

Универзитет у Крагујевцу
Факултет инжењерских наука



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Поузданост машинских система

Број индекса: 151 / 2008

Милош З. Матијевић
Теоријски модели расподеле
завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Проф. др Добривоје Ћатић
2. _____
3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

Резиме

Поузданост машинског система се дефинише као вероватноћа, да ће систем исправно радити у одређеном временском периоду. У раду су прво објашњени неки основни појмови везани за саму поузданост. Након тога је било речи о моделима расподеле времена исправног рада, као што је: експоненцијална, нормална, Релејева, логнормална, Вејбулова, Гама, Бета и Студентова расподела, као и бинормална, Поасонова и геометријска расподела; где је акценат стављен на нормалну расподелу као најчешће коришћену.

Кључне речи: поузданост система, модели расподеле, густина расподеле, интензитет отказа.

Abstract

The reliability of the mechaical system is defined as a probability that the system will work during a defined time period. In the thesis were fistly explained some of the basic principles of the reliability. After that i was discusted about the types of the distribution of the time of corect work, for example:exponential, normal, Rayleigh's, log-normal, Weibull's, Gama, Beta, Student's distribution, binormal distribution, Poisson's and geometrical distribution, where the accent is at the normal distribution which is the most used one.

Key words: the reliability of the system, types of distribution, distribution density, intensity of the collapse.

САДРЖАЈ:

1. УВОД	4
2. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ВЕЗАНИ ЗА ПОУЗДАНОСТ И ПОКАЗАТЕЉИ ПОУЗДАНОСТИ.....	6
2.1 Показатељи поузданости	7
2.2 Функција интензитета отказа и век трајања система	10
3. МОДЕЛИ РАСПОДЕЛЕ	12
3.1 Случајне величине и закони њихове расподеле	12
3.2 Функција и низ расподеле	13
3.3 Густина расподеле.....	15
3.4 Бројне карактеристике случајних величина	16
3.5 Неки континуални закони расподеле појављивања отказа	18
3.5.1 Експоненцијална расподела	18
3.5.2 Релејева расподела.....	20
3.5.3 Логнормална расподела.....	21
3.5.4 Вејбулова расподела.....	23
3.5.5 Гама расподела	25
3.5.6 Бета расподела	28
3.5.7 Студентова расподела	29
3.6 Неки дискретни закони расподеле случајне променљиве	30
3.6.1 Биномна расподела	30
3.6.2 Поасонова расподела	31
3.6.3 Геометријска расподела	33
4. НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА	34
4.1 Историјат нормалне расподеле	34
4.2 Дефиниција	36
4.3 Алтернативне формулације стандардизоване нормалне расподеле	41
4.4 Карактеризација	41

4.4.1 Функција густине расподеле	41
4.4.2 Функција кумулативне расподеле	42
4.4.3 Квантил функција	42
4.4.4 Карактеристична функција и функција покретног момента	43
4.4.5 Моменти	43
4.5 Особине	44
4.5.1 Стандардизовање нормалних случајних променљивих	44
4.5.2 Стандардно одступање и интервали поузданости	44
4.5.3 Централна гранична теорема	46
4.6 Повезане расподеле	46
4.6.1 Операције на једној случајној променљивој	46
4.6.2 Комбинације две независне случајне променљиве	47
4.6.3 Комбинације две или више независних случајно променљивих	47
4.6.5 Екстензије	48
4.7 Тестови нормалности	49
4.8 Нормална расподела у статистици	50
4.8.1 Значај нормалне расподеле у статистичкој анализи	50
5. ЗАКЉУЧАК	51
Додатак	53
ЛИТЕРАТУРА	57

1. УВОД

Од савремених техничких система захтева се висок ниво поузданости, уз истовремено смањење трошкова и скраћења времена развоја.

У свакодневном животу врло често су у употреби појмови који се односе на поузданост техничких производа и објеката [1]. Њихово значење се обично подразумева. Међутим, ради квантитативног одређивања поједних величина и параметара који карактеришу те појмове, неопходно их је прецизно дефинисати. Егзактан приступ овом проблему базира се на теорији поузданости као научној дисциплини која се бави проучавањем законитости, којих се треба придржавати при пројектовању, конструисању, испитивању, производњи и експлоатацији техничких производа, како би они имали што дужи радни век, а тиме и максимални радни учинак.

Поузданост је вероватноћа, на одређеном нивоу поверења, да ће систем успешно, без отказа, обавити функцију за коју је намењен, унутар специфицираних граница перформанси, у току специфицираног времена трајања задатака, када се користи на прописани начин и у сврху за коју је намењен, под специфицираним нивоима оптерећења, узимајући у обзир и претходно време коришћења система.

Историјски, развој науке о поузданости је релативно кратак али буран [2]. Сматра се да прва испитивања поузданости почињу са прикупљеним података о отказима појединих агрегата на авионима тридесетих година прошлог века, када и почиње експанзија коришћења авиона. На бази ових података могли су се добити и први показатељи поузданости, као што је на пример средњи број отказа по авиону. Почетком четрдесетих година утврђује се пропис да авиони могу имати највише један отказ на десет хиљада часова лета, с обзиром на висок степен опасности таквог отказа. Математичка теорија поузданости најпре се развила четрдесетих година у Сједињеним Америчким Државама и педесетих у Совјетском савезу, што је било у вези са проучавањем радио и електронских система у главном за потребе војне технике. Касније су проблеми поузданости проширени и на машинство, што је било у вези с неопходним обезбеђењем поузданости машина. Захтеви за поузданошћу све више расту, тако да су данас у развијеним земљама разрађени посебни прописи којима се прецизирају технички услови поузданости одговорних система.

С повећањем потрошње, све се већем броју произвођача економски исплати да проширују палету својих производа како би задовољили жеље и потребе дела тржишта на који досад нису рачунали. Као пример овог тренда може послужити аутомобилска индустрија у којој је приметан тренд повећања понуде типова возила код већина произвођача. Компаније које су у прошлости словиле као произвођачи великих аутомобила снажних погонских агрегата намењених већим породицама и људима који пуно путују, данас нуде и мала возила намењена градској вожњи, а произвођачи типично спортских аутомобила нуде теренска возила.

Уз куповину компонената од специјализованих произвођача, платформски развој производа те коришћењем услуга истих дизајнерских кућа, врло је тешко разликовати возила које произвођачи из различитих делова света нуде потенцијалним купцима.

Иако је могуће готово код било које марке аутомобила наћи возила исте снаге мотора, потрошње горива, додатне опреме и дизајна, постоји разлог због којег су купци спремни за одређене марке платити пуно вишу цену.

Разлог овакве спремности купца да називно исти производ плати пуно више лежи у чињеници да купци одређене марке производа сматрају поузданим. Иако је аутомобилска индустрија можда најбољи пример, слична је ситуација и са другим производима. Независно од тога на који је начин наклоност купца стечена, ако је купац не задовољан, брзо ће одлучити за производ конкурентског произвођача, а са њим, као последица његовог искуства, и одређени број његових познаника.

Поузданост стога игра све већу улогу, поготово у сектору техничких производа као што су возила, ручни алати или потрошачка електроника где се због великог броја функција, као и сложености њиховог извршавања врло брзо утврђује степен поузданости.

Наука о поузданости техничких направа и система се темељи на примени теорије вероватноће и математичке статистике. Ове математичке дисциплине су омогућиле разраду специјалних метода прорачуна основних показатеља поузданости.

2. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ВЕЗАНИ ЗА ПОУЗДАНOST И ПОКАЗАТЕЉИ ПОУЗДАНOSTИ

Ради лакшег и јаснијег проучавања поузданости техничких система потребно је прво дефинисати неке основне појмове из области поузданости као што су: објекат поузданости, параметар функционисања, радна способност, отказ, време исправног рада, гранично стање објекта и радни век.

Објекат у теорији поузданости представља предмет на који се поузданост односи. Објекат поузданости може бити технички систем или његови елементи.

Параметри функционисања карактеришу различита својства објекта као што су: показатељи тачности функционисања, механичке карактеристике, кинематски и динамички показатељи, економски показатељи, експлоатациони показатељи итд.

Радна способност представља стање објекта при коме је он способан да извршава своју задату функцију, а да при томе одређени параметри функционисања не пређу граничне вредности.

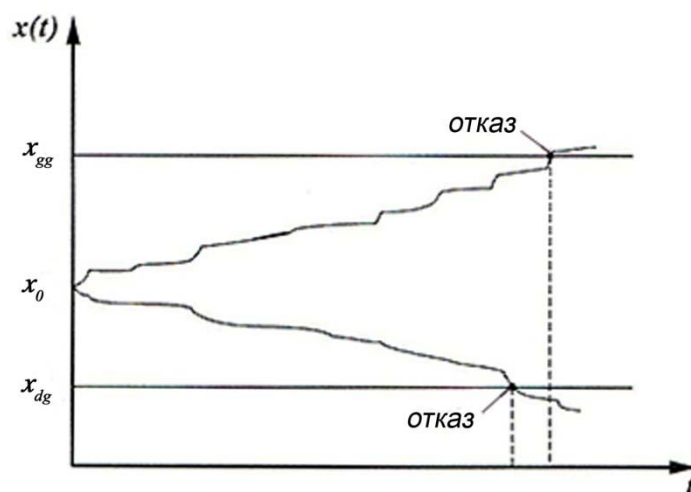
Отказ је један од основних појмова који фигуришу при разматрању поузданости и сигурности машинских и уопште техничких система.

Отказ објекта је догађај који има за последицу губитак радне способности. Под термином „догађај“ подразумева се динамичка промена стања система, што значи да појава отказа доводи до непланираног и непожељног стања система.

Отказ наступа када после извесног временског периода рада било који параметар функционисања достигне граничну вредност.

Време рада до отказа обухвата временски период исправног рада објекта до наступања отказа. Ово време је ефективно време функционисања објекта.

Отказ и време исправног рада могу се дефинисати посматрањем зависности карактеристичних параметара функционисања у функцији од времена, чија је илустрација дата на слици 2.1



Слика 2.1 Дијаграм зависности карактеристичног параметра функционисања x од времена t .

Посматрани параметар функционисања на почетку рада система има вредност x_0 али у току времена (рада) он се мења. Ако у неком тренутку параметар функционисања достигне било горњу граничну вредност x_{gg} , или доњу граничну вредност x_{dd} , доћи ће до отказа система.

Гранично стање објекта представља оно стање при коме даљу експлоатацију објекта треба прекинути. Оно настаје када је даље економски неоправдано извршавати поправка објекта.

Радни век објекта је временски период који обухвата целокупно време експлоатације објекта, узимајући у обзир систем ремонта објекта.

2.1 Показатељи поузданости

Са проблемом квантитативног изражавања поузданости повезан је појам показатеља поузданости. Под овим појмом подразумева се квантитативна карактеристика неког од својстава које одређује поузданост.

До квантитативних података о поузданости може се углавном доћи на следећа три начина: прорачуном, лабораторијски и у току експлоатације.

Први начин је посебно интересантан за уређаје или системе [1]. Поступак се састоји у утврђивању степена поузданости на основу познавања поузданости компонената или блокова, кола уређаја и предвиђених режима рада. Тако утврђена поузданост је прорачуната поузданост. Од значаја је при развијању нових типова уређаја и система, када се у фази пројектовања узима у обзир потребна поузданост као један од захтева који треба да испуни пројектовани уређај.

Други начин добијања података о поузданости је лабораторијски. Постоје разне нормалне и убрзане статичке и динамичке методе утврђивања поузданости у лабораторијским условима. Испитивања се врше било у нормалним, било у посебним режимима рада.

Најзад, најприроднији начин добијања података о поузданости је на основу експлоатације. Специфичан проблем који се при томе јавља је организација добијања информација и веродостојност.

С обзиром на то како је податак о поузданости формиран, говори се о утврђеној, оцењеној, екстраполираној, прогнозираној и стварној поузданости. Било којој карактеристици поузданости даје се једна од ових верзија. Верзија “утврђен” односи се на податке добијене на основу испитивања у којем сви испитни узорци нису престали да раде. Верзија “оцењен” односи се на податке који су одређени са одговарајућим нивоом веродостојности и представљају граничну вредност интервала веродостојности. Верзија “екстраполиран” односи се на податке о поузданости у датим условима рада који су дефинисани екстраполацијом или интерполацијом утврђених или оцењених података о поузданости у другим условима рада. Верзија “прогнозиран” односи се на податке прорачунате на основу утврђене, оцењене или екстраполиране поузданости. Верзија “стварна” односи се на податак добијен на основу испитивања у току којег су сви узорци престали да раде. Математичка представа показатеља поузданости је повезана са теоријом вероватноће и математичком статистиком.

Први показатељ поузданости који се односи на исправност објекта представља вероватноћа безотказног рада [3]. Овај показатељ даје оцену вероватноће да у одређеном временском периоду неће доћи до појаве отказа, односно да ће објекат исправно радити.

Ако је T случајна променљива величина која означава време појаве отказа, онда ће вероватноћа отказа у функцији времена бити једнака:

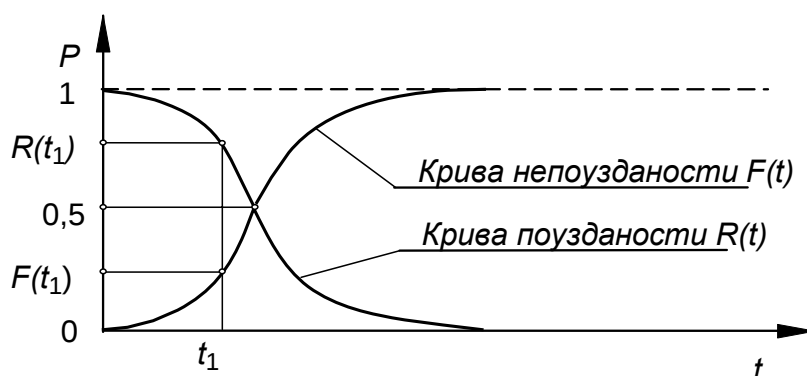
$$P(T \leq t) = F(t), t \geq 0. \quad (2.1)$$

Функција $F(t)$ зове се функција расподеле отказа и она показује вероватноћу да ће систем отказати до времена t . У теорији вероватноће ова функција се зове кумулативна функција расподеле. Ако се поузданост система означи као вероватноћа безотказног рада у временском интервалу t , може се писати:

$$R(t) = 1 - F(t) = P(T > t), \quad (2.2)$$

где $R(t)$ означава функцију поузданости.

На слици 2.2 приказане су функционалне зависности $F(t)$ и $R(t)$.



Слика 2.2 Функционалне зависности $F(t)$ и $R(t)$

Показатељ вероватноће исправног рада $R(t)$ се креће у границама од 0 до 1. Када показатељ $R(t)$ има вредност 0 каже се да је објект непоуздан, а када је $R(t) = 1$ објект је сигуран.

Функцију густине отказа се обележава са $f(t)$, а на основу основних закона из теорије вероватноће може се написати да је:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}. \quad (2.3)$$

Према теорији вероватноће ова функција се зове функција густине вероватноће. На основу претходних дефиниција може се написати израз за функцију поузданости:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt = \int_t^{\infty} f(t)dt. \quad (2.4)$$

Дакле, довољно је знати облик функције $f(t)$ па да се добије функција поузданости $R(t)$. Претпоставља се да се истовремено испитује n система. После одређеног времена t , n_1 система нису отказали, а n_2 система су отказали при чему је $n_2 = n - n_1$. Према овоме и на основу до сада реченог о поузданости, $R(t)$ се може изразити као:

$$R(t) = \frac{n_1(t)}{n} = \frac{n_1(t)}{n_1(t) + n_2(t)}. \quad (2.5)$$

Значи да ова једначина показује вероватноћу безотказног рада било ког од n система у току времена t , јер је она као што је речено функција времена. По логици ствари, јасно је да како t расте, све више и више система отказује, што значи да ће поузданост опадати. Претходна једначина се може написати у следећем облику:

$$R(t) = \frac{n - n_2(t)}{n} = 1 - \frac{n_2(t)}{n}. \quad (2.6)$$

Лева и десна страна претходне једначине се могу диференцирати па се добија следеће:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{d[1 - \frac{n_2(t)}{n}]}{dt} = -\frac{1}{n} \frac{dn_2(t)}{dt}, \quad (2.7)$$

где је n константно.

На основу овог се добија израз за фреквенцију са којом систем отказује:

$$\frac{dn_2(t)}{dt} = -n \frac{dR(t)}{dt}. \quad (2.8)$$

Сада је могуће обе стране претходне једначине поделити са $n_1(t)$:

$$\frac{1}{n_1(t)} \frac{dn_2(t)}{dt} = -\frac{n}{n_1(t)} \frac{dR(t)}{dt}. \quad (2.9)$$

Из претходне једначине се може дефинисати функција интензитета отказа $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{1}{n_1(t)} \frac{dn_2(t)}{dt} = -\frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt}. \quad (2.10)$$

Одавде се може добити општа формула за функцију поузданости $R(t)$. Може се написати да је:

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\lambda(t)dt, \quad (2.11)$$

односно:

$$\int_1^R \frac{dR(t)}{R(t)} = -\int_0^t \lambda(t)dt, \quad (2.12)$$

односно:

$$\ln R(t) = -\int_0^t \lambda(t)dt, \quad (2.13)$$

и на крају:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}. \quad (2.14)$$

Формула (2.14) математички описује поузданост на најопштији начин и може се применити за било коју функцију густине отказа. Из једначине (2.2) може се написати да је:

$$F(t) = 1 - R(t), \quad (2.15)$$

па се заменом у једначини (2.3) добија:

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}. \quad (2.16)$$

Имајући у виду израз (2.16), функција интензитета отказа како је дефинисано изразом (2.10) може се написати и у следећем облику:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}. \quad (2.17)$$

Значај ове функције је у томе што показује како се у току времена мења интензитет отказа неког система.

