

Факултет инжењерских наука

Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Мастер академске студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Индустијски дизајн

Број индекса: 390/2011

Ана М. Варагић

**Статичка анализа напонско - деформационог
стања карданског вратила применом нумеричке
методе
мастер рад**

Комисија за преглед и одбрану:

1. **Проф. др Лозица Ивановић - ментор**

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог мастер рада кандидат треба да:

- упозна се са већ постојећим истраживањима из ове области и предложи на који начин може допринети развоју исте,
- изврши потребан прорачун аналитичким путем како би имао могућност упоређивања тачности резултата са резултатима добијеним нумеричким путем,
- изабере нумеричку методу одговарајућу анализи напонско-деформационог стања испитиваног дела и формира нумерички модел који одговара реалном,
- представи резултате извршене анализе, као и зависности утицаја промене основних геометријских и других карактеристика на напонско-деформационо стање.

Препоручена литература:

[1] Танасијевић, С., "Механички преносници", Машински факултет у Крагујевцу, 1994

[2] Симић, Д., Јанковић, А., "Карданско вратило", Специјално издање интернационалног часописа MBM, Крагујевац, 1993.

[3] Ивановић, Л., Јосифовић, Д., Ракић, Б., Стојановић, Б., Илић, А., "Shape Variations Influence on Load Capacity of Cardan Joint Cross Shaft", The 7th International Symposium KOD 2012, Machine and Industrial Design in Mechanical Engineering, 24 - 26 May 2012, Balatonfüred, Hungary, Proceedings, pp. 205-210.

[4] Seherr-Thoss, H.Chr., Schmelz, F., Aucktor, E., "Universal Joints and Driveshafts", 2006, Birkhäuser, ISBN: 9783540301691

Крагујевац, 2013.

ментор:

Др Лозица Ивановић, ван. проф.

Статичка анализа напонско-деформационог стања карданског вратила применом нумеричке методе

Резиме: У овом раду је извршена анализа утицаја промене основних димензија карданског вратила на напонско-деформационо стање вратила. Такође је урађена и упоредна анализа аналитичког прорачуна са резултатима добијеним нумеричким путем. За формирање нумеричког модела коришћен је FEMAP, програмски пакет, док је за добијање резултата анализе коришћен компјутерски програм NxNastran. Као савремена нумеричка метода коришћена је метода коначних елемената (МКЕ), која се занима на дискретизацији стварног модела.

Кључне речи: карданско вратило, нумеричка анализа, метода коначних елемената (МКЕ), љуска

Statistical analysis of stress-strain state of drive shaft by applying numerical methods

Summary: This paper analyzes the impact of the change of the basic dimensions of drive shaft on the stress-strain state of the shaft. The study also includes a comparative analysis of the analytical calculation with the results which were obtained numerically. The FEMAP was used in order to form the numerical model, a software package, and the computerized program NxNastran was used in order to get the results of the analysis. Finite element method (FEM) was used, as a modern numerical methods, which is based on the discretization of the actual model.

Keywords: drive shaft, numerical analysis, finite element method (FEM), the shell

САДРЖАЈ

КОРИШЋЕНЕ ОЗНАКЕ	iii
ЛИСТА СЛИКА	v
ЛИСТА ТАБЕЛА	ix
1. Увод	1
1.1. Досадашња истраживања	3
1.2. Предмет истраживања	4
2. Историјски развој	6
3. Употреба и значај примене карданских вратила	10
3.1. Примена карданских вратила код пољопривредних машина	10
3.1. Подела карданских вратила	11
3.3. Удвојени кардански механизми	15
4. Основни елементи, материјал и подмазивање карданских вратила	17
4.1. Основни елементи карданског вратила	17
4.1.1. Крстаста осовина	18
4.1.2. Виљушка кардана	19
4.1.3. Телескопски део вратила	20
4.1.4. Централни део (цев – склоп)	20
4.1.5. Ослонци удвојеног карданског механизма	21
4.2. Материјал за карданске преноснике	23
4.3. Подмазивање карданских преносника	26
5. Прорачун карданских преносника	29
5.1. Кинематика карданског вратила	29
5.2. Критеријуми за прорачун вратила	32
5.2.1. Прорачун чврстоће вратила	32
5.2.2. Прорачун крутости вратила	33
5.2.2.1. Одређивање деформације вратила при увијању	33
5.2.3. Прорачун динамичке стабилности вратила	35
5.2.3.1. Критични број обртаја карданског вратила	36
5.2.3.2. Степен сигурности са аспекта динамичке стабилности вратила	38

5.3. Избор модела и величине карданског вратила за анализу.....	38
5.4. Аналитички прорачун карданског вратила прстенастог попречног пресека	41
6. Статичка анализа карданског вратила применом нумеричких метода	45
6.1. Метода коначних елемената.....	46
6.1.1. Развој методе коначних елемената	47
6.1.2. Основе на којима се заснива МК.....	48
6.1.2.1. Избор коначних елемената.....	50
6.1.2.2. Матрица крутости.....	53
6.2. Статичка анализа карданског вратила.....	54
6.2.1. Визуелизација резултата	58
7. Анализа резултата.....	67
8. Закључак.....	72
9. Литература.....	74

КОРИШЋЕНЕ ОЗНАКЕ

A - попречни пресек,

D_s - спољашњи пречник карданског вратила,

D_u - унутрашњи пречник карданског вратила,

E - модул еластичности,

F_t - обимна сила,

G - модул клизања за одређени материјал,

g - убрзање земљине теже,

I_p - поларни момент инерције попречног пресека вратила,

i_ω - преносни однос,

J - момент инерције вратила,

K - коефицијент,

L - дужина вратила,

T_i - инерцијални моменат,

T_t - момент увијања,

n - број обртаја,

n_{kr} - критични број обртаја,

P - снага погонске машине,

p_a - спољашњи притисак,

p_i - унутрашњи притисак,

S - степен сигурности,

W_p - поларни отпорни момент,

α -1) угао између оса вратила, 2) коефицијент линеарног ширења,

β -угао под којим се секу вратила,

γ -специфична тежина,

δ -дебљина љуске, дебљина попречног пресека вратила,

η_k -степен корисности,

θ -угао увијања вратила,

ν - *Poisson*-ов коефицијент,

ρ -густина материјала,

τ -напон услед увијања (тангенцијални напон),

φ - тренутни угао кога заклапају виљушке зглоба,

ω -угаона брзина,

ω_k -критична угаона брзина.

ЛИСТА СЛИКА

Слика 1.1. Карданско вратило

Слика 1.2. Уобичајено место постављања карданског вратила код возила

Слика 1.3. Шема карданског преносника

Слика 2.1. Универзални зглоб (Репродукција слике из библиотеке Музеја историје науке у Оксфорду)

Слика 2.2. Први нацрт сунчаног часовника *Robert Hooke*-а из 1667. године

Слика 2.3. Хуков зглоб

Слика 2.5. Модел удвојеног карданског зглоба, Модел No.P2

Слика 2.4. Универзални зглоб (Хуков или Карданов), Модел No.P1

Слика 3.1 . Основна подела кардана

Слика 3.2. Лоптасти зглоб са куглицама

Слика 3.3. Кардански зглоб са двоструким зглобом

Слика 3.4. Крути кардан са клизним лежиштима

Слика 3.5. Еластични кардан са гуменим чаурама

Слика 3.6. Универзални кардан

Слика 3.7. Крути полукардан

Слика 3.8. Еластични полукардан са гуменим диском

Слика 3.9. Кардански механизам са крстастом осовином (*BORG-WARNER*)

Слика 3.10. Класично карданско вратило

Слика 3.11. Двоструки кардански зглоб

Слика 3.12. Карданско вратило са телескопом

Слика 4.1. Основни елементи карданског зглоба

Слика 4.2. Варијанте конструкција крстастих осовина

Слика 4.3. Различите конструкције виљушки кардана са прирубницама

Слика 4.4. Шематски приказ извлачења карданских вратила из телескопске цеви

Слика 4.5. Игличасти лежај

Слика 4.6. Лежај са допунским заптивањем

Слика 4.7. Подмазивање крстасте осовине

Слика 4.8. Неки од примера изливања мазива из лежишних склопова у току рада

Слика 5.1. Шематски приказ кинематике карданског вратила

Слика 5.2. Шематски приказ карданског вратила са два зглоба

Слика 5.3. Деформације вратила услед увијања

Слика 5.4. Димензије попречног пресека телескопског испитиваног карданског вратила

Слика 5.5. Изглед 3D модела испитиваног карданског вратила

Слика 5.6. Скица попречног пресека вратила

Слика 5.7. Зависност критичног броја обртаја од дужине вратила

Слика 5.8. Зависност напона увијања од критичног броја обртаја

Слика 6.1. Основни кораци нумеричке анализе применом нумеричких метода

Слика 6.2. Дискретизација модела цеви дебелог зида

Слика 6.3. Облик геометријског елемента са којим се апроксимира круг

Слика 6.4. Разни типови елемената

Слика 6.5. Приказ љуске са издвојеним чворовима

Слика 6.6. Љуска са основним величинама

Слика 6.7. Изглед треже на моделу карданског вратила

Слика 6.8. Распоред сила по чворовима

Слика 6.9. Расподела тангенцијалног напона услед увијања челичног вратила, МПа

Слика 6.10. Угао увијања челичног карданског вратила, rad

Слика 6.11. Угао увијања алуминијумског карданског вратила, rad

Слика 6.12. Угао увијања карданског вратила од сивог лива, rad

Слика 6.13. Вредност тангенцијалног напона при дебљини попречног пресека челичног вратила од 1,75 mm

Слика 6.14. Вредност тангенцијалног напона при дебљини попречног пресека челичног вратила од 5,25 mm

Слика 6.15. Вредност тангенцијалног напона при дебљини попречног пресека челичног вратила од 7 mm

Слика 6.16. Угао увијања при дебљини попречног пресека челичног вратила од 1,75 mm

Слика 6.17. Угао увијања при дебљини попречног пресека челичног вратила од 5,25 mm

Слика 6.18. Угао увијања при дебљини попречног пресека челичног вратила од 7 mm

Слика 6.19. Угао увијања челичног карданског вратила при дужини од 200 mm

Слика 6.20. Угао увијања челичног карданског вратила при дужини од 600 mm

Слика 6.21. Угао увијања челичног карданског вратила при дужини од 800 mm

Слика 6.22. Угао увијања алуминијумског карданског вратила при дужини од 200 mm

Слика 6.23. Угао увијања алуминијумског карданског вратила при дужини од 600 mm

Слика 6.24. Угао увијања алуминијумског карданског вратила при дужини од 800 mm

Слика 6.25. Угао увијања карданског вратила од сивог лива при дужини од 200 mm

Слика 6.26. Угао увијања карданског вратила од сивог лива при дужини од 600 mm

Слика 6.27. Угао увијања карданског вратила од сивог лива при дужини од 800 mm

Слика 6.28. Тангенцијални напон челичног карданског вратила уколико је вредност пречника 15,75 mm

Слика 6.29. Тангенцијални напон челичног карданског вратила уколико је вредност пречника 47,25 mm

Слика 6.30. Тангенцијални напон челичног карданског вратила уколико је вредност пречника 63 mm

Слика 6.31. 3D модел карданског вратила, произвођача Cerjak

Слика 6.32. Изглед мреже карданског вратила, произвођача Cerjak

Слика 6.33. Расподела тангенцијалног напона услед увијања челичног вратила произвођача Cerjak, Мра

Слика 6.34. Угао увијања челичног карданског вратила произвођача Cerjak, rad

Слика. 7.1. Зависност дужине челичног карданског вратила и угла увијања

Слика 7.2. Зависност дебљине попречног пресека вратила и угла увијања

Слика 7.3. Зависност дужине и угла увијања вратила за различите материјале

Слика 7.4. Зависност дебљине зида попречног пресека вратила и тангенцијалног напона

Слика 7.5. Зависност пречника вратила и тангенцијалног вратила

ЛИСТА ТАБЕЛА

Табела 1.1. Оштећења карданских вратила у процесу експлоатације

Табела 4.1. Конструкције цевног вратила

Табела 4.3. Препоручени рокови подмазивања карданских вратила немачких произвођача

Табела 4.2. Механичке карактеристике неких од најчешће коришћених материјала

Табела 5.1. Дозвољени обртни моменти и номинална снага за неке типове стандардних пољопривредних карданских вратила

Табела 5.2. Пољопривредни трактори, снаге до 12 kW са основним карактеристикама произвођача „Кубота”- Јапан

Табела 6.1. Основне механичке карактеристике материјала

Табела 7.1. Вредности напона услед увијања (тангенцијални напон) и угла увијања добијене аналитичким и нумеричким путем.

Табела 7.2. Вредности угла увијања за Č, AL, SL

Табела 7.3. Вредности тангенцијалног напона и угла увијања за два различита профила попречног пресека

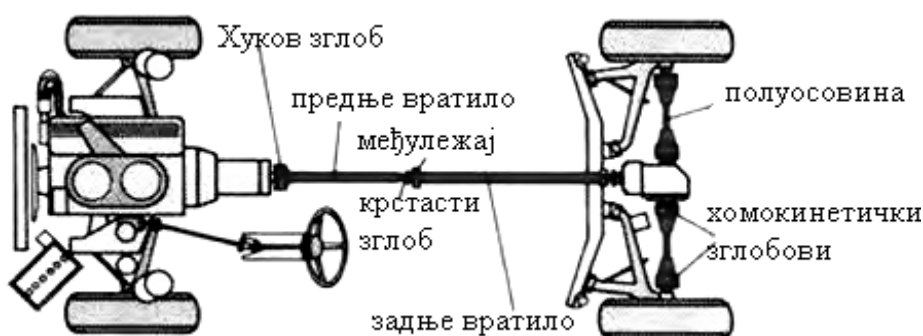
1. Увод

Карданска вратила имају значајну улогу при преносу механичке снаге и кретања између вратила која мењају положај оса у процесу експлоатације или су постављена под извесним углом, слика 1.1.



Слика 1.1. Карданско вратило

Чак и када се не ради о типичном карданском зглобу са крстастом осовином већ о различитим конструкционим решењима која имају значајну улогу како у трансмисији аутомобила, тако и у преношењу снаге код других машина, преносна вратила се често називају и карданским. Најчешће се кардански пренос користи за повезивање излазног вратила мењача са улазним вратилом погонског моста, слика 1.2. Пренос се може остварити са једним или са више вратила, при чему се веза између њих остварује карданским зглобом који омогућава постављање вратила под одређеним углом.



Слика 1.2. Уобичајено место постављања карданског вратила код возила

Поред аутомобила, кардански пренос се широко примењује код пољопривредних машина. У пољопривреди карданска вратила имају улогу у преношењу обртног момента

са радне машине (трактора) на прикључну машину. Данас, на скоро свим прикључним машинама (пресе, сејалице, расипачи минералног ђубрива, вадилице кромпира итд.) обртни момент и снага се преносе од трактора механичким путем преко карданског вратила, јер узајамни положај вратила може непрекидно да се мења зависно од рељефа терена или карактера технолошког процеса.

При развоју пољопривредног и транспортног машинства настаје нагли развој карданских механизма и њихова све већа примена. Ако се обрати пажњу на карактеристике конструкције транспортних и технолошких машина, њихову намену и извршене операције које обављају, постаје јасно да је уградња карданских преносника код њих неопходна.

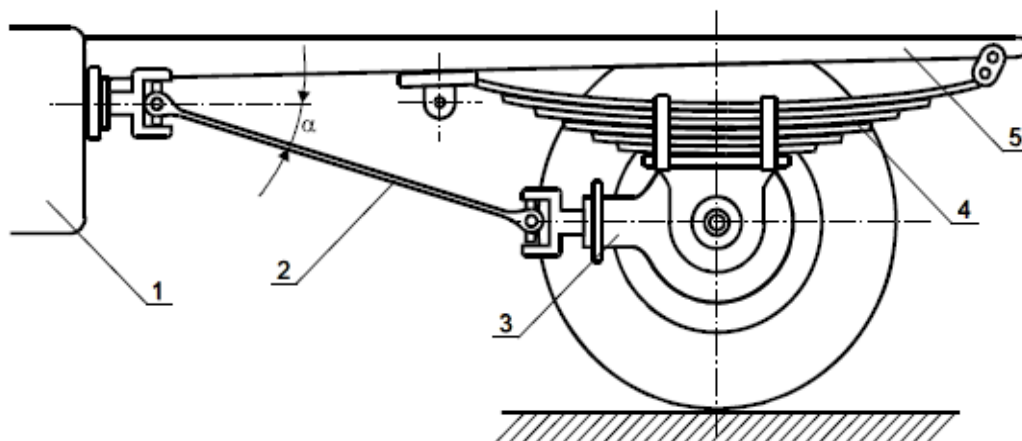
Кардански преноси су универзални склопови и налазе примену у [2]:

- транспортним и пољопривредним машинама,
- аутомобилима и локомотивама,
- радиоелектронским уређајима,
- машинама алаткама,
- бушилицама и пумпама нафтне индустрије,
- управљачким механизмима авиона и хеликоптера,
- дрвној индустрији,
- текстилној индустрији итд.

Конструкциони захтеви карданског преноса су [1]:

- Способност преношења обртног момента уз могућност промене угла између појединих вратила у одређеном интервалу и без допунских оптерећења елемената трансмисије.
- При равномерном обртању погонског дела вратила, равномерно обртање гоњеног дела вратила без појаве динамичких оптерећења.
- Способност промене дужине карданског преноса.

На слици 1.3, шематски је приказан положај карданског вратила приликом преноса обртног момента од мењача (1) на погонски мост (3). Пошто је погонски мост еластично везан за рам (5) преко гибња (4) у току кретања возила долази до померања погонског моста по кружном луку, тако да карданско вратило мора имати могућност промене дужине.



Слика 1.3. Шема карданског преносника [20]

1-мењач, 2-кардански преносник, 3-погонски мост, 4-гибањ, 5-рам

1.1. Досадашња истраживања

Велики број истраживања прати развој карданских преносника. Значајан допринос познаности карданских вратила имају истраживања која су спровели *Bayrakceken et al* (2007), и која су показала да је неправилно изведена термичка обрада најчешћи разлог појаве замора материјала код елемената карданских зглобова. Такође, треба поменути истраживања од стране *Hummel-a* и *Chassapis-a* (2000) који су се највише бавили испитивањем универзалних зглобова и њиховим максималним углом заокретања, као и истраживања која су спровели *Sopanen* (2006), *Fischer u de Waal*, (1995), *Ерохин и Пастухов* (2008), *Флика* (1979) и многи други, и тиме допринели развоју кардана [7], [10], [11].

Узроци и класификације отказа пољопривредних машина у експлоатацији указују на то да је у 43,7 % разлог отказа било неодговарајуће конструкционо решење (нарушено непоштовањем норми и правила пројектовања), неодговарајући квалитет материјала, дефицит квалитетних материјала и слично, у 50 % узроке треба тражити у технологијама израде (нарушавањима прописаних технологија и метода израде, брзином израде, техничким условима израде и слично) и у 6,3 % на појаву отказа утичу експлоатациони услови (непридржавање поступака одржавања, нестручно руковање, нарушавање режима рада...). Овакве тврдње су проистекле из истраживања која су извели *Селиванов* (1994) и *Сенин* (2000) [7], [13].

Проблемом нестабилности дугог челичног вратила, што је од значаја за овај рад, изложеног торзионом оптерећењу су се бавили истраживачи још давне 1883. године. Почетну анализу је дао *Schewerin* 1924. године, затим *Sezaw* и *Kubo* 1931. године, али се њихови резултати нису поклапали са експерименталним. Значајне резултате што се тиче отпорности и торзије алуминијумске цеви танких зидова постигао је *Lundquist* 1932. године.

