

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: **Машинско инжењерство**

Ниво студија: **Основне академске студије**

Модул: **Информатика у инжењерству**

Предмет: **Коначни елементи I**

Број индекса: **705/2012**

Данка Благоје Басарић
Магнетостатика
завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

Датум одбране: _____

Оцена: _____

1. **Др Мирослав Живковић** - ментор

2. _____

3. _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да опише основне појмове магнетностатике и примену методе коначних елемената у магнетностатици.

Препоручена литература:

- 1) Др Јован Сурутка – *Електромагнетика*, Београд, 1971.;
- 2) Антоније Р. Ђорђевић – *Електромагнетика*, Београд, 2012.;
- 3) Др Драгутин М. Величковић – *Збирка решених задатака из електромагнетике*, Ниш, 2000.;
- 4) В. М. Натарош – *Збирка испитних задатака и питања из електромагнетике*, Београд, 2008.;

Резиме

Магнетостатика има велику улогу и значај у решавању многих проблема који се односе на магнетизам и саму његову појаву коришћењем методе коначних елемената. Рад представља целокупан осврт на преглед једначина, метода и закона који се користе за описивање овог феномена. Кроз рад је изложен значај примене магнетостатике, приказане су како теоријске, тако и практичне основе. На крају рада дат је пример израчунавања магнетног поља константног извора струје.

Кључне речи: Магнетостатика, Метода коначних елемената, Једначине, Магнетно поље константног извора струје

Abstract

Magnetostatic has great importance and plays a major role and in solving many problems related to magnetism and its very presence using finite element method. The paper is an overall review of the governing equations, methods, and laws that are used to describe this phenomenon. Through the work the significance of magnetostatic are shown both theoretical and practical basis. At the end of the paper shows how to calculate the magnetic field of constant current sources.

Keywords: Magnetostatic, Finite element method, Equations, The magnetic field of constant current source

Садржај:

1. УВОД.....	6
2. ОПШТА ТЕОРИЈА МАГНЕТИЗМА.....	7
2.1. Историјат магнетизма	7
2.2. Магнетостатика	8
3. ЕЛЕКТРОСТАТИЧКО ПОЉЕ У ВАКУУМУ	9
3.1. Кулонов закон.....	9
3.2. Електрично поље.....	10
3.3. Гаусова теорема.....	12
3.4. Електростатички потенцијал.....	13
3.5. Понашање проводника у електростатичком пољу	14
3.6. Поасонова и Лапласова једначина.....	16
3.7. Гринова теорема	16
4. ЕНЕРГИЈА И СИЛЕ У ЕЛЕКТРОСТАТИЧКОМ ПОЉУ	18
4.1. Енергија система наелектрисаних тела	18
4.2. Механичке силе у електричном пољу	18
4.3. Електростатички притисак на површини наелектрисаних проводника у вакууму	19
4.4. Запреминске електростатичке силе у вакууму и изотропним диелектрицима	20
5. СТАЦИОНАРНО МАГНЕТНО ПОЉЕ – ЕЛЕКТРОМАГНЕТНА СИЛА И ВЕКТОР МАГНЕТНЕ ИНДУКЦИЈЕ	21
5.1. Електромагнетна сила и вектор магнетне индукције	21
5.2. Лоренцова сила.....	23
5.3. Холлов ефекат.....	23
5.4. Флукс вектора магнетне индукције	24
6. МАГНЕТНО ПОЉЕ У СУПСТАЊЦИЈАМА – У ПРИСУСТВУ МАТЕРИЈЕ.....	25
6.1. Величине које карактеришу магнетно поље у супстанци	25
6.2. Дијамагнетици	29
6.3. Парамагнетици	30
6.4. Феромагнетици	31
7. ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ МАКРОСКОПСКОГ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОГ ПОЉА У НЕПОКРЕТНИМ СРЕДИНАМА.....	36
7.1. Преглед основних једначина квазистационарног електромагнетног поља.....	36
7.2. Једначине дивергенције – Трећа и четврта Максвелова једначина.....	36
7.3. Струја електричног помераја и прва Максвелова једначина	37
7.4. Потпуни систем Максвелових једначина електромагнетног поља у непокретним срединама	39
7.5. Скаларни облик Максвелових једначина.....	40
7.6. Гранични услови	41
7.6.1. Гранични услов за нормалне компоненте електричне индукције	41
7.6.2. Гранични услов за нормалне компоненте магнетне индукције.....	41
7.6.3. Гранични услов за тангенцијалне компоненте јачине електричног поља.....	42
7.6.4. Гранични услов за тангенцијалне компоненте јачине магнетног поља.....	42
7.7. Поинтингова теорема.....	43
7.8. Теорема једнозначности решења Максвелових једначина	44
7.9. Теорема реципроцитета	46
7.10. Комплексни вектори – Максвелове једначине и Поинтингов вектор у комплексном облику	47
8. ПРИМЕНА МЕТОДЕ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА У МАГНЕТОСТАТИЦИ	51
8.1. Евалуације електромагнетног поља	51

8.1.1. Скаларни магнетни потенцијал.....	51
8.1.2. Векторски магнетни потенцијал	52
8.1.3. Векторски магнетни потенцијал заснован на ивицама.....	53
8.1.4. Магнетне силе.....	53
8.1.5. Џулова топлота у магнетној анализи.....	56
8.1.6. Резултати електричног скалар потенцијала.....	57
8.1.7. Електростатичке силе	58
8.1.8. Електричне конститутивне грешке.....	59
9. ПРИМЕР ИЗРАЧУНАВАЊА МАГНЕТНОГ ПОЉА КОНСТАНТНОГ ИЗВОРА СТРУЈЕ.....	60
10. ЗАКЉУЧАК.....	68
11. ЛИТЕРАТУРА.....	69

1. УВОД

Овај рад представља приказ једног од могућих начина обраде тематске јединице о магнетностатици. То значи да је поред објашњења појаве магнетизма било речи и о дефиницијама, експериментима, формулама и једначинама које су деценијама уназад испитивали и изучавали научници, а које су и данас, у тзв. савременом добу од великог значаја, како за научна, техничка, тако и за друга достигнућа.

Циљ рада је целовито објашњење појаве магнетизма, повезивање теорије и праксе и формирање научног погледа на свет који нас окружује.

После уводног дела, приказана је општа теорија магнетизма, као и функционалне зависности између физичких величина које описују магнетне појаве.

У трећем поглављу завршног рада акценат се ставља на електростатичко поље у вакууму, где су јасно дефинисани неки од закона и теорема у складу са темом.

Четврто поглавље се односи на енергију силе у електростатичком пољу.

У наставку, односно у петом поглављу приказано је стационарно магнетно поље и електромагнетна сила, као и вектор магнетне индукције, који је, када је реч о магнетностатици, изузетно битан појам.

У шестом поглављу детаљно је објашњено магнетно поље у супстанцијама, односно магнетно поље у присуству материје, где су јасно дефинисане величине које карактеришу магнетно поље у супстанци и читалац је упознат са значењем појмова: дијамагнетика, парамагнетика и феромагнетика.

Велики значај у магнетностатици и дугогодишњем експерименталном раду о магнетима и његовим појавама имају тзв. Максвелове једначине, које су наведене у седмом поглављу дипломског рада у коме је, такође, јасно приказан преглед основних једначина електромагнетног поља.

У осмом поглављу је описана примена методе коначних елемената у магнетностатици.

Пример израчунавања магнетног поља константног извора струје дат је у оквиру деветог поглавља завршног рада, као и коначни резултати добијени употребом програмског пакета ADINA.

У закључку су дате опште напомене и запажања везана за методички приступ обради теме, анализиран је степен остваривања зацртаних циљева и дат је својеврстан осврт на рад.

2. ОПШТА ТЕОРИЈА МАГНЕТИЗМА

Магнетизам и електрицитет представљају више облике кретања материје у физици, јер се за њихово објашњење узима у обзир више својстава супстанци него за ниже облике као што су механичко кретање и топлота. Наелектрисана честица која се креће изазива у околном простору магнетно поље. Магнетно поље је посредник којим се поуздано остварује магнетно узајамно деловање тела. То представља специјалан облик кретања чија природа још није поуздано позната, као ни природа гравитационог, или електричног поља. Познавање манифестовања магнетног поља још увек не значи и познавање његове природе. Није познато да ли наелектрисања у кретању емитују неку врсту специјалних честица, или долази до промена у структури околине, или се истовремено дешава и једно и друго. Постоји више претпоставки, од којих ни једна није доминирајућа, а ни потврђена, мада се и поред те чињенице великим успехом сматра сазнавање манифестовања магнетног поља и његовог деловања на наелектрисања у покрету. Сва та манифестовања и деловања су проучена и испоставило се да било које кретање наелектрисања изазива појаву магнетног поља и то не само код транслаторног, него и код ротационог кретања, као и код кретања око сопствене осе. Око сваког наелектрисања образује се електрично поље, а обзиром да кретање наелектрисања изазива образовање магнетног поља, следи да су ова два поља природно и нераздвојно повезана, чинећи електромагнетно поље. Магнетно и електрично поље је могуће посматрати и без обзира на њихово међусобно неслагање.

Од самог почетка изучавања магнетизма није све било лако и једноставно, већ су се различита теоријска и експериментална открића вековима посматрала, самим проучавањем, стварањем хипотеза и теорија, које нису увек биле тачне, па су често значиле и напредовање научних мисли. Оно што је данас познато о магнетизму чини се потуно јасним и логичним, посебно из разлога што велики број експеримената даје резултате који су сагласни са теоријом. У сваком случају, са сигурношћу се може рећи да је човек, од тренутка када се први пут суочио са занимљивом појмом магнетизма, до данас успео да ту појаву објасни на задовољавајући и разуман начин, а такође и да експерименталним радом успе да појасни како да се иста појава примењује у науци. Развој научне мисли о магнетизму текао је кроз различите епохе различитом брзином.

2.1. Историјат магнетизма

Према геолошким истраживањима, све је почело пре неколико хиљада година, када су се судариле европска и афричка плоча и када је из дубине Земље према површини потиснута једна врста до тада непознатих стена са чудним особинама – радило се о оксиду гвожђа, који је много касније назван "магнетит". Ова руда гвожђа има особине сталног магнета у свом природном стању и представља природни магнет. Људи су изучавањем и доласком до већих сазнања што се магнета тиче почели да праве вештачке и електромагнете. Природни и вештачки магнети чине групу тзв. сталних магнета, док електромагнети имају магнетне особине само док кроз њихове намотаје тече електрична струја. Магнет се у природи налази у облику руде магнетит Fe_3O_4 . Пре око 25 векова, у околини града Магнезије у Малој Азији, откривено је постојање ове гвоздене руде која има својство да привлачи гвоздене предмете и цела појава магнетизма добила је име по граду у којем је откривена.

У Старом и Средњем веку људи су научили како да праве магнете и чак су их корисно употребљавали, али нису знали да објасне магнетне појаве. Прво се веровало

да магнет има неку посебну моћ и да се њиме могу излечити разне болести. У јеку таквих веровања, енглески физичар William Gilbert је 1600. године написао књигу у којој је поставио темеље научног истраживања магнета и електрицитета. Пар стотина година касније, славни истраживач Roald Amundsen је утврдио постојање два пола код магнета – северни и јужни. Међутим, кључни моменат за науку о магнетизму десио се почетком XIX века, када је француски физичар и астроном Араго уочио да гвоздени предмети постају намагнетисани у близини места где је ударио гром. Веза између магнетних појава и електричне струје утврђена је са сигурношћу тек експериментима данског физичара Ersteda, када је направљен први електромагнет тако што се челична игла постави у стаклену цевчицу, а око те цевчице се намота бакарна жица. Када се кроз намотаје жице пустила струја, челична игла се намагнетисала и добијен је први електромагнет. Крајем XIX и почетком XX века, развила се квантно – механичка теорија за описивање појава у микросвету. Историјски гледано, развој науке о магнетизму може се поделити у две етапе: до Ерстедовог експеримента развијала се магнетностатика, а од Ерстедовог експеримента електромагнетизам.

2.2. Магнетностатика

Сасвим је логично да је развој науке о магнетизму почео од сталних магнета, проучавањем прво природних, а затим и оних који су добијени вештачким путем. Ти магнети су показивали појаву међусобног привлачења или одбијања, па се дошло до закључка да на њиховим крајевима постоје различити полови. Северни пол (N) и јужни пол (S) разликовали су се према смеру и врсти деловања и то су појмови који су уведени приликом проучавања магнетизма. Други појам који се логично наметао као мера узајамног дејства између половина је магнетна сила, по узору на, тада већ увелико познату, гравитациону и електростатичку силу. Експерименти су показали да су једни магнети јачи од других, па су онда јаче и њихове магнетне силе, односно што су магнети више размакнути, то је дејство магнетне силе слабије. Ове експерименталне резултате је требало претворити у функционалну зависност којом може да се израчуна интензитет магнетне силе између два пола. По аналогији са електростатиком, формирана је тада посебна област физике која је названа магнетностатика. Развијена је теорија магнетизма која је математички била сасвим слична теорији електрицитета. Да би се та теорија засновала и развила, морале су се уводити нове физичке величине, које су играле аналогну улогу већ познатим електростатичким величинама. Неке од тих величина биле су дуго времена фиктивне, у правом смислу те речи. Једна од тих величина била је магнетна маса (m). Према аналогијама са електричним диполом, сматрало се да на супротним крајевима магнета постоје магнетне масе $+m$ и $-m$. На сличан начин као што су се испитивале силе међу наелектрисаним телима у електростатици, приступило се и проучавању привлачних и одбојних сила између магнетних маса. Установљено је да се те велике силе у вакууму понашају по закону који има сличан облик као Кулонов закон за електростатичке силе, па је назван Кулонов закон за магнетне половине – сила међу магнетним половима управо је сразмерна масама тих половина, а обрнуто сразмерна квадрату њиховог међусобног растојања.

Детаљније објашњење предходно поменутог закона биће наведено у даљем наставку завршног рада.

3. ЕЛЕКТОСТАТИЧКО ПОЉЕ У ВАКУУМУ

3.1. Кулонов закон

Електростатичка поља представљају специјалан случај и најпростији вид једног сложеног комплекса физичких појава, обухваћених много ширим појмом електромагнетних поља.

Као полазна тачка у изучавању теорије електростатичког поља узима се у обзир познати Кулонов закон, откривен давне 1785. године. Кулон је експерименталним путем утврдио да два наелектрисана тела, чије су димензије мале у односу на њихово растојње, делују једно на друго механичком силом, која је сразмерна производу њихових електричних оптерећења q_1 и q_2 , а обрнуто је сразмерна квадрату њиховог међусобног растојања r :

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1)$$

Сила делује дуж правца који спаја тачке у којима су локализована оптерећења q_1 и q_2 и карактер јој је одбојан ако су оптерећења истог знака, а привлачан у случају оптерећења различитог знака.

Ако се са r_{12} обележи вектор положаја оптерећења q_2 у односу на q_1 , а са $r_{21} = -r_{12}$ вектор положаја оптерећења q_1 у односу на q_2 , Кулонов закон се може писати и у следећем векторском облику:

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{r_{12}}{r_{12}} \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{r_{21}}{r_{21}} \quad (3)$$

где је $\mathbf{F}_{12}$ сила којом оптерећење q_1 делује на q_2 , а $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ сила којом q_2 делује на q_1 .

Коефицијент сразмерности k је основна физичка константа и има димензију:

$$k(=) \frac{F \cdot r^2}{q^2} \quad (4)$$

Његова величина зависи од особина изолационе средине (диелектрика) у којој се врши опис, као и од избора јединица за мерење механичке силе, дужине и количине електрицитета. У MKSA систему јединица коефицијент k у вакууму има вредност приближно:

$$k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2 \quad (5)$$

У рационалном начину писања једначина коефицијент k се пише у облику:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon} \quad (6)$$

па Кулонов закон гласи:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (7)$$

Константа ϵ се назива диелектрична константа или диелектрична пропустљивост и у вакууму њена вредност износи:

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} C^2 / Nm^2 \quad (8)$$

На основу врло тачних мерења брзине светлости утврђена је вредност диелектричне константе вакуума:

$$\varepsilon_0 = 8.855 \cdot 10^{-12} C^2 / Nm^2 \quad (9)$$

или F / m .

Чињеница да сила између два електрична оптерећења зависи од особина средине у којој се она налазе, наговештава велики значај средине у електромагнетским процесима уопште.

3.2. Електрично поље

Електрично поље је физичко стање у околини наелектрисаних тела и електричних оптерећења које се видно манифестује у појави механичке силе, која делује на пробно електрично оптерећење унесено у поље.

Ако се у простор између наелектрисаних тела унесе пунктуално електрично оптерећење Δ_q , које је толико мало да се његов утицај на расподелу електричних оптерећења која стварају поље може занемарити, на њега ће деловати механичка сила чији су интензитет, правац и смер потпуно одређени у свакој тачки простора.

У једној тачки поља интензитет силе је сразмеран пробном оптерећењу Δ_q , док правац и смер остају непромењени.

Оснобна манифестација електричних поља се користи за дефиницију квантитативне карактеристике поља, која се назива јачина електричног поља. Јачина поља је вектор који се обележава симболом $\mathbf{K}$ и дефинише се као количник механичке силе, којом поље дејствује пробну количину електрицитета, као и саме количине електрицитета:

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}}{\Delta_q} \quad (10)$$

Вектор јачине поља има правац и смер силе која делује на позитивно пробно оптерећење, а интензитет му је бројно једнак сили која делује на јединично оптерећење. Јачина електричног поља је количник силе и електричног оптерећења:

$$K(=) \frac{F}{q} \quad (11)$$

а једница је N / C (њутн/кулон), којој је еквивалентна и јединица V / m (волт/метар).

Електрично поље пунктуалног оптерећења q одређује се непосредно из Кулоновог закона и диференцијалног обрасца. Ако се у тачки, чији је положај у односу на оптерећење q одређен потегом r , донесе пробно оптерећење Δ_q , на њега ће деловати Кулонова сила:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\Delta_q}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (12)$$

па је:

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}}{\Delta_q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (13)$$

Интензитет вектора $\mathbf{K}$ је:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad (14)$$

Електрично поље пунктуалног оптерећења је радијално, а интензитет му је обрнуто сразмеран квадрату одстојања r . Вектор поља има правац и смер вектора положаја тачке ако је оптерећење позитивно, а обрнут смер ако је оптерећење негативно.

Електрична оптерећења могу бити континуално расподељена у одређеном домену и задата су функцијом густине:

$$\rho = \frac{d_q}{dV} \quad (15)$$

где је d_q количина оптерећења садржана у елементу запремине dV , или пак расподељена по некој површини, када је њихову расподелу лакше дефинисати површинском густином:

$$\eta = \frac{d_q}{dS} \quad (16)$$

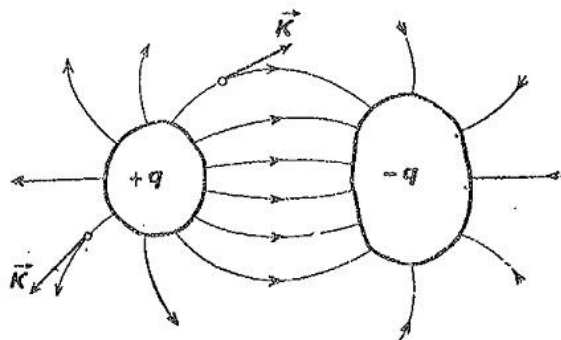
где је d_q количина оптерећења на елемент површине.

Електрично поље је векторско поље, што значи да се може окарактерисати једнозначном векторском функцијом $\mathbf{K}(x, y, z)$. Векторска поља се могу представити на врло очигледан начин помоћу тзв. линија поља, односно линија силе. Линија поља се дефинише као линија чија се тангента у свакој тачки поклапа са правцем вектора поља.

До одређивања једначина линија поља се долази ако се узме да су $\mathbf{K}_x, \mathbf{K}_y, \mathbf{K}_z$ пројекције вектора поља на координате осе, а d_x, d_y, d_z пројекције елемената линије поља, па се на основу тога даје дефиниција да је:

$$\frac{d_x}{K_x} = \frac{d_y}{K_y} = \frac{d_z}{K_z} \quad (17)$$

Интегришући овај систем диференцијалних једначина, где су $\mathbf{K}_x, \mathbf{K}_y, \mathbf{K}_z$ задате функције, могу се наћи и једначине линија поља. Скуп линија се назива спектар поља и он даје јасну представу о правцу и смеру вектора $\mathbf{K}$ у свим тачкама поља. На слици 1 приказан је пример електричног поља помоћу линија, у случају два тела наелектрисана електрицитетом супротног знака. Интензитет поља је сразмеран густини линија, тј. броју линија које пролазе кроз јединицу површине управне на линије у посматраној тачки.