Очекивано време безотказног рада дефинише се на основу следеће једначине:

$$T_{sr} = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)dt. \quad (2.18)$$

Израз за T_{sr} може се добити и у другом облику. Ако се једначина (2.16) замени у једначину (2.18) добија се следеће:

$$T_{sr} = -\int_0^{\infty} t dR(t) = -tR(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (2.19)$$

Јасно је да први део збира тежи нули за обе границе на основу дефиниције $R(t)$ преко $\lambda(t)$, јер је у питању експоненцијална функција, а xe^{-x} када x тежи ∞ тежи нули. На основу овога, други облик за очекивано време безотказног рада система је дат изразом:

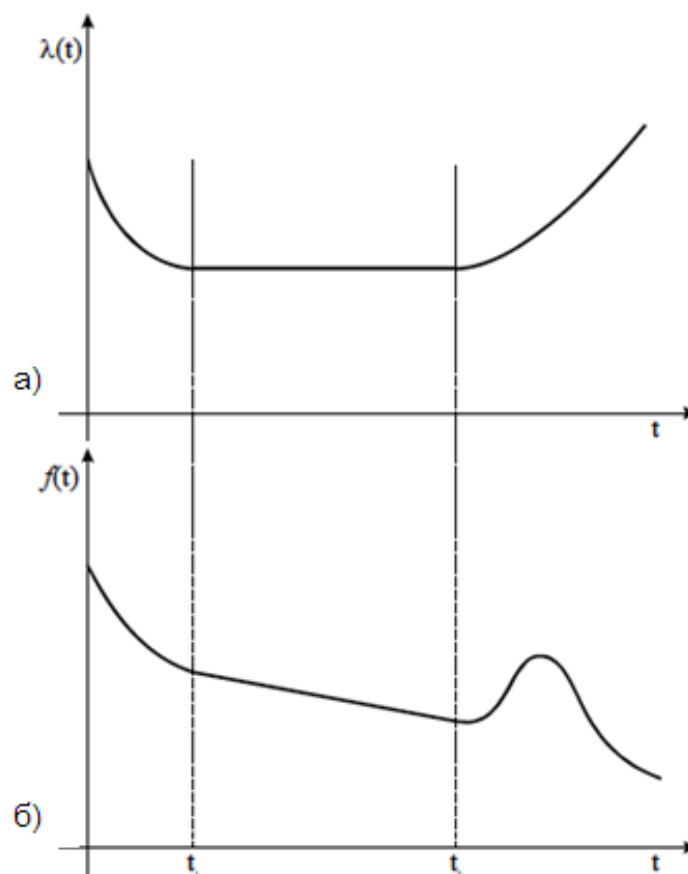
$$T_{sr} = \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (2.20)$$

Ако се систем који се испитује обнавља одржавањем или поправкама, тј. у случају такозваних обновљивих система, очекивано време безотказног рада је познато под називом средње време између отказа (*MTBF – Mean Time Between Failure*). При томе је јасно да се полази од претпоставке да је понашање поправљеног система у погледу интензитета отказа исто као код новог система. Код такозваних непоправљивих система говори се о средњем времену рада до првог отказа, или једноставно о средњем времену до отказа (*MTTF – Mean Time To Failure*). Величине *MTBF* и *MTTF* треба увек користити када је специфицирана функција густине отказа, јер ниво поузданости који се може приписати одређеној вредности *MTBF* и *MTTF* зависи од облика те функције. Ако се посматра n система који се испитују, при чему се бележе времена рада између отказа $t_1, t_2, \dots, t_n$ онда ће *MTBF* бити:

$$MTBF = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i. \quad (2.21)$$

2.2 Функција интензитета отказа и век трајања система

У почетку коришћења неког система обично се јавља већи број отказа који се могу приписати почетним слабостима или пропуштеним дефектима у току производње [1]. Касније, ови такозвани рани откази уступају место отказима за које је тешко утврдити узрок настајања. То су такозвани случајни откази, чије се време појављивања не може предвидети, али зато се зна фреквенција појављивања отказа. Старењем система почињу да се јављају откази услед истрошености. На слици 2.3 а) су приказани периоди промене $\lambda(t)$ за сва три интервала, а на слици 2.3 б) облици функције густине расподеле отказа $f(t)$.



Слика 2.3 Општи облик функција $\lambda(t)$ и $f(t)$

У периоду раних отказа (0 до t_1) $\lambda(t)$ и $f(t)$ су опадајуће функције. За карактеристику случајних отказа (t_1 до t_2) приближно је константна вредност $\lambda(t)$ и приближно експоненцијална функција $f(t)$. У периоду старења (t_2 до ∞) $\lambda(t)$ је растућа функција, док $f(t)$ има један врх око кога се дешава највећи број отказа. Из овог разматрања може се видети да је функција $\lambda(t)$ погоднија од $f(t)$ када се жели направити разлика између разних облика отказа.

Искуство је показало да многи системи имају криву интензитета отказа како је већ показано на слици 2.3 а). Многи произвођачи опреме високе поузданости пуштају ту опрему да ради како би је довели на почетак интервала константних отказа. Тек онда је уграђују у неки систем.

На жалост, многи системи имају континуално опадајућу и континуално растућу функцију интензитета отказа, па се на њих не може применити облик криве $\lambda(t)$ са слике 2.3 а).

3. МОДЕЛИ РАСПОДЕЛЕ

За прогнозирање понашања објекта с гледишта појаве отказа, неопходно је математички описати закон расподеле и густину расподеле отказа [1]. Основни задатак при проучавању поузданости је одабрати такав облик функције $F(t)$ и $f(t)$ тако да оне одржавају стварну слику. У теорији вероватноће познат је већи број различитих закона расподеле случајних величина, који се могу успешно користити за решавање задатака поузданости. Функција поузданости и функција интензитета отказа су јединствене, тј. одређеној функцији поузданости одговара само одређена функција интензитета отказа и обрнуто. Зато познавањем законитости $f(t)$ (густине расподеле времена рада до отказа), могуће је одредити и функционалне зависности $F(t)$ (расподелу времена рада до отказа) као и интензитета отказа $\lambda(t)$.

3.1 Случајне величине и закони њихове расподеле

Основни појам у теорији вероватноће је појам догађаја. Под појмом догађај у неком експерименту подразумева се свака чињеница која може да произађе или не из тог експеримента. Карактеристично за догађаје разних врста је да они имају неку меру (степен) могућности да се остваре. Да би се омогућило да се догађаји упоређују по степену могућности да се остваре, неопходно је да се са догађајем повеже одређени број, који је утолико већи, уколико је већа могућност остварења тог догађаја. За поређење разних догађаја по вероватноћи, усвојена је јединица мерења: вероватноћа извесног догађаја, тј. догађаја који ће сигурно произићи. За вероватноћу таквог догађаја усвојен је број 1, а сви остали догађаји који су могући, али не и извесни, имају вероватноћу мању од 1. Догађају који у датом експерименту уопште не може да се оствари, придодељена је вероватноћа једнака нули, што је сасвим природно у односу на вероватноћу извесног догађаја.

Израчунавање вероватноће случајног догађаја базира се на закону великих бројева, према коме се, при неограниченом повећавању броја опита, може тврдити са практичном сигурношћу да се учесталост догађаја мало разликује од његове вероватноће појављивања у једном опиту. Учесталост догађаја (или статистичка вероватноћа) дефинисана је на основу резултата опита и израчунава се из израза:

$$P_s = \frac{m}{n}, \quad (3.1)$$

где је:

m - број појављивања догађаја а

n - укупан број извршених опита.

Не одређује се вероватноћа сваког догађаја преко резултата опита. У теорији вероватноће постоје многе методе за посредно одређивање вероватноће једних догађаја преко вероватноће других, али и у таквом поступку у крајњој линији се долази до коришћења резултата опита.

Поред основног појма догађај, у теорији вероватноће један од најважнијих појмова је појам случајне величине.

Случајна величина је величина, која као резултат опита може да добије неку вредност која се унапред не може предвидети.

Случајне величине, које могу да добију вредност из пребројивог скупа вредности, називају се прекидним или дискретним случајним величинама.

Постоји и друга врста случајне величине, тзв. непрекидна случајна величина, која може да добије вредност из скупа вредности које непрекидно попуњавају неки интервал.

У класичној теорији вероватноће оперисало се са догађајима, док се у савременој ради са случајним величинама, што је у решавању многобројних задатака из праксе погодније.

Најчешће се израчунавање вероватноће неког догађаја везује за неку случајну величину или систем случајних величина, на основу чијих особина се изражава и вероватноћа случајног догађаја.

У теорији поузданости изводе се операције са случајним величинама да би се добили показатељи поузданости.

3.2 Функција и низ расподеле

Да би се могло оперисати са случајним величинама, дају се начини, помоћу којих се случајна величина може описати и окарактерисати.

Случајна величина X (прекидна и непрекидна) потпуно је окарактерисана, с тачке гледишта вероватноће, функцијом расподеле, која изражава вероватноћу догађаја да се оствари неједнакост:

$$X < x, \quad (3.2)$$

где је x - текућа променљива.

Вероватноћа P овога догађаја је функција променљиве x и означава се са $F(x)$:

$$F(x) = P(X < x). \quad (3.3)$$

Функција расподеле $F(x)$ назива се често још и интегралном функцијом расподеле или интегралним законом расподеле.

За дискретне случајне величине постоји још један специјални облик закона расподеле, који даје везу између могућих вредности случајне величине и одговарајућих вероватноћа. Форма задавања закона расподеле дискретне случајне величине може да буде двојака:

- у виду табеле у којој су дате вредности случајне величине и одговарајуће вероватноће (низ расподеле случајне величине X),

- хистограм расподеле, који представља графички приказ закона расподеле, где се на оси апсцисе представљају могуће вредности случајне променљиве (x_i), а на координати одговарајуће вероватноће.

За непрекидне случајне променљиве облик закона расподеле, као што је низ расподеле, не постоји. Међутим функција расподеле $F(x)$ је универзална и потпуна карактеристика свих случајних величина (прекидних и непрекидних).

Опште особине функције расподеле су следеће:

1. $F(x)$ је неоппадајућа функција аргумента x , $F(x_2) > F(x_1)$, ако је $x_2 > x_1$,
2. $F(-\infty) = 0$,
3. $F(+\infty) = 1$.

Ако се зна низ расподеле дискретне случајне променљиве, лако се може формирати функција расподеле:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i), \quad (3.4)$$

где неједнакост у знаку суме означава да се сумирање вероватноћа односи на све вредности x_i које су мање од x . На тај начин се увек може формирати функција расподеле за прекидну случајну величину.

У вези изучавања случајних променљивих, у пракси се често јавља проблем да се израчуна вероватноћа да случајна величина X узме неку вредност из задатог интервала $[a, b]$. Проблема се своди на одређивање вероватноће P следећег догађаја:

$$a \leq X < b.$$

Вероватноћа тог догађаја може се изразити преко функције расподеле случајне величине X . Да би се то учинило, треба посматрати три следећа догађаја:

- догађај А: $X < b$,
- догађај Б: $X < a$,
- догађај В: $a \leq X < b$.

Догађај А ће произаћи ако се догоди било догађај Б, било догађај В, одакле, према основним правилима алгебре случајних догађаја, следи:

$$A = B + V, \quad (3.5)$$

односно:

$$P(A) = P(B) + P(V), \quad (3.6)$$

или

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \leq X < b). \quad (3.7)$$

Како је:

$$P(X < b) = F(b), \quad (3.8)$$

и

$$P(X < a) = F(a), \quad (3.9)$$

из релације (3.7) следи:

$$F(b) = F(a) + P(a \leq X < b), \quad (3.10)$$

односно:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \quad (3.11)$$

На основу релације (3.11) може се одредити и вероватноћа да ће случајна величина X добити једну одређену вредност, односно да ће пасти на одређени бесконачно мали интервал. Ако се у релацији (3.11) узме гранична вредност $b \rightarrow a$, добија се:

$$\lim_{b \rightarrow a} P(a \leq X < b) = \lim_{b \rightarrow a} (F(b) - F(a)). \quad (3.12)$$

Гранична вредност израза (3.12) зависи од природе функције расподеле, односно да ли је $F(x)$ непрекидна функција или има скокове. Ако је $F(x)$ у тачки $x = a$ непрекидна, тада је та гранична вредност једнака нули. Другим речима, ако је функција расподеле $F(x)$ увек непрекидна, тада је вероватноћа било које издвојене вредности случајне величине једнака нули.

3.3 Густина расподеле

Ако је функција расподеле $F(x)$ случајне величине X непрекидна и диференцијабилна, може се израчунати вероватноћа да ће та случајна величина узети неку вредност из интервала $[x, x + \Delta x]$.

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x). \quad (3.13)$$

Вероватноћа по изразу (3.13) представља прираштај функције расподеле у том интервалу. Однос ове вероватноће према дужини интервала у граничном прелазу када $\Delta x \rightarrow 0$, представља извод функције расподеле:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x). \quad (3.14)$$

Извод функције расподеле, који се означава са $f(x) = F'(x)$, је карактеристика у извесном смислу густине са којом су расподељене вредности случајне величине у тачки x . Због тога се та функција назива густином расподеле непрекидне случајне величине. За исту функцију постоји још и назив “диференцијална функција расподеле” или “диференцијални закон расподеле”.

Густина расподеле $F(x)$ је такође један од облика закона расподеле случајне променљиве, али за разлику од функције расподеле $F(x)$, тај облик није универзалан, јер постоји само за непрекидне случајне променљиве.

Вероватноћа да ће случајна величина X узети неку вредност на елементарном одсечку dx дата је изразом:

$$f(x) dx. \quad (3.15)$$

Вероватноћа да ће величина X пасти на одсечак $[a, b]$ може се изразити преко густине расподеле:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.16)$$

Функција расподеле $F(x)$ може се на основу израза (3.16) изразити преко густине расподеле:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (3.17)$$

Основне особине густине расподеле следе из особина функције расподеле и претходно наведених релација између ове две функције:

1. Густина расподеле је ненегативна функција:

$$f(x) \geq 0, \quad (3.18)$$

што следи из особине функције $F(x)$ да је неоппадајућа функција.

2. Особина:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (3.19)$$

следи из релације (3.17) и из особине $F(\infty) = 1$.

График који представља густину расподеле, назива се кривом расподеле.

3.4 Бројне карактеристике случајних величина

Наведени облици закона расподеле за дискретне и непрекидне случајне величине (функција расподеле, низ расподеле, густина расподеле) представљају неке функције које потпуно описују случајну величину.

У многим случајевима из праксе није неопходно да се случајна величина опише у потпуности, и да се одређују закони њене расподеле. Најчешће је довољно да се знају неки бројни параметри, који у одређеном степену карактеришу суштинске особине расподеле случајне променљиве. На пример, од интереса је бројни параметар који показује неку средњу вредност око које се групишу могуће вредности случајне променљиве, или параметар који показује степен растурања вредности случајне величине у односу на средњу вредност.

Овакви бројни параметри називају се бројним карактеристикама случајне променљиве (параметри расподеле).

Бројне карактеристике случајне променљиве имају важну улогу у теорији вероватноће. Многи проблеми се решавају само операцијама са бројним карактеристикама, а да се о законима расподеле и не води рачуна. Нарочито је значајна особина да, уколико се у некој појави јавља више случајних величина, од којих свака има извесни утицај на исход појаве, тада закон расподеле резултујуће случајне величине не зависи од закона расподеле појединих случајних величина, тако да није потребно да се знају закони расподеле појединачних случајних величина. На основу бројних карактеристика тих величина, знајући да ће се резултантни утицај понашати по тзв. нормалном закону расподеле, могуће је одредити његове параметре.

Једна од најважнијих бројних карактеристика случајне величине, која даје неку средњу вредности случајне величине, назива се математичко очекивање или средња вредност случајне величине. Ова карактеристика описује положај случајне величине на бројној оси.

Математичко очекивање $M[X] = m_x$ дискретне случајне величине X , која може да добије вредност $x_1, x_2, \dots, x_n$ са одговарајућим вероватноћама $p_1, p_2, \dots, p_n$, дефинисано је изразом:

$$M[X] = m_x = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}. \quad (3.20)$$

Како је:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad (3.21)$$

добија се за m_x израз:

$$m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (3.22)$$

Случајна величина X , чија је функција расподеле $F(x)$, има математичко очекивање у виду Стилтјесовог(Stieltjes) интеграла:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x). \quad (3.23)$$

Математичко очекивање непрекидне случајне величине X , чија је густина расподеле $f(x)$, изражава се интегралом:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \quad (3.24)$$

Аналогија између израза (3.21) и (3.23) је очигледна. Уместо прекидне вредности случајне променљиве x_i , узима се непрекидна вредност x , уместо вероватноће појединих вредности x_i долази елемент вероватноће $f(x)dx$, а уместо збира интеграл. Треба имати у виду да егзистенција вредности m_x зависи од егзистенције израза (3.21) односно (3.23).

Осим карактеристика положаја (средњих вредности), које представљају типичне вредности случајне величине, употребљавају се карактеристике расподеле вредности случајне променљиве око средњих вредности. Ове бројне карактеристике називају се моменти по аналогији са моментима из механике. Најчешће се користе централни моменти, који се дефинишу преко централне случајне величине X_c :

$$X_c = X - m_x.$$

Централни моменти k -тог степена дискретне случајне величине X назива се математичко очекивање k -тог степена одговарајуће центриране случајне величине:

$$M[(X - m_x)^k] = m_k = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^k p_i. \quad (3.25)$$

За непрекидну случајну величину X , одговарајући централни моменат k -тог реда може да се напише у облику:

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x)dx. \quad (3.26)$$

Од централних момената, од посебног је интереса други централни моменат, који се још назива и дисперзијом случајне величине X . За дискретну случајну величину, дисперзија D_x је дата изразом:

$$D_x = m_2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - m_x^2, \quad (3.27)$$

а за непрекидну:

$$D_x = m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx. \quad (3.28)$$

Дисперзија је карактеристика растурања вредности случајне променљиве око њеног математичког очекивања. Уколико је мања величина дисперзије, утолико је већи проценат вредности случајне величине из области која непосредно окружује математичко очекивање.

Уместо дисперзије D_x , која има размеру квадрата случајне променљиве, често је погодније да се користи величина која има размеру саме случајне променљиве. Та величина се назива средње квадратно одступање или стандардно одступање и обележава се са:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (3.29)$$

3.5 Неки континуални закони расподеле појављивања отказа

Функција поузданости и функција интензитета отказа су јединствене, тј. одређеној функцији поузданости одговара само одређена функција интензитета отказа и обрнуто. У овом одељку ће бити дате функције густине отказа које су најчешће користе у проучавању поузданости, заједно са функцијом поузданости и функцијом интензитета отказа које се на њих односе. Исто тако, биће дати изрази за очекивано време безотказног рада за сваки од ових случајева.

3.5.1 Експоненцијална расподела

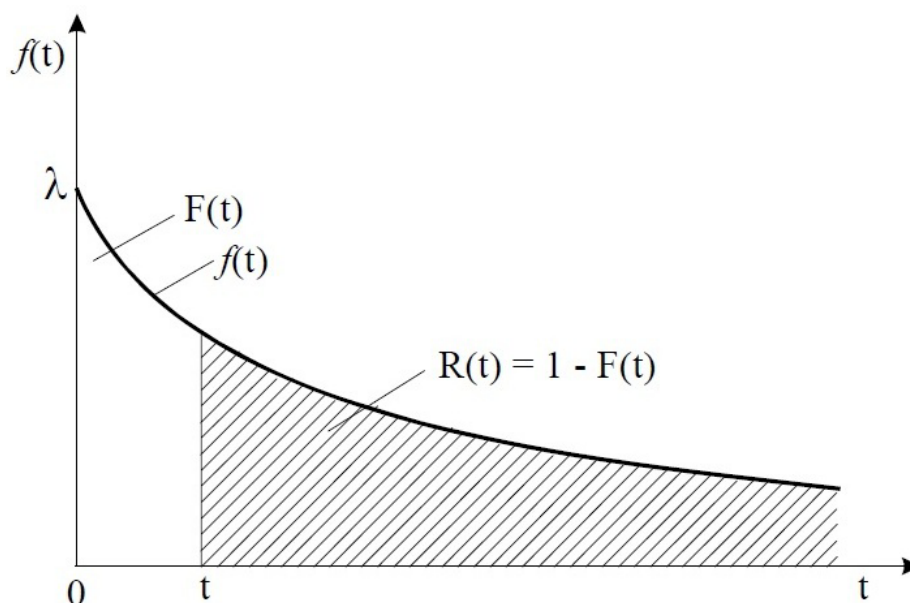
Функција густине отказа у случају експоненцијалне расподеле гласи:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0, \lambda > 0, \quad (3.30)$$

где је:

λ - параметар а
 t - време отказа.