Donnell је 1934. године применом теорије танких љуски развио релације за анализу торзије цеви танких зидова и појаву нестабилности. Међутим, овај рад се ограничавао на примену изотропних материјала. Разматрања која се односе на изотропне, али и на материјале другачијих карактеристика, су дали *Timoshenko*, *Flügge*, *Batdorf* и други [3].

Знатан број истраживања у Србији и свету обављен је на тему карданских вратила, међутим они су углавном везани за теоријска истраживања кинематике и динамике карданских вратила, док је приметан недостатак практичних истраживања ових механизма на опитним столовима. У Србији до данас нису вршена практична истраживања на ову тему, међутим у фабрици „*FKL*” у Темерину постоји један опитни сто за испитивање пољопривредних карданских вратила са затвореним током снаге, али на њему нису вршена научна истраживања, већ само комерцијална.

Марчетић (1982) је анализирајући поузданост пољопривредних карданских вратила, величина 12 и 15 које производи *FKL* и величина W2300 и W220 које производи *Jean Walterscheid GmbH*, у експлоатацији на пољопривредним машинама Р.О. Мајевица, установио следећа оштећења: сломљене виљушке, оштећене виљушке, увијено међувратило и оштећене зглобне везе, табела 1.1 [7].

Табела 1.1. Оштећења карданских вратила у процесу експлоатације

Ознака карданског вратила	Оштећење				Укупно
	Сломљена виљушка	Оштећена виљушка	Увијено међувратило	Оштећена зглобна веза	
12	-	-	3.83%	47.27%	50.9%
15	-	1.81%	1.81%	27.27%	30.9%
WW2300	-	-	1.81%	10.91%	12.72%
WW220	1.18%	-	-	3.63%	5.45%
Укупно	1.18%	1.81%	7.27%	89.09%	100%

1.2. Предмет истраживања

Актуелност теме рада указује на неопходност и масовност употребе карданских вратила, јер се процењује да у Србији има преко 500.000 пољопривредних карданских вратила у употреби.

Елементи карданског вратила су оптерећени комбинованим напрезањима на савијање, увијање, смицање и површински притисак. Током експлоатације, услед преоптерећења, може доћи до различитих видова разарања материјала и лома делова карданских вратила. Најчешћа места лома услед преоптерећења јављају се у корену крака виљушки, а иницијалне пукотине као почетак разарања најчешће се јављају на крстастој осовини у зони отвора испод мазалице. Међутим, иако у односу на укупна оштећења, оштећења на самом вратилу чине мањи проценат (табела 1.1.), не треба их занемарити. Вратило

кардана је првенствено торзионо оптерећено, а као деформација се јавља угао увијања, зато је значајно одрадити његову напонско деформациону анализу.

У раду је извршена анализа утицаја промене неких основних димензија вратила, утицаја промене профила попречног пресека, као и утицаја промене материјала, на напонско стање вратила. Такође је одрађена упоредна анализа аналитичко урађеног прорачуна са резултатима добијеним нумеричким путем.

Истраживање проблематике рада и поузданости карданских вратила је веома захтеван и комплексан задатак. Да би се до краја реализовао и схватио било који проблем везан за карданска вратила и на прави начин њему приступило, потребно је познавати историју карданских вратила, чији је развој описан у наредном делу.

2. Историјски развој

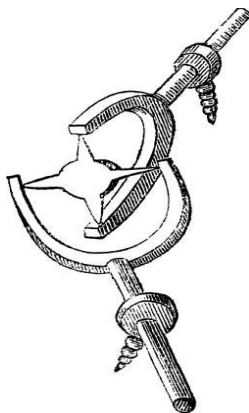
Пре више од 2000 година, иако нису знали елементе универзалног зглоба, Кинези су га први изумели и користили. Они су у то време израђивали тамјанске племенике са држачима који су имали карданске прстенове. У суштини, они су били идентични са модерним карданским прстеновима који су омогућавали бродским компасима да остану у хоризонталном положају чак и када су се бродови љуљали.

Прво извесно описивање механизма за пренос снаге и обртног момента између два вратила, која су постављена под углом, садржи рукопис архитекте *Villard-a de Honnecourt* који је живео у 13. веку [7].

Значајан напредак у развоју карданских зглобова се десио када је, велики италијански математичар и проналазач *Girolamo Cardano (1501-1576)*, кинеске карданске прстенове 1545. године (који су се до тада већ проширили ван Кине) детаљно описао и наговестио могућност преноса, тј. како би се они могли користити за пренос обртног момента са једног вратила на друго. Као резултат тога, данас је, обичан универзални зглоб познатији као кардански зглоб. Међутим, занимљиво је да *Girolamo Cardano* није заправо конструисао такав зглоб, који ће тек у наредном веку бити произведен [26].

Први универзални зглоб погодан за пренос обртног момента припада Светом римском цару *Charles V (1548. године)*. Међутим, човек којем је пошло за руком да чувени механизам по њему добије име је био, већ поменути, *Girolamo Cardano* који припада суштински ренесансној традицији. Није ретко да се у литератури помиње и да је *Leonardo da Vinci (1452 -1519)* такође имао визију универзалног зглоба [18].

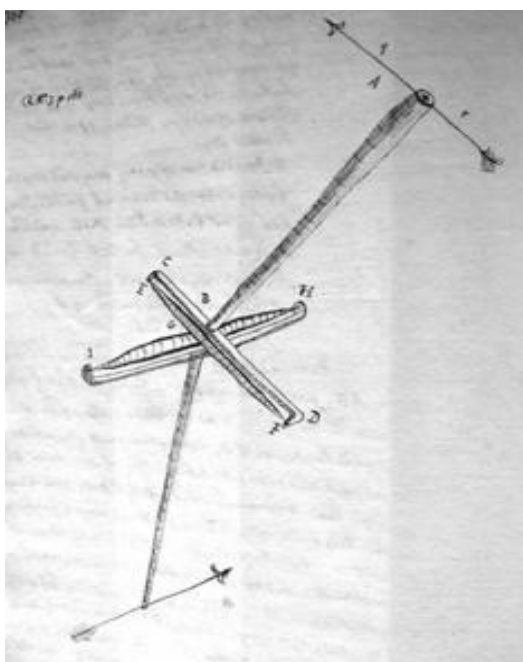
Christopher Polhammar (1661-1751) познатији као *Christopher Polhem*, шведски научник, проналазач и индустријалац, измислио је назив „*Polhemsknut*” (универзални зглоб), слика 2.1, у Шведској [4].



Слика 2.1. Универзални зглоб (Репродукција слике из библиотеке Музеја историје науке у Оксфорду)

Године 1664. енглески механичар *R. Hook* (1635. - 1703. године), патентирао је механизам намењен преносу обртања и снаге између два вратила постављена под углом, једно у односу на друго. Механизам је добио име „Хуков зглоб”. Са аспекта структурних и кинематских карактеристика, механизам Кардана и Хуков зглоб су еквивалентни, разлике су само конструкционе [2]. Од тада, па до данашњих дана, развија се све већа потреба за преношењем снаге и обртног кретања између два вратила која су постављена под углом или мењају положај оса у току рада.

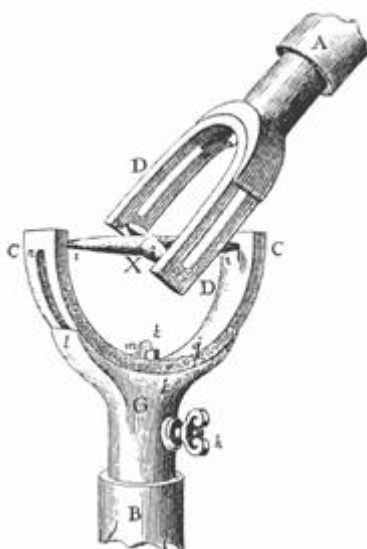
Следећи значајан напредак у развоју карданског механизма се догодио између 1667. и 1675. године када је *Robert Hooke* имао потребу да усаврши механизам његовог хелиоскопа. Он је анализирајући зглоб на хелиоскопу открио да је брзина обртања неравномерна, али да би се ово својство могло користити за праћење кретања сенке испред сунчевог часовника, слика 2.2. Тако да је прва забележена употреба термина карданског зглоба за овај изум од стране *Robert Hooke-a* забележена 1676 године, у његовој књизи „*Helioscopes*”. Он је 1678. године прогласио опис добијен коришћењем заједничких термина, хуков зглоб, у енглеском говорном подручју. Термин универзални зглоб је тек постао познат у 18. веку и много више у 19. веку [8], [9].



Слика 2.2. Први нацрт сунчаног часовника *Robert Hooke-a* из 1667. године

Hooke-ова направа је током 1667. године функционисала као спојница за пренос обртног момента без промене угла, иако се тада тврдило да се не може даље унапредити процес преноса снаге и имати друге механичке користи. Веома брзо његову примену су нашли запослени у холандским ветрењачама који су зглоб искористили за везу осовине крила ветрењаче и архимедове завојнице (спирални транспортер), која је у ствари служила за вађење воде из канала. *Robert Hooke*-ов универзални зглоб, данас је познатији по крстастој осовини (крстаку) која спаја две виљушке, слика 2.3. *Hooke* је 1683. године био

свестан да такав зглоб не преноси непроменљив или константан обртни момент, тако да он уводи два идентична зглоба под 90° , која су раздвојена средњим вратилом, како би се постигла константна брзина [8].



Слика 2.3. Хуков зглоб

Edmund Morewood (1812-1887) је 1844. године патентирао од челика први израђен механизам који је назвао универзални зглоб, како би ускладио мале грешке поравнања између мотора и ваљаног челичног вратила, док је немачки математичар и инжењер *Jules Weisbach* (1806-1871) описао математику универзалног зглоба и удвојеног универзалног зглоба [7].

Термин „*Cardan joint*” (кардански зглоб) се веома касно почео употребљавати на енглеском језику. Бројне примене овога зглоба које су се користиле у 19-том веку појављују се и на француском језику. Пример је „*Exposition Universelle*” (опште излагање) из 1868. године и чланак о динамометру у преводу са француског 1881. године. Немци у 16-том веку називају овај механизам „кардански зглоб”, док Британци користе назив „хуков зглоб”, приписујући га *Robert Hooke*-у (1676. година), а у Сједињеним Америчким Државама назива се „универзални зглоб” [7], [8], [19].

Највећа колекција модела кинематичких механизма на свету у 19-том веку, дело су великог немачког инжењера и професора, *Franz Reuleaux* (1829-1905) са Берлинског Техничког Универзитета.

Модел дизајнирани од стране *Franz Reuleaux*-а чувају се на *Cornell* универзитету од 1882. године. Већина његових модела су купљена за потребе *Cornell* универзитета за 8000 \$, као поклон од *Hiram Sibley*-а. У кући модела *Cornell*, основан је и музеј механизма и машина, који је описан у 1885 прича о науци Америке. Модел колекција универзалног

зглоба и удвојеног универзалног зглоба приказани су на следећим сликама (слика 2.4, слика 2.5) [15], [19].



Слика 2.4. Универзални зглоб (Хуков или Карданов), Модел No.P1



Слика 2.5. Модел удвојеног карданског зглоба, Модел No.P2

Прво практично покретање карданских вратила преко пољопривредних трактора, на Међународном нивоу, престављено је на једном имању тек 1918. године. Погон $540 \text{ } \%/min$ са пољопривредног трактора, заштитне облоге, и руда за вучу представља стандард који је развијен од стране Института произвођача опреме (EMI) и Америчког удружења пољопривредних инжењера (ASAE) 1926. године. У 1958. години је донет стандард са $1000 \text{ } \%/min$, док је током 1966. године донет стандард који залази дубље у развој коњских снага код трактора. Доношењем ASAE C203 стандарда, подробније су димензионисане димензије вратила и класе коњских снага [7].

Постоје чињенице да истраживања на преносу снаге под углом на карданским механизмима, тачније на карданским зглобовима трају више од 4000 година, може се закључити да механизам и поред више развијених типова карданских зглобова није у потпуности савршен и поуздан за рад, и да се и даље може побољшавати. Највећи проблеми данас се јављају при преносу снаге на пољопривредним машинама (са радне на прикључну машину) и то најчешће под условом када је угао лома већи од 20° или када се улазни и излазни углови не поклапају. Из ових и сличних разлога задњих година актуелна у свету су и учестала испитивања карданских вратила на лабораторијским столовима.

3. Употреба и значај примене карданских вратила

3.1. Примена карданских вратила код пољопривредних машина

Од савремених пољопривредних машина се тражи да обављају више агротехничких операција. Њихови радни органи, остварују различите радне и транспортне операције у простору. За покретање ових органа могу се користити хидраулични преносници снаге, што конструкторима даје велику слободу избора конструкционих решења. Међутим, хидраулични пренос није за сада добио тако широку примену на пољопривредним машинама како се у почетку очекивало, а два кључна разлога су:

- што је мањи степен корисног дејства хидрауличних преносника и
- што су знатно скупљи од механичких преносника снаге.

Према општим предвиђањима за покретање радних делова пољопривредних машина од мотора, као извора снаге и произвођача обртног момента, и даље ће се у будућности користити механички преносници (карданска вратила, ременице, зупчаници, ланчаници и други).

Пољопривредна карданска вратила се у току експлоатације прикопчавају на прикључна вратила трактора. Ова вратила су ожљебљена и њихов стандардни пречник је 34,9 mm. Прикључно вратило може да буду укључено директно преко мотора или преко мењача. У склопу прикључних вратила може да буде уграђена спојница која га аутоматски искључује када се трактор креће уназад. На овај начин се радне машине обезбеђују од могуће појаве оштећења. Стандардно прикључно вратило при погону мотора остварује број обртаја од 540 $^{\circ}/min$, међутим, није реткост да се на захтев купаца, или по стандардима који нису толико применљиви испоручују прикључна вратила на тракторима за бројеве обртаја од 720, 1000 $^{\circ}/min$ [7].

На пољопривредним машинама за преношење обртног момента са једног вратила на друго, могу се користити карданска вратила за:

- спољашњи пренос и
- унутрашњи пренос.

Спољашњи пренос је веза између радне и прикључне пољопривредне машине, а унутрашњи пренос је веза између појединих вратила у самој радној или прикључној машини.

При спајању погонске са прикључном машином, двоструко карданско вратило, у зависности од рељефа земљишта, правца вођења и карактера технолошких операција, може да заузме различите положаје у простору.

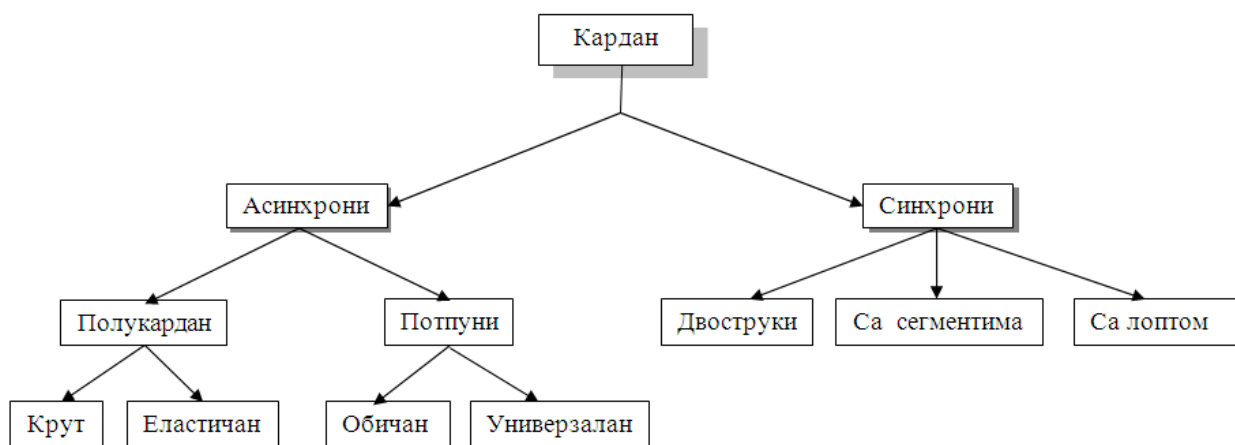
3.2. Подела карданских вратила

Елементи за везивање вратила под углом и међупросторних оса називају се карданским механизмима, универзалним зглобовима или карданима. Област примене карданских механизма, њихова експлоатациона својства, поузданост и трајност у различитим условима, одређени су експлоатационим својствима и конструкционим карактеристикама коришћених карданских механизма.

Кардански механизми се користе у многим гранама машинства као механички преносници снаге па их је зато у првом реду могуће поделити по њиховим конструкционим могућностима преношења момената. Примена одређене врсте карданских механизма зависи, пре свега, од вредности угаоних брзина везаних вратила, зато што није увек могуће уравнотежити центрифугалне силе инерције, које условљавају динамичке процесе у механизму. Основне поделе кардана су приказане блок дијаграмом на слици 3.1.

По кинематским својствима кардански механизми се деле на [1]:

- кардане са константним и
- кардане са променљивим преносним односом.



Слика 3.1. Основна подела кардана [1]

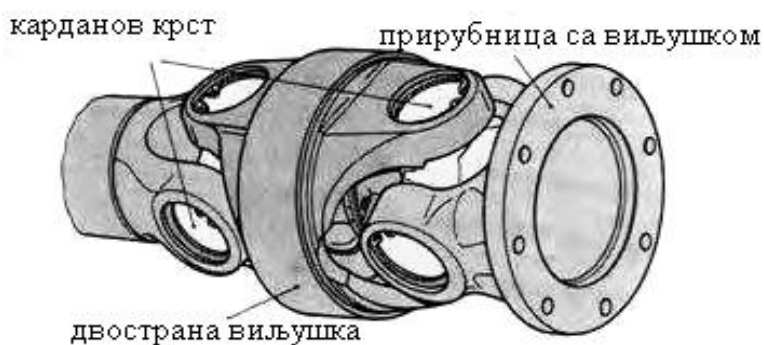
Кардански механизми са константним преносним односом равним јединици називају се синхроним и код таквих вратила се са променом угла између вратила преносни однос не мења, то јест угаоне брзине погонског и гоњеног вратила остају исте (синхроне) - $i_{\omega} = 1$,

односно $\omega_1 = \omega_2$. Код ових карданских вратила зглобови се изводе обично са челичним лоптицама смештеним у лучним каналима, слика 3.2. При заокретању вратила лоптице се постављају у једној равни која увек подједнако дели угао између вратила, тако да се постижу исте угаоне брзине спојених вратила. Ова вратила представљају веома квалитетно решење преноса снаге између погонског и гоњеног елемента који су на растојању. Међутим, њихова технологија израде је скупа и имају повећано хабање између лопти и канала тако да долази до појаве зазора, услед чега се делимично мења наведена кинематика, а зазори доводе и до појава лупања и крчкања у зглобовима, што није допустиво. Стога се они првенствено користе на местима где је потребна прецизност у преносу снаге и равномерност брзина погонског и гоњеног вратила. Угао између спојених вратила не би требало да буде већи од 20° [3].



Слика 3.2. Лоптасти зглоб са куглицама

За разлику од синхроних, асинхрони кардански механизми имају средњи преносни однос раван јединици и карактеришу се периодичном променом угаоне брзине гоњеног вратила. односно $i_\omega \neq 1$, то јест $\omega_1 \neq \omega_2$. Зглобни елемент код ових вратила се изводи као зглоб Кадран-Хука (*Guliano Cardano*, 1501 -1576, први је описао овакав зглоб, а *Robert Hooke*, 1635 – 1703, први га је применио као преносник обртног кретања) састоји се од две спојене „виљушаке“ и крстасте осовине (карданов крст), слика 3.3.

