3^2 + \gamma_3 U_3^3 + \gamma_4 U_3^4) = \\
&= U_3^1 (\hat{h}_2 + \hat{h}_3 \gamma_1) + U_3^2 \hat{h}_3 \gamma_2 + U_3^3 \hat{h}_3 \gamma_3 + U_3^4 (\hat{h}_1 + \hat{h}_3 \gamma_4)
\end{aligned}$$

Парцијални изводи координата и померања материјалних тачака су

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{x}_1^{(c)}}{\partial r_1} &= X_1^1 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_1) + X_1^2 \hat{h}_{3,r} \gamma_2 + X_1^3 \hat{h}_{3,r} \gamma_3 + X_1^4 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_4) = \\
&= -X_1^1 \gamma_1 - X_1^2 \gamma_2 - X_1^3 \gamma_3 + X_1^4 (1 - \gamma_4) = \hat{g}_{11}^{(c)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{x}_2^{(c)}}{\partial r_1} &= X_2^1 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_1) + X_2^2 \hat{h}_{3,r} \gamma_2 + X_2^3 \hat{h}_{3,r} \gamma_3 + X_2^4 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_4) = \\
&= -X_2^1 \gamma_1 - X_2^2 \gamma_2 - X_2^3 \gamma_3 + X_2^4 (1 - \gamma_4) = \hat{g}_{12}^{(c)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{x}_3^{(c)}}{\partial r_1} &= X_3^1 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_1) + X_3^2 \hat{h}_{3,r} \gamma_2 + X_3^3 \hat{h}_{3,r} \gamma_3 + X_3^4 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_4) = \\
&= -X_3^1 \gamma_1 - X_3^2 \gamma_2 - X_3^3 \gamma_3 + X_3^4 (1 - \gamma_4) = \hat{g}_{13}^{(c)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{x}_1^{(c)}}{\partial r_2} &= X_1^1 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_1) + X_1^2 \hat{h}_{3,s} \gamma_2 + X_1^3 \hat{h}_{3,s} \gamma_3 + X_1^4 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_4) = \\
&= X_1^1 (1 - \gamma_1) - X_1^2 \gamma_2 - X_1^3 \gamma_3 - X_1^4 \gamma_4 = \hat{g}_{21}^{(c)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{x}_2^{(c)}}{\partial r_2} &= X_2^1 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_1) + X_2^2 \hat{h}_{3,s} \gamma_2 + X_2^3 \hat{h}_{3,s} \gamma_3 + X_2^4 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_4) = \\
&= X_2^1 (1 - \gamma_1) - X_2^2 \gamma_2 - X_2^3 \gamma_3 - X_2^4 \gamma_4 = \hat{g}_{22}^{(c)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{x}_3^{(c)}}{\partial r_2} &= X_3^1 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_1) + X_3^2 \hat{h}_{3,s} \gamma_2 + X_3^3 \hat{h}_{3,s} \gamma_3 + X_3^4 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_4) = \\
&= X_3^1 (1 - \gamma_1) - X_3^2 \gamma_2 - X_3^3 \gamma_3 - X_3^4 \gamma_4 = \hat{g}_{23}^{(c)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{u}_1^{(c)}}{\partial r_1} &= U_1^1 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_1) + U_1^2 \hat{h}_{3,r} \gamma_2 + U_1^3 \hat{h}_{3,r} \gamma_3 + U_1^4 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_4) = \\
&= -U_1^1 \gamma_1 - U_1^2 \gamma_2 - U_1^3 \gamma_3 + U_1^4 (1 - \gamma_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{u}_2^{(c)}}{\partial r_1} &= U_2^1 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_1) + U_2^2 \hat{h}_{3,r} \gamma_2 + U_2^3 \hat{h}_{3,r} \gamma_3 + U_2^4 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_4) = \\
&= -U_2^1 \gamma_1 - U_2^2 \gamma_2 - U_2^3 \gamma_3 + U_2^4 (1 - \gamma_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_3^{(c)}}{\partial r_1} &= U_3^1 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_1) + U_3^2 \hat{h}_{3,r} \gamma_2 + U_3^3 \hat{h}_{3,r} \gamma_3 + U_3^4 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_4) = \\ &= -U_3^1 \gamma_1 - U_3^2 \gamma_2 - U_3^3 \gamma_3 + U_3^4 (1 - \gamma_4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_1^{(c)}}{\partial r_2} &= U_1^1 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_1) + U_1^2 \hat{h}_{3,s} \gamma_2 + U_1^3 \hat{h}_{3,s} \gamma_3 + U_1^4 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_4) = \\ &= U_1^1 (1 - \gamma_1) - U_1^2 \gamma_2 - U_1^3 \gamma_3 - U_1^4 \gamma_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_2^{(c)}}{\partial r_2} &= U_2^1 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_1) + U_2^2 \hat{h}_{3,s} \gamma_2 + U_2^3 \hat{h}_{3,s} \gamma_3 + U_2^4 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_4) = \\ &= U_2^1 (1 - \gamma_1) - U_2^2 \gamma_2 - U_2^3 \gamma_3 - U_2^4 \gamma_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_3^{(c)}}{\partial r_2} &= U_3^1 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_1) + U_3^2 \hat{h}_{3,s} \gamma_2 + U_3^3 \hat{h}_{3,s} \gamma_3 + U_3^4 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_4) = \\ &= U_3^1 (1 - \gamma_1) - U_3^2 \gamma_2 - U_3^3 \gamma_3 - U_3^4 \gamma_4\end{aligned}$$