Облик функције густине експоненцијалне расподеле дат је на слици (3.1):



Слика 3.1 График густине експоненцијалне расподеле

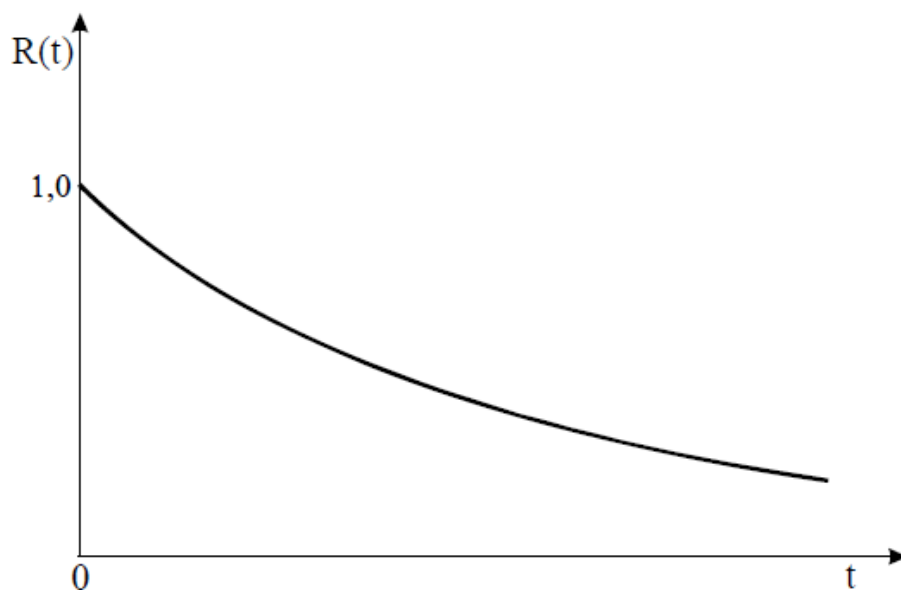
Коришћењем једначине (2.15) може се добити функција поузданости:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt, \quad (3.31)$$

односно:

$$R(t) = e^{-\lambda t}. \quad (3.32)$$

Облик функције поузданости приказан је на слици 3.2.

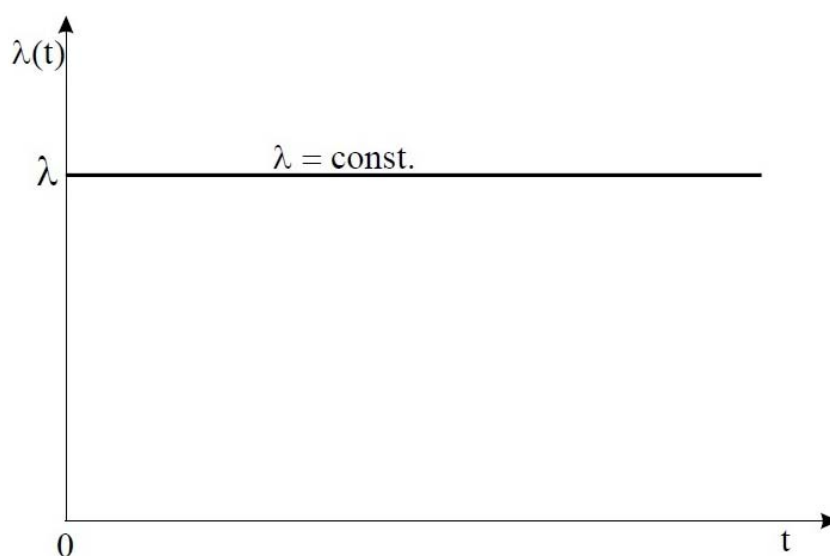


Слика 3.2 Функција поузданости у случају експоненцијалне расподеле

Функција интензитета отказа је по дефиницији једнака:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda. \quad (3.33)$$

Према томе, у случају експоненцијалне расподеле интензитет отказа не зависи од времена и увек има константну вредност. То је веома повољна околност која много упрошћава израчунавање у случајевима када се може применити експоненцијална расподела, а то је случај код електронских система. Произилази да се одређивањем параметра λ експоненцијалне расподеле, у исто време добија и вредност интензитета отказа. Интензитет отказа се може представити правом линијом као на слици 3.3.



Слика 3.3 Функција интензитета отказа у случају експоненцијалне расподеле

Средње време рада до отказа за експоненцијалну расподелу се одређује на основу израза:

$$T_{sr} = \int_0^{\infty} R(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (3.34)$$

Значи, очекивано време безотказног рада је једнако реципрочној вредности интензитета отказа λ . Та вредност се често обележава са $MTTF$, па је значи:

$$MTTF = \frac{1}{\lambda}. \quad (3.35)$$

Ово је још једна повољна околност када је у питању експоненцијална расподела, јер се одређивањем интензитета отказа λ врло лако може добити вредност $MTTF$, и обрнуто.

Познато је из теорије вероватноће да је површина испод криве $F(x)$ једнака јединици. Површина од 0 до времена t једнака је вероватноћи појаве отказа $F(x)$, док је површина од времена t до ∞ једнака вероватноћи безотказног рада $R(t)$, тј. $1 - F(x)$. Исто тумачење може се применити без обзира на облик расподеле, што значи да су наведени односи опште применљиви.

3.5.2 Релејева расподела

Случајна променљива време рада до отказа има Релејеву (Rayleigh) расподелу уколико је функција густине дефинисана изразом:

$$f(t) = \frac{t}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.36)$$

где је:

σ - позитиван параметар расподеле, а
 t – време рада до отказа.

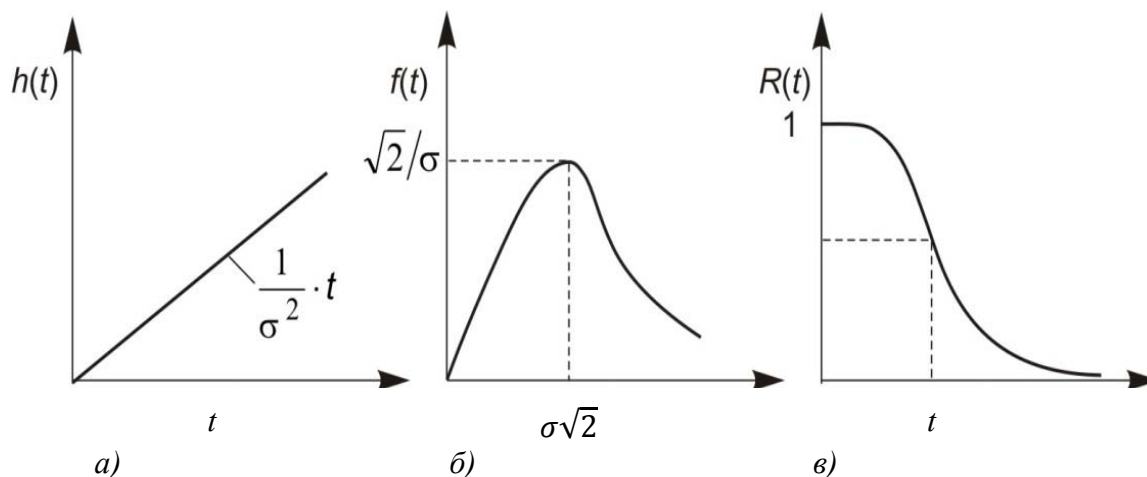
Основна карактеристика ове расподеле је да интензитет отказа представља линеарно растућу функцију времена:

$$\lambda(t) = \frac{t}{\sigma^2}. \quad (3.37)$$

Функција поузданости код Релејеве расподеле има облик:

$$R(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.38)$$

На слици 3.4 дате су илустрације графика функција интензитета отказа, густине времена рада до отказа и поузданости Релејеве расподеле.



Слика 3.4 Илустрације графика функција а) интензитета отказа, б) густине времена рада до отказа и в) поузданости Релејеве расподеле

Релејева расподела се често среће у пракси. Овој расподели се, на пример, померавају ексцентричност машинских елемената и промашаји пројектила и ракета у артиљерији. Такође, ова расподела се користи за моделирање поузданости за период старења машинских елемената, у случају линеарне зависности интензитета отказа.

3.5.3 Логнормална расподела

Логнормална функција густине отказа има облик:

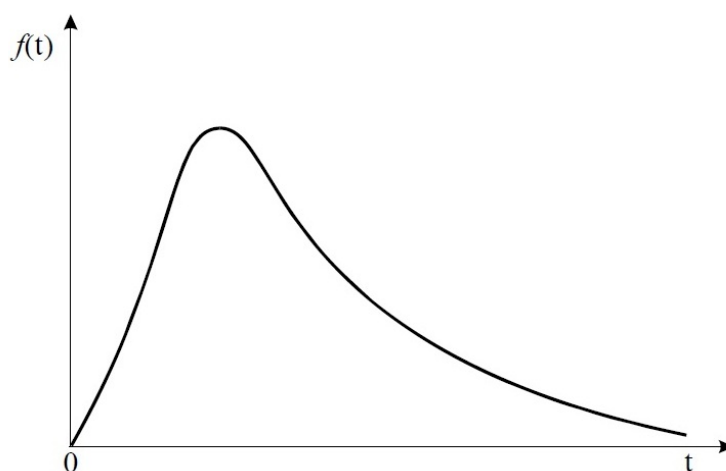
$$f(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma} \right)^2}, \quad t > 0, \mu > 0, \sigma > 0, \quad (3.39)$$

где су:

μ и σ - параметри, а

t - случајна променљива величина која означава време отказа.

На слици 3.5 је дат график густине логнормалне расподеле.



Слика 3.5 Логнормална расподела у функцији густине

Ако се дефинише нова случајна променљива x као $x = \ln t$, онда ће x имати нормалну расподелу са средњом вредношћу μ и стандардним одступањем σ . Функција поузданости биће:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma} \right)^2} dt, \quad (3.40)$$

ако се има на уму једначина (4.3), може се написати:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\ln t - \mu}{\sigma}, \quad (3.41)$$

па се израз за функцију поузданости може написати у облику:

$$R(t) = 1 - \int_{-\infty}^z \varphi(z) dz, \quad (3.42)$$

где је z дато једначином (3.41). Облик функције поузданости дат је на слици 3.10.

Диференцирањем једначине (3.41) добија се:

$$dz = \frac{dt}{t\sigma}, \quad (3.43)$$

па се заменом у једначину (4.4) добија:

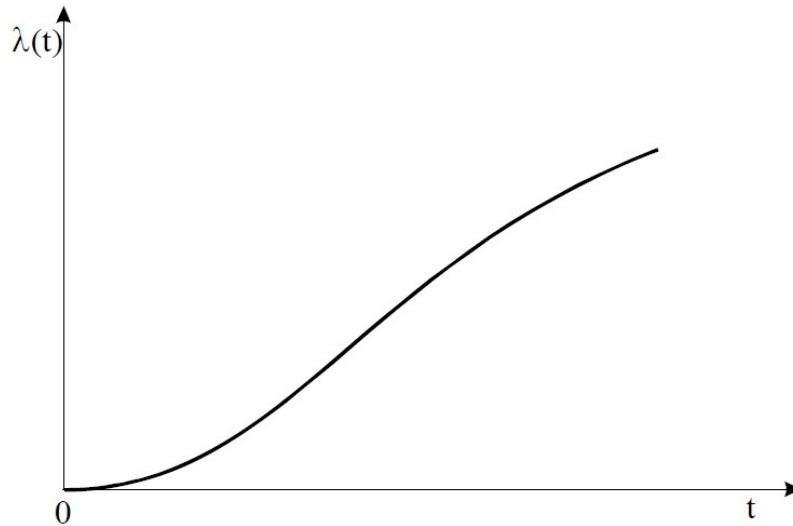
$$\varphi(z) = t\sigma f(t), \quad (3.44)$$

где је z одређено једначином (3.41).

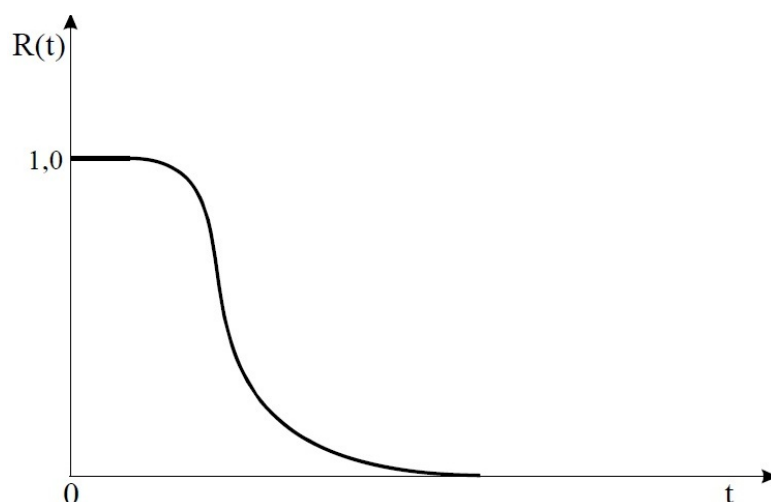
Сада ће функција интензитета отказа бити:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\varphi(z)}{t\sigma R(t)}, \quad (3.45)$$

и њен облик дат је на слици 3.6.



Слика 3.6 Функција интензитета отказа
у случају логнормалне расподеле



Слика 3.7 Функција поузданости за случај логнормалне расподеле

Логнормална расподела има велику примену у одржавању система, Исто тако, то је веома добар модел за проучавање отказа чији је узрок замор материјала

3.5.4 Вејбулова расподела

Функција густине отказа за Вејбулову (Weibull) расподелу гласи:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta}}, \quad t \geq \gamma, \quad \beta > 0, \quad \eta > 0, \quad (3.46)$$

где је:

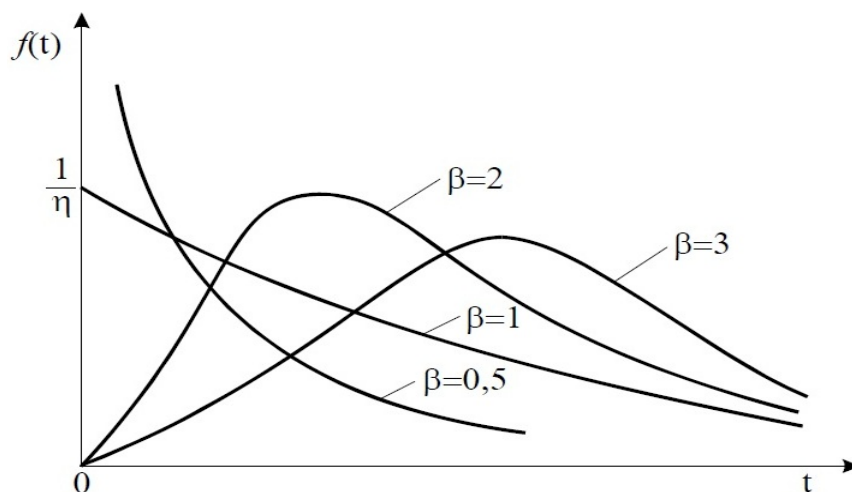
t - време отказа,
 γ - параметар положаја,
 β - параметар облика и
 η - параметар размере.

Негативна вредност параметра γ би значила да систем може да откаже пре почетка коришћења. У моменту пуштања система у рад параметар γ једнак је 0, а време отказа t увек је веће или једнако γ .

Коришћењем везе дате једначином (2.4), функција поузданости се може добити у следећем облику:

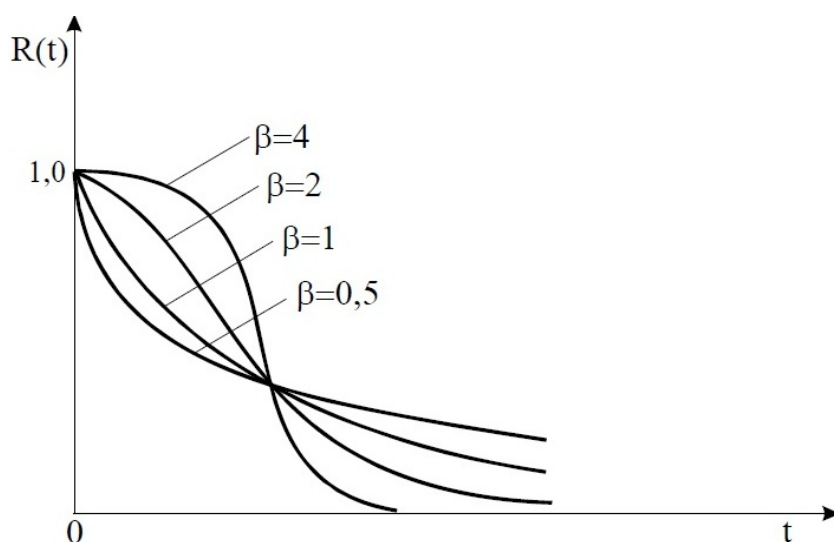
$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta}}. \quad (3.47)$$

Облик функција $f(t)$, $R(t)$ и $\lambda(t)$ веома зависи од параметара γ , β и η . На слици 3.8 приказани су разни облици функције густине отказа зависно од вредности параметра β , при чему је $\gamma = 0$ и $\eta = \text{const}$.



Слика 3.8 Вејбулова расподела у функцији густине за $\gamma = 0$, $\eta = \text{const.}$ и разне вредности параметра β

На слици 3.9 дат је изглед функције поузданости зависно од параметра β .



Слика 3.9 Функција поузданости у случају Вејбулове расподеле за $\gamma = 0$, $\eta = \text{const.}$ и разне вредности параметра β

Функција интензитета отказа биће једнака:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1}. \quad (3.48)$$

Вејбулова расподела је веома сложеног облика, и зависно од својих параметара може прећи у неку једноставнију расподелу. Тако за $\gamma = 0$ и $\beta = 1$ она прелази у експоненцијалну расподелу чији је параметар λ у том случају једнак $1/\eta$, а када је $\gamma = 0$ и $\beta = z$ добија се тзв. Релејева расподела.