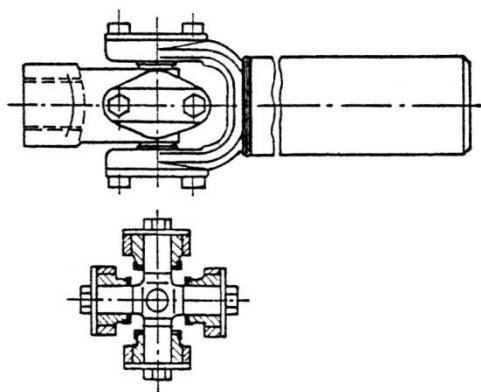


Слика 3.3. Кардански зглоб са двоструким зглобом [3]

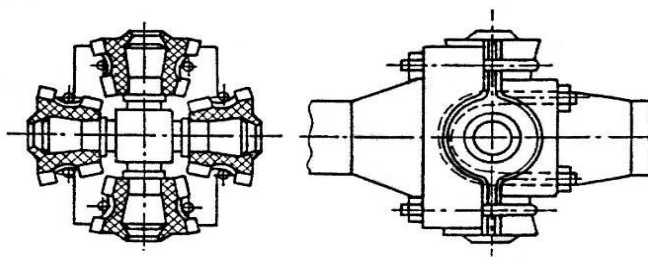
По механичким својствима кардански механизми се деле на:

- круте и
- еластичне.

Крути кардани су кардани таквог конструкционог решења да допуштају само угаона померања вратила при преносу момената, без осног растојања вратила унутар самог склопа, (слика 3.4). Док еластични кардани утичу на фреквенцију осциловања целокупног склопа и поседују способност компензовања осних премештања при преносу снаге (слика 3.5) [2].



Слика 3.4. Крути кардан са клизним лежиштима



Слика 3.5. Еластични кардан са гуменим чаурама

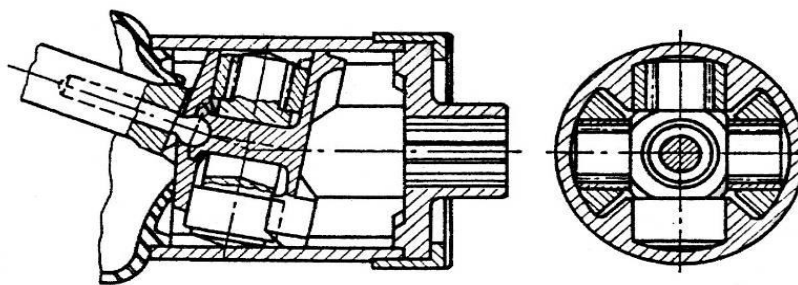
У зависности од величине угла између оса везаних вратила, разликују се:

- пуни кардани и
- полукардани.

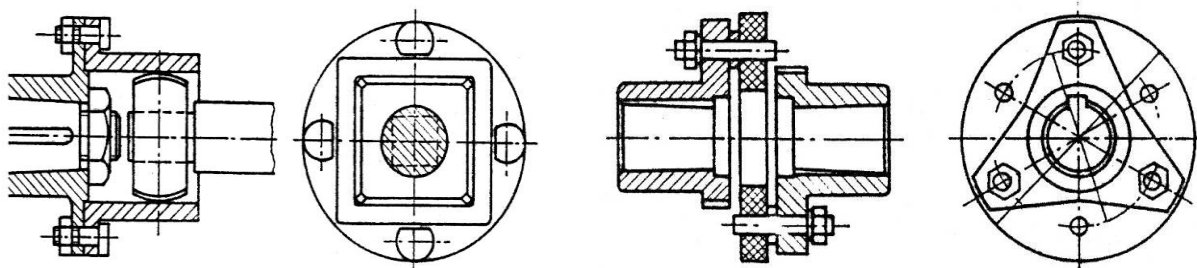
Пуни кардани имају две осе осциловања и обезбеђују пренос снаге при релативно већим угловима између оса везаних вратила. Међутим, ако конструкција пуног кардана допушта осно премештање унутар кардана, тада се он назива универзалним (слика 3.6) у противном је прост. Полукардани немају физичку осу осциловања и допуштају узајамно одступање вратила само под веома малим углом.

По својој конструкцији, полукардани могу бити [2]:

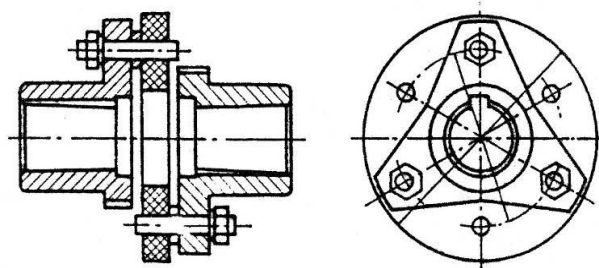
- крути и
- еластичи (слика 3.7 и слика 3.8).



Слика 3.6. Универзални кардан



Слика 3.7. Крути полукардан



Слика 3.8. Еластични полукардан са гуменим диском

У машинским конструкцијама највише се користе кардански механизми са крстастом осовином. На слици 3.9, приказан је кардански механизам, *BORG-WARNER*, растављен на саставне делове, док ће више речи о тим деловима бити у следећем поглављу.



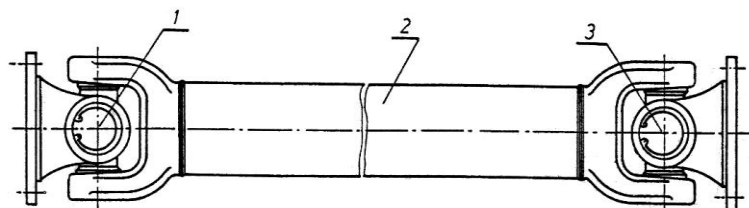
Слика 3.9. Кардански механизам са крстастом осовином (*BORG-WARNER*) [2]

3.3. Удвојени кардански механизми

Удвојени кардански механизам познат је и под именом карданско вратило. Недостатак карданског зглоба је у томе што се гоњено вратило обрће променљиво, при једноликом обртању погонског вратила, при чему се на гоњеном вратилу јавља инерцијална сила и инерцијални момент [7]. Овај недостатак се може елиминисати увођењем још једног зглоба под одређеним условима:

- углови под којима се секу погонско и гоњено вратило са међувратилом морају бити једнаки $\alpha_1 = \alpha_2$, слика 3.11,
- виљушке на међувратилу морају бити у истој равни и да су под углом од 90° у односу на виљушке погонског и гоњеног вратила и
- сва три вратила морају лежати у истој равни.

Најважнија карактеристика карданског вратила је могућност измене преносног односа. Амплитуда периодичне измене преносног односа зависи од угла под којим су постављени погонска и гоњена вратила. Применом двоструког карданског вратила могуће је постићи константни преносни однос, односно могуће је избећи неравномерност обртања гоњеног вратила. Конструкција једног класичног и често примењиваног карданског вратила дата је на слици 3.10.



Слика 3.10. Класично карданско вратило

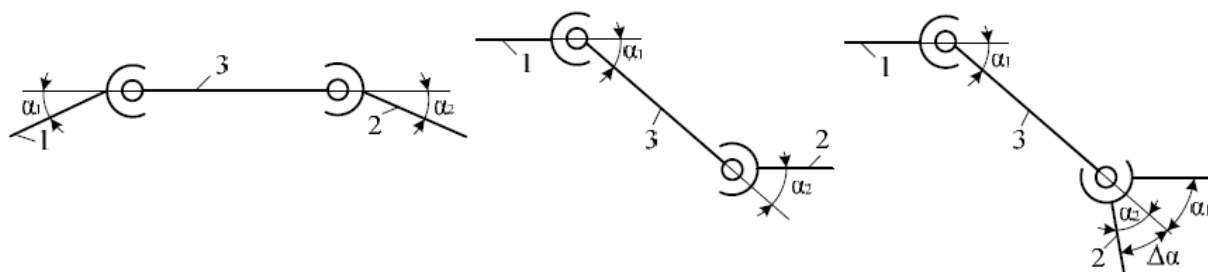
(1) и (3)- два карданска механизма која су везана међувратилом (2) [2]

Ако је испуњен први услов, односно ако су углови закретања погонског и гоњеног вратила једнаки ($\alpha_1 = \alpha_2$), тада ће се гоњено вратило обртати истом брзином као и погонско. Међутим, уколико ови углови нису једнаки јавља се исти проблем неравномерности обртања гоњеног вратила, као код вратила са једним зглобом. Разлика углова закретања погонског и гоњеног вратила $\Delta\alpha$ једнака је:

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \quad (3.1)$$

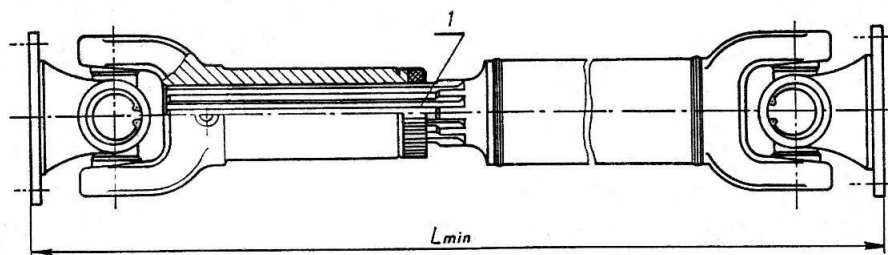
Следи да, када је разлика углова закретања погонског и гоњеног вратила $\Delta\alpha = 0$, гоњено вратило (2) ће се обртати једнако као и погонско (1). Када је разлика углова

$\Delta\alpha > 0$ јавља се исти проблем као код једног зглоба, односно гоњено вратило (2) ће се обртати променљиво у функцији вредности разлике углова. Што је већа вредност разлике углова $\Delta\alpha$, то је већа неравномерност обртања гоњеног вратила (2). Двострука карданска вратила, слика 3.12, као и већ поменуто вратило, састоје се из два карданска зглоба која су везана међувратилом (3) [7].



Слика 3.11. Двоструки кардански зглоб
(1)- погонско вратило, (2)- гоњено вратило, (3)- међувратило

Уколико се угао између оса погонског и гоњеног вратила непрекидно мења у процесу експлоатације, конструкције таквог типа захтевају примену карданских вратила са телескопом (слика 3.12). Тескопски део вратила чини ожлебљени профил (1) који омогућује издужење и скраћење карданских вратила у раду у одређеним границама. Минимална дужина карданског вратила условљена је најкраћима растојањем између прикључних тачака погонске и гоњене машине. Максимална дужина коју може постићи карданско вратило је $L_{\max} = L_{\min} + 0$. При овој дужини су обезбеђене све функционалне карактеристике карданских вратила.



Слика 3.12. Карданско вратило са телескопом [2]

Други услов је конструкцијске природе који се може лако испунити, односно да су виљушке на међувратилу тако спојене да са виљушкама погонског и гоњеног вратила заклапају угао од 90° .

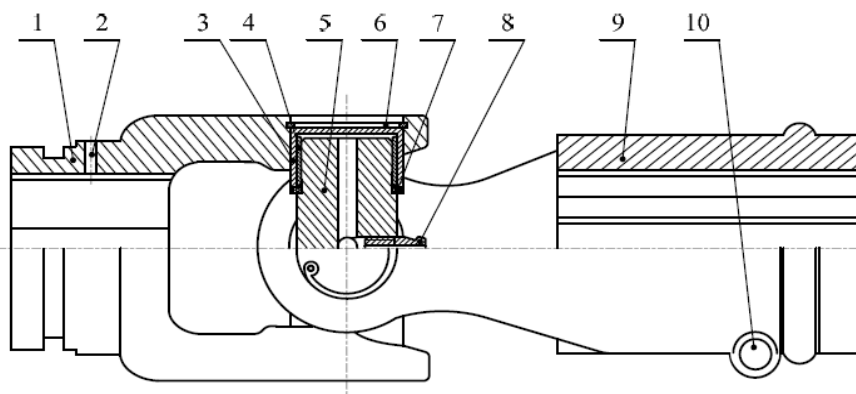
Трећи услов је да осе сва три вратила треба да леже у истој равни, хоризонталној или вертикалној. О првом и трећем услову треба водити рачуна при монтажи, јер у случају да нису испуњени, долази до неравномерности обртања гоњеног вратила и појаве инерцијалних сила.

4. Основни елементи, материјал и подмазивање карданских вратила

4.1. Основни елементи карданског вратила

Стандардни кардански зглоб чине две виљушке које се спајају преко средишњег дела, крстака, односно крстасте осовине која је зглобно везана за виљушке. Зглобна веза рукавца крстасте осовине са виљушкама може бити остварена клизним или, најчешће у пракси, котрљајним (игличастим) лежајевима.

Један пример структуралних и функционалних веза конструкцијских елемената карданског зглоба приказан је на слици 4.1.



Слика 4.1. Основни елементи карданског зглоба [7]

(1)- виљушка погонског вратила, (2)- осигурач, (3)- шољица, (4)- игличасти лежајеви, (5)- крстаста осовина, (6)- зегеров прстен, (7)- заптивач, (8)- мазалица, (9)- виљушка гоњеног вратила, (10)- осигурач

Са слике 4.1, се види да је прва виљушка (1) везана са телескопским вратилом, а друга виљушка (9) са ожљебљеним вратилом, на којима се налазе осигурачи везе са вратилима (2) и (10). Обе виљушке (1) и (9) се везују са једним паром рукавца крстасте осовине (5). У кућишту лежишног склопа налазе се игличасти лежајеви (4) између шољице (3) и рукавца крстака, односно крстасте осовине (5). Игличaste лежајеве (4) придржавају са једне стране дно шољице (3), а са друге заптивачи (7). Шољице се налазе унутар отвора у виљушкама и чврсто се држе у споју помоћу зегеровог прстена (6). На крстастој осовини (5) се налазе канали за подмазивање са којим је у средини спојен навојни отвор, а у којем је уврнута мазалица (8). На врху крстасте осовине пожељно је да се налазе додатни жљебови за случај лакше дистрибуције мазива (масти) до лежајева. Такође је пожељно, да размак између чела крстасте осовине и дна шољице буде што мањи, јер су у том случају мањи и аксијални зазори. Последњих година, првенствено у аутомобилском програму,

између дна шољице и чела крстасте осовине налазе се пластични прстенови од полиамида, у којима се налази више жљебова различитог облика усмерених од центра шољице према крају шољице, тако да мазиво из средишњих канала крстасте осовине кроз отворе на пластичним усмеривачима долази до лежишних склопова. Вишак мазива и ваздуха приликом подмазивања излази на дну шољице, ближе центру крстасте осовине. Код неких модела на рукавцима крстасте осовине се налазе испусни вентили који испуштају вишак мазива и ваздуха.

Код карданских преносника са крстастом осовином, прорачуну и провери се подвргавају следећи елементи [2]:

- крстаа осовина,
- виљушке кардана,
- телескопски део вратила,
- цевно вратило и
- ослонци карданског вратила.

4.1.1. Крстаа осовина

Крстаа осовина је један од најважнијих делова карданских вратила. У већини случајева димензије и век карданског вратила зависе од крстасте осовине.

У зависности од врсте карданског механизма, могуће је користити различите варијанте конструкција крстастих осовина (слика 4.2).



Слика 4.2. Варијанте конструкција крстастих осовина [27]

Краци крстасте осовине су напрегнути на [2]:

- савијање у равни крстасте осовине,
- савијање у равни виљушке међувратила од момента сила трења у телескопу и
- смицање силама.

Рукавци крстастих осовина, поред наведених, трпе још и напрезања на површински притисак, ако су ослоњени у клизним лежиштима, односно контактни притисак ако су ослоњени у котрљајним, на пример игличастим лежајевима.

Уколико су због нетачне израде и монтаже радијални зазори у игличастим лежајевима већи од аксијалних (између дела рукавца и дна шољице) чело рукавца се може ослонити на дно шољице и бити изложено површинском притиску [2].

Максимално савијање расте од средине крстасте осовине ка рукавцу. Расподела оптерећења дуж котрљајних тела показује пораст ка делу рукавца.

4.1.2. Виљушка кардана

Виљушке кардана, у зависности од начина причвршћивања за суседно вратило, могу као завршетак имати чауру или прирубницу. Прирубницом се виљушка везује за спојницу другог вратила, а чаура жлебном везом, варом (заваривањем) или неким другим начином. На слици 4.3, приказане су различите конструкције виљушки кардана. Разлике међу њима су углавном у начину везивања за вратило и у форми отвора за лежишта крстасте осовине.



Слика 4.3. Различите конструкције виљушки кардана са прирубницама [27]

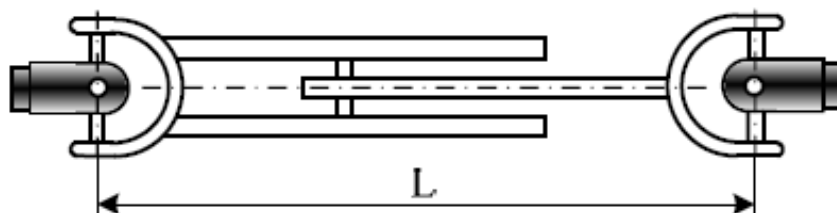
Краци виљушке су напрегнути на [2]:

- савијање и увијање од момента спрегова сила управних на раван виљушке и у равни виљушке, као и момента силе трења у истој равни,
- смицање силама редукованим на тежиште равни уклештења,
- истезање на делу око отвора шољице игличастих лежаја, услед притиска изазваног пресованим склопом и
- површински притисак на цилиндричној површини отвора за шољице услед пресованог склопа.

Прорачун и провера виљушке карданског вратила, врши се на основу максималног момента и максималне силе, која се преноси карданским вратилом.

4.1.3. Телескопски део вратила

Код многих машина (аутомобила, трактора, пољопривредних машина, машина алатки и других), угао између вратила се непрекидно мења у експлоатацији. Преношење обртног момента се остварује карданским вратилом које има могућност промене дужине (телескопирања), слика 4.4. Телескопски део вратила чини ожлебљени профил, који омогућава издужење или скраћење карданског вратила у раду, у одређеним границама.



Слика 4.4. Шематски приказ извлачења карданских вратила из телескопске цеви

Жљебови телескопског дела могу бити са правоугаоним, еволвентним и троугаоним профилем зуба.

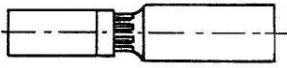
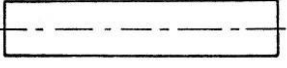
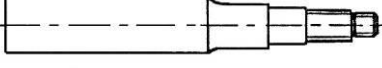
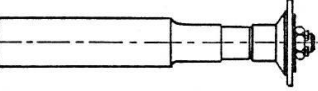
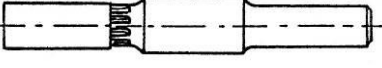
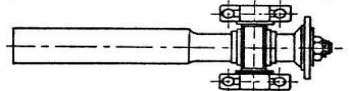
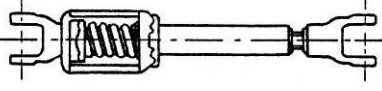
4.1.4. Централни део (цев – склоп)

Централни део карданског вратила може бити пуни или цевни. Пуно карданско вратило се користи за пренос снаге код помоћних механизма машина у случајевима када се не захтева осно померање. Већу примену имају цевна карданска вратила, која са мањом тежином од пуних вратила, преносе исти момент. У табели 4.1, приказане су различите конструкције цевног вратила за које се заварују и утврђују елементи карданског вратила.

Димензије цевастог вратила одређују се из максималног момента који се преноси, прорачуном и проверама на [2]:

- увијање,
- савијање,
- угао увијања и
- критични број обртаја.