Коваријантне мембранске деформације троугла C су

$$\begin{aligned}e_{11}^{m(c)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(c)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(c)}}{\partial r_1} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(c)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(c)}}{\partial r_1} \right) = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(c)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(c)}}{\partial r_1} = \left( \frac{\partial \hat{x}_1^{(c)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{x}_2^{(c)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{x}_3^{(c)}}{\partial r_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}_1^{(c)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{u}_2^{(c)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{u}_3^{(c)}}{\partial r_1} \right) = \\ &= \frac{\partial \hat{x}_1^{(c)}}{\partial r_1} \frac{\partial \hat{u}_1^{(c)}}{\partial r_1} + \frac{\partial \hat{x}_2^{(c)}}{\partial r_1} \frac{\partial \hat{u}_2^{(c)}}{\partial r_1} + \frac{\partial \hat{x}_3^{(c)}}{\partial r_1} \frac{\partial \hat{u}_3^{(c)}}{\partial r_1} = \hat{g}_{11}^{(c)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(c)}}{\partial r_1} + \hat{g}_{12}^{(c)} \frac{\partial \hat{u}_2^{(c)}}{\partial r_1} + \hat{g}_{13}^{(c)} \frac{\partial \hat{u}_3^{(c)}}{\partial r_1} = -\hat{g}_{11}^{(c)} U_1^1 \gamma_1 - \hat{g}_{11}^{(c)} U_1^2 \gamma_2 - \\ &- \hat{g}_{11}^{(c)} U_1^3 \gamma_3 + \hat{g}_{11}^{(c)} U_1^4 (1 - \gamma_4) - \hat{g}_{12}^{(c)} U_2^1 \gamma_1 - \hat{g}_{12}^{(c)} U_2^2 \gamma_2 - \hat{g}_{12}^{(c)} U_2^3 \gamma_3 + \hat{g}_{12}^{(c)} U_2^4 (1 - \gamma_4) - \hat{g}_{13}^{(c)} U_3^1 \gamma_1 - \hat{g}_{13}^{(c)} U_3^2 \gamma_2 - \\ &- \hat{g}_{13}^{(c)} U_3^3 \gamma_3 + \hat{g}_{13}^{(c)} U_3^4 (1 - \gamma_4) = U_1^1 \left( -\hat{g}_{11}^{(c)} \gamma_1 \right) + U_2^1 \left( -\hat{g}_{12}^{(c)} \gamma_1 \right) + U_3^1 \left( -\hat{g}_{13}^{(c)} \gamma_1 \right) + U_1^2 \left( -\hat{g}_{11}^{(c)} \gamma_2 \right) + U_2^2 \left( -\hat{g}_{12}^{(c)} \gamma_2 \right) + \\ &+ U_3^2 \left( -\hat{g}_{13}^{(c)} \gamma_2 \right) + U_1^3 \left( -\hat{g}_{11}^{(c)} \gamma_3 \right) + U_2^3 \left( -\hat{g}_{12}^{(c)} \gamma_3 \right) + U_3^3 \left( -\hat{g}_{13}^{(c)} \gamma_3 \right) + U_1^4 \left( \hat{g}_{11}^{(c)} (1 - \gamma_4) \right) + U_2^4 \left( \hat{g}_{12}^{(c)} (1 - \gamma_4) \right) + \\ &+ U_3^4 \left( \hat{g}_{13}^{(c)} (1 - \gamma_4) \right) \\ e_{22}^{m(c)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(c)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(c)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(c)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(c)}}{\partial r_2} \right) = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(c)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(c)}}{\partial r_2} = \left( \frac{\partial \hat{x}_1^{(c)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{x}_2^{(c)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{x}_3^{(c)}}{\partial r_2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}_1^{(c)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{u}_2^{(c)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{u}_3^{(c)}}{\partial r_2} \right) = \\ &= \frac{\partial \hat{x}_1^{(c)}}{\partial r_2} \frac{\partial \hat{u}_1^{(c)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{x}_2^{(c)}}{\partial r_2} \frac{\partial \hat{u}_2^{(c)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{x}_3^{(c)}}{\partial r_2} \frac{\partial \hat{u}_3^{(c)}}{\partial r_2} = \hat{g}_{21}^{(c)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(c)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{22}^{(c)} \frac{\partial \hat{u}_2^{(c)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{23}^{(c)} \frac{\partial \hat{u}_3^{(c)}}{\partial r_2} = \hat{g}_{21}^{(c)} U_1^1 (1 - \gamma_1) - \hat{g}_{21}^{(c)} U_1^2 \gamma_2 - \\ &- \hat{g}_{21}^{(c)} U_1^3 \gamma_3 - \hat{g}_{21}^{(c)} U_1^4 \gamma_4 + \hat{g}_{22}^{(c)} U_2^1 (1 - \gamma_1) - \hat{g}_{22}^{(c)} U_2^2 \gamma_2 - \hat{g}_{22}^{(c)} U_2^3 \gamma_3 - \hat{g}_{22}^{(c)} U_2^4 \gamma_4 + \hat{g}_{23}^{(c)} U_3^1 (1 - \gamma_1) - \hat{g}_{23}^{(c)} U_3^2 \gamma_2 - \\ &- \hat{g}_{23}^{(c)} U_3^3 \gamma_3 - \hat{g}_{23}^{(c)} U_3^4 \gamma_4 = U_1^1 \left( \hat{g}_{21}^{(c)} (1 - \gamma_1) \right) + U_2^1 \left( \hat{g}_{22}^{(c)} (1 - \gamma_1) \right) + U_3^1 \left( \hat{g}_{23}^{(c)} (1 - \gamma_1) \right) + U_1^2 \left( -\hat{g}_{21}^{(c)} \gamma_2 \right) + \\ &+ U_2^2 \left( -\hat{g}_{22}^{(c)} \gamma_2 \right) + U_3^2 \left( -\hat{g}_{23}^{(c)} \gamma_2 \right) + U_1^3 \left( -\hat{g}_{21}^{(c)} \gamma_3 \right) + U_2^3 \left( -\hat{g}_{22}^{(c)} \gamma_3 \right) + U_3^3 \left( -\hat{g}_{23}^{(c)} \gamma_3 \right) + U_1^4 \left( -\hat{g}_{21}^{(c)} \gamma_4 \right) + U_2^4 \left( -\hat{g}_{22}^{(c)} \gamma_4 \right) + \\ &+ U_3^4 \left( -\hat{g}_{23}^{(c)} \gamma_4 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_{12}^{m(c)} &= 2\hat{e}_{12}^{m(c)} = 2\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{x}}^{(c)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{u}}^{(c)}}{\partial r_2} + \frac{\partial\hat{\mathbf{x}}^{(c)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{u}}^{(c)}}{\partial r_1}\right) = \left(\frac{\partial\hat{x}_1^{(c)}}{\partial r_1}, \frac{\partial\hat{x}_2^{(c)}}{\partial r_1}, \frac{\partial\hat{x}_3^{(c)}}{\partial r_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial\hat{u}_1^{(c)}}{\partial r_2}, \frac{\partial\hat{u}_2^{(c)}}{\partial r_2}, \frac{\partial\hat{u}_3^{(c)}}{\partial r_2}\right) + \\
&\left(\frac{\partial\hat{x}_1^{(c)}}{\partial r_2}, \frac{\partial\hat{x}_2^{(c)}}{\partial r_2}, \frac{\partial\hat{x}_3^{(c)}}{\partial r_2}\right) \cdot \left(\frac{\partial\hat{u}_1^{(c)}}{\partial r_1}, \frac{\partial\hat{u}_2^{(c)}}{\partial r_1}, \frac{\partial\hat{u}_3^{(c)}}{\partial r_1}\right) = \hat{g}_{11}^{(c)} \frac{\partial\hat{u}_1}{\partial r_2} + \hat{g}_{12}^{(c)} \frac{\partial\hat{u}_2}{\partial r_2} + \hat{g}_{13}^{(c)} \frac{\partial\hat{u}_3}{\partial r_2} + \hat{g}_{21}^{(c)} \frac{\partial\hat{u}_1}{\partial r_1} + \\
&\hat{g}_{22}^{(c)} \frac{\partial\hat{u}_2}{\partial r_1} + \hat{g}_{23}^{(c)} \frac{\partial\hat{u}_3}{\partial r_1} = \hat{g}_{11}^{(c)} U_1^1 (1-\gamma_1) - \hat{g}_{11}^{(c)} U_1^2 \gamma_2 - \hat{g}_{11}^{(c)} U_1^3 \gamma_3 - \hat{g}_{11}^{(c)} U_1^4 \gamma_4 + \hat{g}_{12}^{(c)} U_2^1 (1-\gamma_1) - \\
&\hat{g}_{12}^{(c)} U_2^2 \gamma_2 - \hat{g}_{12}^{(c)} U_2^3 \gamma_3 - \hat{g}_{12}^{(c)} U_2^4 \gamma_4 + \hat{g}_{13}^{(c)} U_3^1 (1-\gamma_1) - \hat{g}_{13}^{(c)} U_3^2 \gamma_2 - \hat{g}_{13}^{(c)} U_3^3 \gamma_3 - \hat{g}_{13}^{(c)} U_3^4 \gamma_4 - \hat{g}_{21}^{(c)} U_1^1 \gamma_1 - \\
&\hat{g}_{21}^{(c)} U_1^2 \gamma_2 - \hat{g}_{21}^{(c)} U_1^3 \gamma_3 + \hat{g}_{21}^{(c)} U_1^4 (1-\gamma_4) - \hat{g}_{22}^{(c)} U_2^1 \gamma_1 - \hat{g}_{22}^{(c)} U_2^2 \gamma_2 - \hat{g}_{22}^{(c)} U_2^3 \gamma_3 + \hat{g}_{22}^{(c)} U_2^4 (1-\gamma_4) - \\
&\hat{g}_{23}^{(c)} U_3^1 \gamma_1 - \hat{g}_{23}^{(c)} U_3^2 \gamma_2 - \hat{g}_{23}^{(c)} U_3^3 \gamma_3 + \hat{g}_{23}^{(c)} U_3^4 (1-\gamma_4) = U_1^1 \left( \hat{g}_{11}^{(c)} (1-\gamma_1) - \hat{g}_{21}^{(c)} \gamma_1 \right) + \\
&+ U_2^1 \left( \hat{g}_{11}^{(c)} (1-\gamma_1) - \hat{g}_{22}^{(c)} \gamma_1 \right) + U_3^1 \left( \hat{g}_{11}^{(c)} (1-\gamma_1) - \hat{g}_{23}^{(c)} \gamma_1 \right) + U_1^2 \gamma_2 \left( -\hat{g}_{11}^{(c)} - \hat{g}_{21}^{(c)} \right) + U_2^2 \gamma_2 \left( -\hat{g}_{12}^{(c)} - \hat{g}_{22}^{(c)} \right) + \\
&+ U_3^2 \gamma_2 \left( -\hat{g}_{13}^{(c)} - \hat{g}_{23}^{(c)} \right) + U_1^3 \gamma_3 \left( -\hat{g}_{11}^{(c)} - \hat{g}_{21}^{(c)} \right) + U_2^3 \gamma_3 \left( -\hat{g}_{12}^{(c)} - \hat{g}_{22}^{(c)} \right) + U_3^3 \gamma_3 \left( -\hat{g}_{13}^{(c)} - \hat{g}_{23}^{(c)} \right) + \\
&U_1^4 \left( -\hat{g}_{11}^{(c)} \gamma_4 + \hat{g}_{21}^{(c)} (1-\gamma_4) \right) + U_2^4 \left( -\hat{g}_{12}^{(c)} \gamma_4 + \hat{g}_{22}^{(c)} (1-\gamma_4) \right) + U_3^4 \left( -\hat{g}_{13}^{(c)} \gamma_4 + \hat{g}_{23}^{(c)} (1-\gamma_4) \right)
\end{aligned}$$

Подматрице  $\hat{\mathbf{B}}^{k(a)}$  троугаоног домена C су

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{B}}^{1(c)} &= \begin{bmatrix} -\hat{g}_{11}^{(c)} \gamma_1 & -\hat{g}_{12}^{(c)} \gamma_1 & -\hat{g}_{13}^{(c)} \gamma_1 \\ \hat{g}_{21}^{(c)} (1-\gamma_1) & \hat{g}_{22}^{(c)} (1-\gamma_1) & \hat{g}_{23}^{(c)} (1-\gamma_1) \\ \hat{g}_{11}^{(c)} (1-\gamma_1) - \hat{g}_{21}^{(c)} \gamma_1 & \hat{g}_{12}^{(c)} (1-\gamma_1) - \hat{g}_{22}^{(c)} \gamma_1 & \hat{g}_{13}^{(c)} (1-\gamma_1) - \hat{g}_{23}^{(c)} \gamma_1 \end{bmatrix} \\
\hat{\mathbf{B}}^{2(c)} &= \begin{bmatrix} -\hat{g}_{11}^{(c)} \gamma_2 & -\hat{g}_{12}^{(c)} \gamma_2 & -\hat{g}_{13}^{(c)} \gamma_2 \\ -\hat{g}_{21}^{(c)} \gamma_2 & -\hat{g}_{22}^{(c)} \gamma_2 & -\hat{g}_{23}^{(c)} \gamma_2 \\ \gamma_2 \left( -\hat{g}_{11}^{(c)} - \hat{g}_{21}^{(c)} \right) & \gamma_2 \left( -\hat{g}_{12}^{(c)} - \hat{g}_{22}^{(c)} \right) & \gamma_2 \left( -\hat{g}_{13}^{(c)} - \hat{g}_{23}^{(c)} \right) \end{bmatrix} \\
\hat{\mathbf{B}}^{3(c)} &= \begin{bmatrix} -\hat{g}_{11}^{(c)} \gamma_3 & -\hat{g}_{12}^{(c)} \gamma_3 & -\hat{g}_{13}^{(c)} \gamma_3 \\ -\hat{g}_{21}^{(c)} \gamma_3 & -\hat{g}_{22}^{(c)} \gamma_3 & -\hat{g}_{23}^{(c)} \gamma_3 \\ \gamma_3 \left( -\hat{g}_{11}^{(c)} - \hat{g}_{21}^{(c)} \right) & \gamma_3 \left( -\hat{g}_{12}^{(c)} - \hat{g}_{22}^{(c)} \right) & \gamma_3 \left( -\hat{g}_{13}^{(c)} - \hat{g}_{23}^{(c)} \right) \end{bmatrix} \\
\hat{\mathbf{B}}^{4(c)} &= \begin{bmatrix} \hat{g}_{11}^{(c)} (1-\gamma_4) & \hat{g}_{12}^{(c)} (1-\gamma_4) & \hat{g}_{13}^{(c)} (1-\gamma_4) \\ -\hat{g}_{21}^{(c)} \gamma_4 & -\hat{g}_{22}^{(c)} \gamma_4 & -\hat{g}_{23}^{(c)} \gamma_4 \\ -\hat{g}_{11}^{(c)} \gamma_4 + \hat{g}_{21}^{(c)} (1-\gamma_4) & -\hat{g}_{12}^{(c)} \gamma_4 + \hat{g}_{22}^{(c)} (1-\gamma_4) & -\hat{g}_{13}^{(c)} \gamma_4 + \hat{g}_{23}^{(c)} (1-\gamma_4) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### 5.3.4 Коваријантне мембранске деформације троугла D