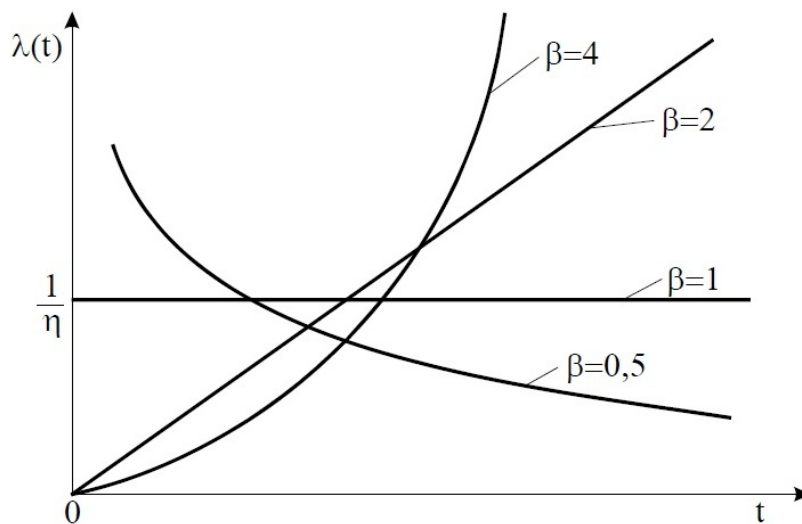
Када је $0 < \beta < 1$ функција интензитета отказа опада са временом, када је $\beta = 1$ интензитет отказа не зависи од времена (експоненцијална расподела), а када је $\beta > 1$ функција интензитета отказа је растућа.

Израз за очекивано време безотказног рада гласи:

$$T_{sr} = \gamma + \eta \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right), \quad (3.49)$$

где је $\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$ тзв. гама функција од $\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$.

На облик функције интензитета отказа највећи утицај има параметар β (слика 3.10).



Слика 3.10 Функција интензитета отказа у случају Вејбулове расподеле за $\gamma = 0$, $\eta = \text{const.}$ и разне вредности параметра β

Вејбулова расподела се упркос своје сложености веома често користи у практичним применама. Разлог је у томе што се многи облици отказа могу њоме веома добро апроксимирати. Док је примена експоненцијалне расподеле ограничена због претпоставке о константној вредности интензитета отказа, дотле Вејбулова расподела може да укључи опадајуће, константне и растуће функције интензитета отказа. Како многи откази у практичним ситуацијама, нарочито у случајевима неелектронских система, показују растућу тенденцију у току времена, примена Вејбулове расподеле, омогућује разматрање облика оваквих отказа.

3.5.5 Гама расподела

Гама расподела има следећу функцију густине отказа:

$$f(t) = \frac{1}{\eta \Gamma(\beta)} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\frac{t-\gamma}{\eta}}, \quad t \geq \gamma, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \quad (3.50)$$

где је:

- t – време отказа,
- γ – параметар положаја,
- β – параметар облика,
- η – параметар размере и
- $\Gamma(\beta)$ – гама функција.

Оно што је речено код Вејбулове расподеле важи и за гаму расподелу. Функција поузданости биће:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_{\gamma}^t \frac{1}{\eta \Gamma(\beta)} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\frac{t-\gamma}{\eta}} dt. \quad (3.51)$$

Вредност површине испод гама функције густине отказа може се одредити из табела које су у ту сврху направљене. Када је параметар β цео број, може се показати да се интеграл у једначини (3.51) може израчунати преко редова, тако да је:

$$R(t) = 1 - \sum_{k=\beta}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^k e^{-\frac{t-\gamma}{\eta}} = \sum_{k=0}^{\beta-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^k e^{-\frac{t-\gamma}{\eta}}. \quad (3.52)$$

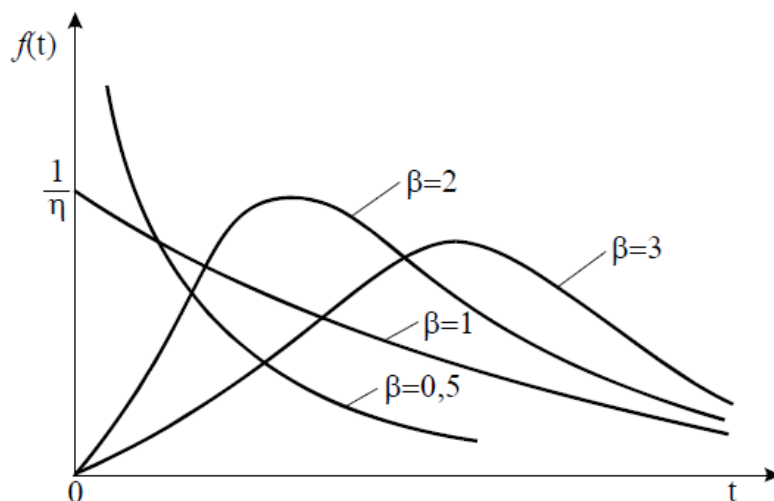
Функција интензитета отказа дата је општом једначином (2.17), а када је β цео број може се израчунати из израза:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{1}{\eta \Gamma(\beta)} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\frac{t-\gamma}{\eta}}}{\sum_{k=0}^{\beta-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^k e^{-\frac{t-\gamma}{\eta}}}. \quad (3.53)$$

У случају када је β цео број, гама функција $\Gamma(\beta)$ добија се из израза:

$$\Gamma(\beta) = (\beta-1)! \quad (3.54)$$

Облик функција $f(t)$, $R(t)$ и $\lambda(t)$ зависи од вредности γ , β и η . На слици 3.11 дати су разни облици функције густине отказа $f(t)$ зависно од параметра β , при чему је $\gamma = 0$ и $\eta = \text{const}$.

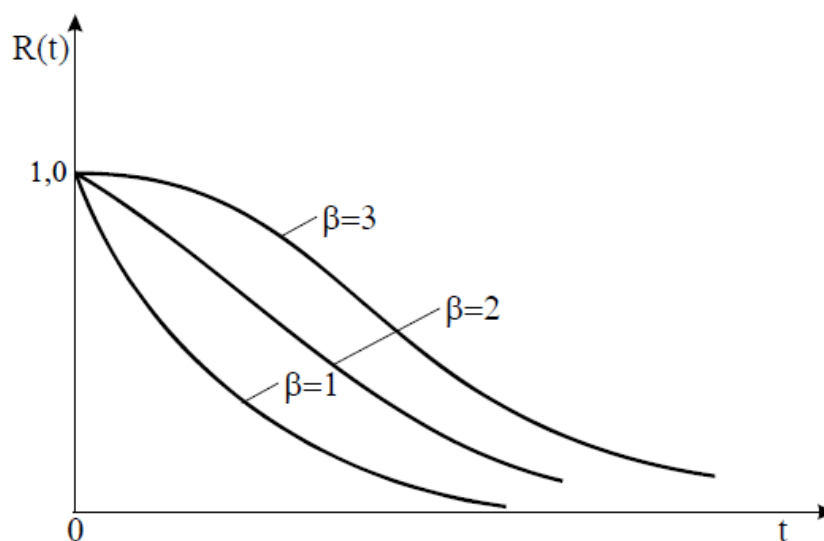


Слика 3.11 Густина гама расподела за $\gamma = 0$, $\eta = \text{const}$. и разне вредности параметра β

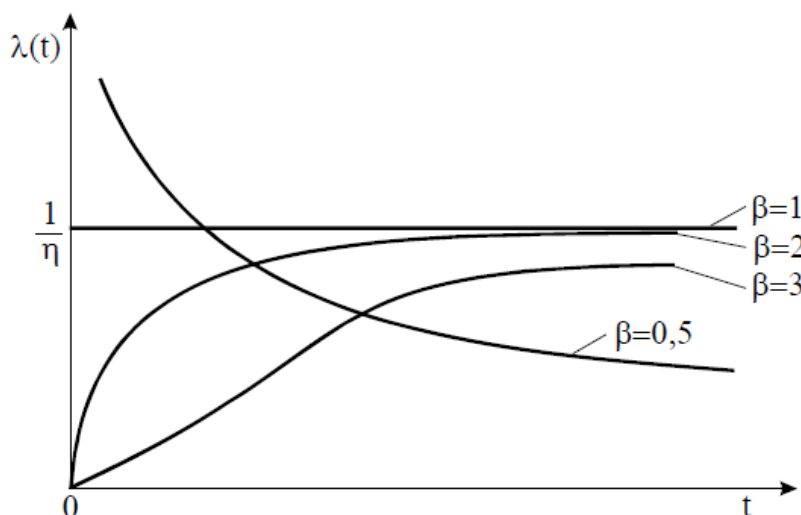
Као код Вејбулове расподеле, функција интензитета отказа $\lambda(t)$ опада са временом када је $0 < \beta < 1$, не зависи од времена када је $\beta = 1$ и расте са временом када је $\beta > 1$. Очекивано време безотказног рада у случају гама расподеле израчунава се из обрасца:

$$T_{SR} = \gamma + \eta\beta. \quad (3.55)$$

На сликама 3.12 и 3.13 приказане су функције поузданости и интезитета отказа у случају гама расподеле за $\gamma = 0$, $\eta = \text{const.}$ и разне вредности параметра β .



Слика 3.12 Функција поузданости у случају гама расподеле



Слика 3.13 Функција интезитета отказа у случају гама расподеле

Гама расподела је флексибилан модел који може да се примени у поузданости за описивање разних врста отказа. За вредности параметра $\gamma = 0$ и $\beta = 1$ гама расподела прелази у експоненцијалну са параметром $\lambda = 1/\eta$. Гама расподела може да се користи и за време до n -тог отказа система, ако је расподела времена отказа експоненцијална. У том случају, ако су $t_1, t_2, \dots, t_n$ независне случајне променљиве величине које имају експоненцијалну расподелу са параметром λ , онда је $T = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ случајна променљива величина која има гама расподелу са параметрима $\eta = 1/\lambda$ и $\beta = n$ (при чему је $\gamma = 0$).

3.5.6 Бета расподела

Ова расподела користи се за опис случајне величине која може да узима вредности из затвореног интервала. Ова врста расподеле има велику улогу у статистичкој контроли квалитета и теорији поузданости. Функција густине расподеле отказа дата је изразом:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, t \geq 1 \\ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} & 0 < t < 1 (\alpha > 0, \beta > 0) \end{cases} \quad (3.56)$$

Функција расподеле је:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{B_t(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} & 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & t \geq 1 \end{cases} \quad (3.57)$$

где је $B(\alpha, \beta)$ такозвана бета функција:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (3.58)$$

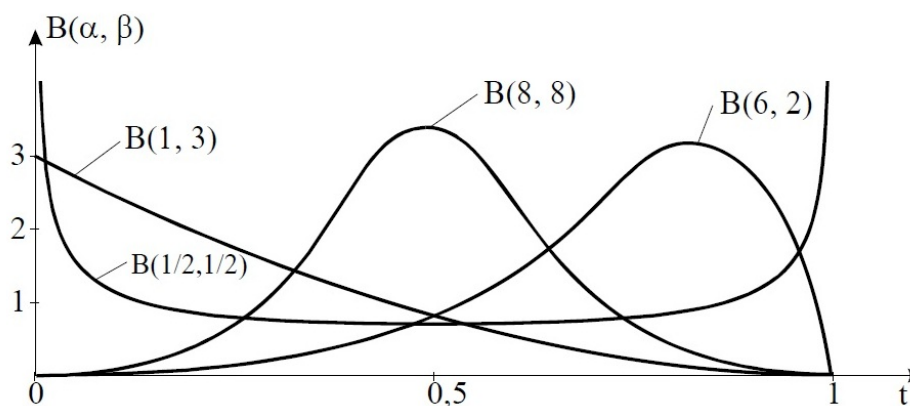
а $B_t(\alpha, \beta)$ непотпуна бета функција:

$$B_t(\alpha, \beta) = \int_0^t z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} dz \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.59)$$

Очекивано време безотказног рада је:

$$T_{sr} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \quad (3.60)$$

Неке криве за функцију $B(\alpha, \beta)$ дате су на слици 3.14.



Слика 3.14 Густине бета расподеле

Специјални случајеви бета расподеле су:

1) Равномерна расподела

Добија се за $\alpha = \beta = 1$. Густина расподеле је:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{за } t \in (0,1) \\ 1 & \text{за } t \notin (0,1) \end{cases} \quad (3.61)$$

Функција расподеле је:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & \text{за } t \in (0,1) \\ 1 & t > 1 \end{cases} \quad (3.62)$$

2) Троугаона расподела

Добија се за $\alpha = 2, \beta = 1$ или $\alpha = 1, \beta = 2$. Густина расподеле је:

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{за } t \in (0,1) \\ 1 & \text{за } t \notin (0,1) \end{cases} \quad (3.63)$$

3) Параболична расподела

Добија се за случај $\alpha = \beta = 2$. Густина расподеле је:

$$f(t) = \begin{cases} 6t(1-t) & \text{за } t \in (0,1) \\ 1 & \text{за } t \notin (0,1) \end{cases} \quad (3.64)$$

3.5.7 Студентова расподела

Густина Студентове расподеле дата је изразом:

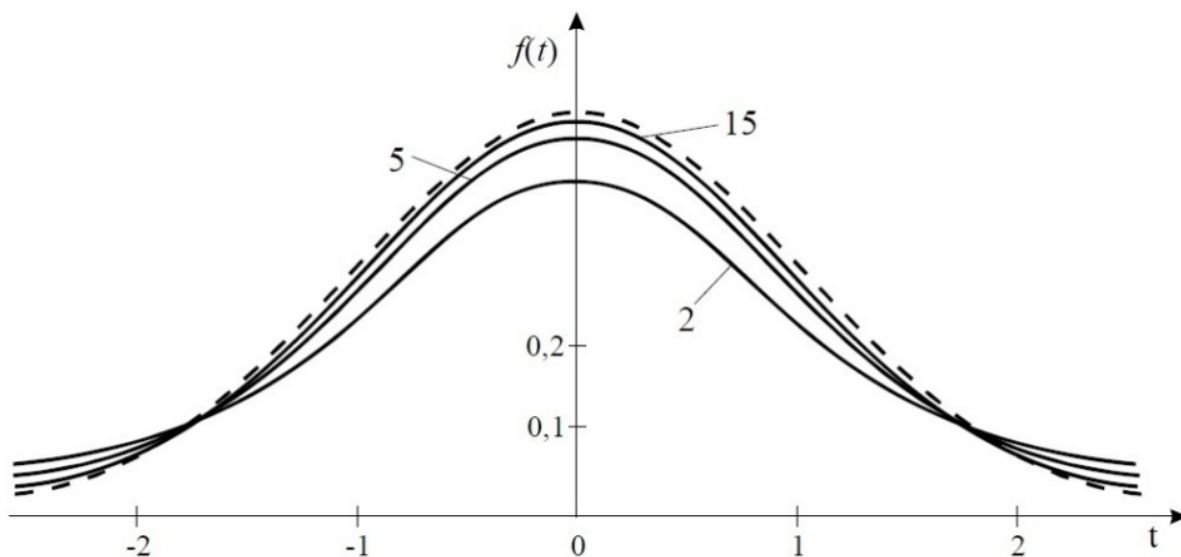
$$f(t) = S(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (3.65)$$

Ова расподела се зове још и Студентова t расподела са n степени слободe. Параметар n може бити произвољан позитиван број, али се ова расподела уобичајено користи када је n природан број.

Математичко очекивање је:

$$T_{sr} = 0, \quad (3.66)$$

за велике вредности n ова расподела прелази у нормалну расподелу код које је $\mu = 0$ и $\sigma = 1$. Изглед Студентове расподеле за разне вредности n дат је на слици 3.15.



Слика 3.15 Густине Студентове расподеле за $n=2, 5, 15$ у поређењу са нормалном расподелом код које је $\mu=0$ и $\sigma=1$ (испрекидана линија)

3.6 Неки дискретни закони расподеле случајне променљиве

У случају експоненцијалне, нормалне, логнормалне, Вејбулове, гама, бета, Студентове, Фишерове и Снедекорове расподеле, случајна променљива величина (време) била је континуалног типа. У наставку је дато разматрање следећих расподела: биномне, Поасонове и геометријске, код којих је случајна променљива величина дискретног типа.

3.6.1 Биномна расподела

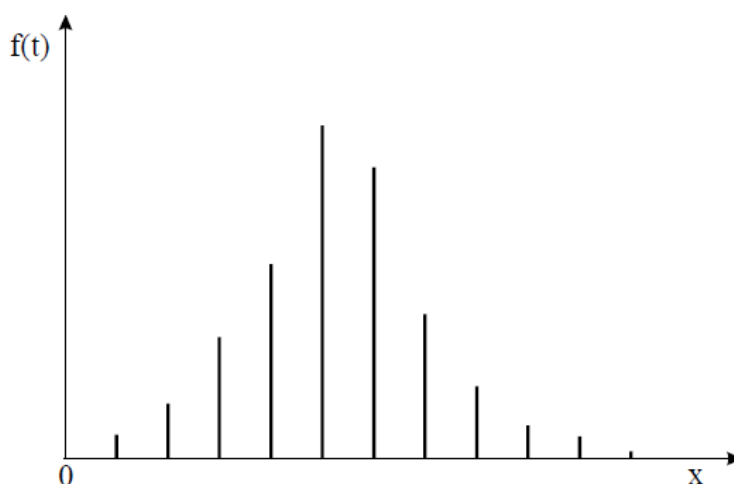
Нека је у једној просторији инсталиран укупно n идентичних, али међусобно независних сијалица. Свака сијалица може бити исправна или неисправна. Означимо са p вероватноћу да ће сијалица бити исправна, што значи да ће $1 - p$ бити вероватноћа да је сијалица неисправна. Ако је захтев такав да се сматра задовољавајућим ако од n функционише x или више сијалица, што значи да је ситуација незадовољавајућа ако функционише $x - 1$ или мање сијалица. Ако се са X означи случајна променљива величина која представља број исправних сијалица, онда се вероватноћа да ће бити x исправних сијалица може израчунати из израза:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.67)$$

Функција дата једначином (3.67) представља функцију густине вероватноће у случају биномне расподеле. Члан $\binom{n}{x}$ може да се израчуна из релације:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!x!}. \quad (3.68)$$

На слици 3.16 дат је изглед функције густине расподеле $f(x)$.



Слика 3.16 Функција густине биномне расподеле

У овом примеру захтев ће бити задовољен не само када је број исправних сијалица једнак x , већ и када је њихов број већи од x . Према томе, интересантна је вероватноћа функционисања $x, x + 1, \dots, n$ сијалица. Значи:

$$P(X \geq x) = \sum_{i=x}^{i=n} P(X=i) = \sum_{i=x}^{i=n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}. \quad (3.69)$$

Једначина (3.69) може се написати и у облику:

$$P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x-1) = 1 - \sum_{i=0}^{i=x-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}. \quad (3.70)$$

Функција облика $P(X \leq x-1)$ представља кумулативну функцију расподеле. У наведеном примеру, ако са y обележи број неисправних сијалица, онда је услов да има $x-1$ или мање исправних сијалица исто што и услов да има y или више неисправних сијалица, тј.:

$$y = n - (x-1) = n - x + 1. \quad (3.71)$$

Случајна променљива величина y која представља број неисправних сијалица, имаће аналогно једначини (3.67) следећу функцију густине вероватноће:

$$f(y) = P(Y=y) = \binom{n}{y} (1-p)^y p^{n-y}, y = 0, 1, \dots, n. \quad (3.72)$$

Ако се уведе ознака $1-p = q$ онда је:

$$f(y) = P(Y=y) = \binom{n}{y} q^y (1-q)^{n-y}, y = 0, 1, \dots, n. \quad (3.73)$$

Сада се једначина (3.70) може писати у следећем облику:

$$P(X \geq x) = 1 - \sum_{i=y}^{i=n} P(Y=i) = 1 - \sum_{i=y}^{i=n} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}, \quad (3.74)$$

односно:

$$P(X \geq x) = P(Y \leq y-1) = 1 - \sum_{i=0}^{i=y-1} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}. \quad (3.75)$$

Средња вредност функције густине вероватноће дате једначином (3.67) биће:

$$T_{SR} = (X) = np, \quad (3.76)$$

и представља очекивани број система који ће успешно обавити неки задатак, ако је n укупан број система, а p вероватноћа да ће један систем успешно обавити задатак.