Табела 4.1. Конструкције цевног вратила [2]

Скица извођења	Цевно вратило
	Са телескопом
	Без телескопа
	Са степенастим завршетком
	Са прирубницом
	Са глатким завршетком
	Са лежајем
	Са спојком

4.1.5. Ослонци удвојеног карданског механизма

Као ослонци крстасте осовине удвојеног карданског механизма могу се користити [2]:

- клизна лежишта,
- лежајеви са лоптицама или
- игличасти лежајеви.

Клизна лежишта се употребљавају при малим брзинама. Као постељица примењује се челична цементирана чаура (код лежишта веће носивости), пластична чаура или чаура од других антифрикционих материјала.

Игличасти лежајеви

Лежајеви су машински елементи чији је задатак да омогуће релативно кретање обртних делова вратила уз истовремено преношење оптерећења између њих. На овај

начин се преноси сила са вратила на лежиште и даље на конструкцију. Пошто су вратила обртни елементи, то је разлог што се у ослоњцима јавља трење, које може да буде трење клизања или трење котрљања.

Игличасти лежаји се уграђују са или без унутрашњег прстена и са пуним низом иглица што повећава носивост лежајева [27], слика 4.5.



Слика 4.5. *Игличасти лежај*

Највећи број карданских вратила користе игличасте лежајеве. Они обезбеђују компактност конструкције, висок степен корисног дејства, поузданост и дуг век. Лежајеви са иглицама имају велику моћ ношења за радијална оптерећења, а због много мањег спољашњег пречника од осталих лежајева, омогућавају уштеду у простору у радијалном правцу. Због великих отпора трења не смеју бити оптерећена аксијалним силама. Овакве карактеристике игличастих лежајева, чине их веома погодним за рукавце који осцилују, па је због тога њихово коришћење за ослоњце карданског вратила веома оправдано [2], [27].

Игличасти лежајеви се производе са или без сепаратора. Пракса је показала да су лежајеви без сепаратора боље решење за вратила мањих димензија, односно пречника. Лежајеви са сепаратором углавном се примењују на вратилима за теже услове експлоатације. При малим оптерећењима и малим бројевима обртаја (на пример, код вратила управљачких механизма) користе се клизна лежишта. Иглице лежајева без сепаратора могу имати сферну или равну чеону површину, где равна површина иглица обезбеђује максималну укупну површину контакта при датој дужини иглица.

При постизању задатог века трајања лежаја неопходно је да зазори у лежају не прелазе прописане вредности. На пример код лаких возила, у циљу смањења хабања иглица, препоручује се да збирни кружни зазор не прелази $27,5\mu\text{m}$. Дозвољени радијални зазор игличастог лежаја карданског вратила на возилима је $2,5\mu\text{m}$ [2].

Равномернија расподела притиска међу иглицама лежаја и по дужини иглица може се постићи смањивањем разлика и димензија иглица, допуштене разлике могу бити у

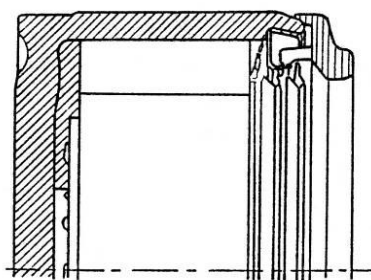
границама до $2\mu m$. За спречавање искошења иглица целисходне су конструкције са пластичним подметачем.

Оптимални век трајања лежаја обезбеђује се применом материјала који садрже не мање од 5 % заосталог аустенита, тврдоће радних површина преко $50HRC$, док неуправност оса крстасте осовине до $1\mu m$ као и неуправност њихових равни до $200\mu m$, практично не утиче на век лежајева [2].

Што се тиче подмазивања и његовог утицаја, век трајања лежајева подмазаних и затопљених фабричким мазивима је знатно мањи од века лежајева подмазиваних свежим мазивима.

Код стандардних карданских вратила са крстастом осовином и игличастим или лоптастим лежајима, најчешће се користе масивне шољице лежајева, са брушеним унутрашњим и спољашњим површинама.

Заптивање лежајева крстасте осовине је намењено раздвајању простора са унутрашњим притиском p_i и простора са спољашњим притиском p_a , а такође и спречавању истицања или истискивања мазива, као и продирању воде или прашине [2].



Слика 4.6. Лежај са допунским заптивањем

Новије конструкције гумених манжетни, предвиђају уљне цепове различитих облика. Цепови се пуне уљем које штити игличасте лежајеве од корозије. На додиру манжетне и чашице образује се уљни филм који спречава продирање воде и прашине. Такође, новије конструкције карданских вратила, поред унутрашњег заптивања лежишта крстасте осовине, предвиђају и спољашње допунско заптивање (слика 4.6), чији је основни задатак зашита унутрашњих манжетни од продирања крупних честица прашине [2].

4.2. Материјал за карданске преноснике

Материјал који се користи за неки део мора задовољити економске и техничке услове. Најважнији технички услов је услов радне способности. Карданска вратила, дакле, морају бити конструисане тако да прописану функцију обављају исправно и поуздано, што значи

да имају довољну чврстоћу и крутост, да би у току рада издржали сва оптерећења без штетних деформација, разарања и опасних осцилација [5].

Век трајања и експлоатационе карактеристике карданских преносника у великој мери зависе и од изабраног материјала елемената, њихове термичке обраде, тачности израде, монтирања, а такође и од подмазивања.

Као материјали за карданске преноснике најчешће се користе [2]:

- обични конструкциони челици,
- челици за побољшање и
- челици за цементацију.

У већини случајева, елементи карданских преносника израђују се од конструкционих и легираних челика. Виљушке карданских механизма израђују се од челика за побољшање: C35, 1C35 (DIN 10083, EN 10083); C35E, Ck35 (DIN 17200, EN 10027); C45, 1C45 (DIN 10083, EN 10083) и 36CrNiMo4 (DIN 17200, EN 10027). После механичке обраде врши се каљење са отпуштањем до тврдоће 210-280 HB. Примењују се, такође, и нискоугљенични челици (16MnCr5 (DIN 10084, EN 10084)), који се после цементације подвргају каљењу и отпуштању до тврдоће 58-65 HRC .

Крстава осовина израђује се од нискоугљеничних легираних челика (16MnCr5 (DIN 10084, EN 10084)), 20MnCr5 (DIN 10084, EN 10084)...). Рукавци се цементирају, кале и отпуштају до тврдоће 58 – 65 HRC.

Пуна карданска вратила и цевни делови карданских вратила, обично се израђују од нискоугљеничних челика ((C10, 1C10 (DIN 17210, EN 10027)); C15, 1C15 (DIN 17210, EN 10027); C22, 1C22 (DIN 10083, EN 10083)) који се добро заварују. Краци виљушке израђују се од челика за цементацију, који се кале у струји високе учестаности [2].

Продужење века телескопског вратила, могуће је путем сулфацијанирања ожлебљеног дела телескопске виљушке. Сулфацијанирање смањује хабање спрегнутих површина, скраћује период уходавања и смањује хрпавост површина трења. Упоредна испитивања су показала да ожлебљени спојеви карданских вратила, без наношења противхабајућих слојева, већ после 3800-4200 циклуса показују значајно хабање бочних површина зуба. Телескопски делови карданских вратила који су сулфацијанирани раде 63000 циклуса, практично без хабања [2].

У најновије време, посебну пажњу заслужују специјалне методе прекривања радних површина ожлебљених вратила, најлонским превлакама или такозвано пластифицирање [2]. Пластифицирањем се знатно повећава отпорност на хабање телескопског дела вратила. Најлон се одликује добрим антифрикционим својствима и високом отпорношћу на хабање, нарочито при присуству абразивних честица у зони трења. Он је хемијски отпоран на

деловање мазива и може се сигурно примењивати за спајање са таквим додацима који смањују коефицијент трења као: тефлон, дисулфид-молибден, графит итд. Најлонске превлаке знатно смањује коефицијент трења са 0,3 на 0,06 и знатно продужава век телескопског дела карданског вратила. Такође, услед смањења коефицијента трења, смањује се загревање ожлебљеног дела вратила, а тиме и продужава век мазива. Примена пластифицираних ожлебљених делова карданског вратила, омогућава боље пригушење вибрација, повећава отпорност на замор жљебова, зато што се оптерећење равномерније расподељује по радним површинама. Такође, пластифицирање не захтева сложене конструкционе измене, осим смањења дебљине и спољашњег пречника жљебова.

Елементи непогонских карданских преносника израђују се од мање отпорних материјала: С35, 1С35 (DIN 10083, EN 10083), алуминијумске легуре, бронзе.

Управљачки механизми авиона, због смањења тежине, користе карданске преноснике алуминијумских легура.

Табела 4.2. Механичке карактеристике неких од најчешће коришћених машинских материјала

Материјал	Модул еластичности E , МПа	Poisson-ов коефицијент ν	Густина ρ , kg / dm^3	Коефицијент линеарног ширења α , K^{-1}
Челик	$(2,1 \dots 2,2) \cdot 10^5$	0,3	7,85	$12 \cdot 10^{-6}$
Сиви лив	$(0,8 \dots 1,2) \cdot 10^5$	0,23 ... 0,3	7,4	$9 \cdot 10^{-6}$
Месинг	$(0,9 \dots 1,4) \cdot 10^5$	0,32 ... 0,42	8,4 ... 8,8	$19 \cdot 10^{-6}$
Бронза	$(1,1 \dots 1,2) \cdot 10^5$	0,3	8,8	$17 \cdot 10^{-6}$
АL-легура	$(0,76 \dots 0,85) \cdot 10^5$	0,3	2,6 ... 3	$23 \cdot 10^{-6}$

У неким случајевима најбољи резултати могу бити постигнути коришћењем комбинације композита и традиционалних металних материјала [6].

Под композитним материјалима подразумевају се вештачко створени материјали, састављени од две или више хемијских разнородних и нерастворљивих фаза, који по својим физичко хемијским и механичким својствима представљају нове материјале, у чијем саставу постоје јасно утврђене границе раздвајања међу саставним компонентама. Карактеристике композита (крутост, отпорност, термичко ширење и друго) могу да варирају зависно од врсте применљивог материјала, количине, угла орјентације влакана и друго.

Применом композитних материјала обезбеђује се уштеда у маси, а при томе су отпорност и издржљивост делова нешто веће у поређењу са класичним металним материјалима. Примена атрактивних композитних компонената захтева развој нових технологија производње у индустрији. Данас је примена композита још на нивоу појединачне производње па је самим тим и цена већа. Разлог томе је још увек висока цена

сировина- вештачки створених материјала. Композитна индустрија широм света стално улаже средства у циљу побољшања технологије израде композитних делова [6].

У нашој земљи за сада композитни делови, па самим тим и вратила, своју примену углавном налазе у авијацији.

Приликом испитивања напонског стања вратила у раду су корићени традиционални материјали као што су челик, алуминијум и сиви лив, како би се утврдила зависност промене материјала и деформација вратила. Сиви лив је коришћен за анализу, иако се у пракси за вратило ретко користи, само као упоредни параметар. Композитни материјали нису испитивани, како је њихова анализа сложенија, али не и неопходна приликом одређивања оваквих зависности. Више о примени композитног материјала и његовом понашању може се наћи у литератури [6].

4.3. Подмазивање карданских преносника

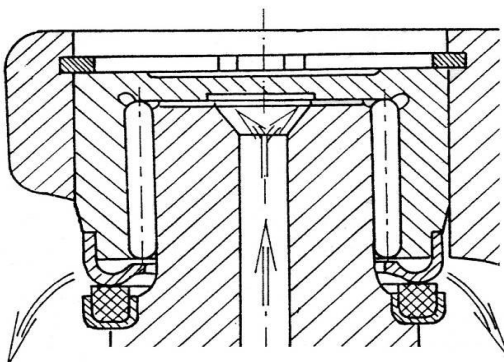
Како би се повећао век трајања карданских вратила на машинама у експлоатацији потребно је [7]:

- побољшати ниво техничког одржавања карданских вратила (чишћењем, подмазивањем, заштитом, конзервирањем и слчно),
- на лежишним склоповима карданских зглобова открити триболошке процесе (трење и хабање) у поодмаклом стадијуму оштећења и на време оштећене делове репарирати или заменити новим и
- побољшати ниво одржавања радних и прикључних машина.

Од наведених фактора који утичу на радни век кардана треба издвојити подмазивање.

Површине карданских вратила које учествују у клизању и котрљању, неопходно је подмазивати и осигурати од истицања уља, а такође и од продирања прашине и абразивних честица.

Крстава осовина има четири најфиније обрађена и површински окаљена рукавца, који леже у прецизним игличастим лежајевима, а ови у виљушкама вратила, осигурани од испадања помоћу ускочника. Конструкција крстасте осовине је изведена тако да омогућује подмазивање сва четири лежаја крста, помоћу мазалице смештене на крстастој осовини (слика 4.7).



Слика 4.7. Подмазивање крстасте осовине [2]

За подмазивање могуће је користити литијум сапонициране масти или хипоидна уља домаћих и страних произвођача мање вискозности. Боље резултате у подмазивању игличастих лежајева дају конзистентна мазива, јер поседују боља антикорозиона својства, адхезиона својства, као и довољну чврстоћу мазивог слоја, чиме се смањује вероватноћа појаве скоринга. Век трајања лежајева подмазиваних трансмисионим уљима је приближно 1,5 до 1,7 пута мањи од века лежајева подмазиваних одговарајућим мастима. Још бољи резултати се постижу повећањем квалитета обраде рукавца [2].

Коефицијен трења челика у жљебном споју, који се јавља при телескопирању карданског вратила, зависи од квалитета подмазивања. При добром подмазивању креће се од 0,06 до 0,1. Услучају недовољног подмазивања или присуства абразива, коефицијент трења нагло расте и достиже вредност при задирању од 0,35 до 0,4.

Ожлебљени спој се подмазује преко мазалице, постављене на телескопској виљушци.

Основни узрок смањења века трајања карданских спојева је образовање чепова у мазивим каналима, изазваних оксидационим процесима у уљу. Резултати испитивања показују да се са повећањем вискозности, таложењем и растом чепова, хабање рукавца повећава.

Ефикасне методе у борби са појавом чепова су [2]:

- претходно чишћење мазива,
- побољшање херметичности система подмазивања, а такође и
- примена конструкционих решења са проточним системом подмазивања.

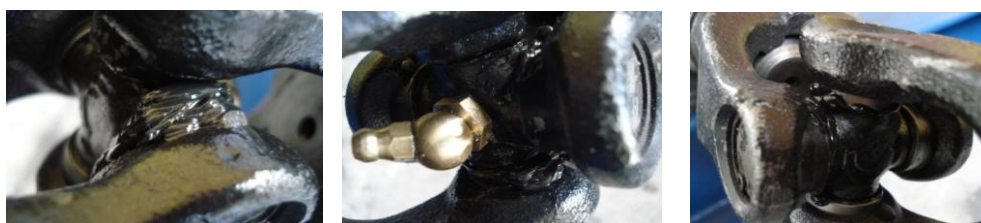
Поједини произвођачи препоручују подмазивање крстастог зглоба сваких 2000 часова рада, а телескопски део вратила после сваких 450 часова рада. У табели 4.3, дате су препоруке рокова подмазивања [2].

Табела 4.3. Препоручени рокови подмазивања карданских вратила немачких произвођача

Врсте машина	Игличасти лежај	Телескопски део вратила
<i>Возила у градском саобраћају</i>	10000km	5000km
<i>Возила у друтском саобраћају</i>	5000km	2500km
<i>Грађевинске машине</i>	3000km	1500km
<i>Уређаји у непокретним машинама</i>	1500km	500km

Међутим, уколико се не води рачуна, основни конструкциони недостатаци код механизма пољопривредног карданског вратила су, управо, мазалице на крстастим осовинама које су постављене под углом од 90° , што може представљати велики проблем код поступка извођења подмазивања. Приликом сваког подмазивања било је неопходно скинути један крај карданске виљушке са жљеба (недостатак механизма са проблемом подмазивања, решен је демонтажом фабричких и постављањем нових мазалица под углом од 45°) [7].

Такође, нека истраживања показују да може доћи код пољопривредних карданских вратила под углом закретања зглобова већим од 20° до изливања мазива из простора лежишног склопа чак и за најмања оптерећења, слика 4.8. До тога долази када је велики угао закретања карданских вратила, што има за последицу појаве вибрација (нарочито аксијалних), услед чега се мазиво из лежишних склопова излива из шољица, тако да су лежишни склопови донекле и неадекватно подмазивани. Ово је врло непожељна појава, јер услед неадекватног подмазивања, као што је то случај у пракси, и при најмањим оптерећењима у току рада дошло би до раног хабања елемената лежишних склопова. Овај триболошки недостатак у раду карданског зглоба је један од разлога због којих се не препоручује рад са карданским вратилима под угловима закретања зглобова већим од 20° .



Слика 4.8. Неки од примера изливања мазива из лежишних склопова у току рада [7]

5. Прорачун карданских преносника

Прорачун елемената карданских преносника се врши преко максималног оптерећења (статичког и динамичког). Под максималним статичким оптерећењем овде се подразумева оптерећење настало као резултат деловања максималног момента. Максимална динамичка оптерећења одступају од нормалних експлоатационих услова и јављају се при пуштању у рад, наглом кочењу и слично. У односу на статичка максимална оптерећења, динамичка су знатно мања.

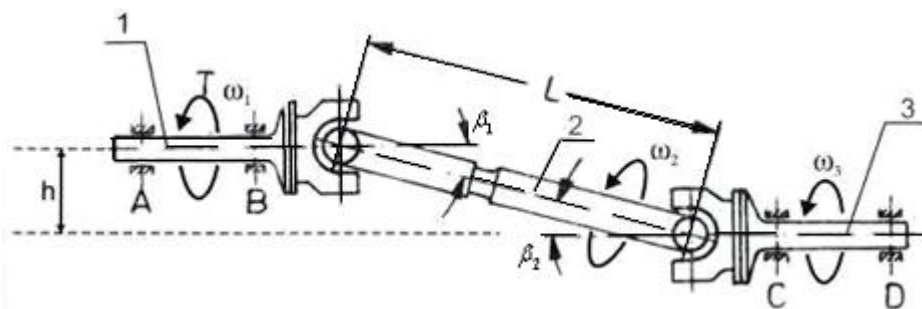
Прорачун чврстоће елемената карданског преносника се врши са статичким максималним оптерећењем, а провера са максималним динамичким оптерећењем [2].

5.1. Кинематика карданског вратила

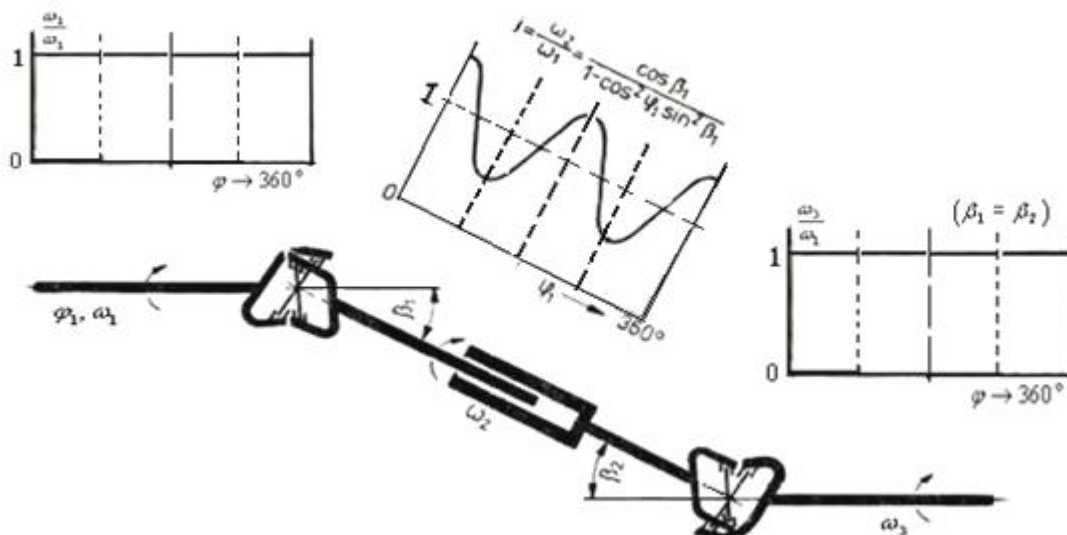
Анализа кинематских карактеристика карданских преносника показује да је коришћењем карданског вратила у структури формиране конструкције могуће постићи константи преносни однос погонског и гоњеног вратила или неравномерност обртања гоњеног вратила.