Интерполација за геометрију материјалних тачака троугаоног домена D је

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{x}}^{(D)} &= \sum_{k=1}^3 \widehat{h}_k \widehat{\mathbf{X}}^k = \widehat{h}_1 \widehat{\mathbf{X}}^1 + \widehat{h}_2 \widehat{\mathbf{X}}^2 + \widehat{h}_3 \widehat{\mathbf{X}}^3 = \widehat{h}_1 \mathbf{X}^2 + \widehat{h}_2 \mathbf{X}^3 + \widehat{h}_3 \mathbf{X}^5 = \\ &\widehat{h}_1 (X_1^2, X_2^2, X_3^2) + \widehat{h}_2 (X_1^3, X_2^3, X_3^3) + \widehat{h}_3 (X_1^5, X_2^5, X_3^5)\end{aligned}$$

Односно у компоненталном облику

$$\begin{aligned}\widehat{x}_1^{(D)} &= \widehat{h}_1 X_1^2 + \widehat{h}_2 X_1^3 + \widehat{h}_3 X_1^5 = \widehat{h}_1 X_1^2 + \widehat{h}_2 X_1^3 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 X_1^1 + \gamma_2 X_1^2 + \gamma_3 X_1^3 + \gamma_4 X_1^4) = \\ &= X_1^1 \widehat{h}_3 \gamma_1 + X_1^2 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_2) + X_1^3 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_3) + X_1^4 \widehat{h}_3 \gamma_4 \\ \widehat{x}_2^{(D)} &= \widehat{h}_1 X_2^2 + \widehat{h}_2 X_2^3 + \widehat{h}_3 X_2^5 = \widehat{h}_1 X_2^2 + \widehat{h}_2 X_2^3 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 X_2^1 + \gamma_2 X_2^2 + \gamma_3 X_2^3 + \gamma_4 X_2^4) = \\ &= X_2^1 \widehat{h}_3 \gamma_1 + X_2^2 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_2) + X_2^3 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_3) + X_2^4 \widehat{h}_3 \gamma_4 \\ \widehat{x}_3^{(D)} &= \widehat{h}_1 X_3^2 + \widehat{h}_2 X_3^3 + \widehat{h}_3 X_3^5 = \widehat{h}_1 X_3^2 + \widehat{h}_2 X_3^3 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 X_3^1 + \gamma_2 X_3^2 + \gamma_3 X_3^3 + \gamma_4 X_3^4) = \\ &= X_3^1 \widehat{h}_3 \gamma_1 + X_3^2 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_2) + X_3^3 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_3) + X_3^4 \widehat{h}_3 \gamma_4\end{aligned}$$

Интерполација за померања материјалних тачака троугла D је

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{u}}^{(D)} &= \sum_{k=1}^3 \widehat{h}_k \widehat{\mathbf{U}}^k = \widehat{h}_1 \widehat{\mathbf{U}}^1 + \widehat{h}_2 \widehat{\mathbf{U}}^2 + \widehat{h}_3 \widehat{\mathbf{U}}^3 = \widehat{h}_1 \mathbf{U}^2 + \widehat{h}_2 \mathbf{U}^3 + \widehat{h}_3 \mathbf{U}^5 = \\ &\widehat{h}_1 (U_1^2, U_2^2, U_3^2) + \widehat{h}_2 (U_1^3, U_2^3, U_3^3) + \widehat{h}_3 (U_1^5, U_2^5, U_3^5)\end{aligned}$$

Овој једначини одговарају три скаларне једначине

$$\begin{aligned}\widehat{u}_1^{(D)} &= \widehat{h}_1 U_1^2 + \widehat{h}_2 U_1^3 + \widehat{h}_3 U_1^5 = \widehat{h}_1 U_1^2 + \widehat{h}_2 U_1^3 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 U_1^1 + \gamma_2 U_1^2 + \gamma_3 U_1^3 + \gamma_4 U_1^4) = \\ &= U_1^1 \widehat{h}_3 \gamma_1 + U_1^2 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_2) + U_1^3 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_3) + U_1^4 \widehat{h}_3 \gamma_4 \\ \widehat{u}_2^{(D)} &= \widehat{h}_1 U_2^2 + \widehat{h}_2 U_2^3 + \widehat{h}_3 U_2^5 = \widehat{h}_1 U_2^2 + \widehat{h}_2 U_2^3 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 U_2^1 + \gamma_2 U_2^2 + \gamma_3 U_2^3 + \gamma_4 U_2^4) = \\ &= U_2^1 \widehat{h}_3 \gamma_1 + U_2^2 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_2) + U_2^3 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_3) + U_2^4 \widehat{h}_3 \gamma_4 \\ \widehat{u}_3^{(D)} &= \widehat{h}_1 U_3^2 + \widehat{h}_2 U_3^3 + \widehat{h}_3 U_3^5 = \widehat{h}_1 U_3^2 + \widehat{h}_2 U_3^3 + \widehat{h}_3 (\gamma_1 U_3^1 + \gamma_2 U_3^2 + \gamma_3 U_3^3 + \gamma_4 U_3^4) = \\ &= U_3^1 \widehat{h}_3 \gamma_1 + U_3^2 (\widehat{h}_1 + \widehat{h}_3 \gamma_2) + U_3^3 (\widehat{h}_2 + \widehat{h}_3 \gamma_3) + U_3^4 \widehat{h}_3 \gamma_4\end{aligned}$$

Парцијални изводи координата и померања материјалних тачака поменутог троугла су

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{x}_1^{(D)}}{\partial r_1} &= X_1^1 \widehat{h}_{3,r} \gamma_1 + X_1^2 (\widehat{h}_{1,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_2) + X_1^3 (\widehat{h}_{2,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_3) + X_1^4 \widehat{h}_{3,r} \gamma_4 = \\ &= -X_1^1 \gamma_1 + X_1^2 (1 - \gamma_2) - X_1^3 \gamma_3 - X_1^4 \gamma_4 = \widehat{g}_{11}^{(D)} \\ \frac{\partial \widehat{x}_2^{(D)}}{\partial r_1} &= X_2^1 \widehat{h}_{3,r} \gamma_1 + X_2^2 (\widehat{h}_{1,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_2) + X_2^3 (\widehat{h}_{2,r} + \widehat{h}_{3,r} \gamma_3) + X_2^4 \widehat{h}_{3,r} \gamma_4 =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{x}_3^{(D)}}{\partial r_1} &= X_3^1 \hat{h}_{3,r} \gamma_1 + X_3^2 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_2) + X_3^3 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_3) + X_3^4 \hat{h}_{3,r} \gamma_4 = \\ &= -X_3^1 \gamma_1 + X_3^2 (1 - \gamma_2) - X_3^3 \gamma_3 - X_3^4 \gamma_4 = \hat{g}_{13}^{(D)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{x}_1^{(D)}}{\partial r_2} &= X_1^1 \hat{h}_{3,s} \gamma_1 + X_1^2 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_2) + X_1^3 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_3) + X_1^4 \hat{h}_{3,s} \gamma_4 = \\ &= -X_1^1 \gamma_1 - X_1^2 \gamma_2 + X_1^3 (1 - \gamma_3) - X_1^4 \gamma_4 = \hat{g}_{21}^{(D)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{x}_2^{(D)}}{\partial r_2} &= X_2^1 \hat{h}_{3,s} \gamma_1 + X_2^2 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_2) + X_2^3 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_3) + X_2^4 \hat{h}_{3,s} \gamma_4 = \\ &= -X_2^1 \gamma_1 - X_2^2 \gamma_2 + X_2^3 (1 - \gamma_3) - X_2^4 \gamma_4 = \hat{g}_{22}^{(D)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{x}_3^{(D)}}{\partial r_2} &= X_3^1 \hat{h}_{3,s} \gamma_1 + X_3^2 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_2) + X_3^3 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_3) + X_3^4 \hat{h}_{3,s} \gamma_4 = \\ &= -X_3^1 \gamma_1 - X_3^2 \gamma_2 + X_3^3 (1 - \gamma_3) - X_3^4 \gamma_4 = \hat{g}_{23}^{(D)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_1^{(D)}}{\partial r_1} &= U_1^1 \hat{h}_{3,r} \gamma_1 + U_1^2 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_2) + U_1^3 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_3) + U_1^4 \hat{h}_{3,r} \gamma_4 = \\ &= -U_1^1 \gamma_1 + U_1^2 (1 - \gamma_2) - U_1^3 \gamma_3 - U_1^4 \gamma_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_2^{(D)}}{\partial r_1} &= U_2^1 \hat{h}_{3,r} \gamma_1 + U_2^2 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_2) + U_2^3 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_3) + U_2^4 \hat{h}_{3,r} \gamma_4 = \\ &= -U_2^1 \gamma_1 + U_2^2 (1 - \gamma_2) - U_2^3 \gamma_3 - U_2^4 \gamma_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_3^{(D)}}{\partial r_1} &= U_3^1 \hat{h}_{3,r} \gamma_1 + U_3^2 (\hat{h}_{1,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_2) + U_3^3 (\hat{h}_{2,r} + \hat{h}_{3,r} \gamma_3) + U_3^4 \hat{h}_{3,r} \gamma_4 = \\ &= -U_3^1 \gamma_1 + U_3^2 (1 - \gamma_2) - U_3^3 \gamma_3 - U_3^4 \gamma_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_1^{(D)}}{\partial r_2} &= U_1^1 \hat{h}_{3,s} \gamma_1 + U_1^2 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_2) + U_1^3 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_3) + U_1^4 \hat{h}_{3,s} \gamma_4 = \\ &= -U_1^1 \gamma_1 - U_1^2 \gamma_2 + U_1^3 (1 - \gamma_3) - U_1^4 \gamma_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_2^{(D)}}{\partial r_2} &= U_2^1 \hat{h}_{3,s} \gamma_1 + U_2^2 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_2) + U_2^3 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_3) + U_2^4 \hat{h}_{3,s} \gamma_4 = \\ &= -U_2^1 \gamma_1 - U_2^2 \gamma_2 + U_2^3 (1 - \gamma_3) - U_2^4 \gamma_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_3^{(D)}}{\partial r_2} &= U_3^1 \hat{h}_{3,s} \gamma_1 + U_3^2 (\hat{h}_{1,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_2) + U_3^3 (\hat{h}_{2,s} + \hat{h}_{3,s} \gamma_3) + U_3^4 \hat{h}_{3,s} \gamma_4 = \\ &= -U_3^1 \gamma_1 - U_3^2 \gamma_2 + U_3^3 (1 - \gamma_3) - U_3^4 \gamma_4\end{aligned}$$