Слика 1: Пример представља електрично поље помоћу линија

3.3. Гаусова теорема

Ако се пунктално електрично оптерећење q налази унутар домена ограниченог произвољном затвореном површином, чија је позитивна нормала оријентисана напоље, вектор електричног поља уопште има различит интензитет у разним тачкама површине и различито је оријентисан у односу на нормалу. Кроз сваки елемент површине dS вектор $\mathbf{K}$ ствара елементарни флуks, дефинисан производом $KdS \cos \alpha = K_n dS$, где је α угао који вектор $\mathbf{K}$ заклапа са позитивном нормалом, а K_n пројекција вектора $\mathbf{K}$ на нормалу. Ако се са dS обележи вектор чији је интензитет једнак површини dS , а правац и смер му се поклапају са правцем и смером позитивне нормале на ту површину, елементарни флуks ($d\psi_K$) се може писати у виду скаларног производа:

$$d\psi_K = \mathbf{K} d\mathbf{S} \quad (18)$$

Укупни излазни флуks кроз затворену површину S је дат површинским интегралом:

$$\psi_K = \oint_S \mathbf{K} d\mathbf{S} \quad (19)$$

Пошто је $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$, елементарни флуks добија облик:

$$d\psi_K = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dS}{r^2} \cos \alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dS_n}{r^2} \quad (20)$$

где је $dS_n = dS \cos \alpha$ пројекција елементарне површине на раван управну на потег r што спаја пунктално оптерећење са елементарном површином. Пошто је елементарни телесни угао $d\Omega$, под којим се виде површине dS и dS_n дефинисан односом

$$d\Omega = \frac{dS_n}{r^2} = \frac{dS \cos \alpha}{r^2}, \text{ може се написати да је } d\psi_K = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

Према томе, укупни излазни флуks кроз затворену површину је:

$$\Psi_K = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (21)$$

и овај израз представља Гаусову теорему, изведену за случај усамљеног пункталног оптерећења. Излазни флуks вектора јачине електричног поља кроз затворену површину једнак је количнику из електричног оптерећења и диелектричне константе. Вредност флуksа не зависи ни од облика затворене површине, ни од положаја пункталног оптерећења којом је обухваћено.

Ако површина S обухвата n произвољно лоцираних пункталних оптерећења, укупни флуks је једнак алгебарском збиру парцијалних флуksова које стварају поједина оптерећења:

$$\oint_S \mathbf{K} d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \quad (22)$$

Када су електрична оптерећења континуално расподељена и када је њихов распоред одређен функцијом густине ∂ , Гаусова теорема се пише у облику:

$$\oint_S \mathbf{K} d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \partial dV \quad (23)$$

где запремински интеграл треба рачунати по домену V који обухвата затворена површина S . Овај израз представља најопштију формулацију Гаусове теореме, која гласи да је излазни флуks вектора електричног поља кроз произвољну затворену

површину једнак количнику из укупне површине електричних оптерећења, обухваћених том површином и диелектричне константе.

У својој суштини, Гаусова теорема представља посебан облик исказивања основног закона електростатике, да се јачина поља пункталног оптерећења мења обрнуто сразмерно квадрату одстојања.

Поред тога што представља фундаменталну теорему електростатичких поља у вакууму, Гаусова теорема омогућава непосредно и врло једноставно израчунавање јачине електричног поља у неким специјалним и важним случајевима, када поље поседује висок степен симетрије.

3.4. Електростатички потенцијал

Електростатичко поље, као и поље гравитације, припада класи конзервативних поља. Оваква класификација проистиче из особине електростатичког поља да је рад сила поља при померању пробног оптерећења по затвореној контури једнак нули:

$$\mathbf{A} = \oint \mathbf{F} d\mathbf{l} = \Delta q \oint \mathbf{K} d\mathbf{l} = 0 \quad (24)$$

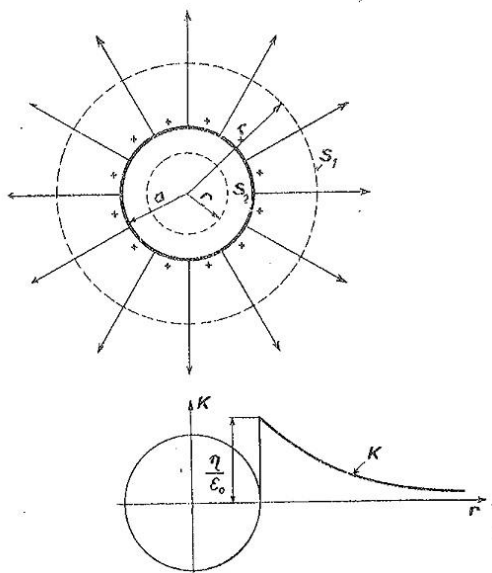
У свакој тачки у пољу може се приписати једна, једнозначно одређена, скаларна величина дефинисана функцијом:

$$\varphi(x, y, z) = \int_M^P \mathbf{K} d\mathbf{l} \quad (25)$$

која се назива функција потенцијала.

Функција потенцијала φ описује електростатичко поље на потпуно равноправан начин као и векторска функција јачине поља $\mathbf{K}$. Потенцијал је знатно погоднији за рад, јер је представљен скаларном функцијом.

Ако се једначина функције потенцијала помножи са Δq , може се закључити да је потенцијал бројно једнак раду који силе поља изврше померајући позитивно јединично оптерећење из тачке M у референтну тачку P (слика 2).



Слика 2: Затворена површина S_2

Референтна тачка P се бира произвољно, а при њеном избору обично се руководи природом решавањем проблема. Пошто је, према функцији потенцијала, вредност потенцијала референтне тачке једнак нули, она се назива и тачком нултог потенцијала.

У великом броју случајева тачка нултог потенцијала се узима у бесконачности, па је тада:

$$\varphi = \int_M^{\infty} \mathbf{K} d\mathbf{l} \quad (26)$$

Према овој функцији, потенцијал је бројно једнак раду који изврше силе поља померајући јединично позитивно пробно оптерећење из посматране тачке у бесконачност.

Функције потенцијала φ и φ' , одређене у односу на различите референтне тачке P и P' , разликују се за једну исту константу у свим тачкама поља. Пошто је вредност потенцијала независна од пута интеграљења, онда је:

$$\varphi' = \int_M^{P'} \mathbf{K} d\mathbf{l} = \int_M^P \mathbf{K} d\mathbf{l} + \int_P^{P'} \mathbf{K} d\mathbf{l} = \varphi + \int_P^{P'} \mathbf{K} d\mathbf{l} \quad (27)$$

Обзиром да последњи члан не зависи од текућих координата x, y, z он је константа, па је $\varphi' - \varphi = \text{const}$.

Потенцијална разлика, која се обележава са $U_{MN} = \varphi_M - \varphi_N$, има исту природу као и потенцијал: $U(=)\varphi(=)Kl$.

На основу тога, јединица потенцијала и потенцијалне разлике у *MKSA* систему је:

$$U_u = \frac{\text{njutnmetar}}{\text{kulon}} = \text{volt} = V.$$

Отуда је и јединица јачине електричног поља, која се добија као количник потенцијалне разлике и дужине:

$$K_u = \frac{\text{volt}}{\text{metar}} = \frac{V}{m} \quad (28)$$

Ако је електрично оптерећење континуално расподељено у неком домену V и густина му је ∂ , домен се може изделити на елементе dV и електрична оптерећења ∂dV , које садрже поједини елементи и сматрати се пунктуалним оптерећењима.

Сумирањем потенцијала елементарних оптерећења може се израчунати укупни потенцијал:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\partial}{r} dV \quad (29)$$

У случају површински расподељених оптерећења, чија је густина η , потенцијал је дат такозваним површинским интегралом:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\eta}{r} dS \quad (30)$$

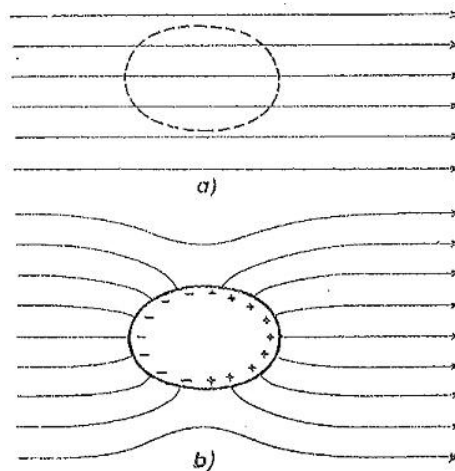
3.5. Понашање проводника у електростатичком пољу

Ако се неоптерећен проводник унесе у електростатичко поље које потиче од других наелектрисаних тела, доћи ће до краткотрајног поремећаја електростатичке равнотеже и померања електричних оптерећења у свим проводницима система, а посебно у унесеном проводнику. Лако покретљиви слободни електрони у проводнику почеће да се крећу под утицајем примарног електричног поља и кретаће се све дотле док се, због прегруписавања електричних оптерећења, не успостави ново равнотежно

стање. Електростатичка равнотежа захтева да електрично поље у унутрашњости, као и његова тангенцијална компонента на површини проводника, буду једнаки нули.

На површини неутралног проводника јављају се, због померања слободних електрона, индукована електрична оптерећења и то негативна на оним деловима површине где линије електричног поља улазе у проводник, а позитивна на оним деловима где линије излазе из проводника. Негативна електрична оптерећења јављају се на местима где је присутан вишак електрона, док су позитивна електрична оптерећења присутна на местима услед мањка електрона. Пошто је проводник пре уношења у електрично поље био неоптерећен, сумарно електрично оптерећење на површини проводника мора бити једнако нули.

Расподела оптерећења мора бити таква да њихово секундарно поље, у потпуности поништи примарно спољно поље у унутрашњости проводника. Због индукованих електричних оптерећења долази до измене и у структури поља ван проводника.



Слика 3: Линије поља пре и после уношења проводника

Поља и индукована оптерећења морају задовољити граничне услове формулисане следећом релацијом:

$$\mathbf{K} = \frac{\eta}{\epsilon_0} \mathbf{n} \quad (31)$$

где је $\mathbf{n}$ нормала на површину проводника, оријентисана напоље.

Овај израз формулише граничне услове на површину проводника, у стању електростатичке равнотеже: вектор јачине електричног поља увек је управан на површину проводника, а интензитет му је једнак густини површинског наелектрисања подељеног са ϵ_0 и та функција представља гранични услов.

3.6. Поасонова и Лапласова једначина

Решавање проблема електростатике знатно се олакшава ако се уместо са вектором $\mathbf{K}$ ради са потенцијалом φ . Веза између компонената јачине поља и потенцијала у Декартовом систему дата је следећим обрасцима:

$$K_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (32)$$

$$K_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (33)$$

$$K_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (34)$$

Ако се ови изрази за компоненте поља унесу у диференцијални облик Гаусове теореме, добија се следећа једначина:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (35)$$

која је позната под именом Поасонова једначина.

Ова нехомогена парцијална диференцијална једначина другог реда одређује локалну везу између скалар-потенцијала и густине електричних оптерећења.

У доменима где нема електричних оптерећења користе се следеће једначине:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (36)$$

$$\operatorname{divgrad} \varphi = 0 \quad (37)$$

Ове једначине се називају Лапласовом једначином.

Међутим, врло често се, због скраћења писања " $\operatorname{divgrad}$ ", обележава симболом Δ , који се назива и Лапласов оперетор.

Према томе, Поасонова и Лапласова једначина се могу писати и у облику:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (38)$$

$$\text{и} \\ \Delta \varphi = 0 \quad (39)$$

3.7. Гринова теорема

Гринова теорема представља једну од основних интегралних релација векторске анализе и показује се изванредно корисном у анализи неких проблема теорије електромагнетских поља.

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \oint_S \mathbf{a} d\mathbf{S} \quad (40)$$

где је $\mathbf{a}$ произвољна векторска функција, која је заједно са својим првим изводом непрекидна у домену интеграције V .

Ако се уведу две произвољне скаларне функције φ и ψ , чији су први и други извод непрекидни у домену V , образоваће се вектор $\mathbf{a} = \psi \operatorname{grad} \varphi$.

Ако се измене улоге функција φ и ψ и ако се Гринова теорема примени на вектор $\varphi \text{grad} \psi$, добиће се следећа релација:

$$\int_V [\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi] dV = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (41)$$

4. ЕНЕРГИЈА И СИЛЕ У ЕЛЕКТРОСТАТИЧКОМ ПОЉУ

4.1. Енергија система наелектрисаних тела

Сваки систем наелектрисаних тела садржи одређену количину енергије, која је, према закону о одржавању енергије, управо једнака раду извршеном у процесу електричног оптерећивања система. Под одређеним условима ова енергија се може трансформисати у друге видове енергије.

Када се одреди енергија система од n електрично оптерећених проводника, чији су потенцијали $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots, \varphi_n$, а електрична оптерећења $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_n$, потребно је против сила извршити рад dA_k , да би се са нивоа нултог потенцијала на k -ти проводник донело елементарно оптерећење dq_k .

$$dA_k = \varphi_k dq_k \quad (42)$$

Прираштај енергије система, изазван доношењем елементарног оптерећења је:

$$dW_k = dA_k.$$

Да би се са нивоа нултог потенцијала на сваки проводник донела елементарна количина електрицитета $dq_k = q_k dx$, која је сразмерна његовом коначном оптерећењу, потребно је извршити рад:

$$dA = \sum_{k=1}^n \varphi_k x q_k dx \quad (43)$$

Рад који се изврши у целом процесу оптерећивања је:

$$A = \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k \int_{x=0}^1 x dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k \quad (44)$$

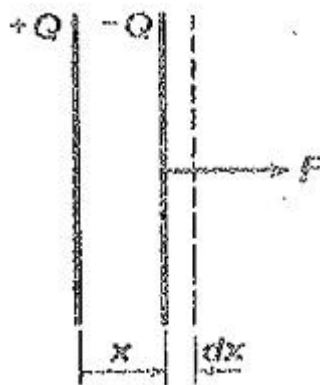
Према закону о одржавању енергије електростатичка енергија система је једнака овом раду:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k \quad (45)$$

4.2. Механичке силе у електричном пољу

У случају када су у питању два или више наелектрисаних тела произвољног облика и у произвољном међусобном положају, Кулонов закон се не може директно примењивати, али се може дати општа метода за израчунавање сила које делују на поједина тела електростатичког система. Та метода је заснована на принципу виртуелних померања и закону о одржању енергије.

Да би се објаснио принцип методе, посматран је једноставан случај равног кондензатора, код кога је растојање између електрода, x , мало у односу на димензије електрода (слика 4).



Слика 4: Једноставан пример равног кондензатора

Ако се електроде оптерете количинама наелектрисања $+Q$ и $-Q$, између њих ће деловати сила привлачења. Енергија оптерећеног кондензатора је:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (46)$$

где је :

$$C = \varepsilon \frac{S}{x} \quad (47)$$

Ако се растојање између електрода повећа за dx , и при томе оптерећење Q остане исто, енергија кондензатора ће се повећати за износ:

$$dW = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{Q^2}{S} (x + dx) - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{Q^2}{S} x = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{Q^2}{S} dx \quad (48)$$

Електростатичка сила која се јавља између електрода се добија на следећи начин:

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{1}{2\varepsilon} \frac{Q^2}{S} \quad (49)$$

4.3. Електростатички притисак на површини наелектрисаних проводника у вакууму

Ако се посматра кружни елемент dS површине наелектрисаног проводника у тачки где је густина површинског наелектрисања η непосредно уз елемент са стране вакуума постоји јачина поља:

$$\mathbf{K} = \frac{\eta}{\varepsilon_0} \mathbf{n} \quad (50)$$

где је $\mathbf{n}$ јединични вектор нормале на површину оријентисан од проводника ка вакууму. Са друге стране елемента, односно у унутрашњости проводника, јачина поља мора бити једнака нули: $\mathbf{K} = 0$.

Да би се одредила сила којом поље дејствује на уочени елемент површине проводника, пре свега се поље $\mathbf{K}$ мора представити као геометријски збир двеју компонената: $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$, где је $\mathbf{K}_1$ поље које потиче од оптерећења на посматраном елементу површине dS , а $\mathbf{K}_2$ поље које стварају оптерећења која су расподељена на остатку површине и другим проводницима електростатичког система. Оптерећење

$dq = \eta dS$, које је локализовано на елементарној површини dS , налази се у страном пољу јачине K_2 , па на њега делује електростатичка сила :

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{K}_2 = \eta dS\mathbf{K}_2 \quad (51)$$

Сила која дејствује на елемент површине наелектрисаног проводника је нормална на површину и оријентисана од проводника ка вакууму, без обзира на алгебарски знак наелектривања. Сила по јединици површине проводника, односно електростатички притисак износи:

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta^2}{\epsilon_0} \mathbf{n} \quad (52)$$

или

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{n} \quad (53)$$

Треба нагласити да су електростатички притисци, као и електричне силе уопште, врло мали и да се практично могу користити само у електричним мерењима.

4.4. Запреминске електростатичке силе у вакууму и изотропним диелектрицима

На електрична оптерећења, која се налазе у елементу запремине dV , електрично поље дејствује силом:

$$d\mathbf{F} = \rho \mathbf{K} dV \quad (54)$$

Количник из силе и елемената запремине дефинише запреминску густину електростатичке силе:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \rho \mathbf{K} \quad (55)$$

при чему је симбол $\mathbf{f}$ у овом члану употребљен за запреминску густину електростатичких сила.

У случају када се слободна електрична оптерећења налазе у некој диелектричној супстанци, израз за запреминску густину силе се знатно компликује због присуства везаних електричних оптерећења, на која електрично поље такође дејствује одређеним силама.

Израз за запреминску густину електростатичких сила у диелектрику се одређује уз помоћ принципа виртуелних померања, која се користе и за одређивање сила између наелектрисаних тела.

Према закону о одржању енергије, рад мора бити једнак негативном прираштају електростатичке енергије система, односно:

$$\delta A = -\delta W \quad (56)$$

Даљим извођењем опште познатих функција, долази се до тражене запреминске густине електростатичких сила, која има следећи облик:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{K} - \frac{1}{2} \mathbf{K}^2 \text{grad} \epsilon + \frac{1}{2} \text{grad} (K^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \tau) \quad (57)$$

при чему је τ диелектрична константа функција густине диелектрика.

5. СТАЦИОНАРНО МАГНЕТНО ПОЉЕ – ЕЛЕКТРОМАГНЕТНА СИЛА И ВЕКТОР МАГНЕТНЕ ИНДУКЦИЈЕ

У околини сталних магнета и проводника кроз које протиче електрична струја јављају се следеће заједничке, карактеристичне појаве:

- а) магнетска игла има тенденцију да се постави у одређени положај, а гвоздени и феромагнетски предмети уопште, као и стални магнети, подвргнути су дејству механичких сила;
- б) проводник кроз који протиче електрична струја бива подвргнут дејству механичких сила, које се називају електромагнетским силама;
- в) у проводницима који се релативно крећу у односу на сталне магнете или струјна кола индукују се електромоторне силе.

Поменуте појаве су видљиве манифестације посебног физичког стања у околини магнета, односно кола кроз која протиче електрична струја, а које се назива магнетним пољем.

Прва сазнања о повезаности електричних и магнетних појава дао је дански физичар Ерстед, који је открио да електрична струја дејствује механичком силом на магнетну иглу постављену у близини проводника кроз који протиче електрична струја, што је и објашњено у другом поглављу завршног рада.

Данас се поуздано зна да је магнетно поље неизбежан пратила и главни симптом постојања електричне струје и кретања електричних оптерећења уопште. Такође, према данашњем схватању електромагнетских појава, којима су највише допринели Фарадеј и Максвел, није више могуће правити изразиту поделу и проучавати магнетна поља независно од електричних. Електричне и магнетне појаве су у толикој мери међусобно повезане да се с правом може говорити о јединственом електромагнетском пољу, коме су електрично и стационарно магнетно поље само специјални случајеви.

5.1. Електромагнетна сила и вектор магнетне индукције

Када се кроз проводник, који се налази у страном магнетном пољу, пропусти електрична струја, на њега делују механичке силе које теже да га покрену и деформишу. Ова појава представља једну од основних видљивих манифестација магнетног поља, а од фундаменталног је значаја за рад свих обртних електричних машина и великог броја електричних мерних инструмената. Силе које се јављају у појавама ове врсте називају се електромагнетним силама, јер су резултат узајамног деловања електричне струје и магнетног поља. Систем сила и момената који делују на произвољну и коначну струјну контуру је у ствари резултат суперпозиције елементарних електромагнетних сила, које дејствују на поједине елементе струјне контуре.

Интензитет електромагнетне силе има максималну вредност када се струјни елемент постави управно на правац магнетног поља, а за све остале правце је сразмеран синусу угла који заклапа правац струјног елемента са правцем магнетног поља. Осим тога, електромагнетна сила је сразмерна производу јачине електричне струје и дужине

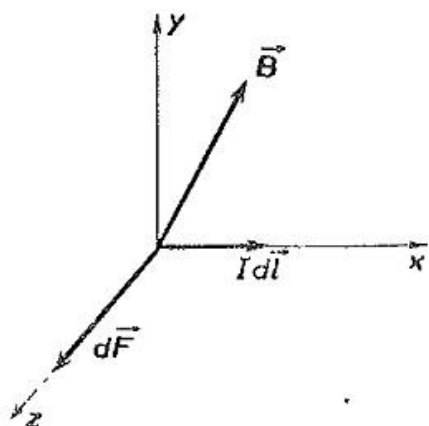
елемента, а правац јој је управан на раван коју дефинишу правац и смер струјног елемента и правац магнетног поља.