Углови обртања погонског и гоњеног вратила карданског механизма, везани су нелинеарном завишношћу, а односи угаоних брзина су променљиве величине.

Независно од форме, типа и конструкције карданског механизма, основне кинематске везе су еквивалентне, тако да неке од основних кинематских зависности биће објашњене преко возила код којих је примењен распоред елемената трансмисије по систему: напред мотор – погонски точкови позади, где је неопходно да се обртни момент из мењача пренесе на погонски мост. Како су ова два дела трансмисије међусобно удаљена за дужину вратила " L ", обично су и на међусобном висинском одстојању " h ", следи да веза мора да буде под неким углом (β_1) [3], слика 5.1.



Слика 5.1. Шематски приказ кинематике карданског вратила



Слика 5.2. Шематски приказ карданског вратила са два зглоба

На слици 5.2, имамо ознаке где су:

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - угаоне брзине вратила 1, 2 и 3.

β_1, β_2 - углови под којим се секу вратила 1 и 2; 2 и 3.

φ_1 - тренутни угао кога заклапају виљушке зглоба.

Поред преноса снаге под углом, вратило мора да задовољи и један битан кинематски услов - спајање делова са различитим фреквенцијама осциловања. Овај услов потиче отуда што су мотор и мењач спојени са рамом возила преко еластичних (обично гумених) елемената, те фреквенце потичу од мотора са којим је повезан. Са друге стране погонски мост је везан за рам возила преко гибњева, чије су побудне фреквенце - неравнине пута. Ово истовремено условљава да се угао кога граде оса мењача и оса погонског моста стално мења. Овакву, веома сложену кинематску везу може са успехом да задовољи карданско вратило, са двоструким карданским зглобовима, "хомокинетички систем."

Улога овог система се састоји у томе да исправља ману карданског вратила са једним зглобом. Наиме, према слици 5.2, ако се погонско вратило (1) обрће равномерно угаоном брзином ω_1 , угаона брзина међувратила вратила (2) није стална и варира између екстремних вредности:

$$\text{за угао } \varphi = 0^\circ \quad \omega_{2\max} = \frac{\omega_1}{\cos \beta_1} \rightarrow n_{2\max} = \frac{n_1}{\cos \beta_1}, \quad (5.1)$$

$$\text{за угао } \varphi = 90^\circ \quad \omega_{2\min} = \omega_1 \cdot \cos \beta_1 \rightarrow n_{2\min} = n_1 \cdot \cos \beta_1, \quad (5.2)$$

$$\text{односно} \quad \omega_2 = \frac{\omega_1}{\cos \beta_1} \div \omega_1 \cdot \cos \beta_1 . \quad (5.3)$$

Како би се избегла неравномерност броја обртаја гоњеног вратила, неопходно је да карданска вратила имају најмање два зглоба. Овакав систем спајања је неопходан, а уз то и довољан, под условом да су углови које стварају погонско (1) и гоњено вратило (3) са међувратилом (2) међусобно једнаки и у истој равни.

Пример, како би се боље сагледала ова зависност, за улазне вредности испитиваног вратила у раду је: ако се погонско вратило (1) обрће константном угаоном брзином од 57 min^{-1} , а са међувратилом (2) заклапа угао од $\beta_1 = 10^\circ$, угаона брзина спојног вратила ће варирати од максималне вредности $\omega_{2\max}$:

$$\omega_{2\max} = \frac{\omega_1}{\cos \beta_1} = \frac{57}{\cos 10^\circ} = 58 \text{ min}^{-1} , \quad (5.4)$$

до минималне вредности $\omega_{2\min}$:

$$\omega_{2\min} = \omega_1 \cdot \cos 10^\circ = 57 \cdot 0.985 = 56 \text{ min}^{-1} . \quad (5.5)$$

Ова разлика, изражена у процентима износи:

$$\frac{\omega_{2\max} - \omega_{2\min}}{\omega_1} = \frac{58 - 56}{57} = 0.03 \quad \text{односно } 3\% . \quad (5.6)$$

Наведене промене угаоне брзине вратила представљају и највећу ману карданских вратила, тиме што им се смањује степен корисности од 1 на 0,98 за углове до 10° .

$$\eta_k = 1 \div 0.98 , \quad \text{односно за } \beta = 90^\circ \rightarrow \eta_k = 1 , \quad (5.7)$$

$$\text{док је за угао } \beta = 90^\circ \rightarrow \eta_k = 0.98 . \quad (5.8)$$

Наведена неравномерност угаоних брзина ствара и одговарајући инерциони момент

$$T_i = J \frac{d\varphi}{dt} , \quad (5.9)$$

којим се вратило (2) поред нормалних напрезања додатно напреже при преношењу обртног момента. У изразу за инерцијални момент (5.9) фигурише J - момент инерције вратила .

Овај допунски инерциони момент је утолико већи уколико је dt мање, а оно и јесте мало, с обзиром да спојно вратило за само један обртај постиже два максимума, два минимума и четири периода једнаких угаоних брзина.

5.2. Критеријуми за прорачун вратила

Последице напона код вратила су одговарајуће деформације вратила. Услед напона од савијања, оса вратила добија облик који одговара просторној еластичној линији, а услед напона од увијања, долази до увијања вратила. Ово за последицу има промену геометријских односа обртних делова на вратилу. Они заузимају положај који одговара угибу, нагибу и углу увијања вратила на местима налегања, што може имати пресудан утицај на њихов рад. Према томе, поред задовољавајуће чврстоће вратила треба да имају и одговарајућу крутост. Вратила чине дакле, једну обртну целину, односно један еластични систем нападнут радијалним и аксијалним силама и обртним моментима.

Периодичне промене интензитета обртног момента изазивају периодично променљиве деформације, односно доводе до осциловања целог система. Уколико се учестаност промене обртног момента поклопи са учестаношћу слободних осцилација вратила у односу на увијање долази до критичног стања односно резонанце.

До критичног стања, међутим, може доћи и без промене интензитета спољашњег оптерећења. Неуравнотеженост маса на вратилу доводи до појаве инерцијалних сила чија учестаност одговара учестаности обртања вратила. Уколико се учестаност обртања поклопи са сопственом учестаношћу вратила у односу на савијање настаје, такође, критично стање, односно резонанца. Због тога радно подручје бројева обртаја треба да буде изван критичног, што треба проверити при прорачуну вратила.

На основу тога могу се дефинисати следећи критеријуми за прорачун вратила:

- прорачун чврстоће вратила;
- прорачун крутости вратила;
- прорачун динамичке стабилности вратила.

5.2.1. Прорачун чврстоће вратила

Вратило се рачуна на напрезање услед торзије од момената који је најчешће 1,5 - 3 пута већи од максималног обртног момента на излазу из мењача, односно [1]:

$$T = (1.5 - 3)T_{e\max} \cdot i_1 = K \cdot T_{e\max} \cdot i_1. \quad (5.10)$$

Коефицијентом K су обухваћена сва евентуална преоптерећења, као и допунско оптерећење услед неравномерног обртања карданског вратила. Уколико се занемаре

губици у карданском зглобу, може се израчунати максимални момент којим је оптерећено вратило на основу релације,

$$T_1 \cdot \omega_1 = T_2 \cdot \omega_2 ; \quad T_2 = T_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} . \quad (5.11)$$

За $\omega_2 = \omega_{2\min} = \omega_1 \cdot \cos \alpha$ максимални обртни момент гоњеног вратила је

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_{2\min}} = \frac{T_1}{\cos \alpha} . \quad (5.12)$$

За $\omega_2 = \omega_{2\max} = \frac{\omega_1}{\cos \alpha}$ биће минимални обртни момент

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_{2\max}} = T_1 \cdot \cos \alpha . \quad (5.13)$$

Из претходних једначина следи :

$$\cos \alpha \leq \frac{T_2}{T_1} \leq \frac{1}{\cos \alpha} . \quad (5.14)$$

На основу предходно наведених израза, сигурно је да карданска вратила трпе веома висока торзиона оптерећења (услед обртног момента, допунског инерционог момента и сопствене неуравнотежености). Како би се напрезања смањила, потребно је да углови спојног вратила са погонским и гоњеним буду што мањи или 0° .

Такође, примене Z или W извођења, која остварују пренос са најмање три вратила, омогућавају избор што мање дужине вратила, чиме се смањује момент инерције и маса вратила. С друге стране, примена W уместо Z извођења омогућава знатно смањење угла α , чиме се смањују додатна динамичка оптерећења [1].

5.2.2. Прорачун крутости вратила

Крутост вратила значајно утиче на функцију и чврстоћу делова кардана. Услед присутних оптерећења вратила се деформишу, односно напон услед увијања вратила доводи до деформације-увијања вратила. Крутост вратила зависи од величине попречног пресека, оптерећења, модула еластичности материјала вратила и распона ослонаца [5].

5.2.2.1. Одређивање деформације вратила при увијању

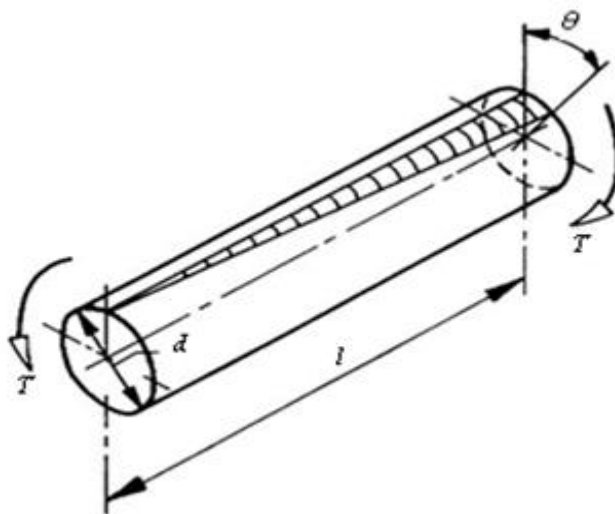
Крутост, односно деформације вратила представљају, као што је речено, важан критеријум при прорачуну и конструисању вратила. У извесним случајевима поред

прорачуна чврстоће вратила, обавезно треба спровести и прорачун крутости односно деформација вратила.

Вратило се услед доминантних напрезања – савијања и увијања, деформише на два начина [28]:

- услед савијања на оптерећеном вратилу се појављују различити угиби и нагиби, и у појединим тачкама вратила вратило добија облик који одговара просторној еластичној линији,
- а услед увијања, делови на једном крају вратила заокренути су у односу на делове на другом крају за величине угла увијања (слика 5.3)

Услед ових деформација долази до одступања стварног положаја делова који се налазе на вратилу у односу на геометријски тачан положај. Ово има за последицу промену геометријских односа делова који се налазе на вратилу што може имати пресудан утицај на њихов исправан рад. То се нарочито односи на зупчанике, лежаје, роторе неких турбо машина итд. Прорачун крутости вратила своди се на одређивање еластичне линије односно нагиба и угиба вратила у појединим пресецима, односно одређивање угла увијања.



Слика 5.3. Деформације вратила услед увијања [28]

Карданско вратило у раду је изложено дејству момента увијања T_t , где долази до међусобног заокретања попречних пресека вратила која се налазе на растојању l .

Ако је вратило константног попречног пресека по целој дужини l (глатко вратило) и ако је изложено дејству константне вредности момента увијања T_t , угао увијања у радијанима је :

$$\theta = \frac{T_t l}{GI_p}. \quad (5.15)$$

Сувише велике деформације вратила доводе до критичног стања делова на вратилу у погледу њихове функције, односно њихове кинематике, динамике и чврстоће. Због тога се намеће потреба да се за сваки део изврши одговарајућа анализа и одреде граничне вредности деформација у оквиру којих он може успешно да остварује своју функцију.

Дозвољени угао увијања по дужном метру је $\theta = (0.004 \dots 0.009) \text{ rad/m}$, односно $\theta = (0.25^\circ \dots 0.5^\circ)$ по дужном метру. Дозвољене вредности угла увијања вратила се прописују ако је потребно обезбедити одређену тачност кинематских односа [5].

5.2.3. Прорачун динамичке стабилности вратила

Међусобна зависност углова обртања погонског и гоњеног вратила карданског преносника је функција њиховог положаја у простору. Свакако да се том приликом карданско вратило, као међуелемент карданског преносника, обрће неравномерно са законитим распоређеним убрзањима и успорењима [2].

Неравномерно обртање карданског вратила које ради при одређеном положају углова зглобова, односно постојања убрзања и успорења изазива настанак инерцијалних сила. Деловањем сила инерције може бити веома битно и та околност ограничава вредност константних радних углова карданског зглоба.

Настале инерцијалне силе, у зависности од момента инерције убрзаних маса карданског вратила, побуђују динамички момент, односно динамичка оптерећења.

Побуђени динамички моменат, као и инерцијално побуђене осцилације, обично нарушавају нормално функционисање конструкције. Зато је при избору карданских вратила и формирању конструкције неопходна детаљна анализа динамичких оптерећења.

Критично стање вратила услед динамичке нестабилности праћено изразитим повећањем амплитуде осцилација, настаје у случају када је вратило изложено периодично променљивим радијалним и аксијалним силама и обртним моментима. Они изазивају периодично променљиве деформације, односно осцилације целог система, које доводе до стања у коме се учестаност промене побудних оптерећења поклопи са учестаношћу слободних (сопствених) осцилација вратила. У овом случају амплитуде постају бесконачно велике. Када се поклопе учестаности (фреквенције) слободних и принудних осцилација, сила тада потискује масу у право време и у правом смеру, па амплитуде неограничено расту. Такав случај се јавља код клатна које се код сваког трептаја лагано потискује у правцу његовог кретања. Тада релативно мала сила може прозвести велике амплитуде. Ова важна појава назива се резонанца, а одговарајућа учестаност резонантна учестаност [28].

Стога се код вратила врши провера односа критичне угаоне брзине или учестаности обртања при којима настаје резонанца са радном угаоном брзином односно учестаношћу

обртања. При томе највећи утицај имају радијалне и торзионе осцилације. Утицај аксијалних осцилација по правилу је занемарљив.

5.2.3.1. Критични број обртаја карданског вратила

Карданско вратило се може сматрати релативно танким и дугим штапом. Као резултат ексцентричности, неравномерности расподеле маса материјала и променљивих момената савијања, који делују на карданску виљушку, при обртању вратила настају савојне осцилације. Овако настале осцилације зависе од брзине обртања и дужине карданског вратила и могу у извесним случајевима довести и до његовог лома [2].

Под критичним бројем обрта карданског преносника, подразумева се број обртаја вратила при коме долази до губитка стабилности праволинијске форме осе вратила. Критични број обрта зависи од величине карданског вратила, његове конструкције и начина учвршћења. Да у експлоатацији не би долазило до губитка стабилности карданског вратила, његов максимални број обртаја мора бити мањи од критичног броја обртаја.

При одређивању израза за критични број обртаја карданског преносника, полази се од диференцијалне једначине [2]:

$$\frac{d^4 y}{d^4 x} + k^4 y = 0 \quad (5.16)$$

$$\text{у којој је } k^4 = \frac{\gamma A \omega^2}{E J g}, \quad (5.17)$$

γ - специфична тежина,

J - момент инерције,

E - модул еластичности,

g - убрзање земљине теже,

A - попречни пресек.

Решењем диференцијалне једначине (5.16) долази се до израза за критични број обрта:

$$\text{а) за цеваста вратила} \quad n_{kr} = a \frac{\sqrt{D_s - D_u}}{l^2}; \quad (5.18)$$

$$\text{б) за пуна вратила} \quad n_{kr} = a \frac{D}{l^2}; \quad (5.19)$$

где су D_s - спољашњи пречник цеви карданског вратила,
 D_u - унутрашњи пречник цеви карданског вратила,
 l - дужина карданског вратила.

У литератури и међу произвођачима, могу се наћи различите вредности коефицијента a .

За вратило пуног, кружног пресека изрази за критични број обртаја су [1]:

$$\text{а) вратило слободно у лежиштима } n_{kr} = 12 \cdot 10^6 \frac{D_u}{l^2}, \quad (5.20)$$

$$\text{б) вратило уклештено у лежиштима } n_{kr} = 27.5 \cdot 10^6 \frac{D_u}{l^2}. \quad (5.21)$$

За вратило прсенастог пресека, изрази критичног броја обртаја су [1]:

$$\text{а) вратило слободно у лежиштима } n_{kr} = 12 \cdot 10^6 \frac{\sqrt{D_s^2 + D_u^2}}{l^2}, \quad (5.22)$$

$$\text{б) вратило уклештено у лежиштима } n_{kr} = 27.5 \cdot 10^6 \frac{\sqrt{D_s^2 + D_u^2}}{l^2}. \quad (5.23)$$

Према препорукама фирме GBW коефицијент a независно од уклештења има вредност $12,2 \cdot 10^6$.

Однос критичних бројева обртаја за вратила прстенастог и пуног кружног пресека, истих спољашњих пречника D_s је:

$$\left(D_s^2 + D_u \right)^{\frac{1}{2}} \cdot D_s^{-1}. \quad (5.24)$$

Из наведеног израза (5.24) следи да је критични број обртаја за шупље вратило већи од критичног броја за пуно вратило. Разлог томе је мања тежина шупљег вратила. Такође, са смањењем дужине, повећањем спољашњег пречника и смањењем дебљине зида шупљег вратила, повећава се критични број обртаја [1].

Из свега наведеног се може извести закључак да веће дужине могу да се изведу само путем увећања пречника цеви. С обзиром да у овом погледу постоје ограничења због прерастања инерционих маса, то се ни за проста карданска вратила не препоручују дужине веће од 1500 mm. У свим случајевима када вратила достижу гранично подручје, препорука је да се пређе на подељена карданска вратила, односно израда карданских вратила са "средњим" ослонцем (лежајем).

5.2.3.2. Степен сигурности са аспекта динамичке стабилности вратила

Степен сигурности са аспекта динамичке стабилности вратила представља однос критичне и радне угаоне брзине или бројева обртаја. При томе се разликују два случаја [28]:

- Вратила велике крутости и са бројем обртаја мањим од критичног- подкритично подручје:

$$S = \omega_k / \omega \geq 1.25 ; \quad S = n_k / n \geq 1.25 . \quad (5.25)$$

- Еластична вратила при броју обртаја већем од критичног-надкритично подручје:

$$S = \omega / \omega_k \geq 1.3 ; \quad S = n / n_k \geq 1.3 . \quad (5.26)$$

Степен сигурности у оба случаја треба да је већи од 1,25. То значи да је радно подручје учестаности обртања за више од 25% удаљено од критичног.

Провера динамичке стабилности вратила врши се углавном код вратила која раде са великим учестаностима обртања. Највећи број машина има доста крута вратила која раде са малим угаоним брзинама тако да ова провера није потребна.