Коваријантне мембранске деформације троугла D су

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_{11}^{(D)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(D)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(D)}}{\partial r_1} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(D)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(D)}}{\partial r_1} \right) = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(D)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(D)}}{\partial r_1} = \left( \frac{\partial \hat{x}_1^{(D)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{x}_2^{(D)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{x}_3^{(D)}}{\partial r_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}_1^{(D)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{u}_2^{(D)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{u}_3^{(D)}}{\partial r_1} \right) = \\
 &= \frac{\partial \hat{x}_1^{(D)}}{\partial r_1} \frac{\partial \hat{u}_1^{(D)}}{\partial r_1} + \frac{\partial \hat{x}_2^{(D)}}{\partial r_1} \frac{\partial \hat{u}_2^{(D)}}{\partial r_1} + \frac{\partial \hat{x}_3^{(D)}}{\partial r_1} \frac{\partial \hat{u}_3^{(D)}}{\partial r_1} = \hat{g}_{11}^{(C)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(D)}}{\partial r_1} + \hat{g}_{12}^{(C)} \frac{\partial \hat{u}_2^{(D)}}{\partial r_1} + \hat{g}_{13}^{(C)} \frac{\partial \hat{u}_3^{(D)}}{\partial r_1} = -\hat{g}_{11}^{(D)} U_1^1 \gamma_1 + \hat{g}_{11}^{(D)} U_1^2 (1 - \gamma_2) - \\
 &\quad - \hat{g}_{11}^{(D)} U_1^3 \gamma_3 - \hat{g}_{11}^{(D)} U_1^4 \gamma_4 - \hat{g}_{12}^{(D)} U_2^1 \gamma_1 + \hat{g}_{12}^{(D)} U_2^2 (1 - \gamma_2) - \hat{g}_{12}^{(D)} U_2^3 \gamma_3 - \hat{g}_{12}^{(D)} U_2^4 \gamma_4 - \hat{g}_{13}^{(D)} U_3^1 \gamma_1 + \hat{g}_{13}^{(D)} U_3^2 (1 - \gamma_2) - \\
 &\quad - \hat{g}_{13}^{(D)} U_3^3 \gamma_3 - \hat{g}_{13}^{(D)} U_3^4 \gamma_4 = U_1^1 \left( -\hat{g}_{11}^{(D)} \gamma_1 \right) + U_2^1 \left( -\hat{g}_{12}^{(D)} \gamma_1 \right) + U_3^1 \left( -\hat{g}_{13}^{(D)} \gamma_1 \right) + U_1^2 \left( \hat{g}_{11}^{(D)} (1 - \gamma_2) \right) + U_2^2 \left( \hat{g}_{12}^{(D)} (1 - \gamma_2) \right) + \\
 &\quad + U_3^2 \left( \hat{g}_{13}^{(D)} (1 - \gamma_2) \right) + U_1^3 \left( -\hat{g}_{11}^{(D)} \gamma_3 \right) + U_2^3 \left( -\hat{g}_{12}^{(D)} \gamma_3 \right) + U_3^3 \left( -\hat{g}_{13}^{(D)} \gamma_3 \right) + U_1^4 \left( -\hat{g}_{11}^{(D)} \gamma_4 \right) + U_2^4 \left( -\hat{g}_{12}^{(D)} \gamma_4 \right) + \\
 &\quad + U_3^4 \left( -\hat{g}_{13}^{(D)} \gamma_4 \right) \\
 \hat{e}_{22}^{(D)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(D)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(D)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(D)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(D)}}{\partial r_2} \right) = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(D)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(D)}}{\partial r_2} = \left( \frac{\partial \hat{x}_1^{(D)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{x}_2^{(D)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{x}_3^{(D)}}{\partial r_2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}_1^{(D)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{u}_2^{(D)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{u}_3^{(D)}}{\partial r_2} \right) = \\
 &= \frac{\partial \hat{x}_1^{(D)}}{\partial r_2} \frac{\partial \hat{u}_1^{(D)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{x}_2^{(D)}}{\partial r_2} \frac{\partial \hat{u}_2^{(D)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{x}_3^{(D)}}{\partial r_2} \frac{\partial \hat{u}_3^{(D)}}{\partial r_2} = \hat{g}_{21}^{(C)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(D)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{22}^{(C)} \frac{\partial \hat{u}_2^{(D)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{23}^{(C)} \frac{\partial \hat{u}_3^{(D)}}{\partial r_2} = -\hat{g}_{21}^{(D)} U_1^1 \gamma_1 - \hat{g}_{21}^{(D)} U_1^2 \gamma_2 \\
 &\quad + \hat{g}_{21}^{(D)} U_1^3 (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{21}^{(D)} U_1^4 \gamma_4 - \hat{g}_{22}^{(D)} U_2^1 \gamma_1 - \hat{g}_{22}^{(D)} U_2^2 \gamma_2 + \hat{g}_{22}^{(D)} U_2^3 (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{22}^{(D)} U_2^4 \gamma_4 - \hat{g}_{23}^{(D)} U_3^1 \gamma_1 - \hat{g}_{23}^{(D)} U_3^2 \gamma_2 \\
 &\quad + \hat{g}_{23}^{(D)} U_3^3 (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{23}^{(D)} U_3^4 \gamma_4 = U_1^1 \left( -\hat{g}_{21}^{(D)} \gamma_1 \right) + U_2^1 \left( -\hat{g}_{22}^{(D)} \gamma_1 \right) + U_3^1 \left( -\hat{g}_{23}^{(D)} \gamma_1 \right) + U_1^2 \left( -\hat{g}_{21}^{(D)} \gamma_2 \right) + U_2^2 \left( -\hat{g}_{22}^{(D)} \gamma_2 \right) \\
 &\quad + U_3^2 \left( -\hat{g}_{23}^{(D)} \gamma_2 \right) + U_1^3 \left( \hat{g}_{21}^{(D)} (1 - \gamma_3) \right) + U_2^3 \left( \hat{g}_{22}^{(D)} (1 - \gamma_3) \right) + U_3^3 \left( \hat{g}_{23}^{(D)} (1 - \gamma_3) \right) + U_1^4 \left( -\hat{g}_{21}^{(D)} \gamma_4 \right) + U_2^4 \left( -\hat{g}_{22}^{(D)} \gamma_4 \right) \\
 &\quad + U_3^4 \left( -\hat{g}_{23}^{(D)} \gamma_4 \right) \\
 \hat{\gamma}_{12}^{(D)} &= 2\hat{e}_{12}^{(D)} = 2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(D)}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(D)}}{\partial r_2} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(D)}}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^{(D)}}{\partial r_1} \right) = \left( \frac{\partial \hat{x}_1^{(D)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{x}_2^{(D)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{x}_3^{(D)}}{\partial r_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}_1^{(D)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{u}_2^{(D)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{u}_3^{(D)}}{\partial r_2} \right) + \\
 &\quad \left( \frac{\partial \hat{x}_1^{(D)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{x}_2^{(D)}}{\partial r_2}, \frac{\partial \hat{x}_3^{(D)}}{\partial r_2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}_1^{(D)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{u}_2^{(D)}}{\partial r_1}, \frac{\partial \hat{u}_3^{(D)}}{\partial r_1} \right) = \hat{g}_{11}^{(D)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(D)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{12}^{(D)} \frac{\partial \hat{u}_2^{(D)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{13}^{(D)} \frac{\partial \hat{u}_3^{(D)}}{\partial r_2} + \hat{g}_{21}^{(D)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(D)}}{\partial r_1} + \\
 &\quad + \hat{g}_{22}^{(D)} \frac{\partial \hat{u}_2^{(D)}}{\partial r_1} + \hat{g}_{23}^{(D)} \frac{\partial \hat{u}_3^{(D)}}{\partial r_1} = -\hat{g}_{11}^{(D)} U_1^1 \gamma_1 - \hat{g}_{11}^{(D)} U_1^2 \gamma_2 + \hat{g}_{11}^{(D)} U_1^3 (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{11}^{(D)} U_1^4 \gamma_4 - \hat{g}_{12}^{(D)} U_2^1 \gamma_1 - \hat{g}_{12}^{(D)} U_2^2 \gamma_2 \\
 &\quad + \hat{g}_{12}^{(D)} U_2^3 (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{12}^{(D)} U_2^4 \gamma_4 - \hat{g}_{13}^{(D)} U_3^1 \gamma_1 - \hat{g}_{13}^{(D)} U_3^2 \gamma_2 + \hat{g}_{13}^{(D)} U_3^3 (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{13}^{(D)} U_3^4 \gamma_4 - \hat{g}_{21}^{(D)} U_1^1 \gamma_1 + \\
 &\quad + \hat{g}_{21}^{(D)} U_1^2 (1 - \gamma_2) - \hat{g}_{21}^{(D)} U_1^3 \gamma_3 - \hat{g}_{21}^{(D)} U_1^4 \gamma_4 - \hat{g}_{22}^{(D)} U_2^1 \gamma_1 + \hat{g}_{22}^{(D)} U_2^2 (1 - \gamma_2) - \hat{g}_{22}^{(D)} U_2^3 \gamma_3 - \hat{g}_{22}^{(D)} U_2^4 \gamma_4 - \\
 &\quad - \hat{g}_{23}^{(D)} U_3^1 \gamma_1 + \hat{g}_{23}^{(D)} U_3^2 (1 - \gamma_2) - \hat{g}_{23}^{(D)} U_3^3 \gamma_3 - \hat{g}_{23}^{(D)} U_3^4 \gamma_4 = U_1^1 \left( -\hat{g}_{11}^{(D)} - \hat{g}_{21}^{(D)} \right) + U_2^1 \left( -\hat{g}_{12}^{(D)} - \hat{g}_{22}^{(D)} \right) + \\
 &\quad + U_3^1 \left( -\hat{g}_{13}^{(D)} - \hat{g}_{23}^{(D)} \right) + U_1^2 \left( -\hat{g}_{11}^{(D)} \gamma_2 + \hat{g}_{21}^{(D)} (1 - \gamma_2) \right) + U_2^2 \left( -\hat{g}_{12}^{(D)} \gamma_2 + \hat{g}_{22}^{(D)} (1 - \gamma_2) \right) + \\
 &\quad + U_3^2 \left( -\hat{g}_{13}^{(D)} \gamma_2 + \hat{g}_{23}^{(D)} (1 - \gamma_2) \right) + U_1^3 \left( \hat{g}_{11}^{(D)} (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{21}^{(D)} \gamma_3 \right) + U_2^3 \left( \hat{g}_{12}^{(D)} (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{22}^{(D)} \gamma_3 \right) + \\
 &\quad + U_3^3 \left( \hat{g}_{13}^{(D)} (1 - \gamma_3) - \hat{g}_{23}^{(D)} \gamma_3 \right) + U_1^4 \gamma_4 \left( -\hat{g}_{11}^{(D)} - \hat{g}_{21}^{(D)} \right) + U_2^4 \gamma_4 \left( -\hat{g}_{12}^{(D)} - \hat{g}_{22}^{(D)} \right) + U_3^4 \gamma_4 \left( -\hat{g}_{13}^{(D)} - \hat{g}_{23}^{(D)} \right)
 \end{aligned}$$