У свакој тачки магнетног поља се може дефинисати вектор поља, који се назива вектором магнетне индукције и обележава се симболом $\mathbf{B}$, чији је интензитет једнак количнику из максималне електромагнетне силе, која делује на струјни елемент и производа Idl :

$$B = \frac{dF_{\max}}{Idl} \quad (58)$$

У општем случају, када правац струјног елемента није управан на правац магнетног поља (правац вектора $\mathbf{B}$), интензитет електромагнетне силе је:

$$dF = dF_{\max} \sin(\angle \mathbf{I}, \mathbf{B}) = IdlB \sin(\angle \mathbf{I}, \mathbf{B}) \quad (59)$$



Слика 5: Интензитет, правац и смер електромагнетне силе су једнозначно одређени векторским производом

$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, где је $d\mathbf{l}$ вектор дужине струјног елемента и овај образац се често назива Лапласовом формулом. Струја I је позитивна ако јој смер одговара смеру вектора $d\mathbf{l}$.

Закон о електромагнетној сили представља прву и основну карику којом се повезују електричне и механичке величине са магнетним величинама, а магнетна индукција B , која се у овом закону јавља као коефицијент сразмерности, представља основну величину којом се квантитативно карактерише магнетно поље. Магнетна индукција је по природи количник из силе производа јачине струје и дужине:

$$B(=) \frac{F}{n} \quad (60)$$

Јединица магнетне индукције у $MKSA$ систему се назива "тесла", а обележава се симболом T и одговара хомогеном пољу у коме проводник дужине $1m$, који је управо постављен на правац поља и кроз који протиче електрична струја од $1A$, дејствује сила од $1N$:

$$T = \frac{N}{Am} \quad (61)$$

Често се за јединицу магнетне индукције употребљавају и јединице као: Wb/m^2 и Vs/m^2 .

5.2. Лоренцова сила

Према класичној електронској теорији, коју је поставио Лоренц, дејство магнетног поља на проводнике кроз које протиче струја може се објаснити деловањем магнетних сила на покретљива електрична оптерећења, која својим кретањем образују електричну струју.

На проводник дужине l и пресека S , кроз који протиче електрична струја I и који се налази у хомогеном магнетном пољу индукције B , делује резултата електромагнетних сила:

$$\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{BV} \quad (62)$$

где је $J = I / S$ густина струје, а $V = lS$ запремина проводника.

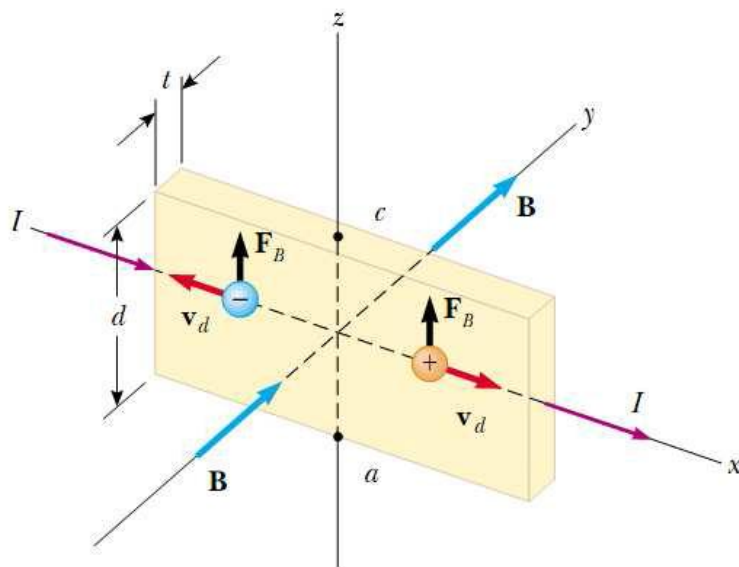
Међутим, у комбинованом електричном и магнетном пољу на електрон делује сила:

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{K} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (63)$$

Овај израз први је дао творац електронске теорије, па је по њему сила и добила име "Лоренцова сила".

5.3. Холов ефекат

Још давне 1879. године Хол је открио да се између бочних ивица танке металне траке, која је постављена управо на магнетно поље и кроз коју протиче електрична струја, јавља потенцијална разлика (слика 6).



Слика 6: Холов ефекат

Класична електронска теорија објашњава ову појаву дејством електромагнетне силе на електроне проводности која их потискује ка једној ивици траке, односно управо на правац његовог кретања. Пошто се због тога на супротној ивици јавља мањак електрона, између ивица такве се успоставља попречно електрично поље, које у устаљеном стању електричном силом уравнотежава електромагнетну силу.

Електромагнетна сила потискује електроне ка предњој ивици траке, а електрично поље је оријентисано у позитивном смеру x – осе. Потенцијална разлика између леве и десне ивице износи:

$$\varphi_D - \varphi_L = -Ka = -\frac{1}{eN} aJB \quad (64)$$

Константа $\frac{1}{eN}$ се назива Холов коефицијент.

Мерење Холовог ефекта игра врло важну улогу при одређивању особина проводника.

5.4. Флуks вектора магнетне индукције

Флуks вектора магнетне индукције, или краће речено магнетни флуks, игра веома значајну улогу у теорији електромагнетних поља, и то не само као рачунска величина помоћу које се могу једноставно формулисати извесни фундаментални закони, већ и као величина која је лако доступна директном мерењу.

Флуks вектора **B** кроз неку површину S , која се ослања на контуру C , дефинише се следећим површинским интегралом:

$$\phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S B dS \cos(\mathbf{B}, \mathbf{n}) \quad (65)$$

Магнетни флуks има природу производа магнетне индукције и површине, па је његова јединица у *MKSA* систему $\phi_u = Tm^2 = \text{veber} = Wb$.

6. МАГНЕТНО ПОЉЕ У СУПСТАНЦИЈАМА – У ПРИСУСТВУ МАТЕРИЈЕ

У предходном делу завршног рада, реч је, између осталог, била о магнетном пољу у вакууму, односно у простору у којем нема супстанције. У овом поглављу дипломског рада биће речи о магнетном пољу у супстанцијама.

Све супстанције имају извесна магнетна својства. Она тела код којих се магнетна својства испољавају стално (а не само када се налазе у магнетном пољу) називају се стални магнети.

При разматрању магнетних својстава супстанције, уобичајени термин је магнетик. Под тим појмом подразумева се материјална средина у којој се јачина магнетног поља бар у неким тачкама разликује од одговарајуће јачине магнетног поља у вакууму. У зависности од тога како им се испољавају магнетна својства, све супстанције се могу поделити у три групе: дијамагнетици, парамагнетици и феромагнетици. Пре нешто детаљнијег објашњења о свакој од ових група понаособ, биће дефинисане основне величине које карактеришу магнетно поље у супстанцији.

6.1. Величине које карактеришу магнетно поље у супстанци

Одговор на питање зашто материјали испољавају одређена магнетна својства произилази из специфичности атомске, односно електронске структуре материјала: магнетно поље не стварају само слободне наелектрисане честице у кретању, већ и оне које се крећу унутар система за који су везане (атом, молекул). При томе се највише мисли на кретање електрона око језгра атома, што се може сматрати сталном микрострујом (јер практично нема отпора). Због тога је од велике важности величина уведена код кружног проводника са струјом, која се зове магнетни момент струјне контуре $\vec{p}_m$ и дефинише се као производ јачине струје I и површине S коју ограничава контура:

$$p_m = I \cdot S \quad (66)$$

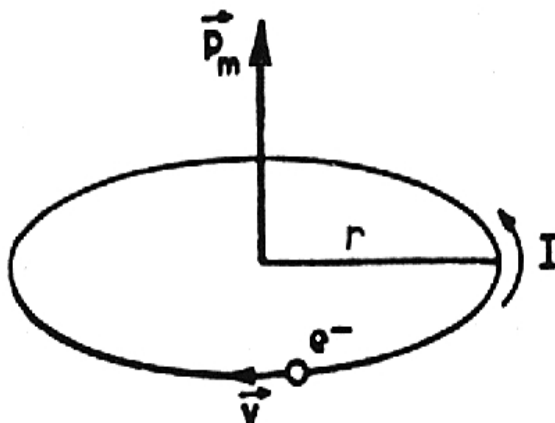
Рачуном се може показати да је интензитет магнетне идукције на оси кружне струје сразмеран интензитету магнетног момента. Још једна важна особина је да магнетни момент не зависи од облик површине, већ само од њене величине, па следи да исто $\vec{B}$ имају, на великим растојањима, струјне контуре различитих облика.

На овој аналогiji кружења електрона око језгра и кроз проводник биће засновано објашњење магнетних својстава у супстанцијама.

Магнетна својства супстанције објашњена су тек после открића планетарног модела атома. Према том моделу, атоми свих тела се састоје од позитивно наелектрисаног језгра и електрона који круже око језгра (слично планетама око Сунца). Иако савремена механика показује да је стварна слика атома знатно сложенија, ипак се овај превазиђени модел атома може искористити за објашњење магнетних својстава тела.

Ако се предпостави да електрон кружи око језгра по кружној путањи (слика 7), реч је о наелектрисању које се креће по затвореној орбити, односно то по свему одговара струји кроз затворену микроконтуру. Ова електронска микроструја образује магнетно микропоље аналогно пољу једног кружног струјног проводника. То значи да се електрону, који се креће по орбити, може приписати особина једног малог, сталног

магнета који има извeстан магнетни момент, а тај магнетни момент се назива орбитални магнетни момент електрона и нормалан је на површину дефинисану орбитом електрона, а мер му се поклапа са смером магнетног поља микрострује.



Слика 7: Орбитални магнетни момент електрона

Због велике брзине кретања електрона (око 10^{15} обртаја у секунди), може се сматрати да је његово наелектрисање равно мерено распоређено по целој кружници полупречника r . То условљава сталну вредност микрострује која је дата производом наелектрирања и броја обртаја у једници времена:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e}{T} = e \cdot \nu \quad (67)$$

e - количина наелектрисања електрона

ν - фреквенција ротирања електрона око језгра

T - период ротирања електрона око језгра

Због негативног наелектрисања електрона, смер струје супротан је од смера његовог кретања. Оваква кружна струја ствара магнетно поље окарактерисано магнетним моментом чији интензитет износи:

$$p_m = I \cdot S = e \cdot \nu \cdot \pi \cdot r^2 \quad (68)$$

где је: $S = \pi r^2$ - површина струјне контуре полупречника r .

Фреквенција којом електрон ротира:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} \quad (69)$$

v - брзина ротирања електрона око језгра

Заменом предходна два израза добија се израз за орибитални магнетни момент електрона:

$$p_m = \frac{e \cdot v \cdot r}{2} \quad (70)$$

Пошто се електрон може сматрати материјалном тачком, његов момент импулса је:

$$L = m_e \cdot v \cdot r \quad (71)$$

Повезивањем израза орбиталног магнетног момента електрона и момента импулса, добија се образац да је:

$$p_m = \frac{e}{2 \cdot m_e} \cdot L \quad (72)$$

где је m_e маса електрона.

Као што се види, однос ове две величине је константан и зове се жиромагнетни однос.

Увођењем Боровог манетона μ_B , који је узет за јединицу магнетног момента, добија се коначно:

$$p_m = \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot L \quad (73)$$

где је $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ редукована Планкова константа, а h - Планкова константа.

Код атома водониковог типа у основном стању, орбитални магнетни момент једнак је нули.

Експерименти показују, међутим, скретање таквих атома у магнетном пољу. То скретање може се објаснити чињеницом да магнетно поље атома није узроковано само кретањем електрона у саставу атома или молекула, већ и чињеницом да електрони располажу својим сопственим магнетним пољем. Наиме, анализом разних резултата експеримената долази се до закључка да електрон треба да има још једну врсту магнетног момента, који се назива спински магнетни момент и потиче од ротације електрона око сопствене осе. Ротација електрона око своје осе би такође образовала магнетно микропоље. Експериментално је утврђено да пројекције спинског момента могу имати само вредности $+\mu_B$ и $-\mu_B$. Због тога спољашње магнетно поље може да утиче само на његову оријентацију.

Укупан магнетни момент електрона добије се као векторски збир орбиталног и спинског магнетног момента. Сваком електрону у атому припада одређени магнетни момент, па и атом као целина има свој магнетни момент, који је једнак векторској суми појединих електрона.

Експерименти показују да постоји и магнетни момент атомског језгра, али је он око 2000 пута мањи од магнетног момента електрона (због разлике у маси). Зато се при изучавању магнетских својстава супстанције занемарује магнетни момент језгра и узима се да је магнетни момент атома једнак векторском збиру магнетних момената електрона који се крећу око језгра.

Специфично наелектрисање електрона је врло велико, као и брзине кретања електрона у атому. Из тога се може закључити да поменути магнетни моменти електрона такође треба да имају велике вредности и да у атомима треба да владају врло јака магнетна микропоља. Међутим, као што ће бити наглашено у даљем наставку дипломског рада, осим феромагнетних тела (која су малобројна), сва остала тела имају веома слабо изражена магнетна својства. Разлог слабе изражености магнетних особина тела су двојаки:

1. У свим телима постоји стално смештено термичко кретање атома и молекула. То кретање подлеже законима статистике и вероватноће, а према тим законима, код термичког кретања постоји спонтана тежња да се изврши оријентација магнетних момената атома у свим правцима подједнако (да увек постоји исти број атома са супротно оријентисаним магнетним моментима који се међусобно компензују).

2. Позната је спонтана тежња свих тела у природи да заузму положај минималне потенцијалне енергије: за два електрона то би био баш положај у којем су њихови вектори магнетних момената супротно оријентисани. Такав пар електрона не доприноси магнетним својствима тела. Ако се има у виду да попуњен електронски слој садржи увек паран број електрона, закључак је да је векторски збир магнетних момената попуњеног електронског слоја (љуске) једнак нули. Некомпензоване електронске магнетне моменте могу да имају само валентни електрони, међутим, они су у стању да изграде пар од два суседна атома, па се тако опет добију компензовани

моменти. Феромагнетна тела се понашају другачије, јер се код њих непопуњени електронски слојеви формирају у унутрашњости електронског омотача.

Поред магнетног момента једног атома, постоје и остале физичке величине које карактеришу магнетно поље у супстанцијама, као што је магнетна поларизација (магнетизација, намагнетисаност) $\vec{M}$, физичка величина која изражава степен намагнетисаности јединице запремине једнородне супстанције у хомогеном магнетном пољу:

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{p}^m_i}{V} \quad (74)$$

$\sum \vec{p}^m_i$ - векторски збир магнетних момената свих атома у запремини V .

Ова величина карактерише допунско магнетно поље у материјалним срединама, а које потиче од кретања везаних наелектрисања.

Пропорционалност магнетне поларизације и јачине примењеног спољашњег поља $\vec{H}$ исказује се преко запреминске магнетне сушептибилности λ :

$$\vec{M} = \lambda \cdot \vec{H} \quad (75)$$

У општем случају, магнетна сушептибилност је тензор који карактерише анизотропију магнетних особина средине (код монокристала и кристала са ниском симетријом). У изотропним срединама, пре свега у гасовима и течностима, а потом и у аморфним телима и поликристалима, магнетна сушептибилност има карактер скаларне величине.

Када се неко тело унесе у спољашње магнетно поље $\vec{H}$, под утицајем тог иницијалног поља у телу се јавља извесно унутрашње (додатно) поље магнетне индукције $\vec{B}_{unut}$. Укупно магнетно поље у телу састоји се, дакле, од спољашњег поља индукције $\vec{B}_{spolj}$ и поља у самом телу индукције $\vec{B}_{unut}$:

$$\vec{B} = \vec{B}_{spolj} + \vec{B}_{unut} \quad (76)$$

Први сабирак представља магнетну индукцију поља у вакууму и сразмеран је јачини примењеног магнетног поља, док је други сабирак сразмеран магнетној поларизацији материјала:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{M} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \lambda \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot (1 + \lambda) \cdot \vec{H} \quad (77)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \quad (78)$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (79)$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} \quad (80)$$

μ_0 - апсолутна магнетна пропустљивост вакуума;

μ_r - релатива магнетна пропустљивост дате супстанце;

μ - магнетна пропустљивост материјала;

Када се неки материјал нађе у спољашњем магнетном пољу $\vec{H}$, он и сам постаје извор магнетне идукције $\vec{B}$. Она може бити већа или мања од иницијалног поља, све у зависности од вредности коју има магнетна сушептибилност.

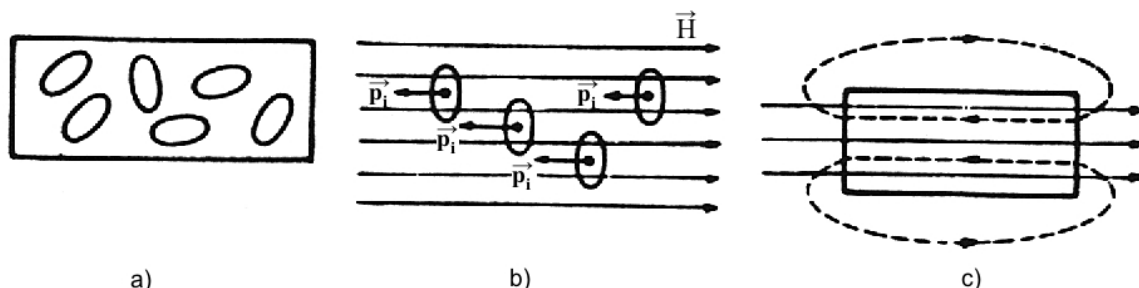
Зависно од апсолутне вредности магнетне сушептибилности, знака, понашања у функцији температуре и у функцији примењеног спољашњег магнетног поља, разликују се својства резултујућег поља појединих група магнетика:

- | | | |
|------------------|-----------------|-----------------|
| 1) дијамагнетици | $\lambda < 0$ | $(\mu_r < 1)$ |
| 2) парамагнетици | $\lambda > 0$ | $(\mu_r > 1)$ |
| 3) феромагнетици | $\lambda \gg 0$ | $(\mu_r \gg 1)$ |

6.2. Дијамагнетици

Најпре треба истаћи да је дијамагнетизам универзална особина свих материјала, а да се код парамагнетика и феромагнетика не експонира само због много веће сусцептибилности (па је тешко уочљив).

Физичка природа дијамагнетика може се објаснити на основу класичног приступа, полазећи од орбитабилног кретања електрона унутар атома. Код дијамагнетика, због попуњености орбитала, магнетни моменти електрона узајамно се компензују, тако да је магнетни момент већ на нивоу атома (молекула) једнак нули (слика 8-а). Када се дијамагнетни материјал нађе у спољашњем магнетном пољу $\vec{H}$, онда се у његовим атомима (молекулима) индикују магнетна поља са одговарајућим моментима $\vec{p}_i$ (слика 8-б).



Слика 8: Објашњење појаве дијамагнетиза

Сагласно Лоренцовом правилу, индикована поља имају супротан смер од спољашњег магнетног поља (јер је теже да спрече рад тог поља) и директно га компензују: код дијамагнетских тела, тај ефекат смањивања јачине магнетног поља је једини ефекат који се манифестује (слика 8 ц).

Индуковани магнетни моменти појединих атома (молекула) сразмерни су јачини спољашњег поља:

$$\vec{p}_i = \frac{e^2}{4 \cdot m_e} \cdot \mu_0 \cdot r^2 \cdot \vec{H} \quad (81)$$

r - радијус орбите;

e - количина наелектрисања електрона;

m_e - маса електрона;

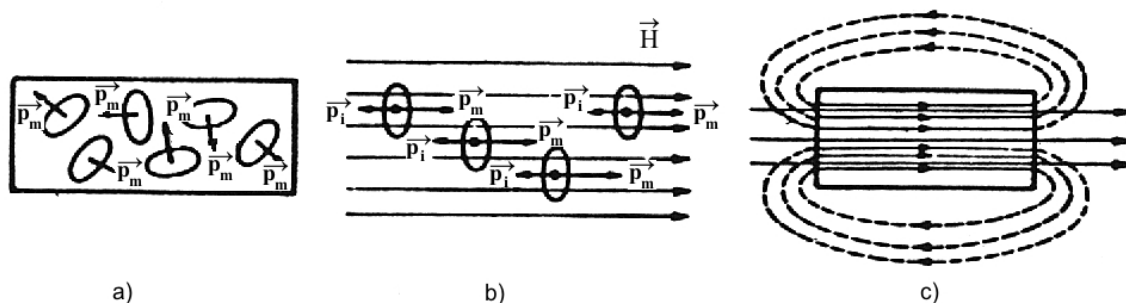
Дијамагнетизам није у значајној мери зависан од температуре.

У дијамагнетике спадају скоро сви гасови (осим кисеоника), вода, сребро, злато, бакар, графит, жива, силицијум и германијум, као и многа органска једињења.

По престанку деловања спољашњег магнетног поља, дијамагнетна тела се враћају у првобитно (ненамагнетисано) стање.

6.3. Парамагнетици

Парамагнетизам је у основи последица присуства сталних магнетних момената појединих атома (молекула). Наиме, код атома чије орбитале нису у потпуности попуњене, постоји могућност да укупни магнетни момент електрона у атому буде различит од нуле (слика 9).



Слика 9: Објашњење појаве парамагнетизма

У одсуству спољашњег магнетног поља, ефекти перманентних магнетних момената $\vec{p}_m$ нису уочљиви због њиховог хаотичног распореда, тако да се они у оквиру тела у целини узајамно компензују.