5.3. Избор модела и величине карданског вратила за анализу

Код одабира адекватне величине карданског вратила морале су се задовољити у потпуности потребе за снагом, односно обртним моментом, радне (прикључне) машине, коју развија погонска машина, у овом случају трактор. Обично је у пракси ситуација таква да се не познаје обртни момент кога развија погонска машина, док је снага позната као и број обртаја на прикључном вратилу трактора. У том случају произвођачи препоручују да се избор величине карданског вратила врши преко израчунавања обртног момента применом следеће једначине [17]:

$$T = \frac{P \cdot 9550}{n} , \text{ Nm} \quad (5.27)$$

где је P - снага погонске машине на прикључном вратилу (kW) и

n - број обртаја (min^{-1}).

За потребе прорачуна карданских вратила у раду, одабрано је стандардно вратило прстенастог попречног пресека, као и њему одговарајуће вратило произвођача *Cerjak* из Словеније, нестандардног попречног пресека.

Cerjak у свом производном погону нуди осам различитих стандардних величина карданских вратила, табела 5.1.

За сама испитивања одабрана је величина 1 карданског вратила са номиналном снагом 12 kW и обртним моментом од 210 Nm, табела 5.1. У табели 5.2, наведене су неке основне карактеристике пољопривредних трактора, снаге до 12 kW са основним карактеристикама (вредности снаге на мотору, снаге на прикључном вратилу, броју обртаја и слично), произвођача „Кубота” из Јапана, које би се могле користити за погон наведених вратила. Наведени трактори у табели 5.2 и други исте снаге могли би да врше пренос снаге са прикључног вратила на радну машину преко карданског вратила. Међутим, код нас се најчешће за погон наведених карданских вратила користе трактори са знатно већом снагом, примера ради највише се користе трактори ИМТ 539 са номиналном снагом мотора од 29,5 kW.

Табела 5.1. Дозвољени обртни моменти и номинална снага за неке типове стандардних пољопривредних карданских вратила [7]

Величина	540 %/min			1000 %/min			Максимални динамички момент
	Снага		Момент	Снага		Момент	
	kW	CV	Nm	kW	CV	Nm	Nm
1	12	16	210	18	25	172	320
2	15	21	270	23	31	220	450
3	22	30	390	35	47	330	640
4	26	35	460	40	55	380	780
5	35	47	620	54	74	520	1050
6	47	64	830	74	100	710	1450
8	70	95	150	110	150	1050	2250

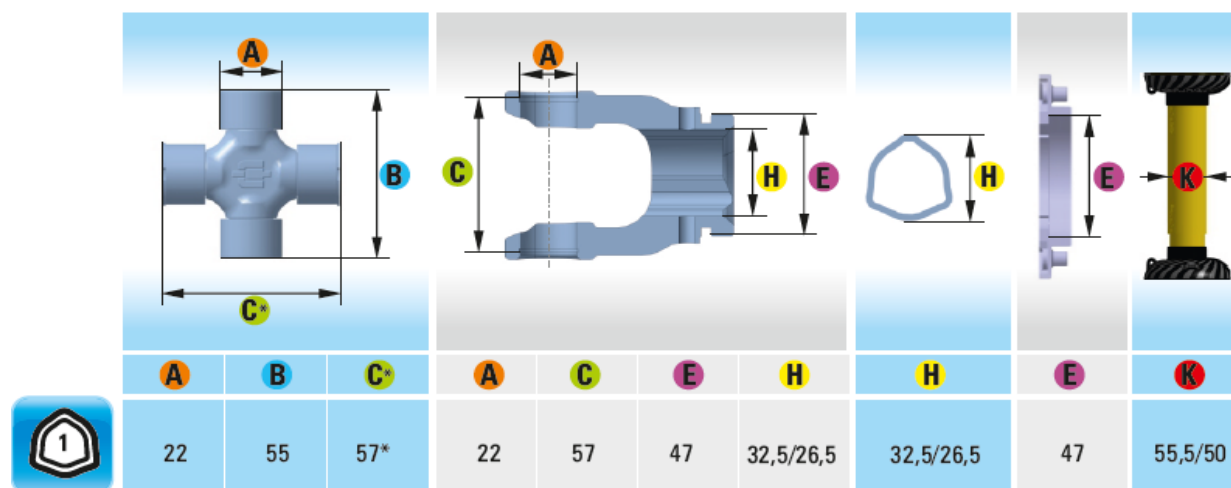
Табела 5.2. Пољопривредни трактори, снаге до 12 kW са основним карактеристикама произвођача „Кубота” - Јапан [7]

Тип трактора	снага		Изглед модела трактора	Број обртаја прикључног вратила	Размакосовина	Дужина	Ширина	Висина	Клиренс	Тежина
	Мотора	Прикључног вратила								
B1200	11,9	8,9		540/860/1000	124	214	103	186	21	480
B6200HST-E	11,2	9,3		540/825/1546/2455	147	259	114	180	21	535
B7100	11,9	9,7		540/786/1498	125	200	101	115	28	489

Изабрана величина 1 карданских вратила могла би се сврстати у класу карданских вратила са малим захтевима за снагом. Ова вратила могу да покрећу једноосовински трактори са снагом од 5 до 15,1 kW или мини трактори са снагом 15,1 до 30 kW. Најчешће

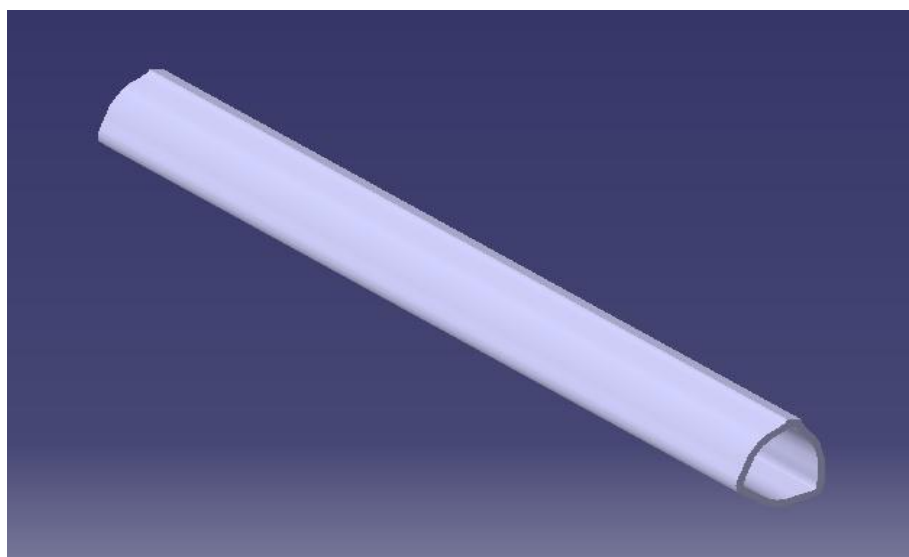
се у пракси користе у агрегатирању са следећим машинама: пнеуматским сејалицама, расипачима минералног ђубрива, прскалицама, сакупљачима сена и слично.

На слици 5.4, се виде димензије кардана из каталога *Cerjak*, који је коришћен само при нумеричкој анализи, а аналитички је одређен кардан класичног прстенастог попречног пресека слика.



Слика 5.4. Димензије попречног пресека телескопског испитиваног карданског вратила

На основу димензија из каталога измоделиран је 3D модел испитиваног карданског вратила приказан на слици 5.5. Моделирање је извршено у софтверском програму CATIA V5, затим је увезен у програмски пакет FEMAP како би била извршена напонско-деформациона анализа.



Слика 5.5. Изглед 3D модела испитиваног карданског вратила

5.4. Аналитички прорачун карданског вратила прстенастог попречног пресека

Полазни подаци:

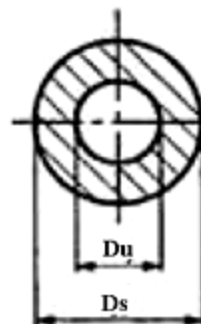
Снага мотора $P=12 \text{ kW}$,

Број обртаја вратила мотора $n=540 \text{ °/min}$,

Спољашњи пречник $D_s=35\text{mm}$,

Унутрашњи пречник вратила $D_u=28\text{mm}$,

Дужина вратила $l=400\text{mm}$.



Слика 5.6. Скица попречног пресека вратила

Како се врши прорачун за вратило, оптерећено само на момент увијања (торзију), напон је лако наћи преко познатих образаца [5].

Момент увијања се налази преко следећих релација:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}, \quad (5.28)$$

$$P = T_t \cdot \omega \Rightarrow T_t = \frac{P}{\omega} = 210 \text{ Nm}, \quad (5.29)$$

док је општи образац за напон услед увијања вратила (тангенцијални напон):

$$\tau = \frac{T_t}{W_p}, \quad (5.30)$$

где је W_p -поларни отпорни момент.

Поларни отпорни момент за прстенасти поречни пресек је :

$$W_p = \frac{\pi \cdot D_s^3}{16} \cdot (1 - \psi^4), \quad (5.31)$$

$$\text{где је } \psi = \frac{D_u}{D_s}. \quad (5.32)$$

Из претходног следи да је напон услед увијања вратила

$$\tau = \frac{T_t}{W_p} = 42.27 \text{ MPa} . \quad (5.33)$$

Као деформацију, која је настала услед увијања вратила, потребно је израчунати угао увијања вратила.

Угао увијања вратила је

$$\theta = \frac{T_t l}{GI_p} , \quad (5.34)$$

где су G -модул клизања за одређени материјал,

I_p -поларни момент инерције попречног пресека.

Поларни момент инерције за прстенасти попречни пресек је

$$I_p = \frac{(D_s^4 - D_u^4)\pi}{32} , \quad (5.35)$$

тако да је угао увијања вратила за челик једнак

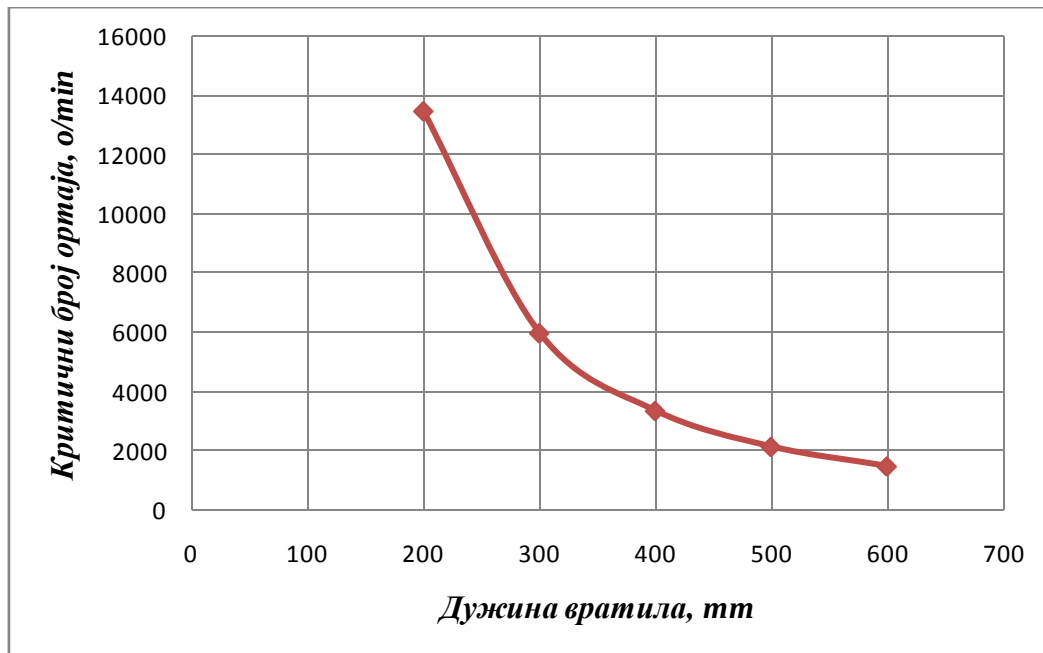
$$\theta = \frac{T_t l}{GI_p} = 0.0116 \text{ rad} . \quad (5.36)$$

Критични број обртаја при увијању вратила је такође једноставно наћи преко већ коришћеног обрасца

$$n_{kr} = 12 \cdot 10^6 \frac{\sqrt{D_s^2 + D_u^2}}{l^2} , \quad (5.37)$$

односно $n_{kr} = 3360^\circ/\text{min}$.

Као што видимо из израза (5.37), вредност критичног броја обртаја директно зависи од дужине вратила l . На слици 5.7, је приказана та зависност дијаграмом, при чему су остале димензије остале исте, само се мења дужина вратила.



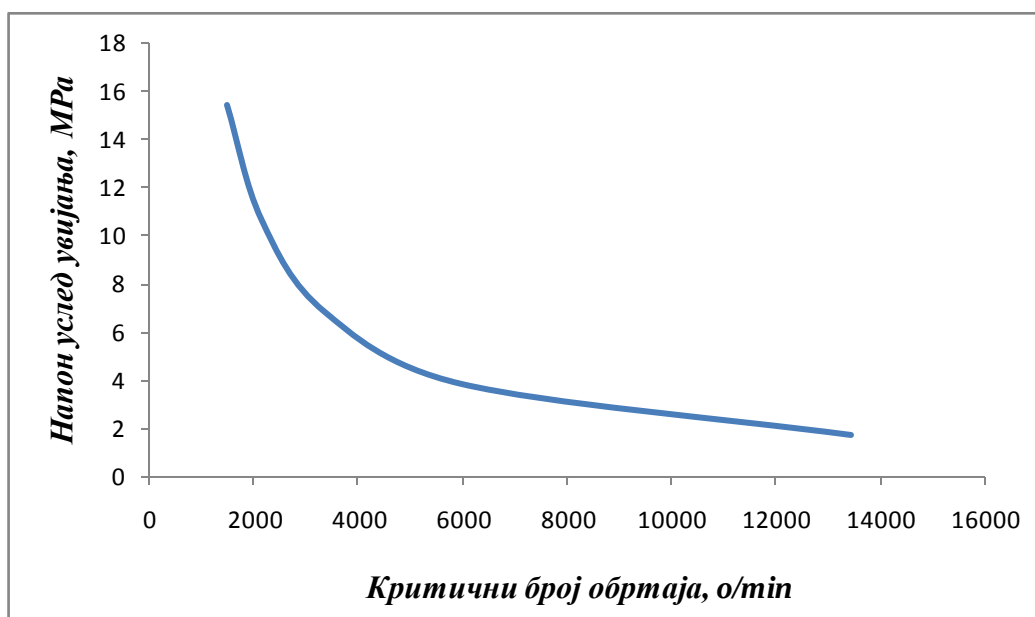
Слика 5.7. Зависност критичног броја обртаја од дужине вратила

Анализирајући дијаграм види се да и при мањим променама дужине, вратило трпи велике промене критичног броја обртаја. У растућем интервалу од 200mm до 600mm дужине вратила, критични број обртаја вратила трпи промене већег реда величина у опадању, од приближно 13500 o/min до 1500 o/min.

Такође се може једноставно доћи и до зависности критичног броја обртаја и напона који се јавља при истој снази мотора преко релације

$$n_{kr} = 12 \cdot 10^6 \frac{\sqrt{D_s^2 + D_u^2}}{l^2} \Rightarrow \omega_{kr} = \frac{\pi \cdot n_{kr}}{30} \Rightarrow T_t = \frac{P}{\omega_{kr}} \Rightarrow \tau = \frac{T_t}{W_p}. \quad (5.38)$$

На основу дате релације (5.8) добијене су вредности напона за критични број обртаја, испитиваног вратило у раду, при константној снази од 12 kW. Та зависност, за различите дужине вратила, приказана је дијаграмом на слици 5.8.



Слика 5.8. Зависност напона увијања од критичног броја обртаја

Са дијаграма се види драстична обрнута пропорционалност критичног броја обртаја и напона увијања, односно што је већи критични број обртаја, напон увијања је доста мањи.

6. Статичка анализа карданског вратила применом нумеричких метода

Методе које се користе за решавање инжењерских проблема могу се поделити на:

- аналитичке,
- нумеричке и
- експерименталне методе.

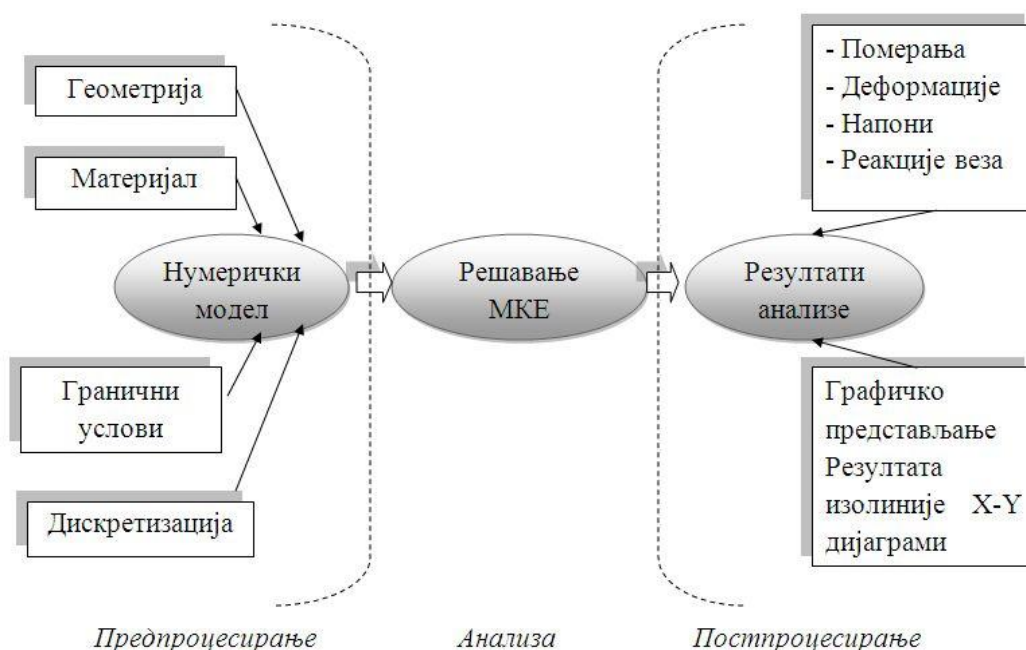
Савремено решавање компликованих инжењерских проблема је засновано на примени одговарајућих нумеричких техника, односно диференцијалних једначина које описују стање напона и стање деформација тела сложених геометрија, структура или контурних услова. Добијена решења су приближна, али могу бити увек довољно блиска тачном решењу онолико колико се у датом проблему жели.

Према врсти проблема који се решава, развиле су се различите нумеричке методе као што су:

- Метода коначних елемената - МКЕ,
- Метода коначних запремина - МКЗ,
- Метода коначних разлика - МКР,
- Метода граничних елемената – МГЕ.

За сваку наведену нумеричку методу неопходно је ”упрошћавање“ структуре, односно дискретизација прорачунског простора. Често коришћен термин меширање није ништа друго до дискретизација континуалног система, који има бесконачан број степени слободе, са дискретним геометријским елементима, који имају коначан број степени слободе.

Нумеричка анализа се заснива на примени одговарајуће нумеричке методе, а састоји се од три основне фазе: предпроцесирање, анализа и постпроцесирање. Фазе су приказане преко дијаграма на следећој слици, слика 6.1.



Слика 6.1. Основни кораци нумеричке анализе применом нумеричких метода

У циљу одређивања оптималне конструкције, облика и димензија разматраног вратила у раду, приступило се нумеричкој анализи напона и деформација применом МКЕ методе. Већина нумеричких метода за прорачун напона у конструкцији заснива се на методи коначних елемената. МКЕ се може користити за детаљније и тачније дефинисање напонског стања и деформација реалног облика машинског елемента на критичним местима, при чему се добија довољно прецизна вредност напона у односу на аналитички израчунате вредности. Такође, нумеричка метода пружа могућност брзог поновног извршења процеса анализе после измене било ког детаља у облику самог дела.