Средња вредност функције густине вероватноће дате једначином (3.72) биће:

$$T_{SR} = (Y) = nq, \quad (3.77)$$

и представља очекивани број система који ће отказати у току неког задатка, где је n укупан број система, а q вероватноћа да ће један систем отказати у току задатка.

3.6.2 Поасонова расподела

Као и биномна и Поасонова расподела спада у групу дискретних расподела. Функција густине вероватноће за Поасонову расподелу дата је једначином:

$$f(t) = P(X=x) = \frac{\alpha^x e^{-\alpha}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.78)$$

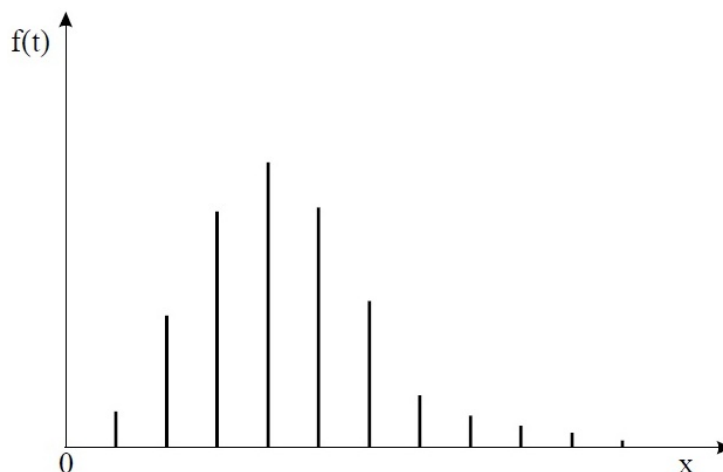
где је X случајна променљива величина која означава број отказа, а α је параметар ($\alpha > 0$) који означава највероватнији број отказа.

Када је код биномне расподеле дате једначином (3.73) $n > 20$ и $q \leq 0,05$ она се може задовољавајуће апроксимирати Поасоновом расподелом, при чему је $\alpha = np$.

Кумулативна функција расподеле дата је изразом:

$$F(x) = P(X = x) = \sum_{i=0}^x \frac{\alpha^i e^{-\alpha}}{i!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (3.79)$$

Облик функције густине вероватноће за Поасонову расподелу дат је на слици 3.17.



Слика 3.17 Поасонова расподела у функцији густине

Функција густине вероватноће за Поасонову расподелу може се написати у облику:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{(\lambda \cdot t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, \quad x = 1, 2, \dots, \quad (3.80)$$

где је λ константа која означава фреквенцију одигравања одређених догађаја у јединици времена, а t је фиксирани временски интервал.

То значи, ако је λ фреквенција дешавања отказа у јединици времена, у временском интервалу t може се очекивати укупно $\lambda \cdot t$ отказа. Према томе, у овом случају параметар Поасонове расподеле α једнак је $\lambda \cdot t$. Када је број отказа x једнак нули, једначина (3.78) директно даје израз за поузданост идентичан са обрасцем за поузданост у случају експоненцијалне расподеле.

Средња вредност Поасонове расподеле дата је једначином:

$$T_{sr}(X) = \alpha, \quad (3.81)$$

где α представља очекивани број отказа.

3.6.3 Геометријска расподела

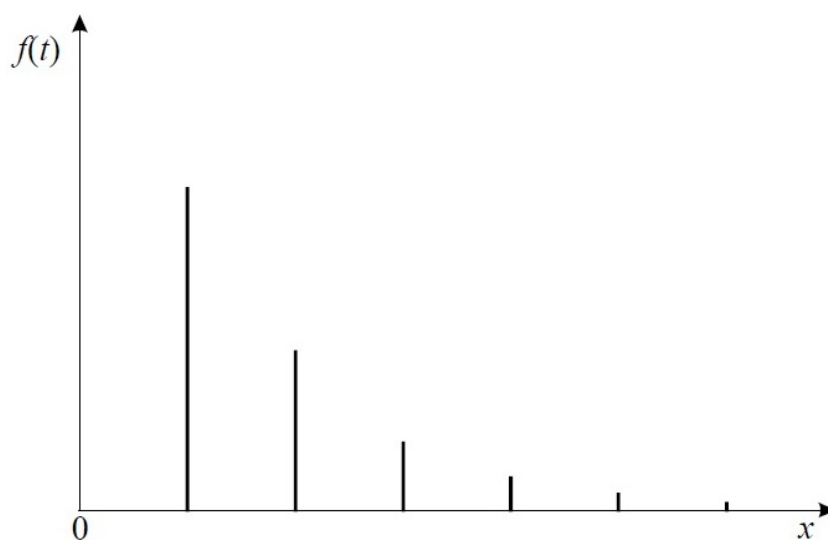
Нека се изводи низ експеримената при чему је вероватноћа успеха сваког од њих p , а вероватноћа неуспеха $q = 1 - p$. Ово су тзв. Бернулијеви експерименти. Случајна величина X представља догађај да је потребно извршити тачно n експеримената до првог неуспеха (на пример отказа) има геометријску расподелу. Ова расподела дата је изразом:

$$f(x) = P(X = x) = q(1 - q)^{x-1}, \quad (3.82)$$

а математичко очекивање је једнако:

$$T_{sr}(x) = \frac{1}{q}. \quad (3.83)$$

Изглед расподеле за $q = 0,5$ дат је на слици 3.18.



Слика 3.18 Изглед геометријске расподеле за $q = 0,5$

4. НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА

У теорији вероватноће, нормална (Гаусова) расподела је непрекидна расподела вероватноће, која се често користи као прва апроксимација да би се описала реална вредност случајно променљивих које теже да се окупе око једне вредности [4]. Крива одговарајуће функције густине вероватноће је облика "звона", и позната је као Гаусова функција или звонаста крива:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad t \geq 0, \quad \mu > 0, \quad \sigma > 0, \quad (4.1)$$

где је:

t - време рада до отказа,

π - математичка константа,

e - математичка константа,

μ - аритметичка средина случајно променљиве и

σ - стандардна одступање случајно променљиве.

Нормална расподела са параметрима $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$ се назива стандардизована нормална расподела.

4.1 Историјат нормалне расподеле

Карл Фридрих Гаус (Carl Friedrich Gauss) је рођен 30. априла 1777. године у Брунсвику као син сиромашних родитеља, а умро 23. фебруара 1855. године у Гетингену, где је скоро пола века био директор опсерваторије [5]. Још у раним годинама показао је изразит смисао за математику, тако да се данас сврстава у највеће математичаре свих времена. Чак је и сам изјавио да је прво научио да броји, па затим да чита.

Његова слика је украшавала дуго новчаницу од десет немачких марака, пре увођења евра (слика 4.1).



Слика 4.1 Новчаница од 10 марака, са Гаусовим ликом

Током свог живота задржао је дар да обавља најсложеније математичке прорачуне у глави. Позната је анегдота која каже да је једном приликом Гаусов учитељ задао да се саберу сви бројеви од 1 до 100, као домаћи задатак за своје ученике. На његово велико изненађење, Гаус (који је тада имао 7 година) одмах је донео свој резултат: 5050. Тадашњи млади математичар је израчунао на следећи начин: Посматрајући низ 1, 2, 3, 4, ..., 97, 98, 99, 100, чије је чланове требало сабрати, уочио је извесну законитост: када сабере 1 и 100, 2 и 99, 3 и 98, и тако даље, увек добије збир 101. Таквих парова има тачно 50. Отуда је тражени збир једнак $50 \times 101 = 5050$. Овај поступак назван је „Гаусов поступак“.

Тадашњи војвода Карл Вилхелм Фердинанд је препознао његов таленат и платио му школарину на универзитету, Каролински колеџ. Ту га је професор Еберхард Аугуст Вилхелм вон Зимерман запазио и даље наставио да га подстиче. Након доктората, Гаус је живео у Брунsvику са релативно малом платом, коју му је плаћао војвода. Касније из захвалности према војводи посветио му је књигу "Disquisitiones Arithmeticae", која је била ремек дело модерне аритметике.

Поред математике, бавио се и физиком, алгебром, примењеном математиком. Светску славу је стекао, када је 1801, у старости од 24 године, развио методу израчунавања путања небеских тела, израчунао је путању малог Кереса, тек откривеног планетоида. Гаус, који је још за живота носио титулу „Принц Математике“ је своје проналаске уврстио у много различитих дисциплина, као сто су геометрија, теорије бројева, механика небеских тела, геодезија, оптика итд. Гаус је користио своје знање за прецизније мерења земље и развио хелиотроп, дуго времена важан уређај за мерење код геометара. Поред тога, проучавао је магнетизам и електрицитет, изградио је прве електромагнетне телеграфске везе у свету. Гаус је писао на немачком, латинском, француском, енглеском и руском. Неки историчари сматрају, да још није процењена пуна ширина Гаусових могућности, јер ретко ко говори толико језика и у исто време се сналази у свим тим дисциплинама. Са деветнаест година успело му је да конструише хептадекагон (17 једнаких страница). То је било сензационално откриће, још од антике на том подручју није било значајнијих напредака. Са осамнаест година је пронашао „метод најмањих квадрата“ и пронашао закон нормалне расподеле грешака.

Његове теорије о израчунавању површине испод кривих довеле су до Гаусовог математичког клатна, који се данас употребљава у рачунању вероватноће стандардне нормалне расподеле [6]. Самим тим је више математичких појмова названо његовим именом - Гаусова константа, Гаусов алгоритам, Гаусова кривина.

Нормална или Гаусова расподела се сматра најпопуларнијом расподелом вероватноће у статистици. Постоји неколико разлога за то. Прво, нормалној расподели се аналитички може веома лако ући у траг, то јест, велики број резултата у вези ове расподеле може се извести у експлицитном облику. Друго, нормална расподела настаје као резултат централне граничне теореме, која каже да у благим условима збир великог броја случајних променљивих се распоређује приближно нормално. На крају, звонасти облик нормалне расподеле је погодан за моделирање великог броја случајно променљивих које се срећу у пракси. Нормална расподела је важан тип стандардне расподеле вероватноће. Њена густина вероватноће је названа и Гаусова функција, Гаусова крива или Гаусова звонаста крива.

Из тог разлога, нормална расподела се често сусреће у пракси, и користи се у свим пољима статистике, у природним и друштвеним наукама, и као једноставан модел за сложене појаве. Ако се има на уму да нормално распоређена променљива има симетричну расподелу око своје средине. Променљиве које расту експоненцијално, као што су цене, примања или популација, су често искривљене на десно, а самим тим

могу бити боље описане другим расподелама, као што су лог-нормална расподела или Парето расподела. Поред тога, вероватноћа да се види нормално распоређена вредност која је далеко (тј. више од неколико стандардних одступања) од средње вредности, опада веома брзо. Као резултат тога, статистички закључак користећи нормалну расподелу није робустан на присуство спољног фактора (подаци који су неочекивано далеко од средње вредности, због изузетних околности, посматрања грешке итд.) Када се спољни фактор очекује, подаци могу бити боље описани користећи строго процењену расподелу, као што је Студентова т-расподела.

Са техничке тачке гледишта, основне карактеристике нормалне расподеле су:

- нормална расподела је једина апсолутно непрекидна расподела чији су сви статистички моменти изнад прва два (тј. осим средњег и варијансе) нула,
- за дату средњу вредност и варијансу, одговарајућа нормална расподела је непрекидна расподела са максималном ентропијом.

Пуно природних, привредних и инжењерско научних процеса описују се помоћу нормалне расподеле или прецизно или у најмању руку у веома доброј апроксимацији.

Случајне величине са нормалном расподелом употребљавају се при описивању случајних покушаја код одређивања брзина, грешака при мерењу, грешака при посматрању као:

- случајних грешака при мерењу и посматрању,
- случајних одступања од номиналне мере при изради радних предмета.

4.2 Дефиниција

Једначина за функцију густине отказа у случају нормалне расподеле је:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma/\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad t \geq 0, \quad \mu > 0, \quad \sigma > 0, \quad (4.2)$$

где је:

- μ - средња вредност,
- σ - стандардна одступање и
- t - време отказа.

То је двопараметарска расподела са параметрима μ и σ , која представља добар модел у случајевима када долази до постепеног старења система у току употребе, тј. када се јавља истрошеност [1]. При одређивању поузданости ретко се користи облик нормалне расподеле дат једначином (4.2), јер се интеграл те једначине не може израчунати у коначној форми. Због тога се користи тзв. стандардизована нормална расподела $\varphi(z)$, за коју постоје табеле из којих се могу наћи површине испод функције густине отказа за било коју нормалну расподелу. Једначина (4.2) може се превести у стандардизовани облик увођењем смене:

$$z = \frac{t - \mu}{\sigma}. \quad (4.3)$$

Пошто површине испод $f(t)$ и $\varphi(z)$ морају бити једнаке важи однос:

$$f(t) dt = \varphi(z) dz. \quad (4.4)$$

Из једначине (4.4) следи:

$$\varphi(z) = \frac{f(t) dt}{dz}, \quad (4.5)$$

док се диференцирањем једначине (4.3) добија:

$$dz = \frac{dt}{\sigma}. \quad (4.6)$$

Заменом у једначину (4.5) добија се:

$$\varphi(z) = \sigma f(t). \quad (4.7)$$

Узимајући у обзир једначину (4.4) може се написати коначан облик густине стандардизоване нормалне расподеле:

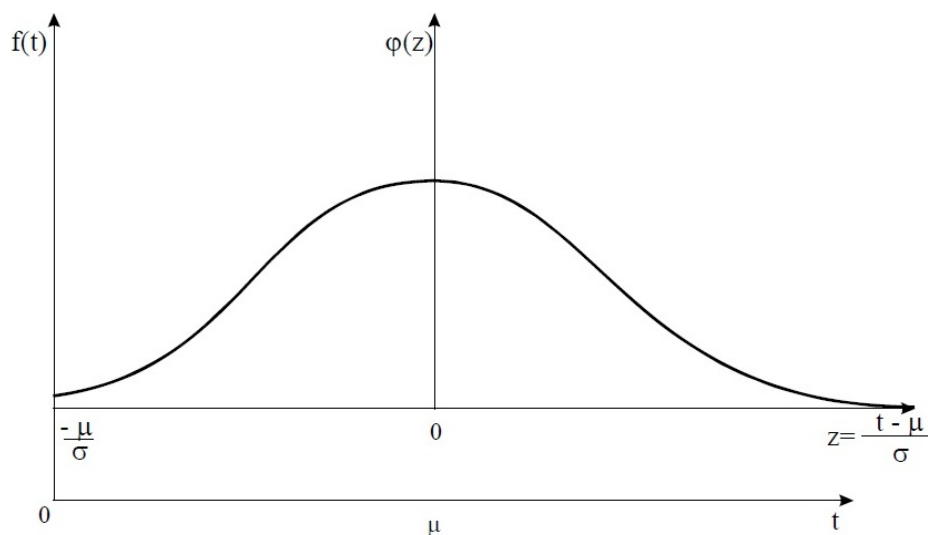
$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad -\infty < z < \infty, \quad (4.8)$$

где је z дато једначином (4.3).

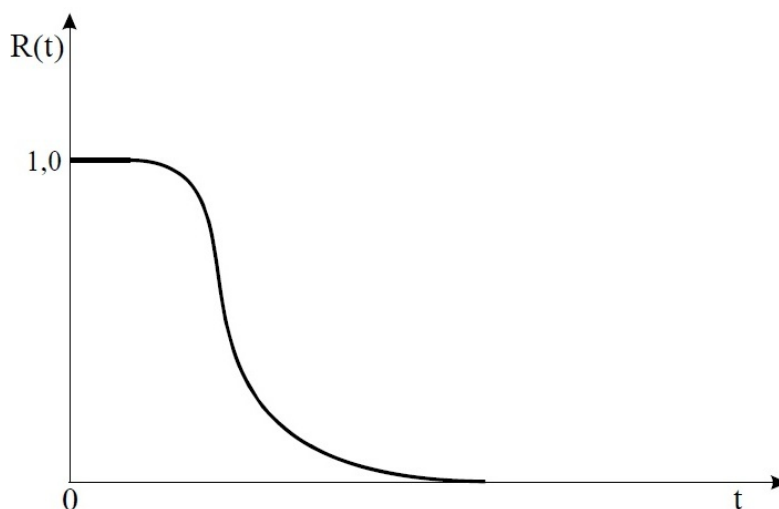
Функција кумулативне расподеле биће једнака:

$$F(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz. \quad (4.9)$$

На слици 4.2 дат је изглед графика густине нормалне расподеле, а на слици 4.3 график функције поузданости.



Слика 4.2 Густина нормалне расподеле



Слика 4.3 Функција поузданости у случају нормалне расподеле

Нормална расподела се најчешће означава са $N(\mu, \sigma^2)$. Најчешће слово N је записано у калиграфском фонту. Тако, када је случајно променљива X , нормално распоређена са средњом вредношћу μ и варијансом σ^2 , пише се:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad (4.10)$$

где је X – случајно променљива.

Коришћењем једначине (4.7) и увођењем стандардизоване нормалне расподеле, функција поузданости се може добити у облику:

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t) dt = \int_z^{\infty} \varphi(z) dz, \quad (4.11)$$

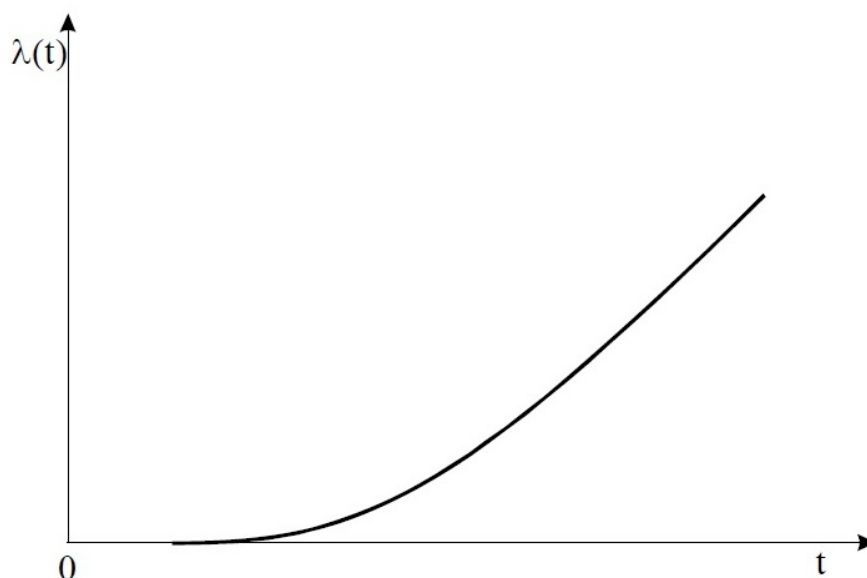
односно:

$$R(t) = 1 - \int_{-\infty}^z \varphi(z) dt = 1 - F(z). \quad (4.12)$$

Функција интензитета отказа $\lambda(t)$ добија се из једначина (2.17) и (4.7):

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\varphi(z)}{\sigma R(t)}. \quad (4.13)$$

То је монотонно растућа функција времена, а њен изглед дат је на слици 4.4.