Уношењем парамагнетног тела у спољашње магнетно поље, долази (слично и код дијамагнетских тела) до појаве индукованог магнетног момента, који опет има супротан смер од смера спољашњег поља. Међутим, за разлику од дијамагнетика, код парамагнетних тела то није једини ефекат: под утицајем спољашњег магнетног поља врши се и оријентација сопствених магнетних момената атома, или молекула $\vec{p}_m$ дуж линија силе поља (слика 9 б). Сопствени и индуковани магнетни моменти дају резултантни магнетни момент који има исти правац и смер као и спољашње магнетно поље, услед чега долази до појачавања спољашњег магнетног поља (слика 9 ц). У случају парамагнетних тела, индуковани магнетни моменти атома (молекула) такође су сразмерни јачини спољашњег магнетног поља (као код дијамагнетика), али сопствени магнетни моменти атома (молекула) не зависе од спољашњег магнетног поља и топлотног кретања.

После престанка деловања спољашњег магнетног поља, парамагнетна тела се такође враћају у првобитно (ненамагнетисано) стање.

Парамагнетна својства зависе од температуре, јер је при вишим температурама и термичко кретање молекула интензивније, па је тиме интензивнија и тежња за статичком оријентацијом електронских момената у свим правцима. То значи да ће при вишим температурама магнетна суспектибилност имати мању вредност:

$$\lambda_p = \frac{C}{T - \Theta} \quad (82)$$

где је T - апсолутна температура, а C и Θ представљају емпиријски одређене константе:

Θ - Вајсова константа уведена као корекција унутрашњег магнетног поља (може бити позитивна и негативна);

C - Киријева константа.

У парамагнетике спадају сви елементи чији атоми имају непаран број електрона, а тиме и некомензован спински магнетни момент (елементи из I, III, V и VII групе Периодног система), неки молекули са парним бројем електрона (кисеоник и сумпор), као и неки метали, попут: натријума, калијума, калцијума, алуминијума итд.

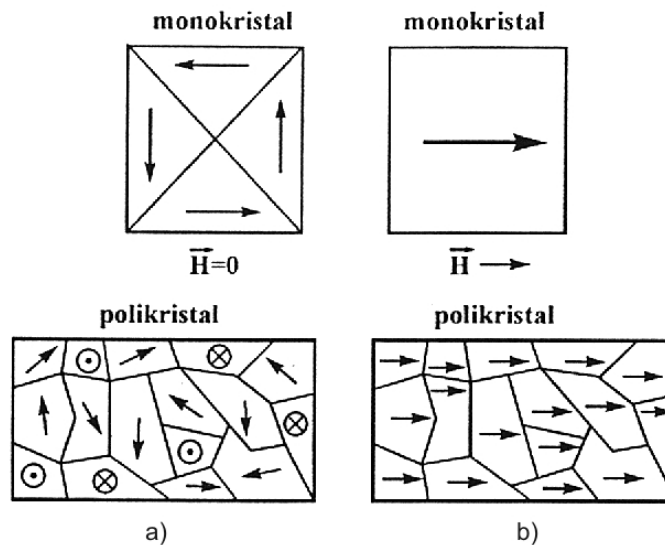
6.4. Феромагнетици

Феромагнетна тела имају јако изражена магнетна својства, што значи да магнетна сусцептибилност има јако велику позитивну вредност. Када се феромагнетик нађе у спољашњем магнетном пољу, он га појача од неколико стотина, до неколико хиљада пута.

Основна карактеристика феромагнетника је да, и без примене икаквог спољашњег магнетног поља, поседује спонтани магнетни момент, а то свакако указује на то да су магнетни моменти електрона некомпензовани. Ово се објашњава непопуњеним $3d$ и $4f$ - орбиталама; $3d$ - орбитала се налази дубоко у унутрашњости електронског омотача, па електрони не могу да ступају у комбинације са суседним атомима нити да граде валентне или кохезионе везе.

Магнетна својства феромагнетика нису условљена структуром атома (молекула), већ првенствено зависе од структуре кристалне решетке, односно од расподела и узајамне повезаности честица у кристалу. Дакле, услед кристалне структуре стварају се такви услови у атомима, под којом електрони у унутрашњим непопуњеним љускама могу да задрже исту оријентацију и смер магнетних момената ако једном буду доведени у такве положаје. Ако кристална структура не даје такве услове, елементи прелазне групе, иако имају непопуњене унутрашње електронске слојеве, не могу имати феромагнетне особине. Као што се види, д би неко тело било феромагнетно, треба да буде испуњено више услова, па се тиме објашњава зашто тако мали број тела има феромагнетне особине.

1907. године Вајс је установио да су феромагнетна тела тесно везана с постојањем такозваних домена. Домене чине посебне групе атома који су тако распоређени један поред другог, да магнетни моменти њихових електрона имају исти правац и смер. Формирање домена се може објаснити на следећи начин: на малим растојањима магнетни моменти се оријентишу паралелно са и у истом смеру због механичке тежње ка паралелној оријентацији, а преко одређеног броја тих момената преовладава супротна оријентација, условљена макроскопски познатом тенденцијом ка минимуму енергије. Сличну појаву треба замислити у простору да би се добила потпуна слика о формирању домена у целом феромагнетном телу. При формирању домена многи фактори играју улогу: механичко напрезање у телу, температура, спољашња и унутрашња магнетна поља и примесе других тела. Сви ти фактори условљавају величину домена као и оријентацију њихових магнетних момената. Постојање домена може се приказати на следећи начин: површина феромагнетног тела се најпре добро углача, а затим превуче уљем које у себи садржи фино иситњени гвоздени прах, и посматра се под микроскопом. Тада се виде мале правилне фигуре које гради гвоздени прах. Те фигуре одговарају облицима домена и представљене су на слици број 10-а.



Слика 10: шематски приказ оријентације домена феромагнетика

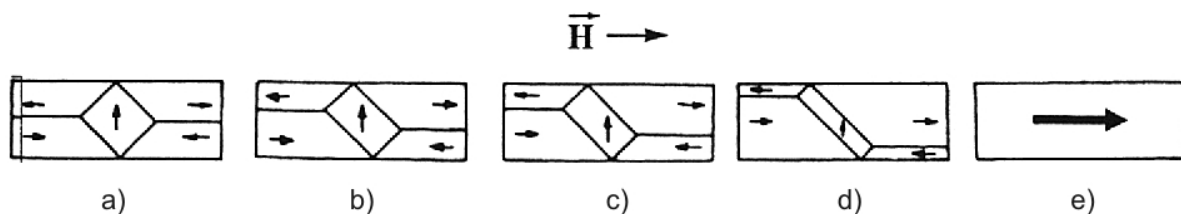
Треба истаћи да се магнетни домени могу формирати само у кристалном стању тела.

Када се феромагнетно тело налази у спољашњем магнетном пољу $\vec{H}$, елементарни магнети оријентисани су хаотично (слика 10 а), тако да се њихова магнетна поља поништавају и нема макроскопског испољавања магнетних својстава. Такво стање домена у кристалу карактерише минимална енергија магнетног поља, што обезбеђује стабилну равнотежу овог система.

Када се феромагнетно тело нађе у спољашњем магнетном пољу, магнетни моменти домена оријентишу се, у зависности од јачине поља, делимично или потпуно у правцу поља. У идеалном случају, у довољно јаком пољу, сви домени биће оријентисани као на слици под б. Тада резултујуће макроскопско поље свих домена неће бити једнако нули, већ ће имати вредност која може вишеструко да премаши јачину примењеног поља.

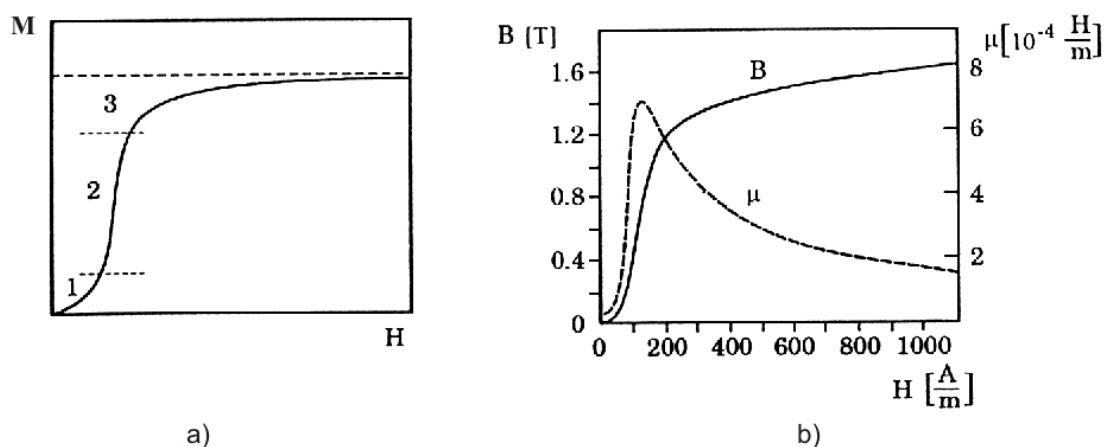
Механизам деловања спољашњег магнетног поља може се објаснити преко два међусобно независна процеса и то:

1. Обртање вектора магнетне поларизације у правцу примењеног јаког магнетног поља;
2. Ако је примењено магнетно поље слабо, ефекат максималне магнетизације се постиже повећањем запремине домена чија је оријентација у односу на поље повољна, на рачун неповољно оријентисаних домена (слика 11).



Слика 11: Ефекат примењеног поља на домene монокрystala

Описани појам може се представити функционалном зависношћу магнетне поларизације и јачине примењеног поља (слика 12-а). На графику се могу уочити три области:



Слика 12: Основне криве магнетизације феромагнетика

1. Област у којој се процес намагнетисавања остварује реверзибилним (повратним) померањем граница домена, односно област линеарне сразмерности између магнетне поларизације и спољашњег магнетног поља ($M = \lambda \cdot H$);

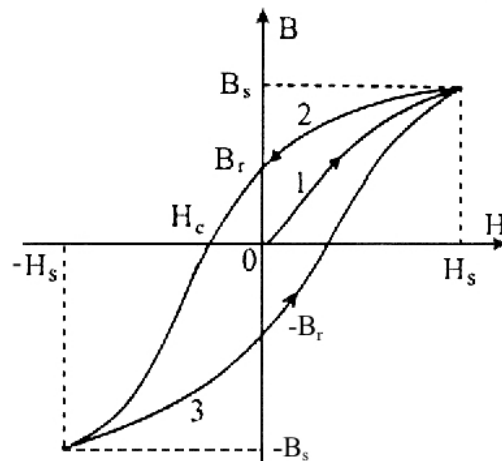
2. Област иреверзибилног (неповратног) померања граница домена или Рејлијева област ($M = \lambda \cdot H + \text{const} \cdot H^2$);

3. Област интензивне ротације вектора магнетних момената домена са тежњом да се заузме правац колинеаран са правцем поља; даље повећање јачине спољашњег поља практично не изазива промене магнетне поларизације и представља област засићења.

Истовремено, могуће је пратити и промену магнетне индукције у материјалу у функцији спољашњег поља (слика 12 б). Најстрмији део криве показује наглу промену преоријентације домена (и до близу 180°) и стога врло брзи раст магнетне индукције, а када се сви домени преоријентишу настаје засићење. Због нелинеарне зависности индукције од иницијалног поља дуж криве првобитне магнетизације, магнетна пропустљивост μ код феромагнетних материјала није константна величина, већ је и она функција спољашњег поља. Тек у јаком спољашњем пољу пермеабилност добија константну вредност сличну оној код парамагнетних материјала.

Појава намагнетисавања феромагнетика у спољашњем пољу назива се магнетном индукцијом.

Једна од основних карактеристика феромагнетика је хистерзивна петља, или хистериз. То је затворена крива линија која показује промену магнетне индукције у феромагнетику са променом јачине спољашњег поља, у једном затвореном циклусу од $-H_s$ до H_s (јачина спољашњег поља при којој долази до сатурације), као што је приказано на слици 13.

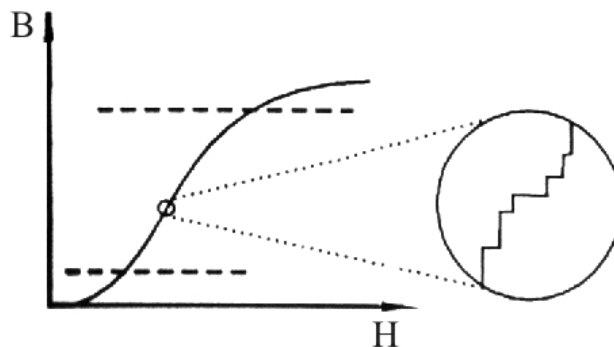


Слика 13: Хистерезисна петља

Може се закључити да код феромагнетика вредност магнетне индукције зависи како од тренутне вредности дејствујућег магнетног поља, тако и од предходне јачине поља и фазе намагнетисавања. Ова два узрока често се називају "историја" материјала.

Хистерезисне зависности између поменутих величина последица су постојања неповратних процеса при намагнетисавању феромагнетика. Енергија изгубљена у току једног циклуса намагнетисавања сразмерна је површини хистерезисне петље. Премагнетисавање феромагнетика је процес праћен одређеним утрошком енергије, што се у коначном исходу трансформише у топлоту и преноси на околину. Ова иреверзибилност представља специфичност феромагнетика и условљена је његовом "магнетном текстуром".

Постоје још две занимљиве појаве везане за феромагнетике: прва од њих је *Barkhausenov* ефекат. Под Бархаусеновим ефектом подразумева се појава специфичног шума који се може детектовати одговарајућим инструментима приликом процеса намагнетисавања поликристалног узорка. Шум је последица нагле преоријентације домена при повећању спољашњег поља, што проузрокује дисконтинуалан пораст индукције у централном стрмом делу криве намагнетисавања (слика 14).



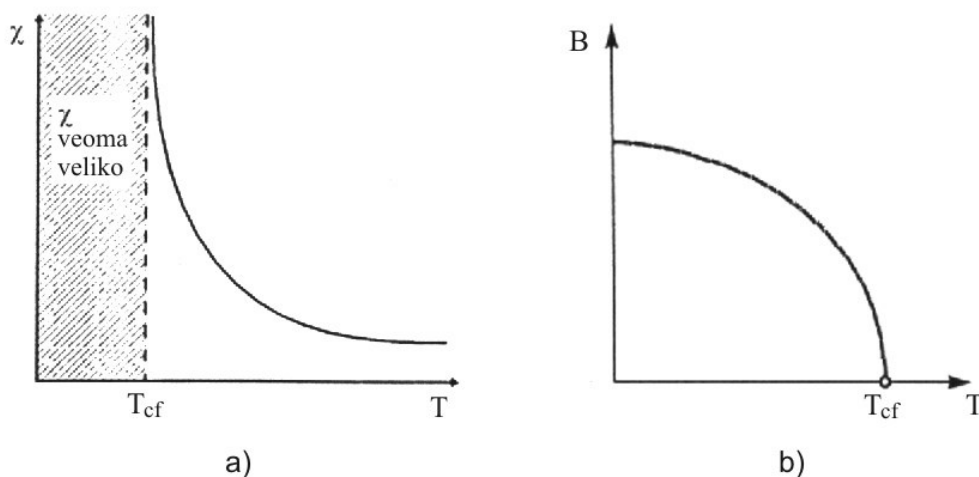
Слика 14: Баркхаусенов ефекат

Друга занимљива појава је магнетострикција, односно могућност еластичних промена димензија тела под дејством магнетног поља. Може бити позитивна и негативна, а промене димензија нису исте у свим правцима, већ су вазане са правцима кристалних оса.

На крају је остало да се испита зависност феромагнетних појава од температуре. Експерименти су показали да за сваки феромагнетни материјал постоји једна температура на којој се губе фероментална својства. Та температура се назива Киријева

температура, или Киријева тачка T_{cf} . За гвожђе та температура износи око 770°C , а за никл око 360°C .

Киријева температура тумачи се разарањем доменске структуре на вишим температурама, због интензивног термичког кретања честица које доводи до нарушавања уређености магнетних момената у оквиру домена. Ако се тело налази на температури вишој од Киријеве тачке, онда не може да дође до формирања домена. Када не постоје магнетни домени, тада ишчезавају и феромагнетна својства тела. Изнад Киријеве температуре чврсти феромагнетици поседују парамагнетна својства.



Слика 15: Утицај температуре на феромагнетска својства материјала

На предходној слици (слика 15 а) приказана је промена суспенцибилности са температуром, а на слици 15 б промена индукције са порастом температуре.

Поред магнетних својстава, на температури Киријеве тачке мењају се и неке друге карактеристике, као што су специфични топлотни капацитет, топлотно ширење, стишљивост, густина и друго. То само потврђује општу повезаност магнетних са осталим својствима тела.

У феромагнетике спадају: гвожђе, кобалт и никл, као најзначајнији представници, затим такозвана Хојслерова легура састављена од неферомагнетних елемената и разне друге легуре попут челика.

7. ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ МАКРОСКОПСКОГ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОГ ПОЉА У НЕПОКРЕТНИМ СРЕДИНАМА

7.1. Преглед основних једначина квазистационарног електромагнетног поља

Пошавши од релативно малог броја експериментално одкривених закона, разрађена је, корак по корак, теорија квантистационарног електромагнетског поља, која се може сажети у неколико парцијалних, диференцијалних једначина и неколико обичних релација, које повезују четири вектора поља - $\mathbf{K}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$, вектор густине струје $\mathbf{J}$ и густину електричних оптерећења ρ . Ове диференцијалне једначине се могу груписати на следећи начин:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (83)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (84)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (85)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{K} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (86)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t \quad (87)$$

7.2. Једначине дивергенције – Трећа и четврта Максвелова једначина

Једначина (83) је изведена у оквирима електростатике и поред једначине $\operatorname{rot} \mathbf{K} = 0$, која исказује теорему о безвртложном карактеру електростатичког поља, представља основну једначину електростатике. Чињеница да динамичко електрично поље садржи и безизворну компоненту ни у колико не противуречи основној једначини електростатике, јер она само дефинише дивергенцију изворне компоненте, уколико постоји, али при томе не исказује тврдњу да је електрично поље у целини изворно. Јасно је да сама констатација о коегзистенцији са првом Максвеловом једначином није довољна да се једначини припише општи карактер и њено важење протегне и на динамичка електромагнетна поља. Иако се данас, помоћу електронске теорије поларизације, основна једначина електростатике може теоријски извести у оквирима електростатике, у општем случају на њу треба гледати као на један од новијих ставова Максвел – Фарадејеве теорије електромагнетског поља, чија се исправност, као и теорије у целини, доказује проверавањем свих последица које из теорије произилазе. Управо због те чињенице једначина (83) се назива Максвелов постулат, или трећа Максвелова једначина.

Једначина (84) исказује искуством утврђену чињеницу да је поље вектора $\mathbf{B}$ безизворно, што је у суштини еквивалентно тврдњи да у природи не постоје реалне магнетне масе. С обзиром да таква тврдња има сасвим општи карактер, једначина (84) такође представља један од основних постулата Максвел – Фарадејеве теорије и назива се четвртом Максвеловом једначином.

7.3. Струја електричног помераја и прва Максвелова једначина

Проучавајући магнетна поља стационарних електричних струја, на основу експеримената и напредних теоријских уопштавања, дошло се до основне квантитативне релације између магнетног поља и густине стационарне струје у виду Амперовог закона:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (88)$$

Иако се Амперов закон показао као беспрекорно тачан у свим случајевима стационарних магнетних поља, а истовремено је коришћен и у неким случајевима квазистационарних електромагнетних поља, оправдано се поставља питање његове ваљаности у најопштијем случају временски променљивих електромагнетних поља. Наиме, лако је показати да је Амперов закон у противуречности са једначином континуитета:

$$\text{div}\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (89)$$

која је диференцијални израз закона о одржавању количине електрицитета. Да би се у ово уверили, научници су потражили дивергенцију леве и десне стране Амперовог закона. Обзиром да нема никакве сумње у исправност једначине континуитета, која исказује један од основних постулата електромагнетизма, намеће се закључак да Амперов закон не важи у општем случају.

Да би се отклонила противуречност између једначине континуитета и Амперовог закона, који је иначе сасвим тачан за стационарна поља, потребно је десну страну једначине Амперовог закона кориговати тако да буде безизворна у свим случајевима. Ову "корекцију" учинио је Максвел уводећи појам струје електричног помераја и додајући вектор густине ове струје као допунски члан на десној страни једначине. На основу Максвеловог постулата, (83) једначина континуитета се може писати у облику:

$$\text{div}\mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div}\mathbf{D} = -\text{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (90)$$

односно

$$\text{div}(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = 0 \quad (91)$$

Пошто је векторски збир безизворан у свим случајевима, Максвел је дошао на смелу идеју да комплетира једначину Амперовог закона, додајући јој члан $\partial \mathbf{D} / \partial t$ на десној страни. Овако коригован Амперов закон има облик:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (92)$$

и назива се прва Максвелова једначина.