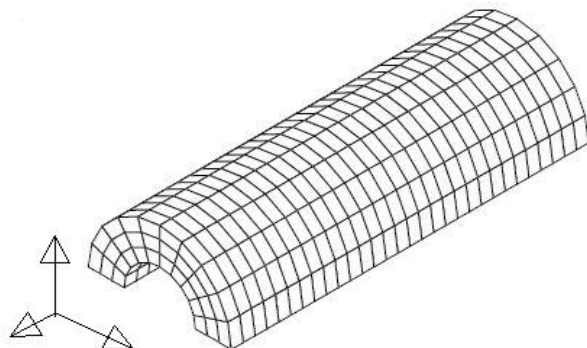
6.1. Метода коначних елемената

Метода коначних елемената (МКЕ) је, као што је већ речено, нумеричка техника која се примењује за: линеарну, нелинеарну, термичку, динамичку, анализу замора, анализу оштећења структурних инжењерских проблема. Ова нумеричка техника се заснива на дискретизацији континуалног структурног модела уз прављење одговарајућих апроксимативних претпоставки.

МКЕ је довољно уопштена да подржи било који сложени облик конструкције, било која материјална својства као и различите облике оптерећења. У циљу примене МКЕ методе неопходно је добро познавање физике проблема који се анализира.

Основна идеја МКЕ методе је физичка дискретизација стварног модела. То подразумева поделу неке структуре на коначан број елемената малих димензија, слика 6.2. Дакле, простор континуума се дели на међусобно повезане непреклапајуће геометријске

форме, односно елементе. Ти елементи малих димензија називају се *коначни елементи*. Мрежа коначних елемената је међусобно повезана карактеристичним тачкама које се називају *чворови* и у којима фигурише коначан број непознатих прорачунских величина. Савремени софтвери дозвољавају варијацију различитих облика елемената на континууму.



Слика 6.2. Дискретизација модела цеви дебелог зида

Тачност израчунавања је дефинисана квалитетом изабраних функција облика (интерполационих функција), мрежом и типом коначних елемената. Зависно од изабраних независно-променљивих величина и начина формирања једначина, постоје четири основне методе [4]:

- метода померања (метода деформација),
- метода сила,
- мешовита и
- хибридна метода.

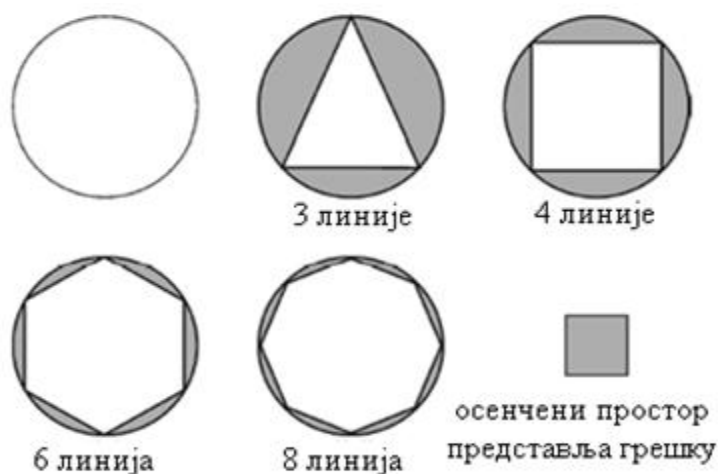
Формирање једначина се изводи применом основних закона механике. Тако, рецимо, код методе померања користи се принцип о минимуму функционала (пуне енергије система). Код методе силе, користи се принцип о минимуму комплементарне енергије система. Мешовита метода користи принцип *Vašić-a* и *Reissner-Hellinger-a*

Број чворова и елемената који се користе у нумеричкој анализи зависи од инжењерске процене. Опште правило је да се са већим бројем чворова и елемената добија тачније решење, са друге стране такво решење захтева више времена и захтева већи меморијски простор за смештај података.

6.1.1. Развој методе коначних елемената

Метода коначних елемената (МКЕ) спада у савремене методе нумеричке анализе. Њена примена прво је почела у области прорачуна инжењерских конструкција. Основна идеја о такозваној физичкој дискретизацији континуума, на којој се заснива МКЕ је врло стара, отприлике колико и људско настојање да се тешко решиви проблеми замене једноставнијим, за које се лакше налазе решења [22].

Као пример за илустрацију може се навести проблем одређивања опсега или површине круга, на основу његове поделе на мање делове правилног облика. Грчки математичар и физичар Архимед, рачунао је број π , односно границе између којих се налази нумеричка вредност овог броја, на тај начин што је контуру круга апроксимирао уписаним односно описаним полигоном са коначним бројем страница, слика 6.3. Са повећањем броја страница полигона, односно са смањивањем њихове дужине, смањивала се и разлика између граница у којима се налази број π , а повећавала тачност његове нумеричке вредности. Отприлике у исто време, на сличан начин, у старом Египту је рачуната запремина пирамиде и површина сфере, а у Кини је дат доказ познате Питагорине теореме. Са овим првим једноставним примерима, отворена су нека фундаментална питања, као што су: тачност решења, горња и доња граница апроксимације, монотоност и брзина конвергенције и друго, која су и данас у МКЕ веома актуелна и значајна са теоретског и практичног становишта.



Слика 6.3. Облик геометријског елемента са којим се апроксимира круг

Значајан развој методе коначних елемената почео је половином прошлог века. У почетној фази он се одвијао кроз два међусобно независна приступа, прво инжењерски, а одмах затим математички [4]. Сложене просторне конструкције, у инжењерским прорачунима замењиване су дискретним системима који су се састојали од штапова и који су рачунати по познатим поступцима статике линијских носача. Од стране математичара, тражена су приближна решења одређених граничних задатака помоћу дискретних модела уз примену варијационих поступака. Ова два прилаза, инжењерски и математички, касније су обједињени, што је било од огромног значаја за даљи бржи развој и широку примену МКЕ.

6.1.2. Основе на којима се заснива МКЕ

Метода коначних елемената спада у методе дискретне анализе. За разлику од осталих нумеричких метода, које се заснивају на математичкој дискретизацији једначина граничних проблема, МКЕ се заснива на физичкој дискретизацији разматраног подручја.

Уместо елемента диференцијално малих димензија, основу за сва проучавања представља део подручја коначних димензија, мање подручје или коначни елемент. Због тога су основне једначине помоћу којих се описује стање у појединим елементима, а помоћу којих се формулише и проблем у целини, уместо диференцијалних или интегралних, обичне алгебарске.

Са становишта физичке интерпретације, то значи да се разматрано подручје, као континуум са бесконачно много степени слободе, замењује дискретним моделом међусобно повезаних коначних елемената, са коначним бројем степени слободе. С обзиром на то да је број дискретних модела за један гранични проблем неограничено велики, основни задатак је да се изабере онај модел који најбоље апроксимира одговарајући гранични проблем.

Алгоритамски концепти МКЕ

Анализа и решавање проблема механике континуума по МКЕ увек се свде на такозвани процес корак по корак, што је од огромног практичног значаја за примену рачунара у ефективном прорачуну. У том процесу који се може приказати као једноставан алгоритам, издваја се следећих шест најважнијих корака [4]:

1. дискретизација континуума
2. избор интерполационих функција
3. рачунање карактеристика елемената
4. формирање једначина за мрежу коначних елемената
5. решавање система једначина
6. прорачун потребних утицаја

Од наведених шест корака, прва три су нарочито важна. Начин дискретизације, избор облика елемената, као и укупног броја елемената, зависе од природе проблема који се решава и потребне тачности траженог решења. Поред броја и облика елемената важан је и избор чворова, основних непознатих у њима и интерполационих функција. Помоћу интерполационих функција се дефинише поље промењивих у сваком елементу. Од њиховог избора непосредно зависи и континуитет на границама између појединих елемената, а самим тим и тачност апроксимације. Промењиве у елементу могу бити скаларне, векторске или тензорске величине.

Карактеристике појединих елемената одређују се независно од мреже елемената као целине. Матрица крутости се формира аутономно за поједине елементе, а потом на основу њих, сасвим једноставно, формира се матрица за систем у целини. С обзиром на то да је

геометрија елемената по правилу једноставна, то практично значи да се комплексан проблем разбија на низ једноставних.

Последња три корака, иако су за практичне прорачуне од великог значаја, данас спадају у оквире рутинског посла, који је прилагођен аутоматском раду рачунара.

6.1.2.1. Избор коначних елемената

Разноврсност утицаја и геометрија структура, условила је бројност врста и подврста коначних елемената. Основна разлика међу њима огледа се у различитости "унутрашњих" функција. "Унутрашње" функције, функције облика (*shape function*), описују поље померања у елементу и одређују апроксимације континуума у методи коначних елемената. Избор коначног елемента осим топологије подразумева избор интерполационе функције и директно одређује тачност методе.

Коначне елементе је могуће класификовати према [29]:

- Димензионалности (1D, 2D, 3D),
- Фамилији - групацији (љуска, плоча, греда),
- Реду интерполационих функција (линеаран, параболичан, кубни),
- Геометрији (троугаони, четвороугаони),
- Физичким особинама (танка љуска, дебела љуска),
- Материјалним својствима (изотропан, анизотропан).

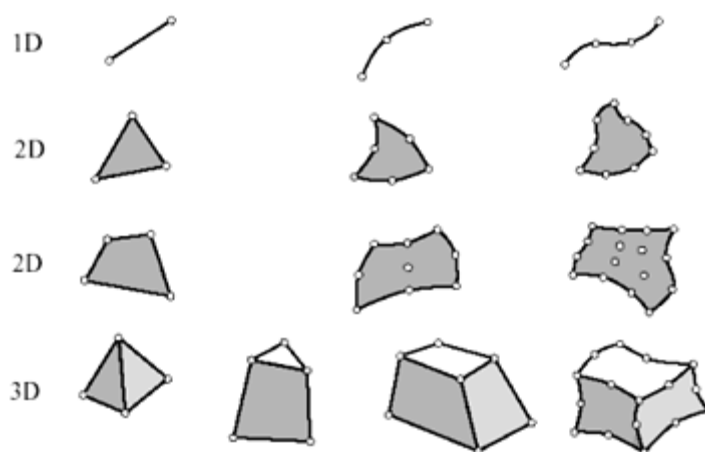
Основни типови коначних елемената су одређени простором који користе (1D, 2D, 3D), слика 6.4. Једнодимензиони коначни елементи су штапови, греде, ужадни елементи, гранични елементи, цевни елементи. Гранични елементи су категорија која служи за формирање веза на границама континуума, која математичком моделу дефинише неки услов. У ову подгрупу спадају елементи: опруге, зазора (*gap*), везе (*линк*), степена слободе (DOF) и други. 2D - дводимензиони коначни елементи дефинишу напоне и деформације раванског континуума, па сходно тим врстама основни елементи су мембрана, плоча, љуска. Тродимензиони коначни елементи су призматични и осносиметрични. У ову групу спадају и дебела плоча и дебела љуска, призма, пирамида, осносиметрични елементи и 3D коначни елементи са ортотропним особинама као што су слојевите форме.

Избор коначног елемента за моделирање, зависи од геометријске форме посматраног континуума и процене унутрашње дистрибуције сила и деформација. Геометријске форме дугачких чланова (малих димензија попречног пресека у односу на дужину) замењују се једнодимензионим коначним елементима. Равне површине зидова, преграда, дијафрагми, ламела носача, замењују се дводимензионим коначним елементима, обично за анализу напона. Тамо где се јављају концентрисана локална напрезања услед геометријске сложености, користе се тродимензиони коначни елементи. Њима се обично описују компактне геометрије као што су ротациони делови, лопатице кола турбомашина,

главчине, кућишта мотора, кућишта клипних машина, сложени елементи (коленаста вратила).

Опште је познато да су најчешће коришћени облици коначних елемената: троугаони, квадратни и тетраедарски.

Карактеристике коначних елемената везане су за чворове, односно, темена геометријских фигура или слика. У чворовима се задају непознате физичке величине, рецимо померања.



Слика 6.4. Разни типови елемената [29]

У МКЕ методи прво су коришћени троугаони облици коначних елемената, а касније су уведени четвороугаони. Теоретски гледано може се користити било која произвољна геометријска форма коначног елемента, једини захтев који мора бити задовољен је познавање матрице крутости коначног елемента. Овај захтев је често ограничавајући фактор при избору форме елемента. Са практичне стране, било која геометријска форма мреже треба да се у што већој мери поклопи са геометријом структурног дела који се анализира. Овај захтев се задовољава применом 5-6 основних геометријских форми тако да је примена петоугаоних, шестоугаоних осмоугаоних геометријских облика непотребна [22].

За анализу шупљих вратила са малом дебљином зидова, што је случај код изабраног вратила у раду, најчешће се користе елементи у облику љуске.

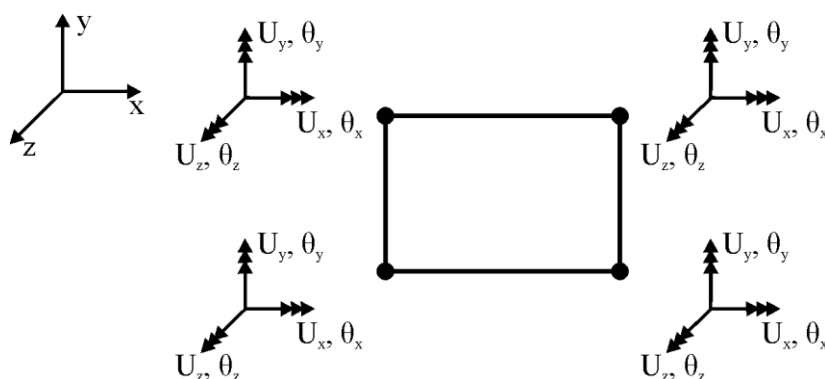
Љуска

Танки површински носачи општег облика зову се љуске. Овакви елементи коснструкција су веома заступљени у техничкој пракси.

Уколико је дебљина љуске веома мала у односу на остале димензије, ради се о танкој љуски, али дебљина може бити и значајна тако да се може увести градација од љуски

средње дебљине до дебелих љуски. Љуске су обично закривљени структурни елементи код којих је количник дебљине и полупречника кривине већи од 20 [29].

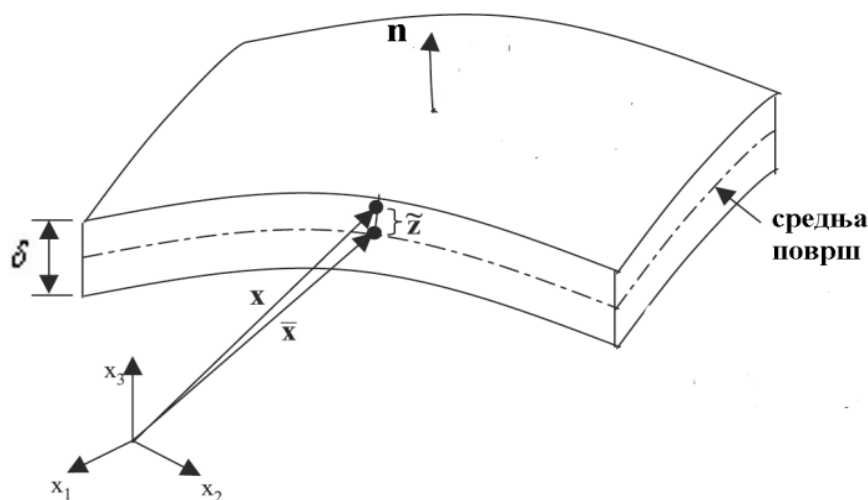
Елемент љуске је најопштији тип елемента из 2-D фамилије елемената. Поседује по 6 степени слободе по сваком чвору.



Слика 6.5. Приказ љуске са издвојеним чворовима

У теоријском смислу љуске представљају сложен задатак при израчунавању напонског стања поља и деформација. При томе су увођене разне хипотезе и развијене одговарајуће теорије љуски. Формулисан је велики број елемената, различит по броју степени слободе, избору основних параметара, начину интерполације померања (напона) и апроксимације геометрије љуске. Међутим, љуске су и даље предмет даљег проучавања и усавршавања.

Основне величине којима се описује геометрија љуске су средња површ, дебљина и нормала на љуску [6], слика 6.6.



Слика 6.6. Љуска са основним величинама

6.1.2.2. Матрица крутости

Матрица крутости је фактор пропорционалности између вектора сила и вектора померања проузрокованих тим силама. Уколико матрица крутости расте, тада и тело постаје круће и обрнуто.

Елементи матрице крутости зависе од физичких карактеристика материјала, карактеристика КЕ и интерполационих функција.

У почетку су се матрице крутости елемената и једначине елемената одређивале на основу утицајних коефицијената крутости, што је у директној вези са структуралном анализом. Након тога развијено је више метода за одређивање матрице крутости [22].

1. Директни равнотежни метод

Матрица крутости повезује силе у чворовима елемената и померања чворова елемената. Она се добија из услова равнотеже сила за сваки разматрани елемент. Директни приступ у рачунању матрице крутости добар је само у случају једнодимензионалних елемената, тако да се за дво и тродимензионалне проблеме користе друге методе.

2. Варијациони метод

Заснива се на принципу стационарности функцијала. Ако се анализирају проблеми механике чврстог тела онда је овај принцип исто што и принцип минимума потенцијалне енергије. Варијациони метод се употребљава и за елементе сложеног облика, а могу се користити и за одређивање матрице крутости неструктуралних проблема као и за анализу поља (напон, топлоте).

3. Метода резидуума

Ова метода заснива се на диференцијалним једначинама разматраног проблема. Метод се користи тамо где није могуће одредити функцијал и у проблемима у којима функцијал уопште не постоји. Од свих метода резидуума најпознатији је **Galerkin-ов метод**.

4. Метода енергетског баланса

Заснива се на балансу различитих врста енергија. Користи се у термостатичкој и термодинамичкој анализи континуума.

6.2. Статичка анализа карданског вратила

Анализа напонско-деформационог стања карданског вратила извршена је у програмском пакету FEMAP. То је програмски пакет за моделирање, пре- и пост-процесирање коначним елементима који омогућава извршавање различитих типова инжењерских анализа (напонских, температурних, динамичких) веома брзо и поуздано истовремено обезбеђујући бројне погодности приказа резултата истих.

FEMAP обезбеђује аутоматску интеграцију која је неопходна да споји све аспекте анализе. Може се користити за креирање геометрије, а може увозити и CAD или неку другу геометрију.

FEMAP располаже моћним алатима за генерисање мреже коначних елемената (популарно мешовање) као и за задавање одговарајућих оптерећења и граничних услова у циљу што тачнијег приближавања реалним условима понашања анализираниог модела. Затим, може се користити за експортовање (извоз) улазних фајлова у преко 20 програмских пакета за анализу коначним елементима. FEMAP може да чита резултате из различитих програма за анализу. Различити типови алата које поседује веома су погодни за визуализацију и представљање резултата.

Да би се извршила анализа напонско-деформационог стања одређеног елемента МКЕ потребно је да се прати следећа процедура: креирање геометријског модела, додељивање материјала, дефинисање параметара мреже коначних елемената, односно, генерисање мреже, креирање ослонаца и оптерећења, спецификација положаја и правца дејства оптерећења, прорачун и генерисање извештаја.