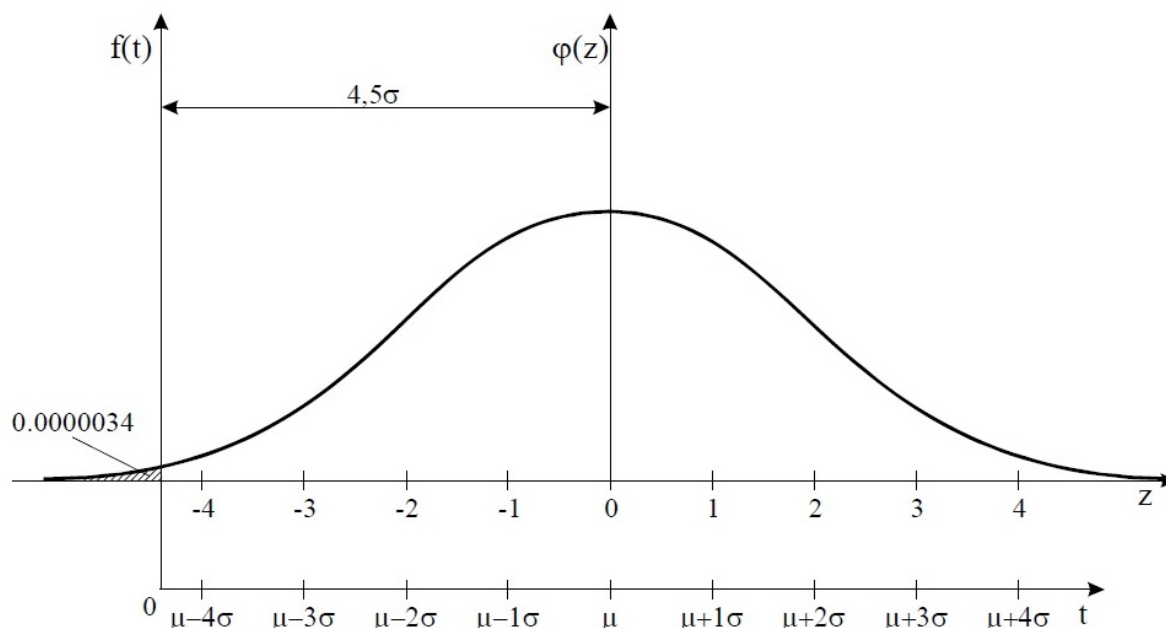
Слика 4.4 Функција интензитета отказа у случају нормалне расподеле

Овде треба дати напомену која се односи на површину испод функције $f(t)$, тј. $\varphi(z)$. Ова функција је дефинисана за вредности t , тј. z , од $-\infty$ до $+\infty$, и онда је површина испод ње једнака 1. Међутим, како време не може да буде негативно, у теорији поузданости се нормална расподела дефинише за вредности t од 0 до ∞ . То је сасвим прихватљиво, јер на пример, када је $t = \mu - 4,5\sigma = 0$, тј. $z = -4,5$ (слика 4.5), површина за $t \leq 0$ је свега 0,0000034 што се може занемарити. Кад је $t = \mu - 3,5\sigma = 0$, тј. $z = -3,5$ површина за $t \leq 0$ је 0,00023 што је такође мало, итд. У пракси, откази у зони тзв. негативних времена означавали би отказе који су се десили пре него што је систем пуштен у рад. Тада се узима да су овакви откази десили у времену $t = 0$, а њихови узроци су у грешкама које није открила контрола квалитета. Вероватноћа дешавања овакве врсте отказа може се израчунати ако се зна коефицијент варијације, тј. однос

између стандардног одступања σ и средње вредности μ . Реципрочна вредност коефицијента варијације је μ/σ , а вредности $t = 0$ одговара вредност $z = -\mu/\sigma$ (слика 4.2 и једначина 4.3). Према томе, остаје да се из табеле прочита вредност површине испод нормалне расподеле лево од $-\mu/\sigma$, што ће дати вероватноћу дешавања овакве врсте отказа.

Исто тако, у теорији поузданости вредност за μ увек је позитивна, јер је то временска категорија, док у осталим применама ова вредност може бити од $-\infty$ до ∞ .

На слици 4.5 приказана је илустрација дефинисаности нормалне расподеле за случај $t = \mu - 4,5\sigma = 0$, тј. $z = -4,5$.



Слика 4.5 Илустрација дефинисаности нормалне расподеле

Најједноставнији случај нормалне расподеле је познат као стандардизована нормална расподела, описана функцијом вероватноће густине:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}. \quad (4.14)$$

Фактор $1/\sqrt{2\pi}$ у овом изразу обезбеђује да је укупна површина испод криве $\varphi(x)$ једнака један, и $1/2$ у експоненту чини "ширина" криве (мерено као пола растојања између превојних тачака), такође једнака јединици [4]. Традиција је у статистици да се означи ова функција са грчким словом " φ " (фи), док су густине функције за све остале расподеле обично означане са словима f или p .

У општем смислу, нормалне расподеле резултирају из експоненцијалних квадратних функција (као што експоненцијалне расподеле резултирају из експоненцијалних линеарних функција):

$$f(x) = e^{ax^2+bx+c}. \quad (4.15)$$

Тиме се добија класичан "звонаст" облик (под условом да је свуда $a < 0$, тако да је квадратна функција конкавна). Обратите пажњу да је свуда $f(x) > 0$.

Може се подесити:

- 1) да се контролише "ширина" звонасте криве,
- 2) да се креће централним врх звонасте криве дуж x - осе,
- 3) да се контролише "висина" звонасте криве.

Да би $f(x)$ могла да буде реална функција вероватноће густине, у зависности од R , мора се изабрати под 3), тако да $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ (што је једино могуће када је $a < 0$).

Много је лакше описати нормалну расподелу преко аритметичке средине $\mu = -b/2a$ и варијансе $\sigma^2 = -1/2a$, него коришћењем тачака 1), 2) и 3). Прелазак на ове нове параметре дозвољава да се препише функција вероватноће густине у познатој форми:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \quad (4.16)$$

Обратити пажњу да је за стандардизовану нормалну расподелу, $\mu = 0$ и $\sigma = 1$. Последњи део једначине показује да се било која друга нормална расподела може сматрати верзијом стандардизоване нормалне расподеле, која је хоризонтално растегнута помоћу фактора σ , а затим померена у десно за вредност μ . Дакле, μ дефинише позицију централног врха криве, а σ прецизира "ширину" криве.

Параметар μ је у исто време аритметичка средина, медијана и мода нормалне расподеле. Параметар σ^2 се зове варијанса; пошто за било коју насумично променљиву показује колико је концентрисана расподела око своје аритметичке средине. Квадратни корен од σ^2 се зове стандардно одступање и то је ширина функције густине.

Функција нормалне расподеле времена рада до отказа $F(t)$, дефинише се према једначини (4.17), а вероватноћа исправног рада $R(t)$ према једначини (4.18):

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad (4.17)$$

$$R(t) = 1 - F(t), \quad (4.18)$$

где је t временски период.

Да би се израчунао интеграл у изразу (4.16), мора се извршити увођење стандардизоване случајно променљиве $z = (t - \mu)/\sigma$, у израз тако да следи:

$$f(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \quad (4.19)$$

где је:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad (4.20)$$

$$z = \frac{t-\mu}{\sigma} \quad (4.21)$$

Аналогно томе, из једначине (4.6) следи:

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (4.22)$$

За одређивање вредности $\varphi(z)$ и $\phi(z)$ користе се табеле у додацима Д1 и Д2.

4.3 Алтернативне формулације стандардизоване нормалне расподеле

Неки аутори се залажу за коришћење појма прецизности уместо варијансе, и различито га дефинишу као $\tau = \sigma^{-2}$ или $\tau = \sigma^{-1}$. Ова параметризација има предност у нумеричким применама где је σ^2 веома близу нуле и више је погодан за рад у анализи док је τ природан параметар нормалне расподеле. Још једна предност коришћења ове параметризације је у проучавању условних расподела у мултиваријантним нормалним случајевима.

На питање, да ли би нормална расподела требала да се назива стандардизованом, аутори имају различите одговоре. Полазећи од Гаусових радова, стандардизована нормална расподела је сматрана за ону која има варијансу $\sigma = 1/2$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2}. \quad (4.23)$$

Истраживач Штиглер (George Joseph Stigler) иде још даље од тога и тврди да стандардна нормална има варијансу $\sigma^2 = 1/2\pi$:

$$f(x) = e^{-\pi x^2}. \quad (4.24)$$

Према аутору, ова формулација је у предности због тога што је много једноставнија формула и лакше је за памћење, и има једноставну прихватљиву формулу за количину расподеле. У Штиглеровој формулацији густина нормалне $N(\mu, \tau)$ са аритметичком средином μ и прецизношћу τ биће једнака:

$$f(x; \mu, \tau) = \tau e^{-\pi \tau^2 (x - \mu)^2}. \quad (4.25)$$

4.4 Карактеризација

У претходном одељку је нормална расподела дефинисана одређивањем своје функције густине вероватноће. Међутим, постоје други начини да се окарактерише расподела вероватноће. Они укључују: кумулативну расподелу функције, момент, комуланте, карактеристичне функције, момент генерисања функције итд.

4.4.1 Функција густине расподеле

Функција густине расподеле описује релативну учесталост различитих вредности случајне променљиве. Функција густине нормалне расподеле је дата формулом:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.26)$$

Ово је могућа функција једино када варијанса σ^2 није једнака нули. У том случају то је непрекидна равна функција, одређена дуж целе праве линије, која је названа Гаусова функција.

Својства густине расподеле:

- Функција $f(x)$ је једномодална и симетрична у односу на тачку $x = \mu$, која је у исто време мода, медијана и аритметичка средина те расподеле.
- Превојне тачке криве се у односу на аритметичку средину налазе на растојању од једног стандардног одступања (тј., код $x = \mu - \sigma$ и $x = \mu + \sigma$).
- Густина стандардизоване нормалне распореде $\varphi(x)$ је један од облика Фуријевих трансформација.

• Први извод $\varphi(x)$ је $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$; други извод је $\varphi''(x) = (x^2 - 1)\varphi(x)$. Генерално, n -ти извод је дат помоћу:

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) \varphi(x), \quad (4.27)$$

где је H_n - Хермитов полином n - тог реда.

Када је $\sigma^2 = 0$, функција густине не постоји.

4.4.2 Функција кумулативне расподеле

Кумулативна расподела описује вероватноћу за случајне променљиве која се могу наћи у интервалима облика $(-\infty, x]$. Кумулативна расподела стандардизоване нормалне расподеле је означена са великим грчким словом Φ , и може се израчунавати као интеграл функције вероватноће густине:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right], \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.28)$$

Овај интеграл може једино бити изражен у смислу посебних функција, које се називају функције грешака. Нумеричка метода за израчунавање стандардне нормалне кумулативне функције је објашњена у даљем тексту. За генеричку нормалну случајну променљиву са средином μ и варијансом $\sigma^2 > 0$ кумулативна функција ће бити једнака:

$$F(x; \mu, \sigma^2) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right], \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.29)$$

Комплемент стандардизоване нормалне кумулативне функције, $Q(x) = 1 - \Phi(x)$ се назива Q -функција, посебно у радовима који се односе на област технике. Ово представља позадину вероватноће Гаусове расподеле, то је вероватноћа да је стандардизована нормална случајна променљива X већа од броја x . Остале дефиниције Q -функције, од којих су све једноставне трансформације Φ , се такође користе повремено.

Својства:

- стандардизована нормална кумулативна функција је два пута ротационо симетрична око тачке $(0, 1/2)$: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

- извод од $\Phi(x)$ је једнак стандардизованој нормалној функцији вероватноћи густине $\phi(x)$: $\Phi'(x) = \phi(x)$.

- интеграл од $\Phi(x)$ је $\int \Phi(x) dx = x \Phi(x) + \phi(x)$.

4.4.3 Квантил функција

Инверзна стандардизована нормална кумулативна функција, која се зове квантил функција, је изражена у смислу инверзне функције грешака:

$$\Phi^{-1}(p) \equiv z_p = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2p - 1), \quad p \in (0, 1). \quad (4.30)$$

Квантил функција стандардизоване нормалне расподеле се обично означава као z_p . Квантил z_p представља такву вредност да стандардизована нормална случајно променљива X има вероватноћу од тачно p да се нађе унутар интервала $(-\infty, z_p]$. Квантили функција се користе у тестирањима хипотеза, изградњи интервала поверења и Q-Q нацрта. Најпознатија нормална квантил функција је $1,96 = z_{0.975}$. Стандардизована нормална случајно променљива је већа од 1,96 по апсолутној вредности у 5% случајева.

За нормалну случајно променљиву са аритметичком средином μ и варијансом σ^2 , квантил функција је:

$$F^{-1}(p; \mu, \sigma^2) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(p) = \mu + \sigma \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2p - 1), \quad p \in (0, 1). \quad (4.31)$$

4.4.4 Карактеристична функција и функција покретног момента

Карактеристична функција $\varphi_X(t)$ случајно променљиве X је дефинисана као очекивана вредност e^{itX} , где је i имагинарна јединица, а $t \in \mathbb{R}$ је аргумент карактеристичне функције. Тако је карактеристична функција Фуријеова трансформација густине $\phi(x)$. За нормално распоређено X са аритметичком средином μ и варијансом σ^2 , карактеристична функција је једнака:

$$\varphi(t, \mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2} dx = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}. \quad (4.32)$$

Карактеристична функција се може аналитички простирати по целој равни. Може се дефинисати као: $\varphi(z) = e^{i\mu z - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2}$, за свако $z \in \mathbb{C}$.

Функција покретног момента је дефинисана као очекивана вредност e^{tX} . Код нормалне расподеле, функција покретног момента постоји и једнака је:

$$M(t; \mu, \sigma^2) = E[e^{tX}] = \varphi(-it; \mu, \sigma^2) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}. \quad (4.33)$$

Статистички момент генерисане функције је логаритам функције покретног момента:

$$g(t; \mu, \sigma^2) = \ln M(t; \mu, \sigma^2) = \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2. \quad (4.34)$$

Пошто је ово квадратни полином по t , само прва два статистичка момента нису нула.

4.4.5 Моменти

Нормална расподела има момент сваког реда [5]. То јест, када је X са аритметичком средином μ и варијансом σ^2 , нормално распоређено, очекивање $E[|X|^p]$ постоји и коначно је за свако p тако да важи $\text{Re}[p] > -1$. Обично смо заинтересовани само за моменте реда, који садрже целе бројеве: $p = 1, 2, 3, \dots$.

• *Централни моменти* су моменти X -а у односу на своју аритметичку средину μ . Тако је централни момент реда p очекивана вредност $(X - \mu)^p$. Стандардизацијом нормалних случајно променљивих, ово очекивање ће бити једнако $\sigma^p \cdot E[Z^p]$, где је Z стандардизована случајна променљива:

$$E[(X - \mu)^p] = \begin{cases} 0 & \text{ако је } p \text{ непарно,} \\ \sigma^p (p-1)!! & \text{ако је } p \text{ парно,} \end{cases} \quad (4.35)$$

овде $n!!$ означава двоструки факторијел, који је производ сваког непарног броја од n до 1.

• *Апсолутни централни моменти* су момент од $|X - \mu|$. Они се подударају са обичним моментима за све парне редове, али су различити од нуле за свако непарно p .

$$E[|X - \mu|^p] = \sigma^p (p-1)!! \cdot \begin{cases} \sqrt{2/\pi} & \text{ако је } p \text{ непарно,} \\ 1 & \text{ако је } p \text{ парно,} \end{cases} = \sigma^p \cdot \frac{2^{\frac{p}{2}} \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\pi}}, \quad (4.36)$$

где последња формула важи за било које реалне бројеве $p > -1$.

• *Моменти и апсолутни моменти* су моменти од X и $|X|$. Формуле ових момента су много компликованије, и дате су у смислу додатка хипергеометријских функција ${}_1F_1$ и U .

$$E[X^p] = \sigma^p \cdot (-i\sqrt{2}\text{sgn}\mu)^p U\left(-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}(\mu/\sigma)^2\right), \quad (4.37)$$

$$E[|X|^p] = \sigma^p \cdot 2^{\frac{p}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1+p}{2})}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}(\mu/\sigma)^2\right), \quad (4.38)$$

ови изрази важе чак и ако p није цео број.

Прва два статичка момента су једнаки σ^2 , док су статички моменти виших редова једнаки нули, што је приказано табелом 4.1.

Табела 4.1

Ред	Момент	Централни момент	Статистички момент
1	M	0	μ
2	$\mu^2 + \sigma^2$	σ^2	σ^2
3	$\mu^3 + 3\mu\sigma^2$	0	0
4	$\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$	$3\sigma^4$	0
5	$\mu^5 + 10\mu^3\sigma^2 + 15\mu\sigma^4$	0	0
6	$\mu^6 + 15\mu^4\sigma^2 + 45\mu^2\sigma^4 + 15\sigma^6$	$15\sigma^6$	0
7	$\mu^7 + 21\mu^5\sigma^2 + 105\mu^3\sigma^4 + 105\mu\sigma^6$	0	0
8	$\mu^8 + 28\mu^6\sigma^2 + 210\mu^4\sigma^4 + 420\mu^2\sigma^6 + 105\sigma^8$	$105\sigma^8$	0

4.5 Особине

4.5.1 Стандардизовање нормалних случајних променљивих

Као последица првог својства, могуће је повезати нормално расподељену случајну променљиву са стандардизованом нормалном расподелом. На пример, ако X има нормалну расподелу са аритметичком средином μ и варијансом σ^2 , онда:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}. \quad (4.39)$$

С друге стране, пошто постоји стандардна нормална случајна променљива Z , увек се може израчунати још једна нормална случајна променљива са одређеном аритметичком средином μ и варијансом σ^2 :

$$X = \sigma Z + \mu. \quad (4.40)$$

Ова стандардизација трансформације је погодна, јер омогућава да се израчуна функција вероватноће густине и посебна кумулативна функција нормалне расподеле имајући табелу вредности функције вероватноће густине и кумулативне функције за стандардизовану нормалну расподелу. Они ће бити у вези путем:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right). \quad (4.41)$$

4.5.2 Стандардно одступање и интервали поузданости

Око 68% вредности извучених из нормалне расподеле су удаљени за једно стандардно одступање од средње вредности; око 95% вредности су у интервалу од два стандардна одступања; и око 99,7% су у интервалу од три стандардна одступања. Ова чињеница је позната као правило 68-95-99,7, или *емпиријско правило*, или *правило 3-сигма*. Прецизније речено, површина испод звонасте криве у интервалу $\mu - n\sigma$ и $\mu + n\sigma$ се израчунава:

$$F(\mu + n\sigma; \mu, \sigma^2) - F(\mu - n\sigma; \mu, \sigma^2) = \Phi(n) - \Phi(-n) = \text{erf}\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right), \quad (4.42)$$

где је erf – функција грешке.