Вектор $\partial \mathbf{D} / \partial t$ димензијално представља густину струје и према Максвелу се назива густина струје електричног помераја. У диелектричним супстанцама струја помераја садржи две, по својој природи различите компоненте: струју поларизације диелектрика и струју помераја у вакууму.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{K} + \mathbf{P} \quad (93)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (94)$$

Компонента $\partial \mathbf{P} / \partial t$ представља густину струје поларизације, која настаје због померања везаних електричних оптерећења унутар атома и молекула диелектричне супстанце. Иако се, због ограничених могућности кретања везаних оптерећења, струја поларизације јавља само под дејством променљивих електричних поља, она се по својој природи не разликује од кондукционе струје. И једна и друга се свде на кретање елементарних електричних оптерећења. С обзиром на то, природно је очекивати да и струја поларизације ствара магнетно поље.

Компонента $\varepsilon_0 \partial \mathbf{K} / \partial t$, која је сразмерна изводу једначине електричног поља по времену, постоји и у одсуству материјалне супстанце ($\mathbf{P} = 0$) и назива се густином струје помераја у вакууму. Иако је назив "густина струје" оправдан, струја помераја у вакууму се по својој природи битно разликује од кондукционе струје и струје поларизације, јер се не може објаснити кретањем никаквих, науци до сада познатих, честица електрицитета. Проблем праве природе струје помераја у вакууму је истоветан са проблемом природе електромагнетног поља уопште, па зато ову струју треба схватити као један од видова сложеног материјалног процеса који се одиграва у електромагнетном пољу. Оно што је у свему најбитније и што чини суштину Максвелове хипотезе формулисане у првој Максвеловој једначини, јесте да струја помераја побуђује магнетно поље и то по истом квантитативном закону као и кондукциона струја. Та чињеница постаје врло очигледна када се прва Максвелова једначина напише за случај диелектричне средине у којој је проводност једнака нули. Пошто је тада $\mathbf{J} = 0$, онда је:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (95)$$

Густина струје помераја и магнетно поље које ствара ова струја, везани су истом релацијом којом су везани кондукциона струја и њено магнетно поље. Максвелова хипотеза, имала је изванредно крупних последица и представља један од најважнијих камена темељаца Максвелове теорије. Ова хипотеза, као и хипотеза садржана у другој Максвеловој једначини, многоструко су потврђене проверавањем низа последица које произилазе из Максвелове теорије електромагнетног поља.

Проширујући појам струје и на струју помераја, може се дефинисати тотална струја, чија је густина дата следећим збиром:

$$\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (96)$$

Поље вектора $\mathbf{J}_{\text{tot}}$ је безизворно. Струјне линије тоталне струје немају ну почетак, ни крај, па се, попут струјница стационарне струје, затварају у себе. На местима где се прекидају струјнице кондукционе струје, као што је случај у колима која садрже кондензаторе, настављају се линије помераја. У пољу тоталне струје струјне тубе су увек непрекинуте и затворене, а излазни флуks вектора $\mathbf{J}_{\text{tot}}$ кроз ма коју затворену површину мора бити једнак нули:

$$\oint_S \mathbf{J}_{\text{tot}} d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{J} d\mathbf{S} + \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S} = 0 \quad (97)$$

Ова, као и предходна релација представљају уопштење првог Кирхофовог закона на тоталну струју.

Прва Максвелова једначина се може трансформисати у интегрални облик, који је применљив на затворене контуре коначних димензија.

Пре свега, прва Максвелова једначина се скаларно помножи са $d\mathbf{S}$, а затим се изврши интеграција по површини S , која се ослања на контуру C :

$$\int_S \text{rot} \mathbf{H} d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) d\mathbf{S} \quad (98)$$

Ако се на леву страну једначине примени Стоксова теорема, добија се интегрални облик прве Максвелове једначине:

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) d\mathbf{S} \quad (99)$$

Циркулација вектора јачине магнетног поља по затвореној контури једнака је тоталној струји кроз површину која се ослања на контуру. У специјалном случају, када кроз површину S не протиче кондукциона струја, интегрални облик прве Максвелове једначине гласи:

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S} \quad (100)$$

који је симетричан Фарадејевом закону индукције.

7.4. Потпуни систем Максвелових једначина електромагнетног поља у непокретним срединама

Максвелове једначине представљају математичку формулацију основних постулата теорије макроскопског електромагнетног поља који у електромагнетици имају исту улогу као Њутнови постулати у класичној механици. Комплетан систем Максвелових једначина садржи четири парцијалне, диференцијалне једначине, које међусобно повезују четири вектора поља $\mathbf{K}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$, вектор густине струје $\mathbf{J}$ и густину електричних оптерећења ρ . Поред прве Максвелове једначине, која одређује зависност вртлога магнетног поља од густине кондукционе струје и струје помераја, у систем још улазе закон индукције у локалној форми, односно друга Максвелова једначина, као и две једначине које одређују дивергенцију вектора $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$. Према томе, комплетан систем Максвелових једначина гласи:

$$\text{I: } \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (101)$$

$$\text{II: } \text{rot} \mathbf{K} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (102)$$

$$\text{III: } \text{div} \mathbf{D} = \rho \quad (103)$$

$$\text{IV: } \text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (104)$$

У изотропним и линеарним срединама једначинама I – IV треба придружити и три следеће релације:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{K} + \mathbf{K}_e) \quad (105)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{K} \quad (106)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (107)$$

које повезују векторе $\mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{J}$ са јачином поља $\mathbf{K}$ и $\mathbf{H}$.

Једначине I – IV, које су плод смелих Максвелових хипотеза и уопштавања Фарадејевих експерименталних резултата, представљају језгро теорије електромагнетног поља. Такође, базирајући се на својим једначинама, Максвел је формулисао и електромагнетну теорију светлости и предвидео егзистенцију електромагнетних таласа, читавих четврт века пре него што је то открио Херц. Заправо, Херцово откриће је представљало прву и најбрилијантнију потврду исправности

Максвелове теорије, која и данас представља опште прихваћену теорију макроскопских електромагнетних поља.

Међутим, постоји читав низ појава електромагнетне природе у области микроструктуре материје (нпр. зрачење атома, расподела енергије топлотног зрачења, фотоефект и др.) које Максвелова теорија није у стању да објасни. Да би се разрешиле те недоумице у које је запала Максвелова теорија на овим питањима, било је потребно увести нове хипотезе, које су најзад довеле до стварања савремене квантне теорије.

7.5. Скаларни облик Максвелових једначина

Систем Максвелових једначина I – IV се састоји од две векторске (прва и друга) и две скаларне, парцијалне диференцијалне једначине. Пошто се свака од векторских једначина дели на по три скаларне, потпуни систем Максвелових једначина се састоји из осам скаларних, парцијалних диференцијалних једначина.

У Декартовом систему Максвелове једначине имају следећи облик:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial z} = \mathbf{J}_x + \frac{\partial \mathbf{D}_x}{\partial t} \quad (108)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial x} = \mathbf{J}_y + \frac{\partial \mathbf{D}_y}{\partial t} \quad (109)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y} = \mathbf{J}_z + \frac{\partial \mathbf{D}_z}{\partial t} \quad (110)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{K}_y}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t} \quad (111)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{K}_z}{\partial x} = -\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t} \quad (112)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{K}_x}{\partial y} = -\frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial t} \quad (113)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{D}_z}{\partial z} = \rho \quad (114)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z} = 0 \quad (115)$$

Пошто се решавање многих проблема теоријаксе и примењене електромагнетике своди на изналажење решења Максвелових једначина која задовољавају одређене граничне услове, једначине треба писати у оном координатном систему који најбоље одговара геометрији проблема. Због тога, Максвелове једначине се пишу у општим криволинијским координатама, као:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (e_3 \mathbf{H}_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (e_2 \mathbf{H}_2) = e_2 e_3 (\mathbf{J}_1 + \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t}) \quad (116)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} (e_1 \mathbf{H}_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (e_3 \mathbf{H}_3) = e_3 e_1 (\mathbf{J}_2 + \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t}) \quad (117)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (e_2 \mathbf{H}_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (e_1 \mathbf{H}_1) = e_1 e_2 (\mathbf{J}_3 + \frac{\partial \mathbf{D}_3}{\partial t}) \quad (118)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(e_3 \mathbf{K}_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(e_2 \mathbf{K}_2) = -e_2 e_3 \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \quad (119)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(e_1 \mathbf{K}_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(e_3 \mathbf{K}_3) = -e_3 e_1 \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t} \quad (120)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(e_2 \mathbf{K}_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(e_1 \mathbf{K}_1) = -e_1 e_2 \frac{\partial \mathbf{B}_3}{\partial t} \quad (121)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(e_2 e_3 \mathbf{D}_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(e_3 e_1 \mathbf{D}_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(e_1 e_2 \mathbf{D}_3) = \rho \quad (122)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(e_2 e_3 \mathbf{B}_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(e_3 e_1 \mathbf{B}_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(e_1 e_2 \mathbf{B}_3) = 0 \quad (123)$$

7.6. Гранични услови

Обзиром да се локални облик Максвелових једначина не може користити на површинама дисконтинуитета, због скоковите промене констаната средине и прекидности компонената поља, граничне услове на разводној површини двеју средина се одређују уз помоћ интегралних облика Максвелових једначина.

7.6.1. Гранични услов за нормалне компоненте електричне индукције

Овај гранични услов се одређује уз помоћ треће Максвелове једначине у интегралном облику, када се она примени на елементарни цилиндар чије су основице паралелне разводној површини и леже јој са супротних страна. Пошто је интегрални облик Максвеловог постулата у случају динамичких поља исти као и у електростатици, очигледно је да ће и гранични услов за нормалне компоненте вектора $\mathbf{D}$ бити исти у оба случаја. Ако на разводној површини постоје слободна оптерећења густине η , тражени гранични услов има облик:

$$\mathbf{D}_{n1} - \mathbf{D}_{n2} = \eta \quad (124)$$

где су $\mathbf{D}_{n1}$ и $\mathbf{D}_{n2}$ нормалне компоненте индукције у двема срединама, које су се рачунале у односу на нормалу која је оријентисана од средине 2 ка средини 1. Када на граничној површини нема слободних оптерећења, тада је:

$$\mathbf{D}_{n1} = \mathbf{D}_{n2} \quad (125)$$

7.6.2. Гранични услов за нормалне компоненте магнетне индукције

Овај гранични услов се одређује на потпуно исти начин као и у случају стационарних магнетних поља, уз помоћ закона о конзервацији магнетне индукције, који је, у ствари, интегрални облик четврте Максвелове једначине. Према томе, и гранични услов за нормалне компоненте вектора $\mathbf{B}$ мора бити исти у оба случаја:

$$\mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2} \quad (126)$$

7.6.3. Гранични услов за тангенцијалне компоненте јачине електричног поља

Ако се интегрални облик друге Максвелове једначине

$$\oint_C \mathbf{K} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \quad (127)$$

примени на елементарну правоугаону контуру, може се писати да је:

$$\mathbf{K}_{y2} \Delta y - \mathbf{K}_{y1} \Delta y + \int_{\Delta z} = - \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t} \Delta y \Delta z \quad (128)$$

где је $\int_{\Delta z}$ удео бочних страница AD и BC у циркулацији на експерименталној правоугаоној контури.

Према томе важи:

$$\mathbf{K}_{y2} = \mathbf{K}_{y1} \quad (129)$$

На сличан начин се може показати да је и $\mathbf{K}_{x2} = \mathbf{K}_{x1}$, што значи да су тангенцијалне компоненте вектора $\mathbf{K}$ и са једне, и са друге стране површине дисконтинуитета једнаке, односно:

$$\mathbf{K}_{\text{tang1}} = \mathbf{K}_{\text{tang2}} \quad (130)$$

7.6.4. Гранични услов за тангенцијалне компоненте јачине магнетног поља

Ако се интегрални облик прве Максвелове једначине,

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) d\mathbf{S} \quad (131)$$

примени на елементарну контуру, добија се следећи израз:

$$\mathbf{H}_{y2} \Delta y - \mathbf{H}_{y1} \Delta y + \int_{\Delta z} = (\mathbf{J}_x + \frac{\partial \mathbf{D}_x}{\partial t}) \Delta y \Delta z \quad (132)$$

Ако се пусти да Δz тежи нули, и ако се предпостави да су компоненте густина струје $\mathbf{J}_x$ и $\partial \mathbf{D}_x / \partial t$ коначне, тежиће нули у члан $\int_{\Delta z}$, као и цела десна страна једначине (132).

У том случају важи да је:

$$\mathbf{H}_{y2} = \mathbf{H}_{y1} \quad (133)$$

што значи да су тангенцијалне компоненте једначине магнетног поља са супротних страна раздвојне површине једнаке:

$$\mathbf{H}_{\text{tang1}} = \mathbf{H}_{\text{tang2}} \quad (134)$$

Међутим, овај услов важи под условом да на раздвојној површини нема површинских струја, које су локализоване у бесконачно танком слоју.

У врло добрим проводницима који се налазе у променљивом електромагнетном пољу, струја је локализована у тако танком слоју да се, у врло доброј апроксимацији, може заменити површинском струјом чија је подужна густина:

$$\mathbf{J}_s = \lim \mathbf{J} \cdot \Delta z \quad (135)$$

где $\Delta z \rightarrow 0$ и $\mathbf{J} \rightarrow \infty$.

Према томе, ако на раздвојној површини постоји површинска струја густине $\mathbf{J}_s$, значи да је:

$$\mathbf{H}_{y2} - \mathbf{H}_{y1} = \mathbf{J}_{sx} \quad (136)$$

Ако се интегрални облик Максвелове једначне примени на елементарну правоугаону контуру у равни $x - o - z$, добије се гранични услов:

$$-\mathbf{H}_{x2} + \mathbf{H}_{x1} = \mathbf{J}_{sy} \quad (137)$$

Две скаларне релације се могу заменити једном векторском:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_s \quad (138)$$

где је нормала $\mathbf{n}$ оријентисана од средине 2, ка средини 1. Према томе, ако на разводној површини тече површинска струја, тангенцијална компонента јачине поља $\mathbf{H}$ се скоковито мења за износ који је по апсолутној вредности једнак густини струје $\mathbf{J}_s$.

7.7. Поинтингова теорема

Енергије електростатичког и стационарног магнетног поља су одвојено третиране, па је нађено да су густине њихових енергија:

$$\frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{D} \quad (139)$$

и

$$\frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (140)$$

Ови изрази важе под претпоставком да електричне и магнетне особине средине не зависе од јачине електричног и магнетног поља.

Енергетске односе у динамичком електромагнетном пољу представља нераскидиви комплекс електричног и магнетног поља. Према Максвеловој теорији, укупна енергија електромагнетног поља је једнака збиру енергија електричног и магнетног поља. Овај став треба схватити као један од постулата Максвелове теорије који се не може директно доказати, већ се његова исправност проверава посредно. Према томе, електромагнетно поље у домену V , који је ограничен затвореном површином S , садржи енергију:

$$W = \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) dV \quad (141)$$

Када се мења поље, мења се и енергија, па је брзина промене енергије:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) dV \quad (142)$$

Међутим, ако је средина изотропна, онда је $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{K}$ и $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, па следи да је:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{D} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon}{2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} \right) = \mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (143)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \right) = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (144)$$

Према томе, израз за брзину промене енергије се може написати у облику:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \left(\mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV \quad (145)$$

Овај израз се може написати и у облику:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V -\text{div}(\mathbf{K} \times \mathbf{H}) dV - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{K} dV \quad (146)$$

Ако у домену постоје извори који друге форме енергије претварају у електрични рад, онда је:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{K} + \mathbf{K}_e) \quad (147)$$

односно:

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{K}_e \quad (148)$$

па се последњи члан предходне једначине дели на два члана и то:

$$-\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{K} dV = -\int_V \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dV + \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{K}_e dV \quad (149)$$

Након регруписања чланова, ова једначина добија дефинитиван облик:

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{K}_e dV = \frac{\partial W}{\partial t} + \int_V \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dV + \oint_S (\mathbf{K} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad (150)$$

који исказује Поинтингову теорему.

Сви чланови Поинтингове теореме – једначине представљају снагу. Члан на левој страни представља снагу коју извори предају домену, док чланови на десној страни показују како се та снага расподељује. Први члан представља снагу која иде на повећање енергије електромагнетног поља у домену, док други показује снагу Џулових губитака у проводним деловима посматраног домена. Последњи члан, који је по форми флукс вектора $\mathbf{K} \times \mathbf{H}$ кроз граничну површину домена, представља снагу којом се енергија преноси из домена V у околну средину. Уколико је овај члан негативан, енергија струји споља у домен.

Вектор $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{K} \times \mathbf{H}$ се назива Поинтингов вектор. Он је управан на раван коју образују вектори $\mathbf{K}$ и $\mathbf{H}$ и има природу количника из снаге и површине (снага по јединици површине). Према Поинтингу, овај вектор карактерише ток електромагнетне енергије, као што, на пример, вектор густине струје карактерише струјање електрицитета. Енергија се преноси кроз електромагнетно поље у правцу и смеру Поинтинговог вектора, а количина преносне енергије по јединици времена и јединици површине управне на вектор једнака је његовом интензитету.

Поинтингов вектор је од врло велике користи у анализи струјања енергије код електромагнетних таласа и електромагнетног зрачења, где је он једина величина помоћу које је могуће вршити енергетску анализу. Јасно је да употреба Поинтинговог вектора доводи до коректног резултата и при сасвим ниским фреквенцијама, па чак и код једносмерне струје, само се та метода ретко користи, јер је израчунавање снаге помоћу струја и напона далеко једноставније.

7.8. Теорема једнозначности решења Максвелових једначина

Теорема једнозначности формулише потребне и довољне услове да би решење Максвелових једначина, које представљају систем парцијалних диференцијалних једначина, било једнозначно одређено.

Формулација теореме гласи:

Електромагнетно поље у било ком тренутку $t > t_0$ и у ма којој тачки домена V , ограниченог произвољном, затвореном површином S (или системом затворених

површина које се не секу), једнозначно је одређено Максвеловим једначицама, ако су задати следећи почетни и гранични услови:

а) Вектори поља $\mathbf{K}$ и $\mathbf{H}$ су познати у свакој тачки домена у почетном тренутку $t = t_0$: $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$;

б) Тангенцијална компонента једног од вектора поља на граничној површини домена позната је у сваком тренутку $t > t_0$.

Теорема важи за средине чије електричне и магнетне особине не зависе од јачине поља $\mathbf{K}$ и $\mathbf{H}$.

Приликом доказивања теореме, пре свега је претпостављено да домен садржи и изворе постављене страним пољем $\mathbf{K}_e$. Вектори поља $\mathbf{K}$ и $\mathbf{H}$ морају задовољити систем Максвелових једначина:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \text{div}\varepsilon\mathbf{K} = \rho \quad (151)$$

$$\text{rot}\mathbf{K} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \text{div}\mu\mathbf{H} = 0 \quad (152)$$

где је због присуства извора:

$$\mathbf{J} = \sigma + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_e) \quad (153)$$

Међутим, да би се доказала теорема, претпостављено је супротно ономе што теорема тврди, да постоје два решења Максвелових једначина, $\mathbf{K}_1, \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{K}_2, \mathbf{H}_2$, која задовољавају исте почетне и граничне услове, формулисане у тачкама a и b .

Очигледно је да и разлика ових решења, тј. вектори $\mathbf{K}' = \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2$ и $\mathbf{H}' = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$ морају задовољити Максвелове једначине, с' тим што пета једначина има облик:

$$\mathbf{J}' = \sigma\mathbf{K}' \quad (154)$$

Ово је било лако показати јер је:

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2 = \sigma(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_e) - \sigma(\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_e) = \sigma\mathbf{K}' \quad (155)$$

Такође, ако се на поље $\mathbf{K}', \mathbf{H}'$ примени Поинтингова теорема, при чему се води рачуна да је снага извора једнака нули, једна од тангенцијалних компонената поља на граничној површини домена је једнака нули, компонента Поинтинговог вектора која је управна на граничну површину такође је једнака нули. Према томе, и флукс Поинтинговог вектора кроз граничну површину домена мора бити једнак нули. Због свих тих разлога, једначина која исказује Поинтингову теорему садржи само два члана и гласи:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_V \sigma \mathbf{K}'^2 dV \quad (156)$$

Када се ради о простопериодичним пољима у устаљеном стању, једнозначност решења обезбеђују сами гранични услови, формулисани под тачком б, док почетни услови из тачке а постају сувишни. Да би се ово доказало, претпостављено је да два система решења $\mathbf{K}_1, \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{K}_2, \mathbf{H}_2$ имају једнаке тангенцијалне компоненте електричног или магнетног поља на граници домена. Истим поступком као и у предходном, општем случају, доказује се да енергија поља $\mathbf{K}', \mathbf{H}'$ мора задовољити услов, где је:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{1}{2} \int (\varepsilon \mathbf{K}'^2 + \mu \mathbf{H}'^2) dV \leq 0 \quad (157)$$

односно да мора стално опадати или да је једнака нули. Пошто поље има устаљен простопериодичан карактер, горњи услов ће бити задовољен само ако је:

$$\mathbf{K}' = 0 \text{ и } \mathbf{H}' = 0.$$

7.9. Теорема реципроцитета

Ако се претпостави да у домену V , ограниченом затвореном површином S , дејствују два просторно одвојена извор- генератора, претстављена страним пољима $\mathbf{K}_e$ и $\mathbf{K}'_e$, која се мењају по простопериодичном закону времена.