Подматрице  $\hat{\mathbf{B}}^{k(\Delta)}$  троугаоног домена D су

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}}^{1(D)} &= \begin{bmatrix} -\hat{g}_{11}^{(D)} \gamma_1 & -\hat{g}_{12}^{(D)} \gamma_1 & -\hat{g}_{13}^{(D)} \gamma_1 \\ -\hat{g}_{21}^{(D)} \gamma_1 & -\hat{g}_{22}^{(D)} \gamma_1 & -\hat{g}_{23}^{(D)} \gamma_1 \\ \gamma_1 \left( -\hat{g}_{11}^{(D)} - \hat{g}_{21}^{(D)} \right) & \gamma_1 \left( -\hat{g}_{12}^{(D)} - \hat{g}_{22}^{(D)} \right) & \gamma_1 \left( -\hat{g}_{13}^{(D)} - \hat{g}_{23}^{(D)} \right) \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{B}}^{2(D)} &= \begin{bmatrix} \hat{g}_{11}^{(D)} (1-\gamma_2) & \hat{g}_{12}^{(D)} (1-\gamma_2) & \hat{g}_{13}^{(D)} (1-\gamma_2) \\ -\hat{g}_{21}^{(D)} \gamma_2 & -\hat{g}_{22}^{(D)} \gamma_2 & -\hat{g}_{23}^{(D)} \gamma_2 \\ -\hat{g}_{11}^{(D)} \gamma_1 + \hat{g}_{21}^{(D)} (1-\gamma_2) & -\hat{g}_{12}^{(D)} \gamma_1 + \hat{g}_{22}^{(D)} (1-\gamma_2) & -\hat{g}_{13}^{(D)} \gamma_1 + \hat{g}_{23}^{(D)} (1-\gamma_2) \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{B}}^{3(D)} &= \begin{bmatrix} -\hat{g}_{11}^{(D)} \gamma_3 & -\hat{g}_{12}^{(D)} \gamma_3 & -\hat{g}_{13}^{(D)} \gamma_3 \\ \hat{g}_{21}^{(D)} (1-\gamma_3) & \hat{g}_{22}^{(D)} (1-\gamma_3) & \hat{g}_{23}^{(D)} (1-\gamma_3) \\ \hat{g}_{11}^{(D)} (1-\gamma_3) - \hat{g}_{21}^{(D)} \gamma_3 & \hat{g}_{12}^{(D)} (1-\gamma_3) - \hat{g}_{22}^{(D)} \gamma_3 & \hat{g}_{13}^{(D)} (1-\gamma_3) - \hat{g}_{23}^{(D)} \gamma_3 \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{B}}^{4(D)} &= \begin{bmatrix} -\hat{g}_{11}^{(D)} \gamma_4 & -\hat{g}_{12}^{(D)} \gamma_4 & -\hat{g}_{13}^{(D)} \gamma_4 \\ -\hat{g}_{21}^{(D)} \gamma_4 & -\hat{g}_{22}^{(D)} \gamma_4 & -\hat{g}_{23}^{(D)} \gamma_4 \\ \gamma_4 \left( -\hat{g}_{11}^{(D)} - \hat{g}_{21}^{(D)} \right) & \gamma_4 \left( -\hat{g}_{12}^{(D)} - \hat{g}_{23}^{(D)} \right) & \gamma_4 \left( -\hat{g}_{13}^{(D)} - \hat{g}_{23}^{(D)} \right) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

## 5.4 Трансформација деформација

Када смо у потпуности дефинисали коваријантне мембранске деформације троугаоних домена, потребно је извршити трансформацију деформација  $\hat{e}_{ij}^{m(\Delta)}$ , одређених према (5.3.1), на природне координатне осе  $r, s, t$  четворочворног елемента љуске, следећег облика[8]

$$\hat{e}_{ij}^{m(\Delta)} = \hat{e}_{kl}^{m(\Delta)} \left( \hat{\mathbf{g}}_i \cdot \hat{\mathbf{g}}^k \right) \left( \hat{\mathbf{g}}_j \cdot \hat{\mathbf{g}}^l \right), \quad i, j = 1, 2 \text{ и } k, l = 1, 2 \quad (5.4.1)$$

где су  $\hat{\mathbf{g}}^k$  и  $\hat{\mathbf{g}}^l$  контраваријантни вектори одговарајућег троугаоног домена.

У тензорском рачуну у криволинијском координатном систему, разликујемо коваријантне базне векторе, тангентне на координатне линије природног координатног система и контраваријантне векторе, управне на одговарајуће координатне површи.[10] Како је деформација тензорска величина, можемо мембранске деформације одговарајућег троугаоног домена представити као линеарну комбинацију рециброчних, контраваријантних, вектора

$$\hat{\mathbf{e}}^{m(\Delta)} = \hat{e}_{kl}^{m(\Delta)} \hat{\mathbf{g}}^k \otimes \hat{\mathbf{g}}^l$$

Како се при трансформацији тензора другог реда из једне базе у другу мењају само његове компоненте, док тензор као целина остаје непромењен, можемо трансформацију мембранских деформација троугаоних домена написати у следећем облику

$$\hat{\mathbf{e}}^{m(\Delta)} = \hat{e}_{kl}^{m(\Delta)} \hat{\mathbf{g}}^k \otimes \hat{\mathbf{g}}^l = \hat{e}_{pn}^{m(\Delta)} \hat{\mathbf{g}}^p \otimes \hat{\mathbf{g}}^n$$

Множењем претходног израза са  $\mathbf{g}_i$ , односно  $\mathbf{g}_j$  са леве стране, добијамо

$$\widehat{e}_{kl}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_i \cdot \widehat{\mathbf{g}}^k \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_j \cdot \widehat{\mathbf{g}}^l \right) = \widehat{e}_{pn}^{m(\Delta)} \left( \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^p \right) \left( \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^n \right) = \widehat{e}_{pn}^{m(\Delta)} \delta_{pi} \delta_{nj} = \widehat{e}_{ij}^{m(\Delta)}$$

где су  $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j$  коваријантни базни вектори дефинисани матрицом Јакобијана (2.4.6).

Вектори базе и рецибронне базе, односно коваријантни и контраваријантни вектори природног координатног система  $r, s, t$  су повезани изразима

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^p = \delta_{pi}$$

$$\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^n = \delta_{nj}$$

где су  $\delta_{pi}$  и  $\delta_{nj}$  Кронкерови симболи дефинисани изразима,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Иста веза такође важи и за коваријантне и контраваријантне базне векторе троугаоних домена

$$\widehat{\mathbf{g}}^i \cdot \widehat{\mathbf{g}}_j = \delta_{ij}$$

Контраваријантни базни вектори троугаоних домена,  $\widehat{\mathbf{g}}^k$  и  $\widehat{\mathbf{g}}^l$ , представљају чланове инверзне Јакобијеве матрице (5.3.3) јер важи [11]

$$\mathbf{g}^\alpha = \mathbf{i}_k \frac{\partial r^\alpha}{\partial x_k}$$

У развијеном облику једначина (5.4.1) изгледа

$$\begin{aligned} \widehat{e}_{ij}^{m(\Delta)} &= \widehat{e}_{11}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_i \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_j \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) + \widehat{\gamma}_{12}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_i \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_j \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) + \widehat{\gamma}_{21}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_i \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_j \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) + \widehat{e}_{22}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_i \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_j \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \\ &= \widehat{e}_{11}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_i \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_j \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) + 2\widehat{\gamma}_{12}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_i \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_j \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) + \widehat{e}_{22}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_i \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_j \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \end{aligned}$$

при чему су компоненте мембранских деформације  $\widehat{e}_{11}^{m(\Delta)}$ ,  $\widehat{e}_{22}^{m(\Delta)}$  и  $\widehat{\gamma}_{12}^{m(\Delta)}$  у природном координатном систему  $r, s, t$  једнаке

$$\begin{aligned} \widehat{e}_{11}^{m(\Delta)} &= \widehat{e}_{11}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) + 2\widehat{\gamma}_{12}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) + \widehat{e}_{22}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \\ \widehat{e}_{22}^{m(\Delta)} &= \widehat{e}_{11}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) + 2\widehat{\gamma}_{12}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) + \widehat{e}_{22}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \\ \widehat{\gamma}_{12}^{m(\Delta)} &= \widehat{e}_{11}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) + 2\widehat{\gamma}_{12}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) + \widehat{e}_{22}^{m(\Delta)} \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \end{aligned}$$

Очигледно је

$$\widehat{\mathbf{e}}^{m(\Delta)} = \begin{Bmatrix} \widehat{e}_{11}^{m(\Delta)} \\ \widehat{e}_{22}^{m(\Delta)} \\ \widehat{\gamma}_{12}^{m(\Delta)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) & \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) & 2 \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \\ \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) & \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) & 2 \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \\ \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) & \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) & 2 \left( \widehat{\mathbf{g}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^1 \right) \left( \widehat{\mathbf{g}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{g}}^2 \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{e}_{11}^{m(\Delta)} \\ \widehat{e}_{22}^{m(\Delta)} \\ \widehat{\gamma}_{12}^{m(\Delta)} \end{Bmatrix} = \widehat{\mathbf{T}}^{(\Delta)} \widehat{\mathbf{e}}^{m(\Delta)} \quad (5.4.2)$$

где је  $\widehat{\mathbf{T}}^{(\Delta)}$  матрица трансформације одговарајућег троугаоног домена. Приметимо да су ради краткоће писања у изразу (5.4.2) изостављени индекси  $\Delta$  код контраваријантних базних вектора који се за сваки троугаони домен разликују.