До 12 децимала, вредности за 1, 2, све до 6, сигма тачке су дате у табели (4.2):

Табела 4.2

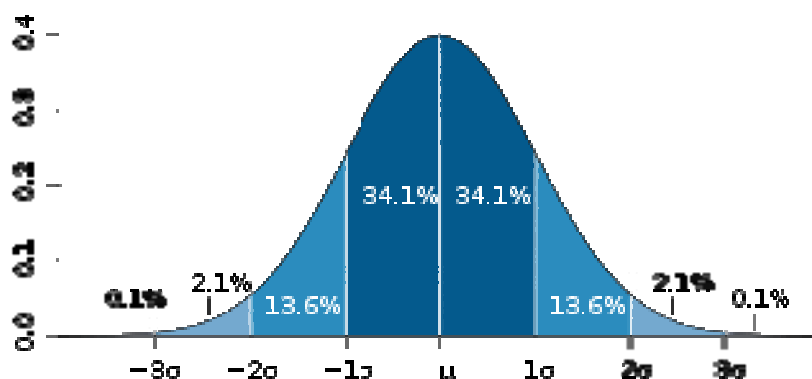
N	$\text{erf}\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)$	тј. 1 минус	или 1 у ...
1	0,682689492137	0,317310507863	3,15148718753
2	0,954499736104	0,045500263896	21,9778945080
3	0,997300203937	0,002699796063	370,398347345
4	0,999936657516	0,000063342484	15.787,1927673
5	0,999999426697	0,000000573303	1.744.277,89362
6	0,999999998027	0,000000001973	506.797.345,897

Наредна табела даје супротан однос сигма мултипликатора који одговара вредностима које се често користе за подручје под кривом. Ове вредности су корисне да се одреде интервали поверења у одређеном нивоу на основу нормално распоређених анализатора у табели 4.3.

Табела 4.3

$\text{erf}\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)$	n	$\text{erf}\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)$	n
0,80	1,281551565545	0,999	3,290526731492
0,90	1,644853626951	0,9999	3,890591886413
0,95	1,959963984540	0,99999	4,417173413469
0,98	2,326347874041	0,999999	4,891638475699
0,99	2,575829303549	0,9999999	5,326723886384
0,995	2,807033768344	0,99999999	5,730728868236
0,998	3,090232306168	0,999999999	6,109410204869

Вредност на левој страни табеле представља пропорцију вредности које ће се наћи у датом интервалу, а n је садржалац стандардног одступања који одређује ширину интервала.



Слика 4.6 Дијаграм стандардног одступања

На слици 4.6, приказан је дијаграм густине нормалне расподеле у функцији од стандардног одступања. Најтамнија област је од средине удаљена за једно стандардно

ограничавају звонаста крива и x - оса, док су два стандардна одступања од средине (најтамнија и тамнија област) чине око 95% и три стандардна одступања (осенчене области) чине око 99,7%.

4.5.3 Централна гранична теорема

Теорема наводи да под одређеним условима, збир великог броја случајних променљивих ће имати приближно нормалну расподелу. На пример, ако је $(x_1, \dots, x_n)$ низ независних идентично распоређених случајно променљивих, од којих свака има средњу вредност μ и варијансу σ^2 , онда централна гранична теорема наводи да:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \mu \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (4.43)$$

Теорема ће се одржати чак и ако сума x_i није независна идентична расподела, иако нека ограничења степена зависности и стопа раста момента још увек требају бити дефинисани.

Значај централне граничне теореме не може бити пренаглашен. Велики број статистичких тестова, резултата и анализа на које се наилазе у пракси, садрже збирове одређених случајно променљивих, још више анализатора може бити представљено као суме случајно променљивих кроз употребу утицајем функције - све ове величине су регулисане од стране теореме централне границе и имаће као резултат асимптотску нормалну расподелу.

Још једна практична последица централне граничне теореме је та да друге расподеле могу бити апроксимирани помоћу нормалне расподеле, на пример:

- биномна расподела $B(n, p)$ је приближно нормалној $N(np, np(1-p))$ за велико n и за p не превише близу нуле или јединице.
- Поасонова (λ) расподела је приближно нормална $N(\lambda, \lambda)$ за велике вредности λ .
- χ - квадратна расподела $\chi^2(k)$ је приближно нормална $N(k, 2k)$ за велико k .
- Студентова расподела $t(v)$ је приближно нормална $N(0, 1)$ када је v велико.

Да ли су ове апроксимације довољно прецизне зависи од тога за које сврхе су потребне, и од стопе приближавања нормалне расподеле. Углавном су такве апроксимације мање прецизне у крајњим интервалима расподеле. Општа горња граница за апроксимацију грешки у централној граничној теореми даје Бери-Есенова теорема, а побољшања апроксимације су дата Еџвортовим (Edgeworth) проширењима.

4.6 Повезане расподеле

4.6.1 Операције на једној случајној променљивој

Ако је X нормално распоређено са средином μ и варијансом σ^2 , онда важи:

- Експонент X -а је распоређен лог-нормално: $e^X \sim \ln N(\mu, \sigma^2)$.
- Апсолутна вредност од X је: $|X| \sim N_f(\mu, \sigma^2)$. Ако је $\mu = 0$ ово је познато као полу-нормална расподела.
- Квадрат X/σ има χ (хи)-квадратну расподелу са једним степеном слободе: $X^2/\sigma^2 \sim \chi_1^2(\mu^2/\sigma^2)$. Ако је $\mu = 0$, распореда се зове χ - квадратна.

- Расподела променљиве X која је ограничена на интервал $[a, b]$ назива се скраћена нормална расподела.
- $(X - \mu)^{-2}$ има Левијеву расподелу са положајем 0 и размером σ^{-2} .

4.6.2 Комбинације две независне случајне променљиве

Ако су X_1 и X_2 две независне нормалне случајне променљиве, онда важи:

- Њихов збир и разлика су нормално распоређени са средином нула и варијансом два: $X_1 \pm X_2 \sim N(0, 2)$.
- Њихов производ $Z = X_1 \cdot X_2$ прати производ-нормалну расподелу са функцијом густине $f_z(z) = \pi^{-1} K_0(|z|)$, где је K_0 модификована Беселова функција друге врсте. Расподела је симетрична у односу на нулу, неповезано код $z = 0$, и има карактеристичну функцију $\varphi_z(t) = (1 + t^2)^{-1/2}$.
- Њихова размера прати стандард Кошијеве (Cauchy) расподеле: $X_1 \div X_2 \sim \text{Cauchy}(0, 1)$.
- Њихова Еуклидска норма $\sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ има Релејеву расподелу, такође позната као χ -расподела са два степена слободе.

4.6.3 Комбинације две или више независних случајно променљивих

- Ако су $X_1 + X_2, \dots, X_n$ независно случајно променљиве, онда збир њихових квадрата има χ -квadratну расподелу са n степена слободе: $X_1^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi_n^2$.
- Ако су $X_1 + X_2, \dots, X_n$ независне нормално расподељене случајно променљиве са аритметичком средином μ и варијансом σ^2 , онда је њихова емпиријска средина независна од узорка стандардног одступања. Количник ове две величине ће имати Студентову t -расподелу са $n-1$ степеном слободе:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}[(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2]}} \sim t_{n-1}. \quad (4.44)$$

- Ако су $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ независне нормално случајно променљиве, онда ће количник њиховог нормализованог збира квадрата имати F -расподелу са (n, m) степеном слободе:

$$F = \frac{(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)/n}{(Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_m^2)/m} \sim F_{n,m}. \quad (4.45)$$

4.6.5 Екстензије

Појам нормална расподела, која је једна од најважнијих расподела у теорији вероватноће, је продужен далеко изван стандардних оквира униваријантног (то јест једнодимензионалног) случаја (случај 1). Све ове екстензије се такође називају нормални или Гаусови закони, тако да постоји одређена двосмисленост у именима.

- Мултиваријантна нормална расподела описује Гаусов закон у K -димензионалном Еуклидовом простору. Вектор $k \in R^k$ је више мултиваријантно-нормално распоређен ако је било која линеарна комбинација његових компоненти $\sum_{j=1}^k a_j X_j$ има (униваријантну) нормалну расподелу. Варијанса X ако је $k \times k$ симетричне позитивно-одређене матрице V .
- Исправљена Гаусова расподела је исправљена верзија нормалне расподеле са свим негативним елементима ресетована на 0.
- Сложена нормална расподела се бави сложеним нормалним векторима. За сложени вектор $X \in C^k$ се каже да је нормалан, ако обе његове компоненте и реална и имагинарна заједно поседују $2k$ -димензионалну мултиваријантну нормалну расподелу. Варијанса-коваријанса структура X -а је описана помоћу две матрице: матрица варијансе Γ , и матрица односа C .
- Матрица нормалне расподеле описује случај нормалне расподеле матрице.
- Гаусови процеси су нормално расподељени стохастички процеси. Ово се може посматрати као елементи неке бесконачно димензионалног Хилбертовог простора H , и самим тим су аналози мултиваријантног нормалног вектора за случај $k = \infty$. Случајни елемент $h \in H$ је нормалан ако за било које константно $a \in H$ скаларни производ (a, h) има (униваријантну) нормалну расподелу. Неколико Гаусових процеса је постало довољно популарано да имају своје називе:
 - о Брауново (Brownian) кретање,
 - о Браунов мост,
 - о Орнштајн-Уленбеков (Ornstein–Uhlenbeck) процес.
- Гаусова q -расподела је апстрактна математичка конструкција која представља "q - аналогију" нормалне расподеле.
- q - Гаусова аналогија је аналогија Гаусове расподеле, у смислу да максимизира Тсалисову ентропију, и један је од типова Тсалисових расподела. Обратите пажњу на то да је ова расподела различита од горе наведене Гаусове q -расподеле.

Један од главних практичних употреба Гаусовог закона је да се модел емпиријске расподеле различитих случајних променљивих пронашао у пракси. У таквим случајевима могућа екстензија би била опширнија породица расподеле, које имају више од два параметра и због тога су у могућности да прецизније уклопе емпиријске расподеле. Пример таквих екстензија је:

- Пирсонова (Pearson) расподела — породица расподеле вероватноће од четири параметра који проширују нормалан закон како би се укључиле разне вредности.

4.7 Тестови нормалности

Тестови нормалности процењују вероватноћу да дати низ података $\{x_1, \dots, x_n\}$, долази од нормалне расподеле [4]. Углавном, нулта претпоставка H_0 је да су запажања нормално распоређена са средином μ и варијансом σ^2 , насупротив алтернативи H_a да је расподела произвољна. Велики број тестова (преко 40) су осмишљени због овог проблема. Истакнутији тестови су подвучени испод:

- Визуални тестови су једноставни, али су исто субјективни, пошто се ослањају на неформалне људске процене, да се прихвати или одбије нулта претпоставка.
 - Q-Q нацрт— је нацрт поређаних вредности из скупа података насупротив очекиваним вредностима одговарајућих величина стандардне нормалне расподеле. Тј, то је нацрт тачке формуле $(\Phi^{-1}(p_k), x_{(k)})$, где су уцртне тачке p_k једнаке $p_k = (k - a)/(n + 1 - 2a)$ а a је константна подешавања која се налази у интервалу $a \in (0,1)$. Ако је нулта претпоставке тачна нацртне тачке би требало да леже на правој линији.
 - Р-Р нацрт— сличан Q-Q нацрту, али се доста ређе користи. Ова метода се састоји од цртања тачки $(\phi(z_{(k)}), p_k)$, где је $\phi(z_{(k)}) = (x_{(k)} - \hat{\mu})/\hat{\sigma}$. За нормалну расподелу податке овај нацрт би требало да лежи под углом од 45° између $(0, 0)$ и $(1, 1)$.
 - Вилк-Шапиров (Shapiro–Wilk) тест садржи чињеницу да линија у Q-Q нацрту има пад вредности σ . Овај тест упоређује процене најмањих квадрата пада са вредношћу узрочне варијансе, и одбацује нулту претпоставку ако се ове две величине значајно разликују.
 - Нацрт нормалне вероватноће.
- Тестови момента:
 - Д'Агустинов (D'Agostino's) К-квадратни тест,
 - Жарке-Беров (Jarque–Bera) тест.
- Тестови функције емпиријске расподеле:
 - Лилфорсов (Lilliefors) тест,
 - Адерсон-Дарлинг (Anderson–Darling) тест.

4.8 Нормална расподела у статистици

Нормална расподела има централну улогу у статистичкој теорији и пракси, посебно у домену статистичког закључивања [7]. За непрекидну случајну променљиву X каже се да има нормалну распореду ако њена функција густине вероватноћа има израз (4.1).

Нормална расподела је у потпуности дефинисана са два параметра, μ и σ^2 што се краће пише: $X:N(\mu, \sigma^2)$, и чита „ X има нормални расподелу са параметрима μ и σ^2 “. Дакле, као и код свих до сада разматраних расподела, постоји читава фамилија нормалних расподела, у зависности од могућих вредности μ и σ^2 . Када се у изразу $X:N(\mu, \sigma^2)$, μ и σ^2 замене конкретним вредностима, нпр. $X(100, 25)$, из фамилије је изабрана конкретна нормална расподела која ће се посматрати.

Нормалну расподелу први је открио 1733. француски математичар Абрахам де Моавр (Abraham de Moivre), као гранични облик биномне расподеле, тј. посматрајући шта се догађа са биномном расподелом када се број опита неограничено повећава. Ова расподела је била позната и Лапласу (Laplace) у другој половини XVIII века, али његово откриће, као ни Моаврово, није привукло никакву пажњу. Тек када ју је Гаус (Gauss) описао 1809. године, нормална расподела је била потпуно прихваћена од стране математичке и статистичке јавности. Гаус је извео нормалну расподелу као математичку функцију намењену опису расподела грешака у мерењима астрономских опсервација.

4.8.1 Значај нормалне расподеле у статистичкој анализи

Нормална расподела представља најзначајнију теоријску расподелу вероватноћа из следећих разлога:

1. Велики број појава у природи и друштву, има приближно нормалну расподелу. Типични примери су висина, тежина, крвни притисак, резултати на тестовима интелигенције, грешка у мерењима итд. Генерално, ако велики број фактора утиче на неку појаву на адитиван начин, и утицај сваког од њих је веома мали, може се очекивати да та појава приближно следи нормалну расподелу. У деветнаестом веку се, чак, тврдило да све појаве у природи и друштву следе нормалну расподелу. Међутим, како је у двадесетом веку откривен велики број појава које знатно одступају од нормалне расподеле, ово гледиште је одбачено.
2. Нормална расподела може послужити као одлична апроксимација разних прекидних расподела (најчешће биномне и Поасонове) за оне вредности параметра који нису дате у табелама вероватноћа. Другим речима, велики број прекидних расподела, под посебним условима, теже нормалној расподели.
3. Из нормалне расподеле је изведен велики број других непрекидних расподела, који такође имају значајно место у статистичкој анализи, као што су Студентова (или t) расподела, χ расподела и F расподела.
4. Нормална расподела представља основу за тзв. параметарско статистичко закључивање због:
 - а) његове везе са тзв. централном граничном теоријом,
 - б) због тога што се параметарске методе за заједничку претпоставку да статистички скуп из кога се узима узорак има нормалну расподелу.

5. ЗАКЉУЧАК

Високи стандарди за поуздано функционисање машинских система и конструкција захтевају темељну анализу поузданости са свих аспеката. Постизање тог циља омогућава примена прорачуна машинских система и конструкција на основу задатих параметара, као што су: време исправног рада, интезитет отказа и захтевана поузданост.

Најприближнији резултати поузданости добијају се коришћењем расподела интезитета отказа. Расподелама интезитета отказа може се предвидети време исправног рада система.

Увођењем високим стандарда захтевају поуздани рад конструкција. Наука о поузданости се базира на примени теорије вероватноће и математичке статистике, јер се у поузданости отказ третира као случајан догађај, време рада је случајна променљива, а случајне величине се третирају у теорији вероватноће и математичкој статистици. Међутим, ове математичке методе су само оруђе да би се остварили коначни задаци, тесно везани за праксу пројектовања, производње и експлоатације поузданости техничких система.

Сама поузданост може се претпостављати на основу експлоатационих карактеристика.

Наведени облици закона расподеле за дискретне и непрекидне случајне величине (функција расподеле, низ расподеле, густина расподеле) представљају неке функције које потпуно описују случајну величину.

У многим случајевима из праксе није неопходно да се случајна величина опише у потпуности, и да се одређују закони њене расподеле. Најчешће је довољно да се знају неки бројни параметри, који у одређеном степену карактеришу суштинске особине расподеле случајне променљиве. На пример, од интереса је бројни параметар који показује неку средњу вредност око које се групишу могуће вредности случајне променљиве, или параметар који показује степен растурања вредности случајне величине у односу на средњу вредност. Овакви бројни параметри називају се бројним карактеристикама случајне променљиве - параметри расподеле).

У раду је било речи о моделима расподеле времена исправног рада, а посебна пажња је посвећена нормалној расподели

Нормала расподела је једна гранична расподела која се не може директно посматрати. Прецизније одређивање се одређује са растућим n врло брзо, тако да је већа расподела неке суме од 30, или 40, независних индетично подељених случајних величина некој нормалној расподели врло слична.

Пуно природних, привредних и инжењерско научних процеса описују се помоћу нормалне расподеле или прецизно или у најмању руку у веома доброј апроксимацији.

На основу облика графика густине нормалне расподеле може да се закључи да средња вредност, медијана и мода расподеле имају једнаке вредности. Поред тога, коефицијенти асиметрије и ексцеса нормалне расподеле су једнаки нули.

Обзиром да се нормална расподела најчешће користи за моделирање времена рада до отказа у периоду старења машинских система и њихових компоненти, где је μ знатно веће од 3σ , вероватноћа $P(T < 0)$ је занемарљиво мала.

Нормална или Гаусова расподела се сматра најпопуларнијом расподелом вероватноће у статистици. Постоји неколико разлога за то. Прво, нормалној расподели се аналитички може веома лако ући у траг, то јест, велики број резултата у вези ове расподеле може се извести у експлицитном облику. Друго, нормална расподела настаје као резултат централне граничне теореме, која каже да у благим условима збир великог броја случајних променљивих се распоређује приближно нормално. На крају, звонасти облик нормалне расподеле је погодан за моделирање великог броја случајно променљивих које се срећу у пракси.