По принципу суперпозиције, резултатно поље се може разложити на два парцијална поља, $\mathbf{K}, \mathbf{H}$ и $\mathbf{K}', \mathbf{H}'$, која би побуђивао први, односно други генератор, када би деловао усамљено. И једно и друго поље, понаособ, мора задовољити систем Максвелових једначина и добијају се једначине:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} \quad (158)$$

$$\text{rot}\mathbf{K} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (159)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{K} + \mathbf{K}_e) \quad (160)$$

и

$$\text{rot}\mathbf{H}' = \mathbf{J}' + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{K}'}{\partial t} \quad (161)$$

$$\text{rot}\mathbf{K}' = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} \quad (162)$$

$$\mathbf{J}' = \sigma(\mathbf{K}' + \mathbf{K}'_e) \quad (163)$$

Прве три једначине система се скаларно помноже са $\mathbf{K}'$, а друге три једначине предходно написаног система са $\mathbf{H}$, а затим се одузме прва од друге једначине, при чему се води рачуна о векторском идентитету:

$$\mathbf{H} \cdot \text{rot}\mathbf{K}' - \mathbf{K}' \cdot \text{rot}\mathbf{H} = \text{div}(\mathbf{K}' \times \mathbf{H}) \quad (164)$$

резултат наведених операција се може писати и у облику:

$$\text{div}(\mathbf{K}' \times \mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} \cdot \mathbf{K}' - \mathbf{J} \cdot \mathbf{K}'. \quad (165)$$

Једначина која представља уопштену формулацију теореме реципроцитета се пише на следећи начин:

$$\oint_S (\mathbf{K} \times \mathbf{H}' - \mathbf{K}' \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\mathbf{J}' \cdot \mathbf{K}_e - \mathbf{J} \cdot \mathbf{K}'_e) dV \quad (166)$$

У извесним специјалним случајевима, који су за праксу од највећег значаја, формулација теореме реципроцитета се може знатно упростити.

Прво је посматран случај када је домен ограничен савршено проводним зидовима. Гранични услови на површини савршеног проводника захтевају да вектор $\mathbf{K}$ буде управан на површину проводника, што значи да су у посматраном случају вектори $\mathbf{K} \times \mathbf{H}'$ и $\mathbf{K}' \times \mathbf{H}$ паралелни граничној површини домена. Према томе, флуks на левој страни једначине реципроцитета је једнак нули, па теорема реципроцитета има облик:

$$\int_V (\mathbf{J}' \cdot \mathbf{K}_e - \mathbf{J} \cdot \mathbf{K}'_e) dV = 0 \quad (167)$$

На идентичну формулацију теореме се долази када се домен протегне на цео простор, што је од нарочитог интереса за теорију антена и многе друге проблеме, где се бар приближно може сматрати да се електромагнетни процеси одигравају у неограниченој средини.

7.10. Комплексни вектори – Максвелове једначине и Поинтингов вектор у комплексном облику

Променљива електромагнетна поља која се са временом мењају по простопериодичном закону имају и у теорији и у примени највећи практични значај. Аналогно пракси која је одомаћена у теорији електричних кола, уобичајено је да се и у анализи простопериодичних електромагнетских поља користи комплексни симболички рачун, с тим што се у овом случају, поред комплексних скалара, користе и комплексни вектори. При томе треба имати у виду још једну специфичност која се јавља у електромагнетици, а то је да су величине које карактеришу променљиво поље функција, величине и времена и просторних координата.

Суштина симболичко – комплексног метода састоји се у томе да се линеарне математичке операције над простопериодичним функцијама, облика $a = A \cos(\omega t + \varphi)$, замењују истим операцијама над експоненцијалном функцијом $Ae^{j(\omega t + \varphi)}$, чији реални део представља поменуто простопериодичну функцију. Захваљујући чињеници да се линеарне математичке операције, као што су сабирање, диференцирање и интегрирање, у ствари изводе одвојено над реалним и имагинарним делом комплексне величине, замена реалне простопериодичне функције експоненцијално – комплексном доводи до тачног резултата, ако се на крају математичких операција издвоји реални део резултата. Предност употребе експоненцијално – комплексне функције проистиче из особине ове функције да се диференцирање и интегрирање своди на множење, односно дељење фактором $j\omega$, при чему сама функција остаје непромењена. Ако се приликом тражења партикуларног простопериодичног решења неке особине линеарне, диференцијалне, или интегродиференцијалне једначине независне променљиве t , једначина задовољи решењем облика $Ae^{j(\omega t + \varphi)} = Ae^{j\omega t}$, где је $A = Ae^{j\varphi}$, експоненцијални фактор $e^{j\omega t}$, који садрже сви чланови, може се скратити, па се на тај начин из једначине елиминише време. Захваљујући овом, обичне линеарне, диференцијалне и интегродиференцијалне једначине постају алгебарске једначине са комплексним члановима, типа A .

Сличне предности симболичко – комплексног метода се испољавају и при решавању линеарних, парцијалних диференцијалних једначина, које, поред времена, као независне променљиве садрже и просторне координате. Ако се оваква једначина задовољи решењем облика, због предходно дефинисане особине експоненцијалне функције парцијална, диференцијална једначина се поједностављује и постаје парцијална, диференцијална једначина само од просторних координата.

Када се реши алгебарска, односно парцијална, диференцијална једначина просторних координата и када се нађе вредност комплексног скалара $A = Ae^{j\varphi}$, тренутна вредност простопериодичне величине a се добије као реални део израза $Ae^{j\omega t} = Ae^{j\varphi} e^{j\omega t}$.

Дакле:

$$a = \operatorname{Re} [Ae^{j\omega t}] = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (168)$$

Када се ради о решењу парцијалне једначине, комплексна величина A , односно њен модул A и аргумент φ представљају функције просторних координата.

Предходно изложени метод се може без ограничења примењивати и на векторске величине, а посебно на решавање векторских, парцијалних, диференцијалних једначина када се тражи њихово партикуларно периодично решење, под условом да су једначине линеарне.

Да би се увео појам комплексног вектора, посматран је вектор поља $\underline{\mathbf{K}}$ чије се пројекције мењају по простопериодичном закону:

$$\underline{\mathbf{K}}_x = \underline{\mathbf{K}}_{0x} \cos(\omega t + \varphi_x) \quad (169)$$

$$\underline{\mathbf{K}}_y = \underline{\mathbf{K}}_{0y} \cos(\omega t + \varphi_y) \quad (170)$$

$$\underline{\mathbf{K}}_z = \underline{\mathbf{K}}_{0z} \cos(\omega t + \varphi_z) \quad (171)$$

где су $\underline{\mathbf{K}}_{0x}, \underline{\mathbf{K}}_{0y}, \underline{\mathbf{K}}_{0z}$ амплитуде пројекција, а $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ њихове фазе у тренутку $t = 0$. У општем случају амплитуде и фазе су функције координата x, y и z .

Ако се уведе појам комплексног вектора $\underline{\mathbf{K}}$, дефинисаног тако да су му пројекције комплексне количине:

$$\underline{\mathbf{K}}_x = \underline{\mathbf{K}}_{0x} e^{j\varphi_x} = \underline{\mathbf{K}}_{rx} + j\underline{\mathbf{K}}_{ix} \quad (172)$$

$$\underline{\mathbf{K}}_y = \underline{\mathbf{K}}_{0y} e^{j\varphi_y} = \underline{\mathbf{K}}_{ry} + j\underline{\mathbf{K}}_{iy} \quad (173)$$

$$\underline{\mathbf{K}}_z = \underline{\mathbf{K}}_{0z} e^{j\varphi_z} = \underline{\mathbf{K}}_{rz} + j\underline{\mathbf{K}}_{iz} \quad (174)$$

Тренутне вредности пројекција стварног вектора $\underline{\mathbf{K}}$ се могу писати у облику:

$$\underline{\mathbf{K}}_x = \operatorname{Re} \left[\underline{\mathbf{K}}_x e^{j\omega t} \right] \quad (175)$$

$$\underline{\mathbf{K}}_y = \operatorname{Re} \left[\underline{\mathbf{K}}_y e^{j\omega t} \right] \quad (176)$$

$$\underline{\mathbf{K}}_z = \operatorname{Re} \left[\underline{\mathbf{K}}_z e^{j\omega t} \right] \quad (177)$$

а тренутне вредности вектора као:

$$\underline{\mathbf{K}} = \operatorname{Re} \left[\underline{\mathbf{K}} e^{j\omega t} \right] \quad (178)$$

Комплексни вектор $\underline{\mathbf{K}}$ је функција само од просторних координата и, с' обзиром на предходно наведене пројекције комплексне количине, може се представити у облику да је:

$$\underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{K}}_r + \underline{\mathbf{K}}_i \quad (179)$$

где су $\underline{\mathbf{K}}_r$ и $\underline{\mathbf{K}}_i$ два реална вектора, чије су пројекције $\underline{\mathbf{K}}_{rx}, \underline{\mathbf{K}}_{ry}, \underline{\mathbf{K}}_{rz}$ и $\underline{\mathbf{K}}_{ix}, \underline{\mathbf{K}}_{iy}, \underline{\mathbf{K}}_{iz}$ респективно.

Аналогно ономе што се испитивало и утврђивало са простопериодичним скаларима, може се и векторска простопериодична функција у свим линеарним једначинама замењивати векторским експоненцијално – комплексном функцијом, чији је она реални део. Према тома, уместо стварне простопериодичне функције $\underline{\mathbf{K}}$, у линеарне једначине се може уносити њена комплексна замена $\underline{\mathbf{K}} e^{j\omega t}$ и условно писати да је:

$$\underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{K}} e^{j\omega t} \quad (180)$$

с тим да се на крају математичких операција издвоји реални део решења.

Ако се векторске величине које се јављају у Максвеловим једначинама напишу у експоненцијалној форми и ако се води рачуна да је:

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{K}}}{\partial t} = j\omega \underline{\mathbf{K}} e^{j\omega t} \quad (181)$$

и такође да је:

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{K}} = \operatorname{rot} (\underline{\mathbf{K}} e^{j\omega t}) = e^{j\omega t} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{K}} \quad (182)$$

после скраћивања са заједничким фактором $e^{j\omega t}$, Максвелове једначине добијају облик:

$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + j\omega \underline{\mathbf{D}} \quad \text{и} \quad \text{div } \underline{\mathbf{D}} = \underline{\rho} \quad (183)$$

$$\text{rot } \underline{\mathbf{K}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}} \quad \text{и} \quad \text{div } \underline{\mathbf{B}} = 0 \quad (184)$$

С обзиром да су комплексне величине $\underline{\mathbf{K}}, \underline{\mathbf{H}}, \dots$ функције само просторних координата, Максвелове једначине у комплексном облику не садрже променљиву време.

Директна замена простопериодичних величина њиховим комплексним представницима могућа је и дозвољена само у линеарним једначинама. Међутим, у нелинеарним једначинама и изразима где се јављају производи величина (нпр. Поитонов вектор, снага, густина енергије итд.), директно уношење комплексних величина уместо стварних доводи до погрешних резултата. Ово такође важи и за векторе и за скаларе и може се лако проверити. Управо из тог разлога да се могу јавити евентуалне грешке, приликом формирања комплексних израза за нелинеарне величине, полази се од чињенице да се користе одговарајући реални изрази за тренутне вредности. Та метода се може приказати на примеру Поитинговог вектора.

Дакле, тренутне вредности јачине електричног и магнетног поља могу се представити следећим изразима:

$$\underline{\mathbf{K}} = \text{Re} \left[\underline{\mathbf{K}} e^{j\omega t} \right] = \underline{\mathbf{K}}_r \cos \omega t - \underline{\mathbf{K}}_i \sin \omega t, \quad (185)$$

$$\underline{\mathbf{H}} = \text{Re} \left[\underline{\mathbf{H}} e^{j\omega t} \right] = \underline{\mathbf{H}}_r \cos \omega t - \underline{\mathbf{H}}_i \sin \omega t, \quad (186)$$

па је тренутна вредност Поитинговог вектора:

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma} = \underline{\mathbf{K}} \times \underline{\mathbf{H}} &= \underline{\mathbf{K}}_r \times \underline{\mathbf{H}}_r \cos^2 \omega t + \underline{\mathbf{K}}_i \times \underline{\mathbf{H}}_i \sin^2 \omega t \\ &\quad - (\underline{\mathbf{K}}_r \times \underline{\mathbf{H}}_i + \underline{\mathbf{K}}_i \times \underline{\mathbf{H}}_r) \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t. \end{aligned} \quad (187)$$

Пошто код устаљених простопериодичних стања обично нису толико битне тренутне вредности тока енергије, потражиће се средња вредност Поитинговог вектора:

$$\underline{\Gamma}_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T \underline{\Gamma} dt. \quad (188)$$

С обзиром да су вектори $\underline{\mathbf{K}}_r, \underline{\mathbf{K}}_i, \underline{\mathbf{H}}_r, \underline{\mathbf{H}}_i$ независни од времена, средња вредност Поитинговог вектора износи:

$$\underline{\Gamma}_{sr} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{K}}_r \times \underline{\mathbf{H}}_r + \underline{\mathbf{K}}_i \times \underline{\mathbf{H}}_i). \quad (189)$$

Ако се уведе појам коњуговано комплексног вектора, предходном изразу се може дати облик који је аналоган познатом комплексном изразу за средњу вредност активне снаге код наизменичне струје.

Коњуговано комплексни вектор $\underline{\mathbf{K}}^*$ се дефинише као вектор чије су пројекције коњуговане пројекцијама вектора $\underline{\mathbf{K}}$.

Пројекције коњугованог вектора су:

$$\underline{\mathbf{K}}_x^* = \underline{\mathbf{K}}_{rx} - j\underline{\mathbf{K}}_{ix} \quad (190)$$

$$\underline{\mathbf{K}}_y^* = \underline{\mathbf{K}}_{ry} - j\underline{\mathbf{K}}_{iy} \quad (191)$$

$$\underline{\mathbf{K}}_z^* = \underline{\mathbf{K}}_{rz} - j\underline{\mathbf{K}}_{iz} \quad (192)$$

па је очигледно да је:

$$\underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{K}}_r - j\underline{\mathbf{K}}_i \quad (193)$$

Ако се потом формира векторки производ комплексног вектора електричног поља $\underline{\mathbf{K}}$ и коњуговане вредности комплексног вектора магнетног поља $\underline{\mathbf{H}}^*$, а онда се добијена вредност упореди са средњом вредношћу Поинтинговог вектора, биће јасно да се вредност Поинтинговог вектора може представити као реални део векторског производа помноженим са $\frac{1}{2}$.

Дакле,

$$\Gamma_{sr} = \text{Re} \left[\frac{1}{2} \underline{\mathbf{K}} \times \underline{\mathbf{H}} \right], \quad (194)$$

где су $\underline{\mathbf{K}}$ и $\underline{\mathbf{H}}$ комплексне амплитуде електричног и магнетног поља.

Израз:

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{K}} \times \underline{\mathbf{H}}^* \quad (195)$$

Представља комплексни Поинтингов вектор.

8. ПРИМЕНА МЕТОДЕ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА У МАГНЕТНОСТАТИЦИ

8.1. Евалуације електромагнетног поља

Основна магнетна анализа обухвата интензитет магнетног поља, густину магнетног флукса (магнетна индукција), магнетне силе и густине струје. Ове врсте анализе се нешто разликују код скаларне и векторске формулације магнетног потенцијала.

8.1.1. Скаларни магнетни потенцијал

Интензитет магнетног поља је подељен на два дела: генерализовано поље $\mathbf{H}_\phi$ и градијент генерализованог потенцијала $-\nabla\phi$. Овај градијент (у тексту означен као $\mathbf{H}_g$) рачуна се интеграционим тачкама употребом интерполационе функције:

$$\mathbf{H}_f = -\nabla \mathbf{N}^T \mathbf{f}_q \quad (196)$$

где је градијент оператор:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \quad (197)$$

$\mathbf{N}$ - интерполационе функције

Сада је интензитет магнетног поља дат изразом:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_g + \mathbf{H}_\phi \quad (198)$$

Магнетна индукција срачуната из интензитета поља је:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (199)$$

$\mathbf{B}$ - магнетна индукција (густина магнетног флукса)

μ - матрица магнетне пермеабилности

$\mathbf{H}$ - интензитет магнетног поља

Вредности интензитета поља и индукције у чворовима израчунавају се на основу вредности у интеграционим тачкама.

8.1.2. Векторски магнетни потенцијал

Магнетна индукција се дефинише се као ротор векторског магнетног потенцијала. Ова анализа се врши на интеграционим тачкама употребом интерполационих функција елемената облика:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{N}_A^T \mathbf{A}_e \quad (200)$$

- $\mathbf{B}$ - магнетна индукција (густина магнетног флукса)
- $\nabla \times$ - ротор оператор
- $\mathbf{N}_A$ - интерполационе функције
- $\mathbf{A}_e$ - магнетни вектор потенцијал

Затим се интензитет магнетног поља израчунава из индукције:

$$\mathbf{H} = \nu \mathbf{B} \quad (201)$$

- $\mathbf{H}$ - интензитет магнетног поља
- ν - магнетна релуктивност материје

Чворне вредности интензитета поља и индукције израчунавају се на основу вредности у интеграционим тачкама.

При анализи нестатичког векторског магнетног потенцијала, густина електричне струје рачуна се према формули:

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_v \quad (202)$$

- $\mathbf{J}_T$ - укупна густина електричне струје

$$\mathbf{J}_e = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\sigma \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_A^T \mathbf{A}_e \quad (203)$$

- $\mathbf{J}_e$ - густина струје компоненте услед $\mathbf{A}$
- σ - специфична електрична проводљивост (кондуктивност)
- n - број интеграционих тачака
- $\mathbf{N}_A$ - интерполационе функције за $\mathbf{A}$ одређено у интеграционим тачкама
- $\mathbf{A}_e$ - извод по времену векторског магнетног потенцијала

и

$$\mathbf{J}_s = -\sigma \nabla V = \sigma \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{N}^T \mathbf{V}_e \quad (204)$$

- $\mathbf{J}_s$ - компонента густине струје услед V
- ∇ - оператор дивергенције
- $\mathbf{V}_e$ - електрични скаларни потенцијал
- $\mathbf{N}$ - интерполационе тачке за $\mathbf{V}$ одређен у интеграционим тачкама

$$\mathbf{J}_v = \mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (205)$$

- $\mathbf{J}_v$ - вектора брзине густине струје
 $\mathbf{V}$ - примењен вектор брзине
 $\mathbf{B}$ - густина магнетног флукса (магнетна индукција)

8.1.3. Векторски магнетни потенцијал заснован на ивицама

У овом одељку описана је електромагнетна анализа, заснована на ивицама елемената.

Електромагнетна поља и флуксеви су израчунати у интеграционим тачкама како следи:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{W}^T \mathbf{A}_e \quad (206)$$

$$\mathbf{H} = \nu \mathbf{B} \quad (207)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{N}^T \mathbf{V}_e - \mathbf{W}^T \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} \quad (208)$$

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad (209)$$

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_c + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (210)$$

- $\mathbf{B}$ - густина магнетног флукса (магнетна индукција)
 $\mathbf{H}$ - интензитет магнетног поља
 $\mathbf{E}$ - интензитет електричног поља
 $\mathbf{J}_c$ - проводљивост густине струје
 $\mathbf{J}_s$ - укупна густина струје (проводљивост + расељавање)
 $\mathbf{A}_e$ - ивични флукс на средње-бочним чворовима елемента
 $\mathbf{V}_e$ - електрични скалар потенцијал на чворовим елемента (VOLT)
 $\mathbf{W}$ - матрица векторског елемента (заснован на ивицама) облика функција
 $\mathbf{N}$ - вектор скаларног елемента (заснован на чвору) облика функција
 ν - магнетна релуктивност
 σ - специфична електрична проводљивост (кондуктивност)
 ε - диелектрична константа

8.1.4. Магнетне силе

На нивоу елемената, у општем случају, три методе се користе за одређивање магнетних сила:

- 1) Лоренцове силе
- 2) Максвелове силе
- 3) Виртуелне силе.

8.1.4.1. Лоренцове силе

Магнетне силе код проводника кроз које протиче струја су нумерички интегрисани користећи:

$$\mathbf{F}^{jb} = \int_{vol} \mathbf{r} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \quad (211)$$

- N** - вектор интерполационе функције
Z - јединични вектор дуж +Z осе
r - вектор положаја на глобалном Декартовом координатном систему

За 2D анализе, одговарајући електромагнетни момент око +Z је дата са:

$$\mathbf{T}^{jb} = \mathbf{Z} \times \int_{vol} \mathbf{r} \times \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \quad (212)$$

У временско-хармоничној анализи, средња Лоренцова силе и обртни момент се израчунавају према обрасцима:

$$\mathbf{F}_{av}^{jb} = \frac{1}{2} \int_{vol} \mathbf{N}^T (\mathbf{J}^* \times \mathbf{B}) dV \quad (213)$$

и

$$\mathbf{T}_{av}^{jb} = \mathbf{Z} \times \int_{vol} \mathbf{r} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \quad (214)$$

- J*** - Комплексно коњуговано **J**

8.1.4.2. Максвелове силе

Максвелов тензорски напон се користи за одређивање силе на феромагнетним регионима. У зависности од тога да ли су магнетне силе су изведене из Максвеловог тензорског напона користећи површинску или запреминску интеграцију, разликујемо између површинских и запреминских интегралних метода.