Подматрице  $\widehat{\mathbf{B}}^{k(\Delta)}$  одговарајућег троугаоног домена су једнаке

$$\widehat{\mathbf{B}}^k = \widehat{\mathbf{T}}\widehat{\mathbf{B}}^k \quad (5.4.3)$$

Сада се деформације одговарајућег троугаоног домена помоћу (5.3.5) могу представити у облику

$$\mathbf{e}^{-m(\Delta)} = \widehat{\mathbf{T}}^{(\Delta)}\widehat{\mathbf{B}}^{(\Delta)}\mathbf{U} \quad (5.4.4)$$

## 5.5 Предложено поље мембранских деформација

Користећи коваријантне мембранске деформације добијене из четири троугаона домена, предложено поље деформација, које ублажава закључавање односно осетљивост елемента на неправилост облика, је облика[8]

$$\tilde{e}_{ij}^m = a + br + cs + drs \quad i, j = 1, 2 \quad (5.5.1)$$

где су коефицијенти  $a, b, c, d$  добијени коришћењем коваријантних мембранских деформација насталих у троугаоним доменима,

$$a = \frac{1}{4} \left( \mathbf{e}_{ij}^{-m(A)} + \mathbf{e}_{ij}^{-m(B)} + \mathbf{e}_{ij}^{-m(C)} + \mathbf{e}_{ij}^{-m(D)} \right),$$

$$b = \frac{1}{2} \left( -\mathbf{e}_{ij}^{-m(D)} + \mathbf{e}_{ij}^{-m(C)} \right),$$

$$c = \frac{1}{2} \left( -\mathbf{e}_{ij}^{-m(B)} + \mathbf{e}_{ij}^{-m(A)} \right),$$

$$d = 0$$

Коначно, предложено ново поље мембранских деформација је

$$\tilde{e}_{ij}^m = \frac{1}{4} \left( \mathbf{e}_{ij}^{-m(A)} + \mathbf{e}_{ij}^{-m(B)} + \mathbf{e}_{ij}^{-m(C)} + \mathbf{e}_{ij}^{-m(D)} \right) + \frac{1}{2} \left( -\mathbf{e}_{ij}^{-m(D)} + \mathbf{e}_{ij}^{-m(C)} \right) r + \frac{1}{2} \left( -\mathbf{e}_{ij}^{-m(B)} + \mathbf{e}_{ij}^{-m(A)} \right) s$$

Приметимо да предложено поље деформација не садржи билинеарни члан ( $rs$ ) који изазива мембранско закључавање основног елемента љуске при дисторзионој геометрији.

С обзиром на трансформацију (5.4.2), у склади са (5.4.3) и (5.4.4), вектор деформације  $\mathbf{e}^m$  можемо написати у следећем облику

$$\mathbf{e}^m = \left\{ \frac{1}{4} \left( \widehat{\mathbf{T}}^{(A)}\widehat{\mathbf{B}}^{(A)} + \widehat{\mathbf{T}}^{(B)}\widehat{\mathbf{B}}^{(B)} + \widehat{\mathbf{T}}^{(C)}\widehat{\mathbf{B}}^{(C)} + \widehat{\mathbf{T}}^{(D)}\widehat{\mathbf{B}}^{(D)} \right) + \left( -\widehat{\mathbf{T}}^{(D)}\widehat{\mathbf{B}}^{(D)} + \widehat{\mathbf{T}}^{(C)}\widehat{\mathbf{B}}^{(C)} \right) r + \left( -\widehat{\mathbf{T}}^{(B)}\widehat{\mathbf{B}}^{(B)} + \widehat{\mathbf{T}}^{(A)}\widehat{\mathbf{B}}^{(A)} \right) s \right\} \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}$$

где су  $\widehat{\mathbf{T}}^{(\Delta)}$  одговарајуће матрице трансформације троугаоних домена (5.4.2), док је  $\widehat{\mathbf{B}}^{(\Delta)}$  матрица извода интерполационих функција троугаоних домена дефинисана у потпоглављу 5.3 за сваки троугаони домен. Одавде следи матрица  $\tilde{\mathbf{B}}$  у природном координатном систему која одговара предложеном пољу деформација (5.5.1).

## 6. Нумеричка анализа

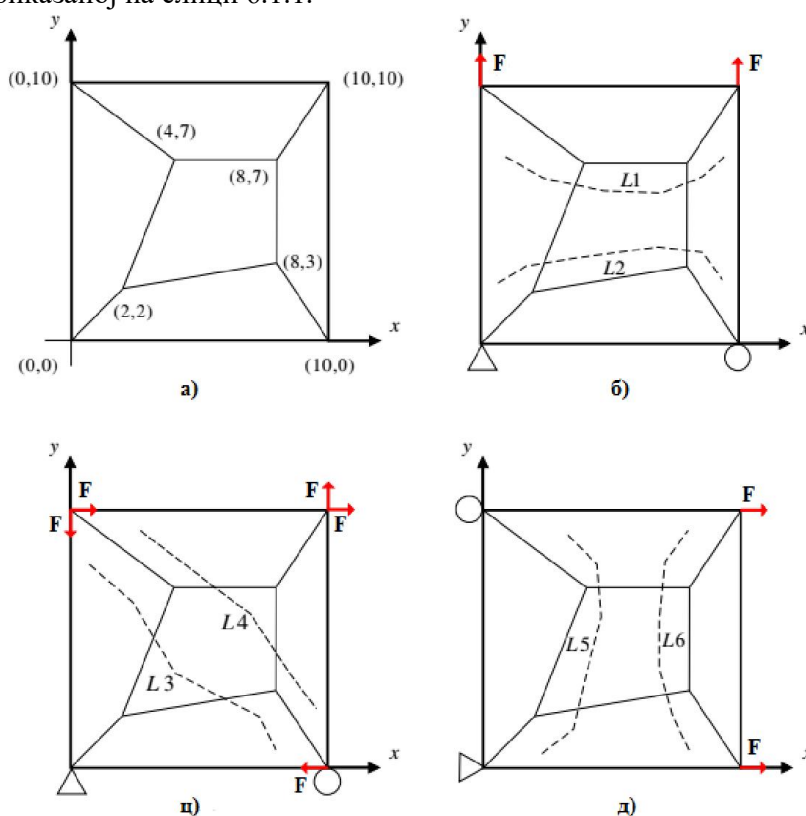
У овом поглављу извршен је patch тест (закрпа, енгл. *patch*) и дати су резултати нумеричке анализе типских тестних проблема. На примеру цилиндра слободних крајева је анализирана тачност и брзина конвергенције нумеричких ка тачном решењу у зависности од правилности и густине мреже коначних елемената љуске. Нумеричка анализа је спроведена помоћу програмског пакета РАК, коришћењем Гаусове интеграције  $2 \times 2$ .

Циљ поменутих тестова је анализа понашања основног коначног елемента, односно приказ осетљивости овог елемента на неправилност облика, која би применом коригованог елемента требало бити значајно смањена. Поред тога је показан и утицај параметра дебљине коначног елемента на брзину конвергенције и тачност решења.

### 6.1 Patch тест

Patch тест је тест којим се проверава способност елемента да прикаже стање константне деформације. Уколико елемент пролази patch тест решења која се добијају повећањем густине мреже коначних елемената конвергираће ка тачном решењу посматраног проблема.[12]

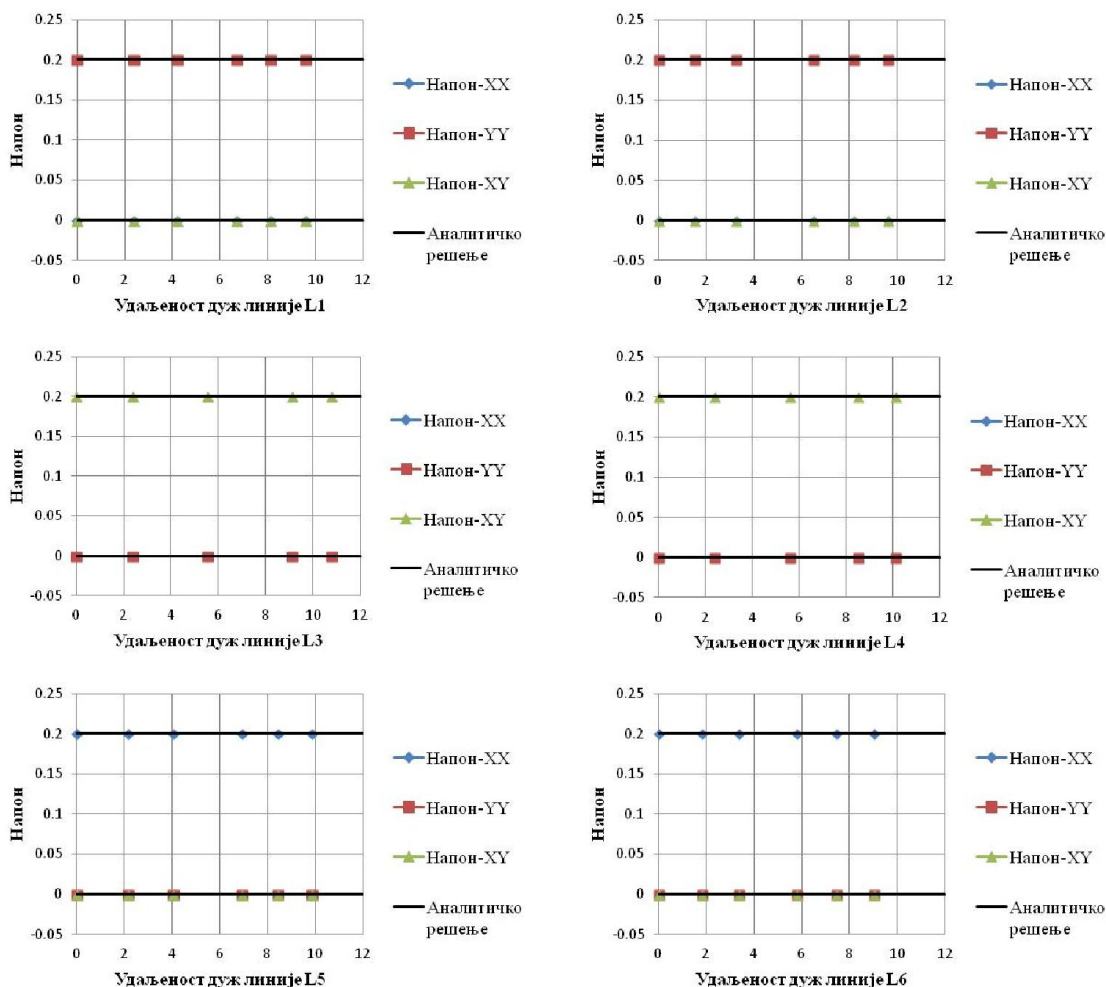
Способност репродуковања стања константног напона је испитана на мрежи од 5 елемената приказаној на слици 6.1.1.