Додатак Д1. Вредности густине стандардизоване нормалне расподеле

$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad \text{за } 0,00 < z < 4,99$										
z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
,0	,3989	,3989	,3989	,3988	,3986	,3984	,3982	,3980	,3977	,3973
,1	,3970	,3965	,3961	,3956	,3951	,3945	,3939	,3932	,3925	,3981
,2	,3910	,3902	,3894	,3885	,3876	,3867	,3857	,3847	,3836	,3825
,3	,3814	,3802	,3790	,3778	,3765	,3752	,3739	,3725	,3712	,3697
,4	,3683	,3668	,3653	,3637	,3621	,3605	,3589	,3572	,3555	,3538
,5	,3521	,3503	,3485	,3467	,3448	,3429	,3410	,3391	,3372	,3352
,6	,3332	,3312	,3292	,3271	,3251	,3230	,3209	,3187	,3166	,3144
,7	,3123	,3101	,3079	,3056	,3034	,3011	,2989	,2966	,2943	,2920
,8	,2897	,2874	,2850	,2827	,2803	,2780	,2756	,2732	,2709	,2685
,9	,2661	,2637	,2613	,2589	,2565	,2541	,2516	,2492	,2468	,2444
1,0	,2420	,2396	,2371	,2347	,2323	,2299	,2275	,2251	,2227	,2203
1,1	,2179	,2155	,2131	,2107	,2083	,2059	,2036	,2012	,1989	,1965
1,2	,1942	,1919	,1895	,1872	,1849	,1826	,1804	,1781	,1758	,1736
1,3	,1714	,1691	,1669	,1647	,1626	,1604	,1582	,1561	,1539	,1518
1,4	,1497	,1476	,1456	,1435	,1415	,1394	,1374	,1354	,1334	,1315
1,5	,1295	,1276	,1257	,1238	,1219	,1200	,1182	,1163	,1145	,1127
1,6	,1109	,1092	,1074	,1057	,1040	,1023	,1006	,09893	,09728	,09566
1,7	,09405	,09246	,09089	,08933	,08780	,08628	,08478	,08329	,08183	,08038
1,8	,07895	,07754	,07614	,07477	,07341	,07206	,07074	,06943	,06814	,06687
1,9	,06562	,06438	,06316	,06195	,06077	,05959	,05844	,05730	,05618	,05508
2,0	,05399	,05292	,05186	,05082	,04980	,04879	,04780	,04682	,04586	,04491
2,1	,04398	,04307	,04217	,04128	,04041	,03955	,03871	,03788	,03706	,03626
2,2	,03547	,03470	,03394	,03319	,03246	,03174	,03103	,03034	,02965	,02294
2,3	,02833	,02768	,02705	,02643	,02582	,02522	,02463	,02406	,02349	,02294
2,4	,02239	,02186	,02134	,02083	,02033	,01984	,01936	,01888	,01842	,01797

Наставак табеле Д1.

$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad \text{за } 0,00 < z < 4,99$										
<i>z</i>	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
2,5	,01753	,01709	,01667	,01625	,01585	,01545	,01506	,01468	,01431	,01394
2,6	,01358	,01323	,01289	,01256	,01223	,01191	,01160	,01130	,01100	,01071
2,7	,01042	,01014	,0 ² 9871	,0 ² 9606	,0 ² 9347	,0 ² 9094	,0 ² 8846	,0 ² 8605	,0 ² 8370	,0 ² 8140
2,8	,0 ² 7915	,0 ² 7697	,0 ² 7483	,0 ² 7274	,0 ² 7071	,0 ² 6873	,0 ² 6679	,0 ² 6491	,0 ² 6307	,0 ² 6127
2,9	,0 ² 5953	,0 ² 5782	,0 ² 5616	,0 ² 5454	,0 ² 5296	,0 ² 5143	,0 ² 4993	,0 ² 4847	,0 ² 4705	,0 ² 4567
3,0	,0 ² 4432	,0 ² 4301	,0 ² 4173	,0 ² 4049	,0 ² 3928	,0 ² 3810	,0 ² 3695	,0 ² 3584	,0 ² 3475	,0 ² 3370
3,1	,0 ² 3267	,0 ² 3168	,0 ² 3070	,0 ² 2975	,0 ² 2884	,0 ² 2794	,0 ² 2707	,0 ² 2623	,0 ² 2541	,0 ² 2461
3,2	,0 ² 2384	,0 ² 2309	,0 ² 2236	,0 ² 2165	,0 ² 2096	,0 ² 2029	,0 ² 1964	,0 ² 1901	,0 ² 1840	,0 ² 1780
3,3	,0 ² 1723	,0 ² 1667	,0 ² 1612	,0 ² 1560	,0 ² 1508	,0 ² 1459	,0 ² 1411	,0 ² 1364	,0 ² 1319	,0 ² 1275
3,4	,0 ² 1232	,0 ² 1191	,0 ² 1151	,0 ² 1112	,0 ² 1075	,0 ² 1038	,0 ² 1003	,0 ³ 9689	,0 ³ 9358	,0 ³ 9037
3,5	,0 ³ 8727	,0 ³ 8426	,0 ³ 8135	,0 ³ 7853	,0 ³ 7581	,0 ³ 7371	,0 ³ 7061	,0 ³ 6814	,0 ³ 6575	,0 ³ 6343
3,6	,0 ³ 6119	,0 ³ 5902	,0 ³ 5693	,0 ³ 5490	,0 ³ 5294	,0 ³ 5105	,0 ³ 4921	,0 ³ 4744	,0 ³ 4573	,0 ³ 4408
3,7	,0 ³ 4248	,0 ³ 4093	,0 ³ 3944	,0 ³ 3800	,0 ³ 3661	,0 ³ 3526	,0 ³ 3396	,0 ³ 3271	,0 ³ 3149	,0 ³ 3032
3,8	,0 ³ 2919	,0 ³ 2810	,0 ³ 2705	,0 ³ 2604	,0 ³ 2506	,0 ³ 2411	,0 ³ 2320	,0 ³ 2232	,0 ³ 2147	,0 ³ 2065
3,9	,0 ³ 1987	,0 ³ 1910	,0 ³ 1837	,0 ³ 1766	,0 ³ 1698	,0 ³ 1633	,0 ³ 1569	,0 ³ 1508	,0 ³ 1449	,0 ³ 1393
4,0	,0 ³ 1338	,0 ³ 1286	,0 ³ 1235	,0 ³ 1186	,0 ³ 1140	,0 ³ 1094	,0 ³ 1051	,0 ³ 1009	,0 ⁴ 9687	,0 ⁴ 9299
4,1	,0 ⁴ 8926	,0 ⁴ 8567	,0 ⁴ 8222	,0 ⁴ 7890	,0 ⁴ 7570	,0 ⁴ 7263	,0 ⁴ 6967	,0 ⁴ 6683	,0 ⁴ 6410	,0 ⁴ 6147
4,2	,0 ⁴ 5894	,0 ⁴ 5652	,0 ⁴ 5418	,0 ⁴ 5194	,0 ⁴ 4979	,0 ⁴ 4772	,0 ⁴ 4573	,0 ⁴ 4382	,0 ⁴ 4199	,0 ⁴ 4023
4,3	,0 ⁴ 3854	,0 ⁴ 3691	,0 ⁴ 3535	,0 ⁴ 3386	,0 ⁴ 3242	,0 ⁴ 3104	,0 ⁴ 2972	,0 ⁴ 2845	,0 ⁴ 2723	,0 ⁴ 2606
4,4	,0 ⁴ 2494	,0 ⁴ 2387	,0 ⁴ 2284	,0 ⁴ 2185	,0 ⁴ 2090	,0 ⁴ 1999	,0 ⁴ 1912	,0 ⁴ 1829	,0 ⁴ 1749	,0 ⁴ 1672
4,5	,0 ⁴ 1598	,0 ⁴ 1528	,0 ⁴ 1461	,0 ⁴ 1396	,0 ⁴ 1334	,0 ⁴ 1275	,0 ⁴ 1218	,0 ⁴ 1164	,0 ⁴ 1112	,0 ⁴ 1062
4,6	,0 ⁴ 1014	,0 ⁵ 9684	,0 ⁵ 9248	,0 ⁵ 8830	,0 ⁵ 8430	,0 ⁵ 8047	,0 ⁵ 7681	,0 ⁵ 7331	,0 ⁵ 6996	,0 ⁵ 6676
4,7	,0 ⁵ 6370	,0 ⁵ 6077	,0 ⁵ 5797	,0 ⁵ 5530	,0 ⁵ 5274	,0 ⁵ 5030	,0 ⁵ 4796	,0 ⁵ 4573	,0 ⁵ 4360	,0 ⁵ 4156
4,8	,0 ⁵ 3961	,0 ⁵ 3775	,0 ⁵ 3598	,0 ⁵ 3428	,0 ⁵ 3267	,0 ⁵ 3112	,0 ⁵ 2965	,0 ⁵ 2824	,0 ⁵ 2690	,0 ⁵ 2561
4,9	,0 ⁵ 2429	,0 ⁵ 2322	,0 ⁵ 2211	,0 ⁵ 2105	,0 ⁵ 2003	,0 ⁵ 1907	,0 ⁵ 1814	,0 ⁵ 1727	,0 ⁵ 1643	,0 ⁵ 1563

Додатак Д2. Вредности стандардизоване нормалне расподеле

$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-z^2/2} dz, \quad \text{за } 0,00 < z < 4,99$										
z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
,0	,5000	,5040	,5080	,5120	,5160	,5199	,5239	,5279	,5319	,5359
1	,5398	,5438	,5478	,5517	,5557	,5596	,5636	,5675	,5714	,5753
,2	,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	,5987	,6026	,6064	,6103	,6141
,3	,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
,4	,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
,5	,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	,7224
,6	,7257	,7291	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
,7	,7580	,7611	,7642	,7673	,7703	,7734	,7764	,7794	,7823	,7852
,8	,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
,9	,8159	,8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8315	,8340	,8365	,8389
1,0	,8413	,8438	,8461	,8485	,8508	,8531	,8554	,8577	,8599	,8621
1,1	,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,2	,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,90147
1,3	,90320	,90490	,90658	,90824	,90988	,91149	,91309	,91466	,91621	,91774
1,4	,91924	,92073	,92220	,92364	,92507	,92647	,92785	,92922	,93056	,93189
1,5	,93319	,93448	,93574	,93699	,93822	,93943	,94062	,94179	,94295	,94408
1,6	,94520	,94630	,94738	,94845	,94950	,95053	,95154	,95254	,95352	,95449
1,7	,95543	,95637	,95728	,95818	,95907	,95994	,96080	,96164	,96246	,96327
1,8	,96407	,96485	,96562	,96638	,96712	,96784	,96856	,96926	,96995	,97062
1,9	,97128	,97193	,97257	,97320	,97381	,97441	,97500	,97558	,97615	,97670
2,0	,97725	,97778	,97831	,97882	,97932	,97982	,98030	,98077	,98124	,98169
2,1	,98214	,98257	,98300	,98341	,98382	,98422	,98461	,98500	,98537	,98574
2,2	,98610	,98645	,98679	,98713	,98745	,98778	,98809	,98840	,98870	,98899
2,3	,98928	,98956	,98983	,9 ² 0097	,9 ² 0358	,9 ² 0613	,9 ² 0863	,9 ² 1106	,9 ² 1344	,9 ² 1576
2,4	,9 ² 1802	,9 ² 2024	,9 ² 2240	,9 ² 2451	,9 ² 2656	,9 ² 2857	,9 ² 3053	,9 ² 3244	,9 ² 3431	,9 ² 3613

Наставак додатка Д2.

$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-z^2/2} dz, \quad \text{за } 0,00 < z < 4,99$										
z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
2,5	,9 ² 3790	,9 ² 3963	,9 ² 4132	,9 ² 4297	,9 ² 4457	,9 ² 4614	,9 ² 4766	,9 ² 4915	,9 ² 5060	,9 ² 5201
2,6	,9 ² 5339	,9 ² 5473	,9 ² 5604	,9 ² 5731	,9 ² 5855	,9 ² 5975	,9 ² 6093	,9 ² 6207	,9 ² 6319	,9 ² 6427
2,7	,9 ² 6533	,9 ² 6636	,9 ² 6736	,9 ² 6833	,9 ² 6928	,9 ² 7020	,9 ² 7110	,9 ² 7197	,9 ² 7282	,9 ² 7365
2,8	,9 ² 7445	,9 ² 7523	,9 ² 7599	,9 ² 7673	,9 ² 7744	,9 ² 7814	,9 ² 7882	,9 ² 7948	,9 ² 8012	,9 ² 8074
2,9	,9 ² 8134	,9 ² 8193	,9 ² 8250	,9 ² 8305	,9 ² 8359	,9 ² 8411	,9 ² 8462	,9 ² 8511	,9 ² 8559	,9 ² 8605
3,0	,9 ² 8650	,9 ² 8694	,9 ² 8736	,9 ² 8777	,9 ² 8817	,9 ² 8856	,9 ² 8893	,9 ² 8930	,9 ² 8965	,9 ² 8999
3,1	,9 ³ 0324	,9 ³ 0646	,9 ³ 0957	,9 ³ 1260	,9 ³ 1553	,9 ³ 1836	,9 ³ 2112	,9 ³ 2378	,9 ³ 2636	,9 ³ 2886
3,2	,9 ³ 3129	,9 ³ 3363	,9 ³ 3590	,9 ³ 3810	,9 ³ 4024	,9 ³ 4230	,9 ³ 4429	,9 ³ 4623	,9 ³ 4810	,9 ³ 4991
3,3	,9 ³ 5166	,9 ³ 5335	,9 ³ 5499	,9 ³ 5658	,9 ³ 5811	,9 ³ 5959	,9 ³ 6103	,9 ³ 6242	,9 ³ 6376	,9 ³ 6505
3,4	,9 ³ 6631	,9 ³ 6752	,9 ³ 6869	,9 ³ 6982	,9 ³ 7091	,9 ³ 7197	,9 ³ 7299	,9 ³ 7398	,9 ³ 7493	,9 ³ 7585
3,5	,9 ³ 7674	,9 ³ 7759	,9 ³ 7842	,9 ³ 7922	,9 ³ 7999	,9 ³ 8074	,9 ³ 8146	,9 ³ 8215	,9 ³ 8282	,9 ³ 8347
3,6	,9 ³ 8409	,9 ³ 8469	,9 ³ 8527	,9 ³ 8583	,9 ³ 8637	,9 ³ 8689	,9 ³ 8739	,9 ³ 8787	,9 ³ 8834	,9 ³ 8879
3,7	,9 ³ 8922	,9 ³ 8964	,9 ⁴ 0039	,9 ⁴ 0426	,9 ⁴ 0799	,9 ⁴ 1158	,9 ⁴ 1504	,9 ⁴ 1838	,9 ⁴ 2159	,9 ⁴ 2568
3,8	,9 ⁴ 2765	,9 ⁴ 3052	,9 ⁴ 3327	,9 ⁴ 3593	,9 ⁴ 3848	,9 ⁴ 4094	,9 ⁴ 4331	,9 ⁴ 4558	,9 ⁴ 4777	,9 ⁴ 4988
3,9	,9 ⁴ 5190	,9 ⁴ 5385	,9 ⁴ 5573	,9 ⁴ 5753	,9 ⁴ 5926	,9 ⁴ 6092	,9 ⁴ 6253	,9 ⁴ 6406	,9 ⁴ 6554	,9 ⁴ 6696
4,0	,9 ⁴ 6833	,9 ⁴ 6964	,9 ⁴ 7090	,9 ⁴ 7211	,9 ⁴ 7327	,9 ⁴ 7439	,9 ⁴ 7546	,9 ⁴ 7649	,9 ⁴ 7748	,9 ⁴ 7843
4,1	,9 ⁴ 7934	,9 ⁴ 8022	,9 ⁴ 8106	,9 ⁴ 8186	,9 ⁴ 8263	,9 ⁴ 8338	,9 ⁴ 8409	,9 ⁴ 8477	,9 ⁴ 8542	,9 ⁴ 8605
4,2	,9 ⁴ 8665	,9 ⁴ 8723	,9 ⁴ 8778	,9 ⁴ 8832	,9 ⁴ 8882	,9 ⁴ 8931	,9 ⁴ 8978	,9 ⁵ 0226	,9 ⁵ 0655	,9 ⁵ 1066
4,3	,9 ⁵ 1460	,9 ⁵ 1837	,9 ⁵ 2199	,9 ⁵ 2545	,9 ⁵ 2876	,9 ⁵ 3193	,9 ⁵ 3497	,9 ⁵ 3788	,9 ⁵ 4066	,9 ⁵ 4332
4,4	,9 ⁵ 4587	,9 ⁵ 4831	,9 ⁵ 5065	,9 ⁵ 5288	,9 ⁵ 5502	,9 ⁵ 5706	,9 ⁵ 5902	,9 ⁵ 6089	,9 ⁵ 6268	,9 ⁵ 6439
4,5	,9 ⁵ 6602	,9 ⁵ 6759	,9 ⁵ 6908	,9 ⁵ 7051	,9 ⁵ 7187	,9 ⁵ 7318	,9 ⁵ 7442	,9 ⁵ 7561	,9 ⁵ 7675	,9 ⁵ 7784
4,6	,9 ⁵ 7888	,9 ⁵ 7987	,9 ⁵ 8081	,9 ⁵ 8172	,9 ⁵ 8258	,9 ⁵ 8340	,9 ⁵ 8419	,9 ⁵ 8494	,9 ⁵ 8566	,9 ⁵ 8634
4,7	,9 ⁵ 8699	,9 ⁵ 8761	,9 ⁵ 8821	,9 ⁵ 8877	,9 ⁵ 8931	,9 ⁵ 8983	,9 ⁶ 0320	,9 ⁶ 0789	,9 ⁶ 1235	,9 ⁶ 1661
4,8	,9 ⁶ 2067	,9 ⁶ 2453	,9 ⁶ 2822	,9 ⁶ 3173	,9 ⁶ 3508	,9 ⁶ 3827	,9 ⁶ 4131	,9 ⁶ 4420	,9 ⁶ 4696	,9 ⁶ 4958
4,9	,9 ⁶ 5208	,9 ⁶ 5446	,9 ⁶ 5673	,9 ⁶ 5889	,9 ⁶ 6094	,9 ⁶ 6289	,9 ⁶ 6475	,9 ⁶ 6652	,9 ⁶ 6821	,9 ⁶ 6981

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рамовић, Р., *Поузданост система (електронских, телекомуникационих и информационих)*, Катедра за Микроелектронику и техничку физику, Београд, 2005.
- [2] Јовичић, С., *Основи поузданости машинских конструкција*, ИДП „Научна књига“ Београд, Београд, 1990.
- [3] Ћатић, Д., *Развој и примена метода теорије поузданости*, Машински факултет Крагујевац, Крагујевац, 2005.
- [4] Нормална расподела, http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution, приступљено 05.09.2011.
- [5] Нормална расподела, <http://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung>, приступљено 10.10.2011.
- [6] Нормална расподела, <http://www.mathepedia.de/Normalverteilung.aspx>, приступљено 19.09.2011.
- [7] Ловрић, М., *Основи статистике*, Економски факултет - Универзитет у Крагујевцу, Крагујевац, 2009.