8.1.4.2.1. Површинска интегрална метода

Одређивање силе се врши на површинама елемената који одговарају ваздуху и имају оптерећења задата на површинама које су различите од нуле.

Код решавања 2D проблема метод користи екстраполиране вредности поља и резултате у следећем нумерички интегрисаном површинском интегралу:

$$\mathbf{F}^{mx} = \frac{1}{\mu_0} \int_{s_{T_{21} T_{22}}}^{T_{11} T_{12}} (\mathbf{n}_2) ds \quad (215)$$

- F^{mx}** - Максвелова сила
 μ_0 - пермеабилност вакуума

$$T_{11} = \mathbf{B}_x^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 \quad (216)$$

$$T_{12} = \mathbf{B}_x \mathbf{B}_y \quad (217)$$

$$T_{21} = \mathbf{B}_x \mathbf{B}_y \quad (218)$$

$$T_{22} = \mathbf{B}_y^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 \quad (219)$$

Одговарајући електромагнетни момент око +Z осе је дат:

$$\mathbf{T}^{mx} = \mathbf{Z} \times \frac{1}{\mu_0} \int_s \mathbf{r} \times (n \times \mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{B}) n ds \quad (220)$$

- n** - јединица површине нормале у глобалном Декартовом координатном систему

У временско-хармоничној анализи, средње Максвелове силе и обртни момент се израчунавају релацијама:

$$\mathbf{F}_{av}^{mx} = \frac{1}{2\mu_0} \int_s R_e \langle (n \times \mathbf{B}^*) \mathbf{B} \rangle - \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{B}^*) n ds \quad (221)$$

и

$$\mathbf{T}_{av}^{mx} = \mathbf{Z} \times \frac{1}{2\mu_0} \int_s \mathbf{r} \times R_e \langle (n \times \mathbf{B}^*) \mathbf{B} \rangle - \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{B}^*) n ds \quad (222)$$

- $\mathbf{B}^*$ - Коњуговано комплексно $\mathbf{B}$
 Re - Реални део комплексне величине

8.1.4.2.2. Запреминска интегрална метода

Максвелове силе се израчунавају помоћу следећег запреминског интеграла:

$$\mathbf{F}_e^{mx} = - \int_{vol} \mathbf{B}^T \mathbf{T}^{mx} \times dV \quad (223)$$

- $\mathbf{F}_e^{mx}$ - магнетна Максвелова сила по елементу
 $\mathbf{B}$ - матрица деформације
 $\mathbf{T}^{mx}$ Максвелов вектор напона = $(\mathbf{T}_{11} \mathbf{T}_{22} \mathbf{T}_{33} \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23} \mathbf{T}_{13})^T$

8.1.4.3. Виртуелне радне силе

Електромагнетне силе у чворовима (укључујући и електростатичке силе) рачунају се користећи принцип виртуелног рада. Две формулације које се тренутно користе за одређивање силе су: метода облика елемента (магнетне силе) и метода пертурбације чвора (електромагнетне силе).

8.1.4.3.1. Метода облика елемента

Магнетне силе израчунате помоћу виртуелног принципа рада се добијају као извод енергије. Ово важи за слој елемената који одговарају ваздуху који окружију покретни део. Да би се утврдила укупна сила која делује на тело, основна једначина за силу елемента у правцу s је:

$$F_s = \int_{vol} \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{s}} dV + \int_{vol} (\mathbf{B}^T d\mathbf{H}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} dV \quad (224)$$

- F_s - сила у елементу у S правцу
 $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{s}}$ - извод интензитета поља по померају
 s - виртуелно померање координата чвора, наизменично узимајући да буду у глобалним правцима X, Y, Z
 v - запремина елемента

За 2D анализе, одговарајући електромагнетни момент око +Z осе је дат релацијом:

$$\mathbf{T}^{vw} = \mathbf{Z} \times \frac{1}{\mu_0} \int_{vol} \mathbf{r} \times \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{B}) \nabla s \mathbf{B} dV \quad (225)$$

У временско-хармоничној анализи, средња сила и обртни момент се израчунавају:

$$\mathbf{F}_{av}^{vw} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{vol} \frac{1}{2} (\mathbf{B}^* \times \mathbf{B}) \nabla s - R_e \langle (\mathbf{B}^* \times \nabla s) \mathbf{B} \rangle dV \quad (226)$$

и

$$\mathbf{T}_{av}^{vw} = \mathbf{Z} \times \frac{1}{2\mu_0} \int_{vol} \mathbf{R} \times \frac{1}{2} (\mathbf{B}^* \times \mathbf{B}) \nabla s - R_e \langle (\mathbf{B}^* \times \nabla s) \mathbf{B} \rangle dV \quad (227)$$

8.1.4.3.2. Метода пертурбације чворова

Електромагнетне силе (електричне и магнетне) се рачунају као изводи укупне коенергије елемента (збир електростатичких и магнетних коенергија).

$$F_{xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{vol} (d^T E + \mathbf{B}^T \mathbf{H}) dV \quad (228)$$

$F_{xi} = x, y, z$ - компонента електромагнетне силе израчунате у чвору i

x_i - Координата чвора (x -, y -, или z -координата чвора i)

v - запремина елемента

Електромагнетне силе у чворовима се израчунавају за сваки чвор у сваком елементу. Целокупном моделу силе се добијају сабирањем свих суседних и чворних елемената. Метода пертурбације чворова обезбеђује конзистентне и прецизне електричне и магнетне силе.

8.1.5. Цулова топлота у магнетној анализи

Цулова топлота по елементу се израчунава:

1. Стационарном и нестационарном магнетном анализом:

$$Q^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho J_{ti} \quad (229)$$

Q^j - Цулова топлот по јединице запремине

n - број интеграционих тачака

ρ - отпорност средине

J_{ti} - укупна густина струје у елементу у интеграционој тачки

2. Хармоничном магнетном анализом:

$$Q^j = R_e \left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n p J_{ti} \times J_{ti}^* \right) \quad (230)$$

- R_e - реална компонента
 J_{ti} - комплексна укупна густина струје у елементу у интеграционој тачки
 J_{ti}^* - Коњуговано комплексно J_{ti}

8.1.6. Резултати електричног скалар потенцијала

Електрично поље се рачуна као негативни градијент скаларног диелектричног потенцијала. Ова вредност се рачуна интеграционим тачакама употребом елемената интерполационе функције:

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{N}^T \mathbf{V}_e \quad (231)$$

Чворне вредности електричног поља (излаз: EF) се израчунавају из вредности интеграционих тачака као што је описано у процени чворних и центроидалних података. Извођење других излазних величина зависи од врсте анализе описане у наставку.

8.1.6.1. Квазистатична електрична анализа

Спровођење струје и густине електричног флуksа рачунају се из електричног поља:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (232)$$

$$\mathbf{D} = (\epsilon' - j\epsilon^*) \mathbf{E} \quad (233)$$

где је:

$$\epsilon' = \epsilon$$

$$\epsilon^* = \tan \delta \epsilon$$

$$j = \sqrt{-1}$$

И спровођење струје $\mathbf{J}$ и густине електричног флуksа $\mathbf{D}$ се прорачунавају на локацијама тачке интеграције, међутим, да ли се ове вредности премештају на чворне или центроидалне локације, зависи од типа елемента који се користи за квазистатичку електричну анализу.

Укупна густина електричне струје $\mathbf{J}_{tot}$ рачуна се као збир проводности $\mathbf{J}$ и $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ премештања густине струје:

$$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (234)$$

Укупна густина електричне струје у елементу може да се користи као извор густине струје у магнетној анализи. Џулова топлота се израчунава из тежишних вредности електричних поља и кондукције (проводљивости) густине струје. У статичкој или у нестатичкој електричној анализи, Џулова топлота се израчунава према релацији:

$$Q = \mathbf{J}^T \mathbf{E} \quad (235)$$

Q - Џулова топлоте по јединици запремине

У хармоничној електричној анализи Џулова топлота по јединици запремине рачуна се по релацији:

$$Q = \frac{1}{2} R_e (\mathbf{E}^T \mathbf{J}^*) \quad (236)$$

R_e - стварна компонента

$\mathbf{E}^*$ - комплексно коњуговано $\mathbf{E}$

Вредност Џулове топлоте може да се користи као оптерећење при термичкој анализи.

У нестатичкој електричној анализи, електричне енергије елемената рачуна се по релацији:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D}^T \mathbf{E} dV \quad (237)$$

W - ускладиштена електрична енергија

У хармоничној електричној анализи, електрична енергија просечног времена рачуна се:

$$W = \frac{1}{4} \int_{\text{vol}} R_e (\mathbf{E}^T \mathbf{D}^*) dV \quad (238)$$

8.1.6.2. Електростатичка анализа

Изведени резултати из електростатичке анализе су:

- Електрично поље у чворовима;
- Електрична индукција у чворовима;
- Елемент ускладиштене електричне енергије излаз.

8.1.7. Електростатичке силе

Електростатичке силе се утврђују методом пертурбације чворова. При 2D анализи, ова метода користи екстраполоване вредности поља и резултате у следећем нумеричи интегрисаном површинском интегралу:

$$\mathbf{F}^{\text{mx}} = \epsilon_0 \int_S \begin{matrix} T_{11} T_{12} \mathbf{n}_1 \\ T_{21} T_{22} \mathbf{n}_2 \end{matrix} \quad (239)$$

ϵ_0 - диелектрична пропустљивост вакуума

$$T_{11} = \mathbf{E}_x^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \quad (240)$$

$$T_{12} = \mathbf{E}_x \mathbf{E}_y \quad (241)$$

$$T_{21} = \mathbf{E}_y \mathbf{E}_x \quad (242)$$

$$T_{22} = \mathbf{E}_y^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \quad (243)$$

n_1 - компонента вектора нормале у x- смеру

n_2 - компонента вектора нормале у y- смеру

s - Површина старанице елемента

$$|\mathbf{E}|^2 = \mathbf{E}_x^2 + \mathbf{E}_y^2 \quad (244)$$

8.1.8. Електричне конститутивне грешке

Претпоставимо пар поља који задовољавају $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{D}}$ Максвелове једначине нађене за дати проблем. Овај пар је право решење, ако пар такође верификује конститутивне релације, или пар је само приближно решење проблема, а величина релације:

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{E} \quad (245)$$

се зове грешка конститутивне релације, као што је првобитно предложио је Ладавез за линеарне еластичности. За мерење грешке $\hat{\mathbf{e}}$, енергетска норма целим доменом Ω користи:

$$\|\hat{\mathbf{e}}\|_{\Omega} = \|\hat{\mathbf{D}} - \boldsymbol{\varepsilon} \times \hat{\mathbf{E}}\|_{\Omega} \quad (246)$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\Omega} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega^{\frac{1}{2}} \quad (247)$$

На основу Сингове теореме хипер круга, могуће је дефинисати релативну грешку за проблем:

$$\varepsilon_{\Omega} = \frac{|\mathbf{D} - \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{E}|_{\Omega}}{|\mathbf{D} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{E}|_{\Omega}} \quad (248)$$

Глобална релативна грешка је посматрана као збир доприноса елемента:

$$\varepsilon_{\Omega}^2 = \sum_E \varepsilon_E^2 \quad (249)$$

где је релативне грешка за елемент E дата:

$$\varepsilon_E = \frac{|\mathbf{D} - \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{E}|_E}{|\mathbf{D} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{E}|_{\Omega}} \quad (250)$$

Глобална грешка ε_{Ω} омогућава да се квантификује квалитет пара приближног решења $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{D}}$, а локална грешка ε_E омогућава да се локализује дистрибуција грешке у домену решења.

9. ПРИМЕР ИЗРАЧУНАВАЊА МАГНЕТНОГ ПОЉА КОНСТАНТНОГ ИЗВОРА СТРУЈЕ

Као пример израчунавања магнетног поља решен је проблем кружног статичког магнетног поља (слика 16) у коме треба израчунати интензитет магнетног поља насталог управним деловањем константног извора струје на Н-раван.

Модел базиран на методи коначних елемената се састоји од *FCBI* – С елемената. Статичко магнетно поље се израчунава на основу деловања извора густине струје на разматран домен.

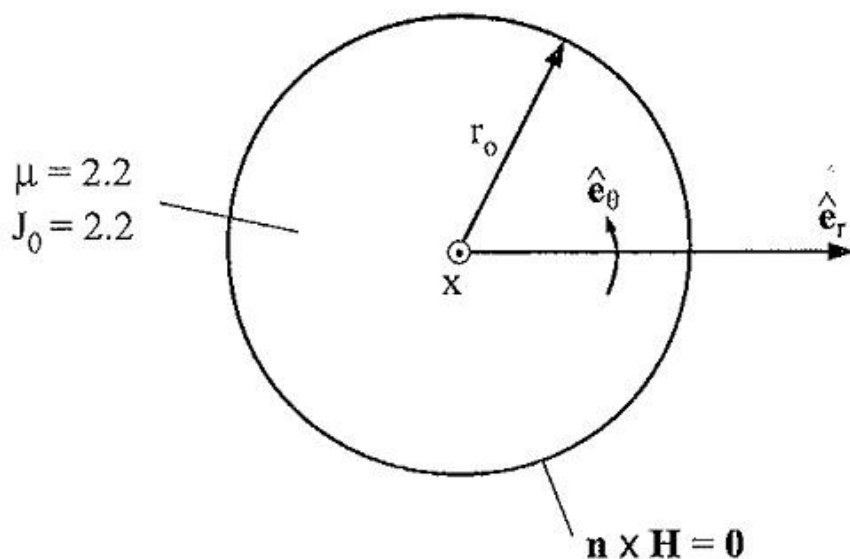
За решавање проблема се користе следеће једначине:

$$\nabla \times \mathbf{H} = J_0 \mathbf{e}_x \quad (251)$$

$$\nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0 \quad (252)$$

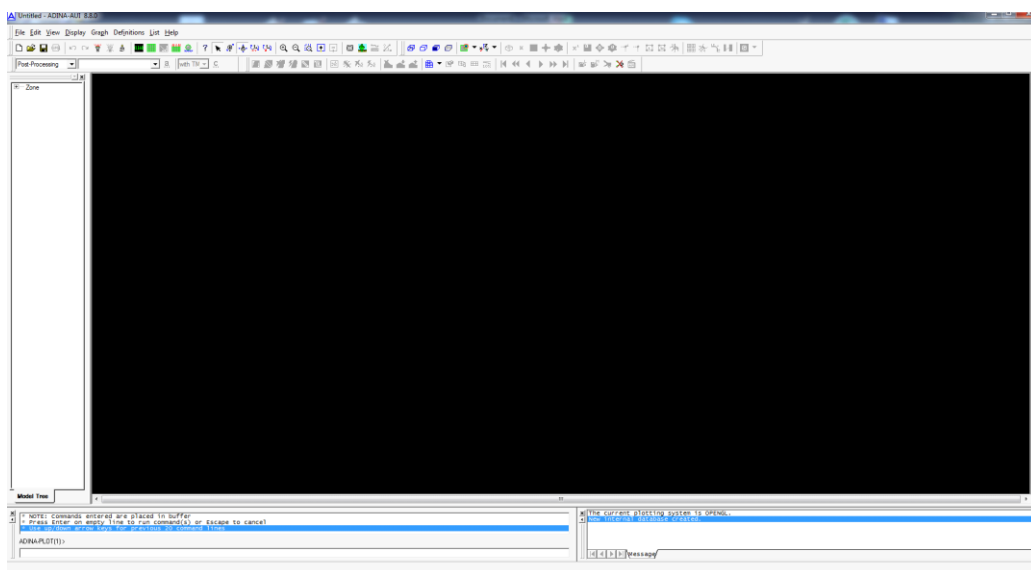
Решење анализираниог проблема у аналитичком облику је:

$$H_{theory} = J_0 r / 2e_0 \quad (253)$$



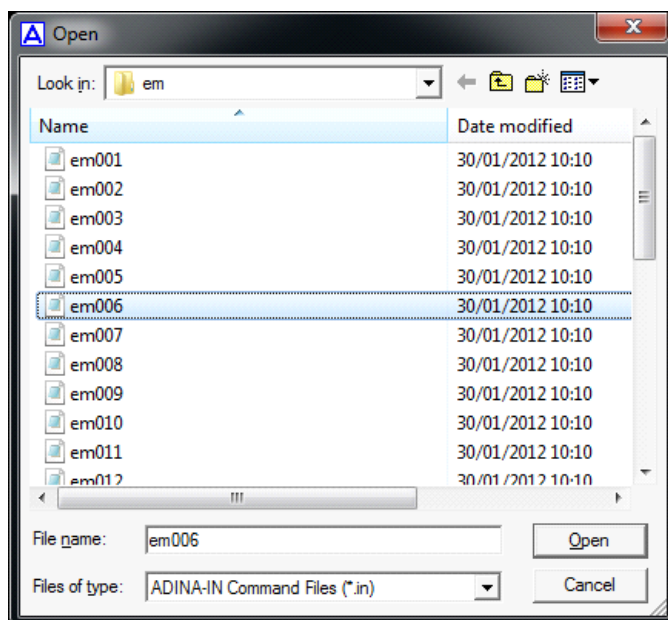
Слика 16: Кружно статичко магнетно поље

Најпре је потребно покренути програмски пакет ADINA тако што се кликом на линију Start менија позове програм:
Start>All Programs>Adina System 8.8>Adina User Interface (AUI).
Прозор који се отвори (слика 17) је почетни дијалог програма.



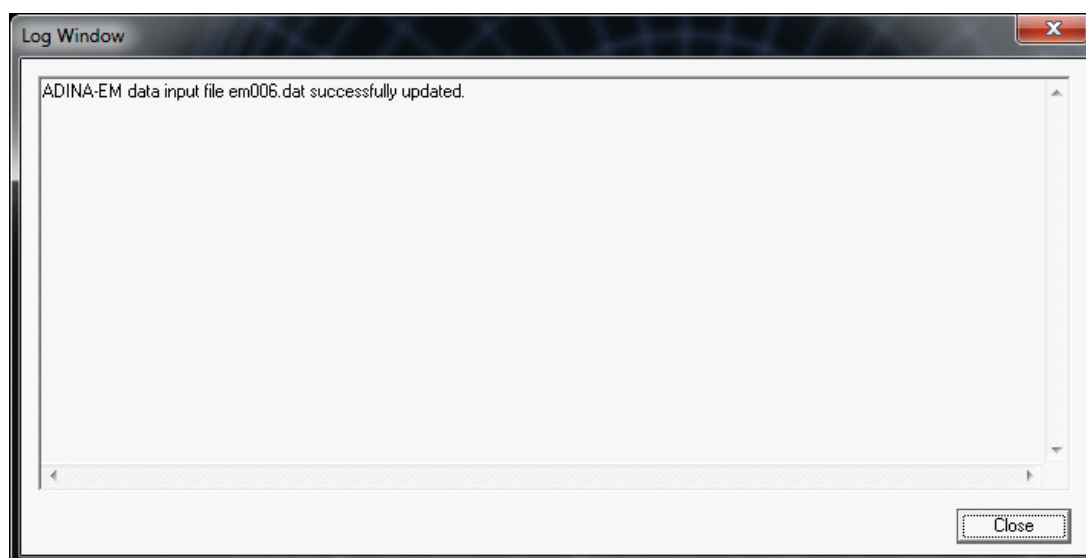
Слика 17: Почетни прозор ADINA- е

Кликом на опцију File>Open отвара се прозор (слика 18) у коме је потребно изабрати фајл који се ради:



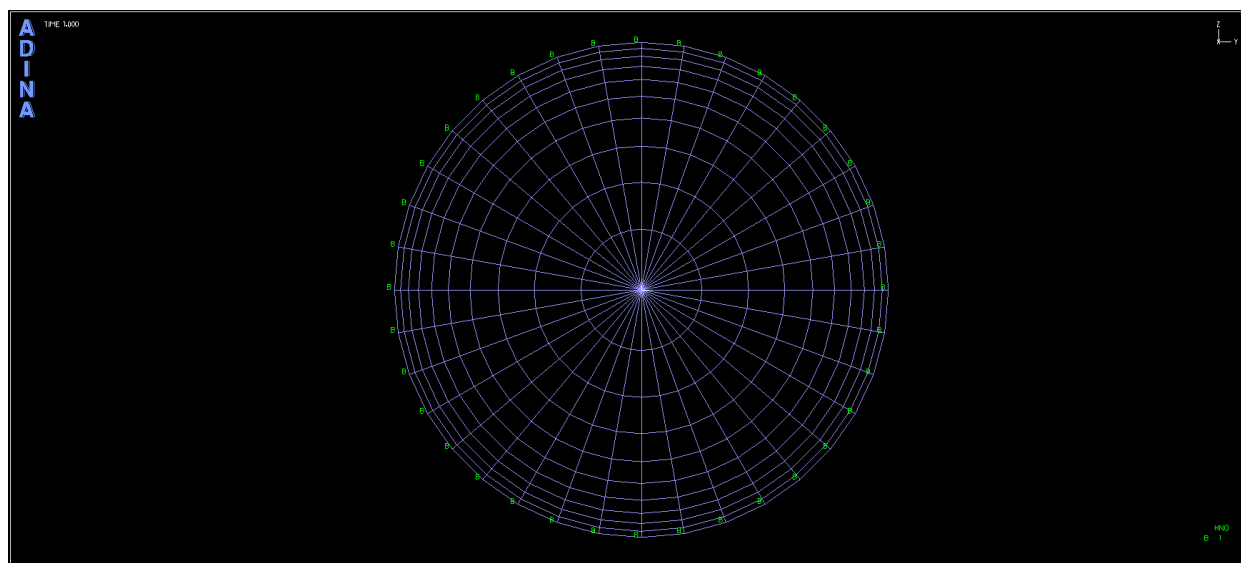
Слика 18: Прозор за одабир модела

Након одабира примера, отвара се следећи прозор (слика 19):



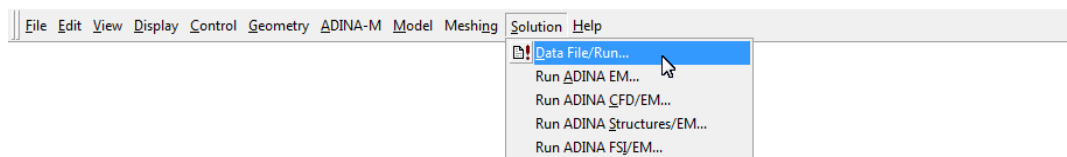
Слика 19: Log window

Након чега се приказује модел, слика 20:



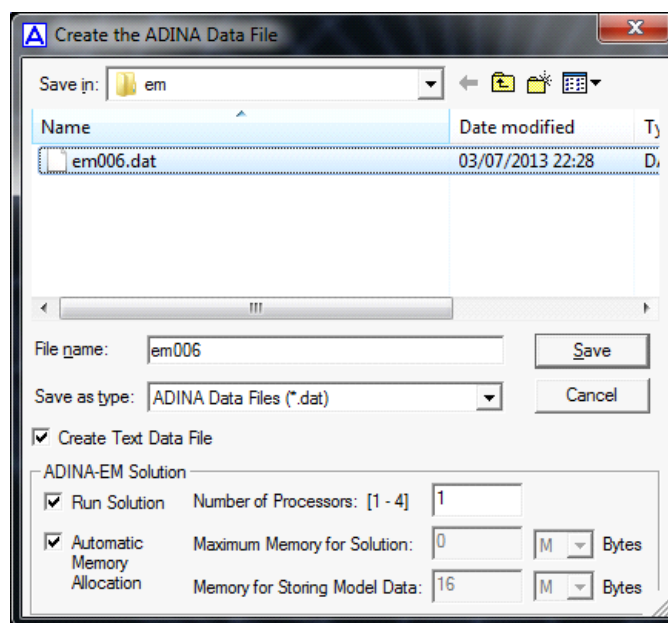
Слика 20: Приказ модела

После отварања дијалога у коме је приказан модел потребно је селектовати команду Solution>Data File/Run.