Слика 6.1.1 а) Мрежа коначних елемената коришћена за patch тест;  
б)-д) Оптерећења, гранични услови и линије Гаусових  
тачака дуж елемента

Плоча је изложена минималном броју ограничења како би се избегла кретања крутог тела. За испитивање поља константног напона у угаоним чворовима елемената задају се силе  $F$ , стварајући на тај начин напонско поље у плочи, тачније нормалне напоне  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xx}$ , слика 6.1.1 б) и д) респективно, и смицајни напон  $\tau_{xy}$ , слика 6.1.1 ц).

Подаци о материјалу су:  $F=1\text{N}$ ,  $t=1\text{m}$ ,  $E=2.1 \times 10^6 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0.3$ . [8] Резултати patch теста дати су на следећим графицима, а добијени су нумеричком анализом напона у интеграционим тачкама дуж линија дефинисаних на слици 6.1.1.



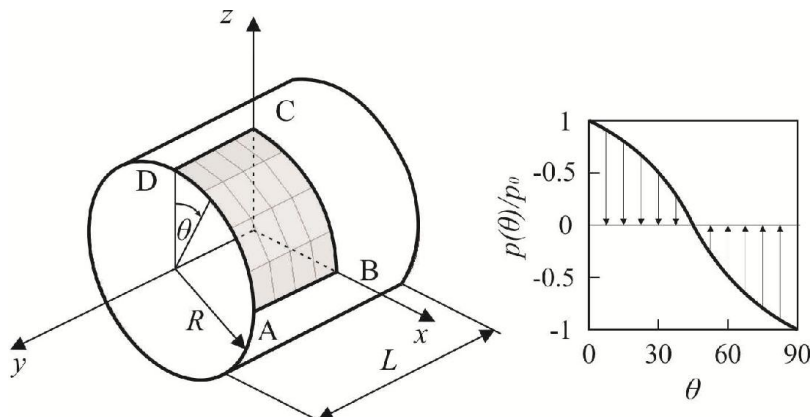
**График 6.1.1** Напони у интеграционионим тачкама дуж одговарајућих линија добијени patch тестом

Како се услед одговарајуће врсте напрезања јављају одговарајући напони тачних вредности, четвороугаони коначни елемент љуске пролази patch тест.

## 6.2 Цилиндрична љуска слободних крајева оптерећена притиском

Посматра се цилиндрична љуска дужине  $2L$ , полупречника  $R$  и униформне дебљине  $t$  оптерећена притиском расподеле  $p(\theta)$  управном на површину љуске, слика 6.2.1,

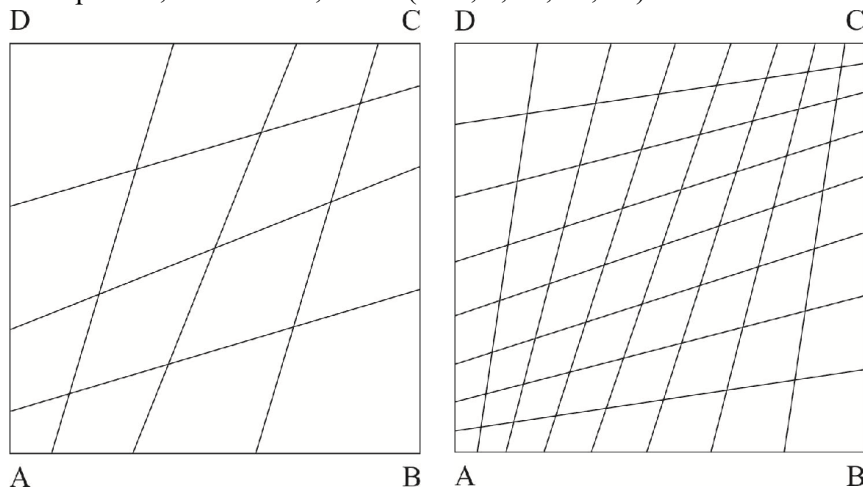
$$p(\theta) = p_0 \cos(2\theta)$$



Слика 6.2.1 Цилиндрична љуска слободних крајева оптерећена притиском расподеле  $p(\theta)$

Подаци о материјалу и димензије су:  $L=R=1\text{m}$ ,  $E=2 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu=1/3$ ,  $p_0=1 \text{ MPa}$ . [13]

Због постојања три равни симетрије моделира се само једна осмина конструкције која одговара области ABCD на слици 6.2.1. Гранични услови који одговарају љуски са слободним крајевима су:  $\nu = \varphi_1 = 0$  дуж BC,  $u = \varphi_2 = 0$  дуж DC и  $w = \varphi_1 = 0$  дуж AB. Цилиндар је моделиран правилном мрежом приказаној на слици слика 6.2.1, и дисторзионом мрежом, слика 6.2.2,  $N \times N$  ( $N=4, 8, 16, 32, 64$ ).



Слика 6.2.2 Дисторзиона мрежа за  $N=4$  (лево) и  $N=8$  (десно)

Како је познато да се понашање елемента значајно погоршава са смањењем односа дебљине љуске и карактеристичне дужине код проблема са доминантним савијањем, нумеричка решења ће бити одређена за три вредности параметра дебљине  $1/100$ ,  $1/1000$  и  $1/10000$  за обе врсте мреже. Референтно решење у односу на које се прати тачност и брзина конвергенције елемента је добијено моделирањем мреже правилним елементима четворочворне љуске густине  $72 \times 72$ .

Нумерички резултати укупног померања слободних чворова А и D, добијени коришћењем правилне мреже различите дебљине и различитог броја елемената дуж ивице цилиндра, дати су у табели 6.2.1, док су вредности референтних решења истих представљене табелом 6.2.2.

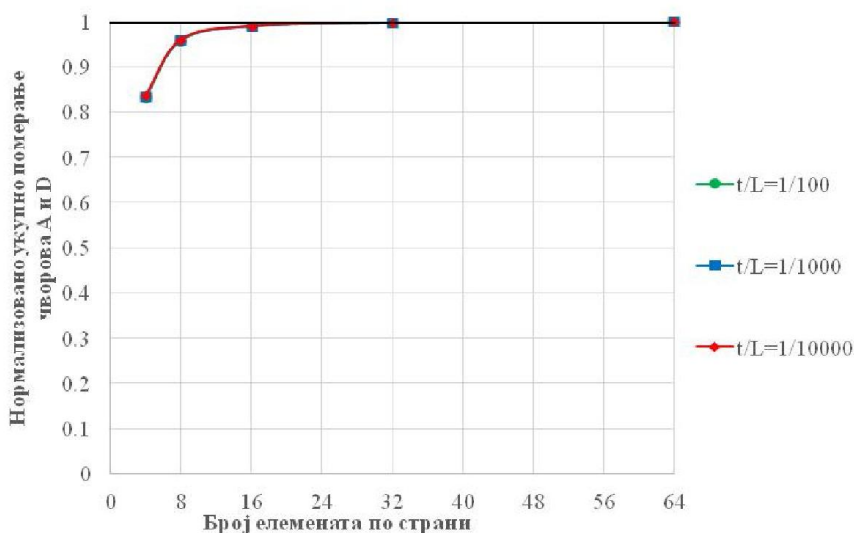
**Табела 6.2.1** Нумеричко решење за укупно померање слободних чворова А и D добијено коришћењем правилне мреже

| Мрежа | Укупно померање слободних чворова А и D [ПАК] |              |               |
|-------|-----------------------------------------------|--------------|---------------|
|       | $t/L=1/100$                                   | $t/L=1/1000$ | $t/L=1/10000$ |
| 4x4   | 4.7517                                        | 4719.1       | 4728500       |
| 8x8   | 5.4707                                        | 5427.9       | 5423000       |
| 16x16 | 5.628                                         | 5601.2       | 5592300       |
| 32x32 | 5.6981                                        | 5646.3       | 5633900       |
| 64x64 | 5.7094                                        | 5658.3       | 5645100       |

**Табела 6.2.2** Референтно решење укупног померања слободних чворова А и D добијено коришћењем правилне мреже

| Мрежа | Референтно решење укупног померања чворова А и D [ПАК] |              |               |
|-------|--------------------------------------------------------|--------------|---------------|
|       | $t/L=1/100$                                            | $t/L=1/1000$ | $t/L=1/10000$ |
| 72x72 | 5.7102                                                 | 5659.2       | 5645900       |

На графику 6.2.1 приказане су нормализоване криве конвергенције за цилиндар са слободним крајевима. Можемо приметити да су код правилне мреже одступања нумеричких вредности укупног померања слободних чворова од референтних веома мала за све три вредности параметра дебљине. Криве конвергенције које одговарају различитим дебљинама елемената се такоређи преклапају, односно параметар дебљине не утиче на тачност нумеричких решења, већ густина мреже. Повећањем густине мреже, независно од дебљине коначног елемента, нумеричка решења се приближавају референтним, односно долази до повећања тачности.



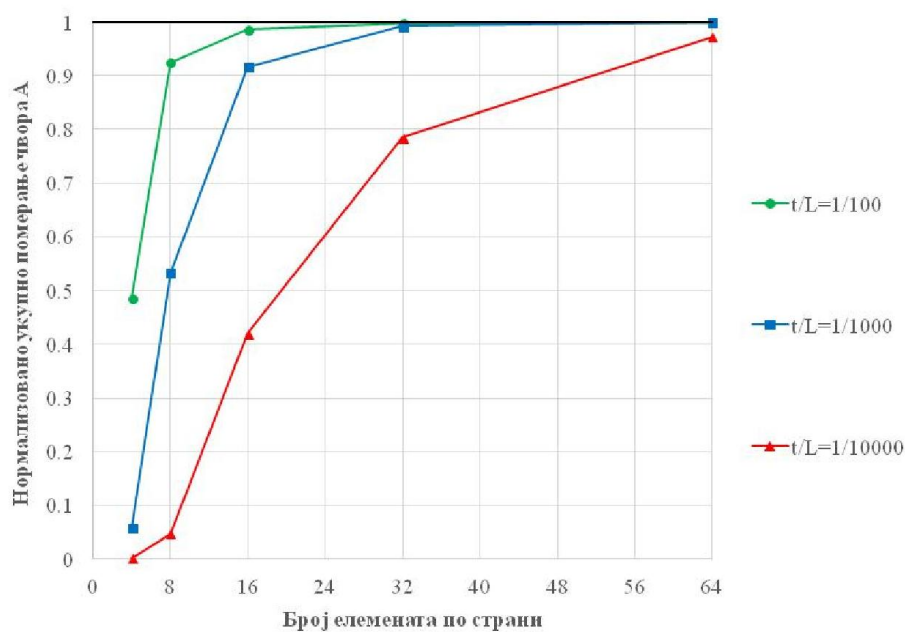
**График 6.2.1** Нормализовано укупно померање чворова А и D у зависности од броја елемената дуж стране

Нумерички резултати померања чворова А и D, добијени коришћењем дисторзионе мреже у складу са сликом 6.2.2, дати су у табели 6.2.3. Услед криве геометрије елемената укупна померања чворова А и D неће бити једнака међусобно као код правилне мреже.