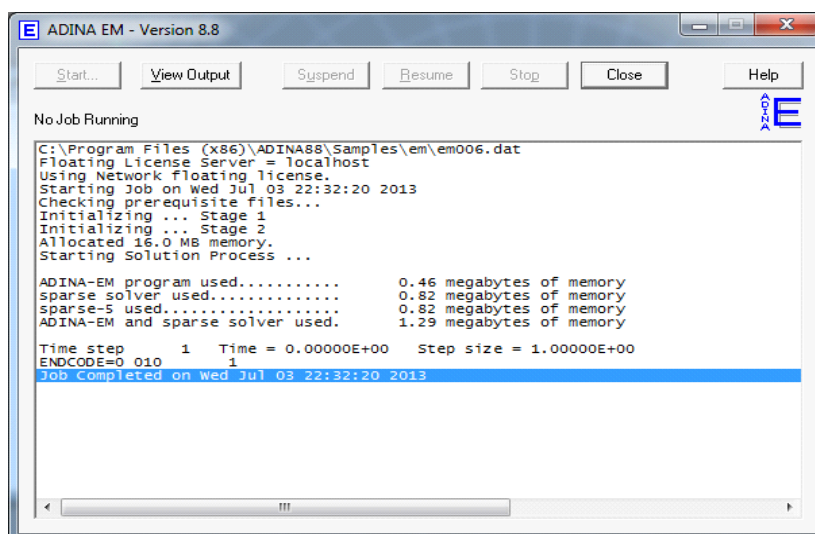
Слика 21: Команда Solution

Самим одабиром команде, отвара се следећи прозор (слика 22):



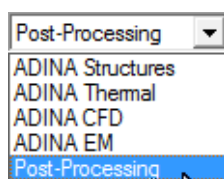
Слика 22: Креирање ADINA фајла

где је потребно потврдити опцију Save, након чега се отвара дијалог (слика 23) где је потребно потврдити опцију Close:



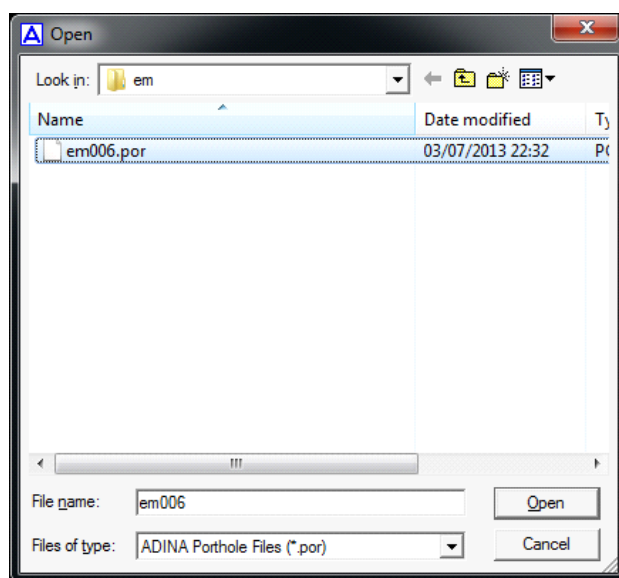
Слика 23: Затварање дијалога

Након затварања предходног дијалога, потребно је, у горњем левом углу, из Module Bar-а одабрати опцију Post-Processing.



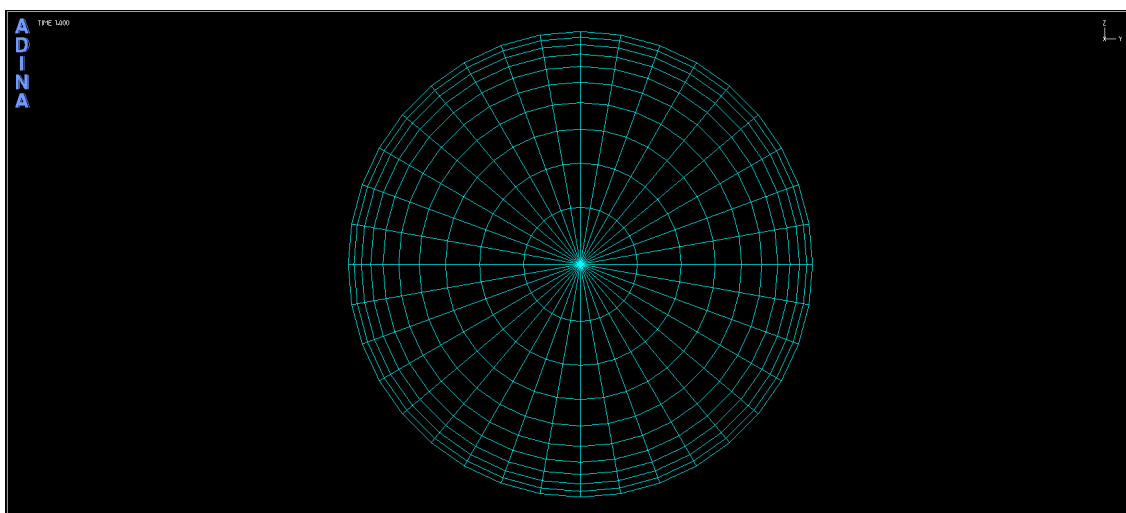
Слика 24: Post-Processing

После одабира Post-Processing-а треба одабрати опцију File>Open, након чега се отвара прозор (слика 25):



Слика 25: Отварање фајла

у коме се одабере одговарајућа датотека. На екрану ће се појавити следећа слика (слика 26):



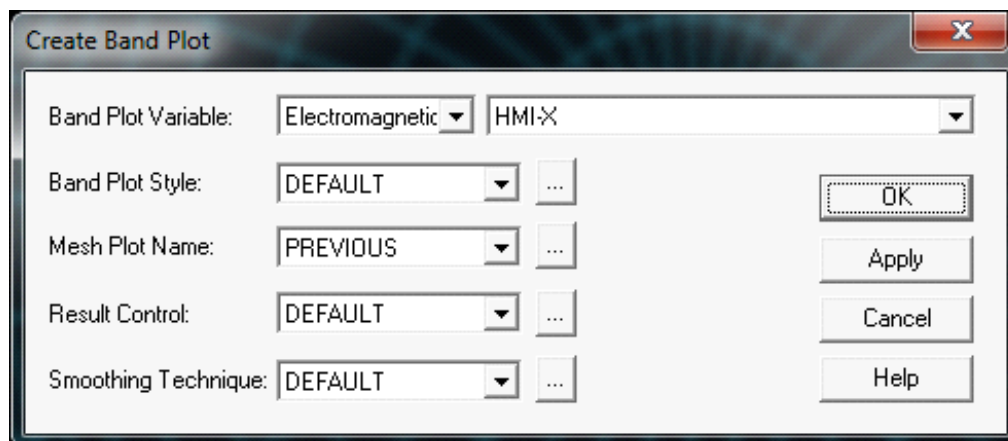
Слика 26: Слика модела

После тога, потребно је из Results Toolbar-а одабрати Create Band Plot:



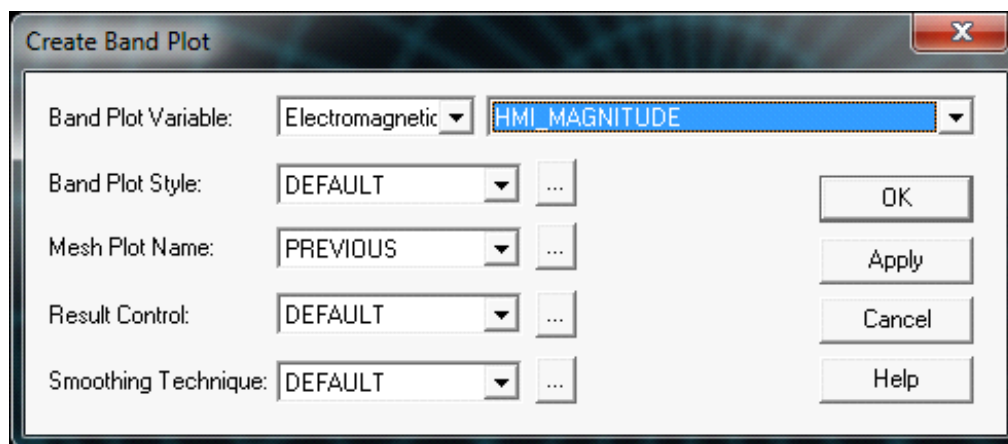
Слика 27: Create Band Plot

након чега се отвара следећи прозор (слика 28):



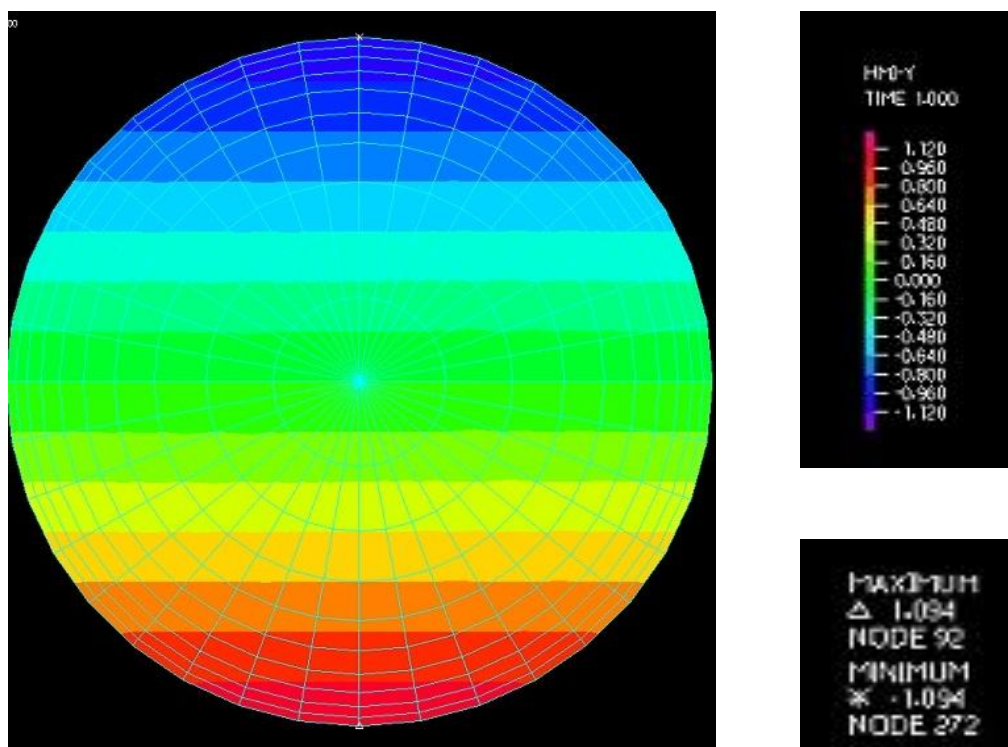
Слика 28: Create Band Plot

у коме је потребно одабрати: Band Plot Variable: Electromagnetics>HMI_MAGNITUDE:

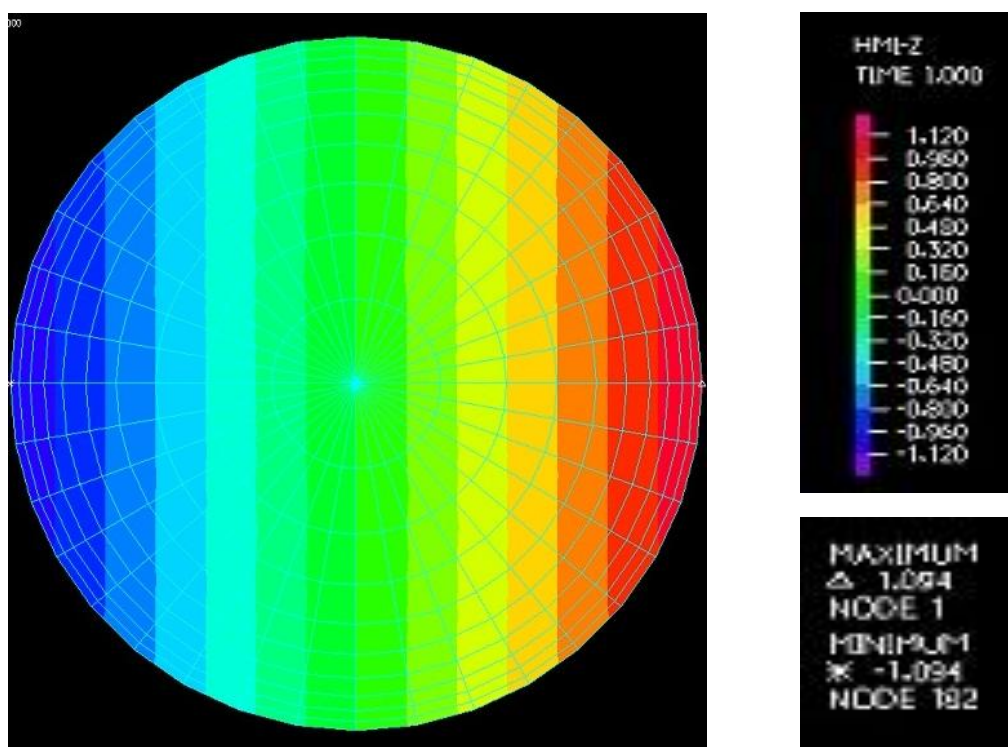


Слика 29: Create Band Plot

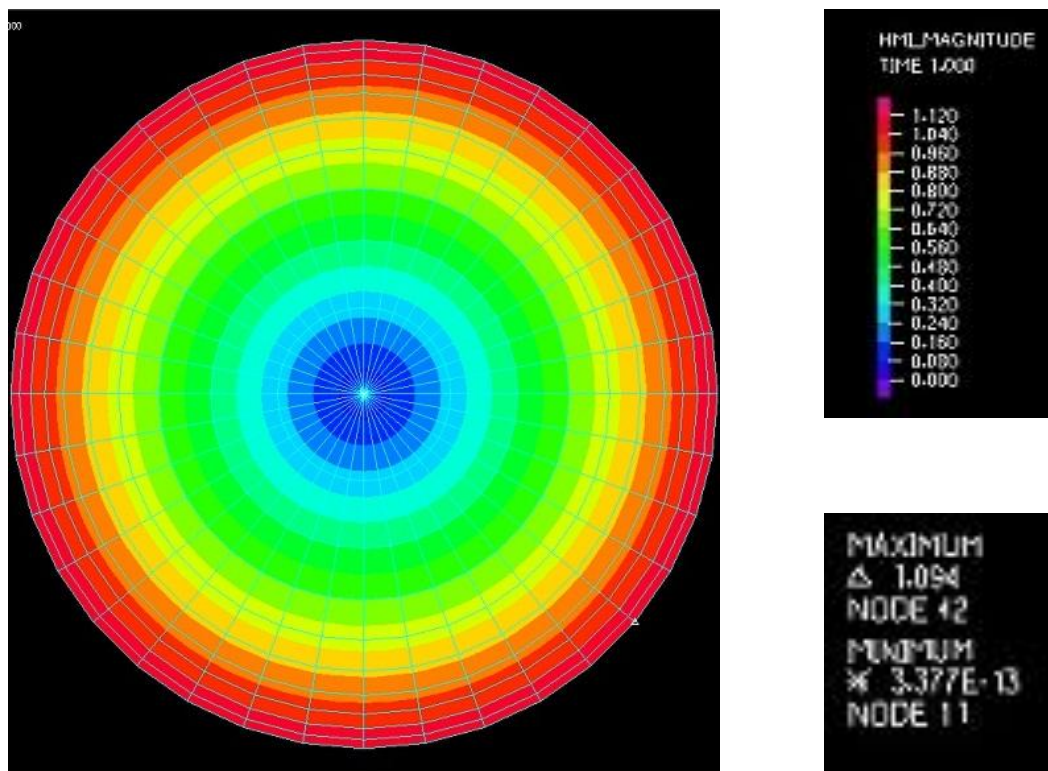
Потврдом на дугме ОК се приказују резултати.



Слика 30: Electromagnetic – HMI-Y



Слика 31: Electromagnetic – HMI-Z



Слика 32: Electromagnetic – HMI-Magnitude

10. ЗАКЉУЧАК

Око сваког наелектрисања образује се електрично поље, а обзиром да кретање наелектрисања изазива образовање магнетног поља, следи да су ова два поља природно и нераздвојно повезана, чинећи електромагнетно поље.

Магнетностатика је научна област која се бави изучавањем магнета и магнетних појава, узимајући у обзир и разне експерименте и пробе ради утврђивања чињеница. Магнетностатика је једна од многобројних битних наука јер је њена примена постала неизоставни део свакодневнице. Употребом одговарајућих једначина и закона, које су својевремено открили светски изумитељи, данас се решава велики број проблема који узимају у обзир методе коначних елемената, физичке реакције, као и развој великих софтвера за испитивање разних материјала и њихових особина из области магнетно и електростатике.

У сваком случају, са сигурношћу се може рећи да је човек, од тренутка када се први пут суочио са занимљивом појвом магнетизма, до данас успео да ту појаву објасни на задовољавајући и разуман начин, а такође и да експерименталним радом успе да појасни како да се иста појава примењује у науци.

Коначан циљ завршног рада је целовито објашњење појаве магнетизма уз научни и методолошки приступ.

Ако је овај рад барем делимично помогао расветљавању мистичне појаве магнетизма и ако је својим саджајем и начином излагања успео да заинтересује икога да сазна нешто више о магнетностатици као широкој области, његов задатак је испуњен.

11. ЛИТЕРАТУРА

- 5) Др Јован Сурутка – *Електромагнетика*, Београд, 1971.;
- 6) Антоније Р. Ђорђевић – *Електромагнетика*, Београд, 2012.;
- 7) Др Драгутин М. Величковић – *Збирка решених задатака из електромагнетике*, Ниш, 2000.;
- 8) В. М. Натарош – *Збирка испитних задатака и питања из електромагнетике*, Београд, 2008.;
- 9) [http://ktios.net/moodle/pluginfile.php/692/mod_resource/content/0/Maksvelove%20je
dnacine.pdf](http://ktios.net/moodle/pluginfile.php/692/mod_resource/content/0/Maksvelove%20je%20dnacine.pdf);
- 10) <http://www.grf.rs/mm/files/learnmat/68Elektromagnetski%20talasi1.pdf>;