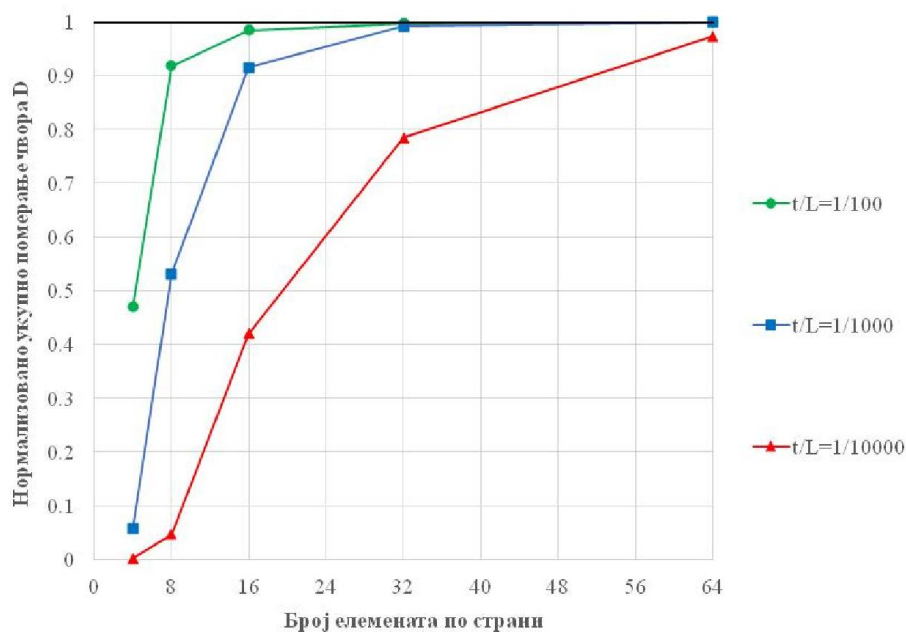
**Табела 6.2.3** Нумеричко решење за укупно померање слободних чворова А и D добијено коришћењем дисторзионе мреже

| Мрежа | Укупно померање слободних чворова А и D [PAK] |        |              |        |               |         |
|-------|-----------------------------------------------|--------|--------------|--------|---------------|---------|
|       | $t/L=1/100$                                   |        | $t/L=1/1000$ |        | $t/L=1/10000$ |         |
|       | Чвор А                                        | Чвор D | Чвор А       | Чвор D | Чвор А        | Чвор D  |
| 4x4   | 2.7741                                        | 2.684  | 325.04       | 322.15 | 10562         | 10557   |
| 8x8   | 5.2769                                        | 5.2439 | 3012.4       | 3008.5 | 265090        | 264140  |
| 16x16 | 5.6305                                        | 5.6197 | 5184.4       | 5178.6 | 2369200       | 2372400 |
| 32x32 | 5.6942                                        | 5.6913 | 5614.9       | 5612   | 4430500       | 4429500 |
| 64x64 | 5.7085                                        | 5.7077 | 5655.3       | 5654.4 | 5493100       | 5492400 |

Нормализоване криве конвергенције за укупно померање чворова А и D дате су на следећим графицима.



**График 6.2.2** Нормализовано укупно померање чвора А у зависности од броја елемената дуж стране



**График 6.2.3** Нормализовано укупно померање чвора  $D$  у зависности од броја елемената дуж страна

Са графика 6.2.2 и 6.2.3 јасно се може уочити главна препрека у анализи коначних елемената љуске, утицај параметра дебљине код дисторзионих елемената на тачност решења. Веома танке љуске изузетно споро конвергирају ка референтном решењу. Повећањем густине мреже, нумеричко решење танких љуски се изузетно споро и са веома великим одступањем приближава референтом решењу. Очигледно је да са смањењем дебљине четворочворочног елемента љуске при кривој геометрији брзина конвергенције ка референтном решењу опада, тј. дебље љуске при дисторзији показују бољу конвергенцију.

## 7. Закључак

Кључна идеја овог рада је формулација коригованог четвороугаоног четворочворног коначног елемента љуске. Увођењем средишње тачке 5 дефинисана су четири троугаона домена тако да се предложено поље мембранских деформација конструише користећи мембранске деформације троугаоних домена, елиминирајући на тај начин билинеарни члан у пољу деформација. Изложене су детаљно теоријске поставке овог елемента са поменутом корекцијом поља у циљу ублажавања мембранског закључавања које је нарочито заступљено код дисторзионих елемената.

У раду су такође нумеричком анализом на примеру цилиндра слободних крајева оптерећеног притиском расподеле  $p(\theta)$  показани главни проблеми које основни четвороугаони коначни елемент љуске прави, а који би применом коригованог елемента, представљеног у овом раду, требало бити значајно смањени. Чињеница да коначни елементи љуске показују променљиву осетљивост са смањењем дебљине, зависно од њихове геометрије и граничних услова, је потврђена на истом примеру. Уочено је да применом униформне мреже параметар дебљине нема такорећи никакав утицај на конвергенцију нумеричког решења, већ да на конвергенцију решења утиче густина саме мреже. Код дисторзионих елемената утицај параметра дебљине је нарочито изражен, са смањењем дебљине брзина конвергенције нумеричког решења ка тачном се значајно успорава. Елемент показује велику осетљивост на неправилност облика што је веома битна особина за општу примену, с обзиром да се у моделирању конструкције често не могу избећи дисторзионии коначни елементи.

Главни проблеми у анализи коначних елемента се тичу ублажавања закључавања које се јавља код љуски са доминантним савијањем, као што је цилиндар слободних крајева анализиран у овом раду. Тежња у анализи коначних елемената љуске је формулисати елемент који ће униформно конвергирати, независно од геометрије, граничних услова и његове дебљине. Наравно, такав елемент још увек не постоји и изузетно је тешко формулисати га, међутим применом корекције представљене у раду би осетљивост елемента на неправилност облика требало бити значајно смањена, те је даље неопходно уградити кориговани елемент у програмски пакет РАК и испитати перформансе истог на конкретним примерима.

## Литература

- [1] Lee PS, Noh HC, Bathe KJ. *Insight into 3-node triangular shell finite elements: the effect of element isotropy and mesh patterns*. Computers and Structures 2007;85:404-418. Преузето септембра 2016. са [http://web.mit.edu/kjb/www/Principal\\_Publications/Insight\\_into\\_3-node\\_Triangular\\_Shell\\_Finite\\_Elements\\_the\\_Effects\\_of\\_Element\\_Isotropy\\_and\\_Mesh\\_Patterns.pdf](http://web.mit.edu/kjb/www/Principal_Publications/Insight_into_3-node_Triangular_Shell_Finite_Elements_the_Effects_of_Element_Isotropy_and_Mesh_Patterns.pdf)
- [2] <http://www.shells.it/>. Преузето септембра 2016.
- [3] [https://www.flickr.com/photos/felipe\\_gabaldon/5192001055/](https://www.flickr.com/photos/felipe_gabaldon/5192001055/). Преузето септембра 2016.
- [4] Chapelle D, Bathe KJ. *The finite element analysis of shells-fundamentals*. Berlin: Springer; 2003. Доступно на [https://books.google.rs/books?id=ZUGBDWWS\\_UwC&pg=PP7&lpg=PP7&dq=shell%20structures%20bathe&source=bl&ots=2VBLV0SaxK&sig=EoXBqbphpkbID1y-qmX17Ogpgg4&hl=sr&sa=X&ved=0ahUKEwj\\_3pvDp63PAhVBlxoKHWUoDJcQ6AEIeTAR#v=onepage&q=shell%20structures%20bathe&f=false](https://books.google.rs/books?id=ZUGBDWWS_UwC&pg=PP7&lpg=PP7&dq=shell%20structures%20bathe&source=bl&ots=2VBLV0SaxK&sig=EoXBqbphpkbID1y-qmX17Ogpgg4&hl=sr&sa=X&ved=0ahUKEwj_3pvDp63PAhVBlxoKHWUoDJcQ6AEIeTAR#v=onepage&q=shell%20structures%20bathe&f=false)
- [5] Lee PS, Bathe KJ. *Development of MITC isotropic triangular shell finite elements*. Computers and Structures 2004;82:945-462. Преузето септембра 2016. са [http://web.mit.edu/kjb/www/Principal\\_Publications/Development\\_of\\_MITC\\_Isotropic\\_Triangular\\_Shell\\_Finite\\_Elements.pdf](http://web.mit.edu/kjb/www/Principal_Publications/Development_of_MITC_Isotropic_Triangular_Shell_Finite_Elements.pdf)
- [6] Којић М, Славковић Р, Живковић М, Грујовић Н. Метод Коначних елемената 1: Линеарна анализа. Крагујевац: Машински факултет у Крагујевцу; 2010.
- [7] Dvorkin EN, Bathe KJ. *A Continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis*. Eng. Comput. 1984;1:77-88. Преузето септембра 2016. са [http://www.simytec.com.ar/docs/Dvorkin\\_Bathe.pdf](http://www.simytec.com.ar/docs/Dvorkin_Bathe.pdf)
- [8] Ko Y, Lee PS, Bathe KJ. *The MITC4+ shell element and its performance*. Computers and Structures 2016;169:57-68
- [9] <http://www.gimnazijabp.me/matematika/ANALITICKA%20GEOMETRIJA.pdf>. Приступљено септембра 2016.
- [10] Алфировић И. Тензорски рачун и тензорска механика. Загреб: Голден маркетинг-Техничка књига; 2007. Преузето септембра 2016. са <https://www.scribd.com/doc/227652738/Tenzorski-Ra%C4%8Dun-i-Tenzorska-Mehanika>
- [11] Живковић М. Нелинеарна анализа конструкција. Крагујевац: Машински факултет у Крагујевцу; 2006.
- [12] Cook R. *Finite element modeling for stress analysis*. New York: John Wiley&Sons; 1995. Преузето октобра 2016. са <http://freeit.free.fr/Finite%20Element/Finite%20Element%20Modeling%20For%20Stress%20Analysis.pdf>
- [13] Bathe KJ, Iosilevich A, Chapelle D. An evaluation of MITC shell element. Computers and Structures 2000;75:1-30. Преузето октобра 2016. са <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.163.445&rep=rep1&type=pdf>