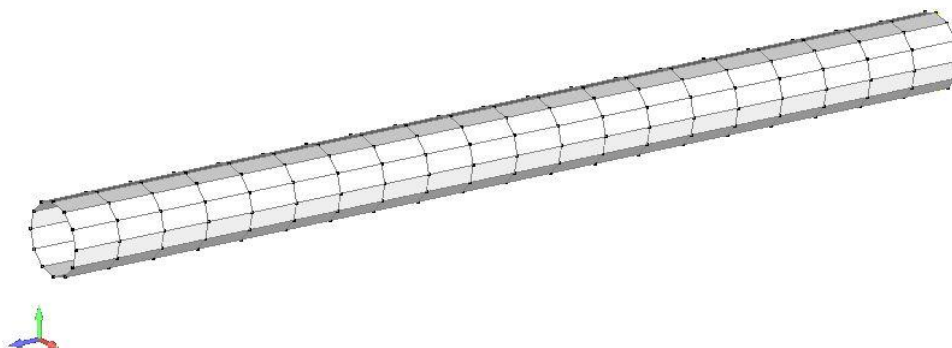
Испитивано вратило у раду, које служи као главни параметар за упоређивање и анализу понашања вратила при измени димензија, материјала и облика, има следеће основне мере: дужина вратила је 0,400 m, пречник вратила је 0,035m и дебљина зида прстеног попречног пресека износи 0.0035 m. Вратило је израђено од челика, а његове и основне карактеристике осталих коришћених материјала дате су у табели 6.1.

Табела 6.1. Основне механичке карактеристике материјала

Материјал	Модул еластичности E, МПа	Poisson-ов коефицијент, ν	Густина ρ , kg/m ³	Коефицијент линеарног ширења у K ⁻¹
Џ	210000	0,3	7830	12·10 ⁶
AL	70000	0,28	2600	23·10 ⁶
SL	80000	0,23	7400	9·10 ⁶

Анализа вратила је извршена при дејству момента увијања од 210 Nm. У програмском пакету FEMAP, вратило је моделирано изопараметарским четвороугаоним коначним

елементима љуски. При моделирању потребно је користити средњи пречник вратила који износи 0,00315 m, док је дебљина зида попречног пресека 0,0035 m. Укупно је искоришћено 240 елемената и то по 20 елемената у аксијалном правцу и 12 елемената у циркуларном, слика 6.7.



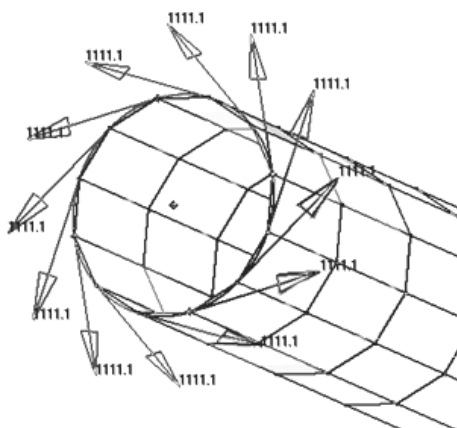
Слика 6.7. Изглед треже на тоделу карданског вратила

При задавању оптерећења вратила, било је потребно да се преко момената увијања од 210 Nm дође до вредности за силу која делује у чворовима. Та вредност се лако добија преко опште познатог обрасца за обимну силу (6.1). Пошто је број чворова у циркуларном правцу 12, а оптерећење се задаје на једном крају вратила, вредност силе у једном чвору је једнак укупној добијеној сили подељеној са 12 и износи 1111.11 N, слика 6.8.

$$F_t = \frac{2T}{D_s} = 13333,332 N, \quad (6.1)$$

тако да је вредност силе у једном чвору:

$$F_{cl} = \frac{F_t}{12} = 1111,111 N. \quad (6.2)$$



Слика 6.8. Распоред сила по чворовит

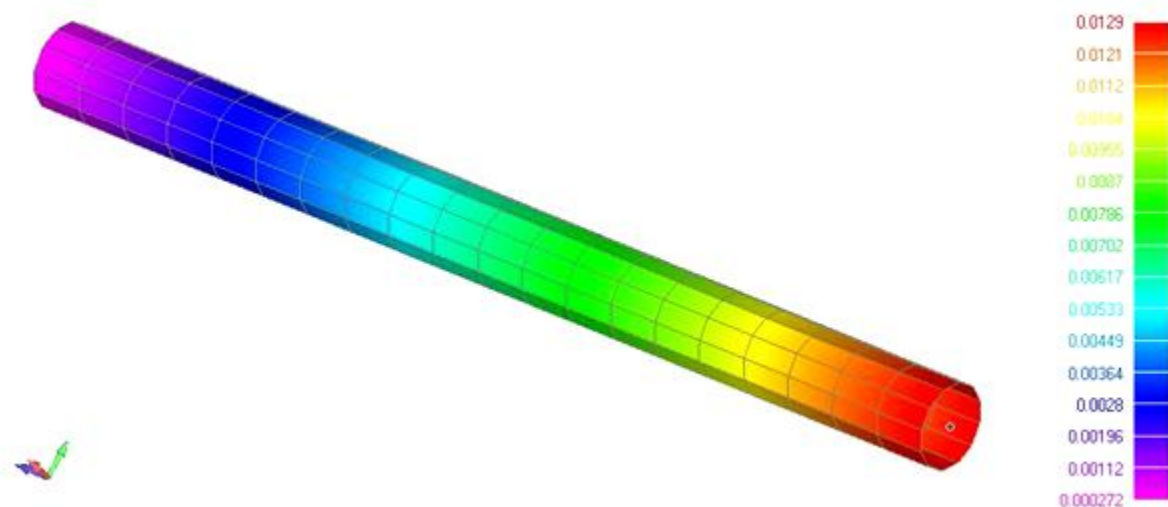
Како је вратило са једне стране оптерећено на увијање, ограничења се постављају на другом крају вратила по чворовима, тако да се вратило посматра као да је укљештено на једном крају.

На слици 6.9, се може видети расподела тангенцијалних напона челичног вратила услед увијања. Такође се види да је вредност максималног напона $46,59 \text{ MPa}$, док претходно израчуната вредност аналитичким путем износи $42,27 \text{ MPa}$, што чини задовољавајућу разлику од $9,5 \%$.



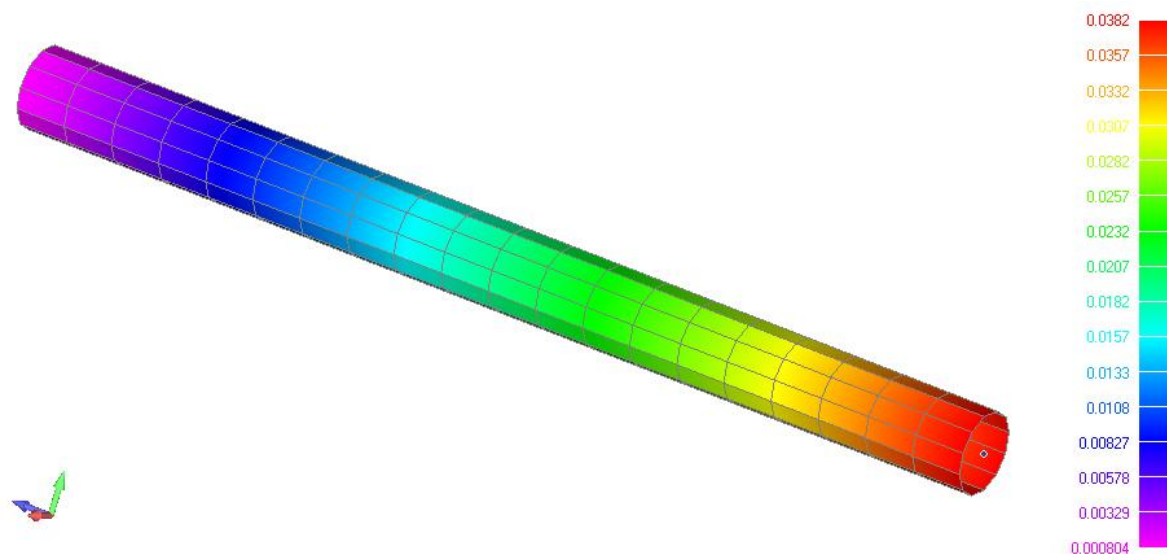
Слика 6.9. Расподела тангенцијалног напона услед увијања челичног вратила, MPa

Вредност угла увијања челичног вратила добијена нумеричким путем, приказана је на слици 6.10, и износи $0,0129 \text{ rad}$, што у поређењу са вредношћу добијеном аналитичким путем од $0,0116 \text{ rad}$ представља разлику, али прихватљиву.

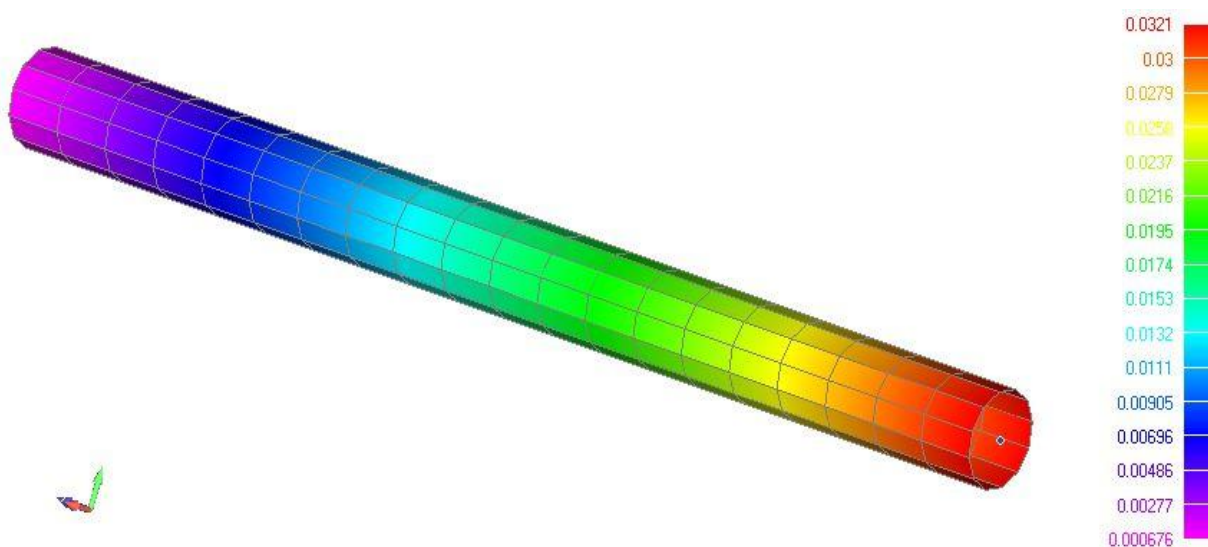


Слика 6.10. Угао увијања челичног карданског вратила, rad

Када се челично карданско вратило замени алуминијумским, а затим вратилом од сивог лива, при истим оптерећењима и димензијама, визуелизација резултата је приказана на следећим сликама.



Слика 6.11. Угао увијања алуминијумског карданског вратила, rad

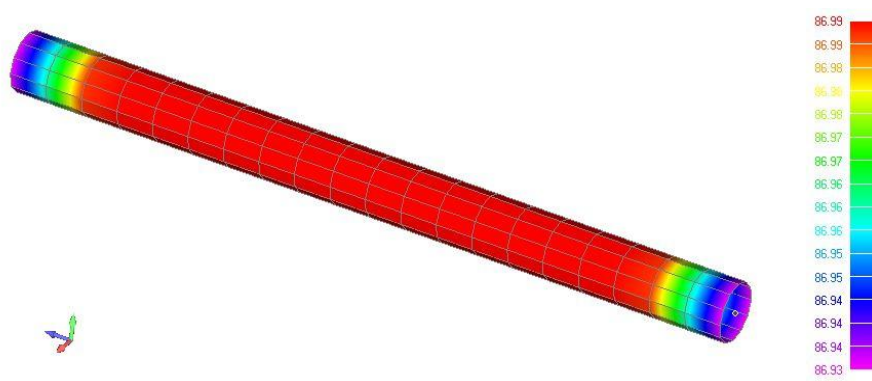


Слика 6.12. Угао увијања карданског вратила од сивог лива, rad

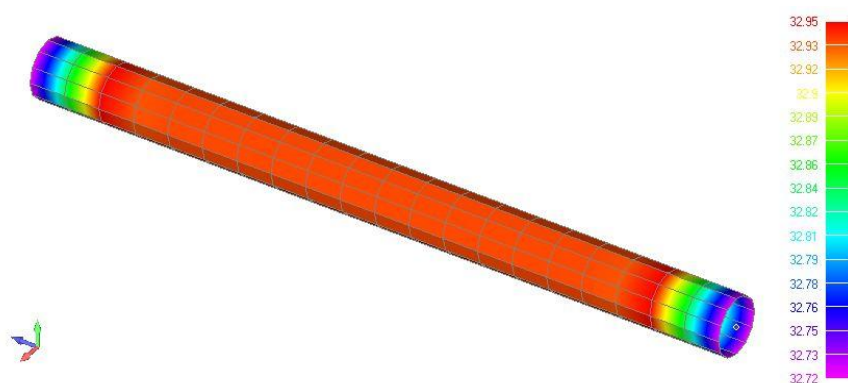
На претходним сликама се види промена деформација (угла увијања), у зависности од промене материјала. Како основне димензије као што су дужина, дебљина попречног пресека зида вратила, пречник вратила, као и измена облика профила попречног пресека утичу на промену напона и деформација, биће приказано у следећем одељку.

6.2.1. Визуелизација резултата

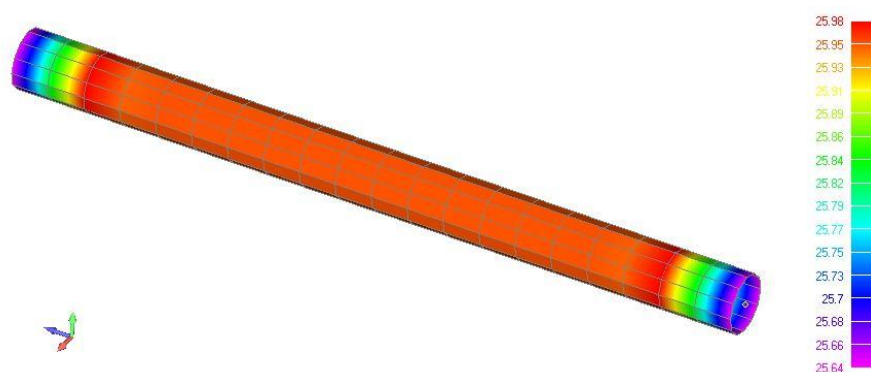
Зависност вредности тангенцијалног напона и дебљине попречног пресека профила челичног карданског вратила, приказана је на следећим сликама (слика 6.13, 6.14 и 6.15).



Слика 6.13. Вредност тангенцијалног напона при дебљини попречног пресека челичног вратила од 1,75 mm

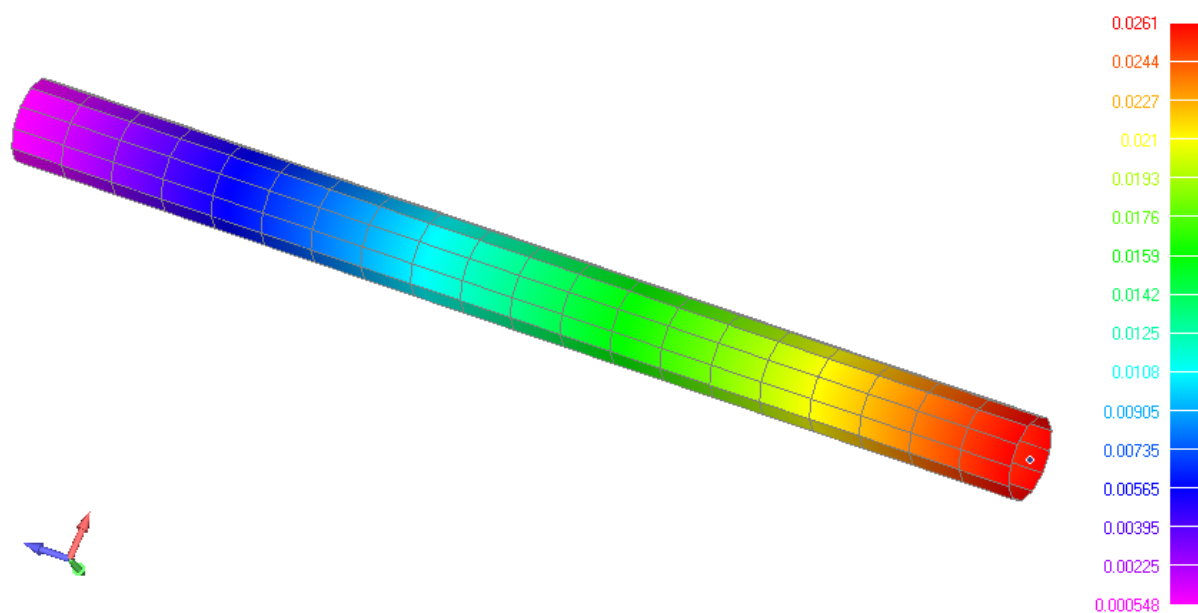


Слика 6.14. Вредност тангенцијалног напона при дебљини попречног пресека челичног вратила од 5,25 mm

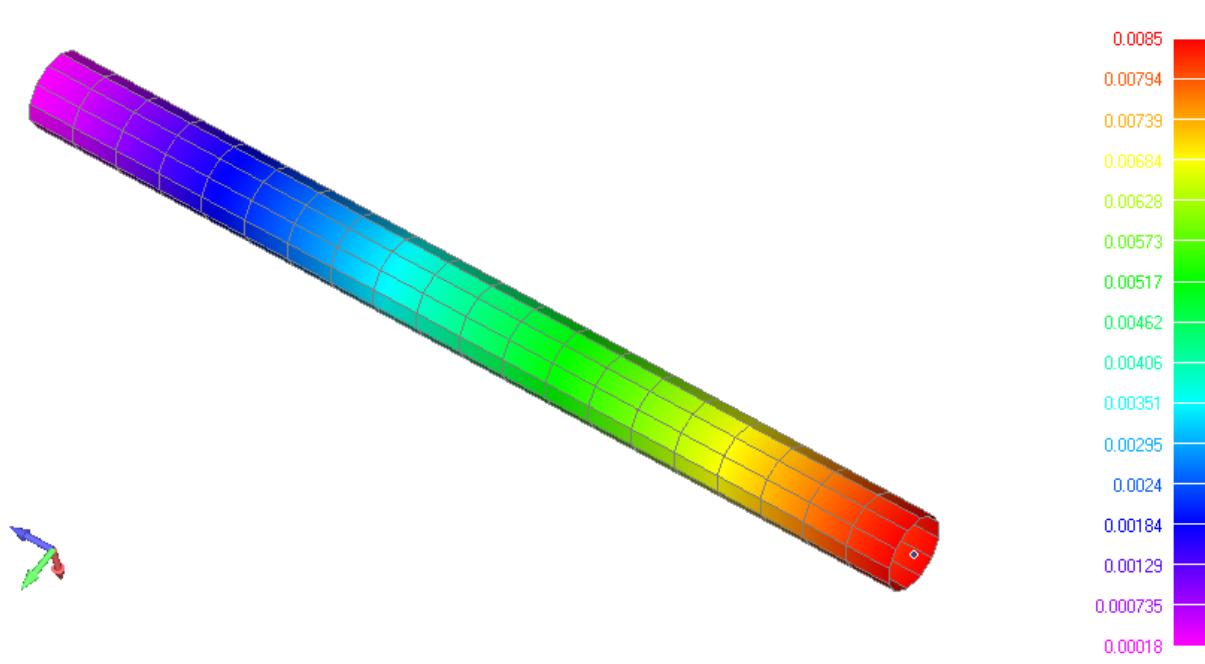


Слика 6.15. Вредност тангенцијалног напона при дебљини попречног пресека челичног вратила од 7 mm

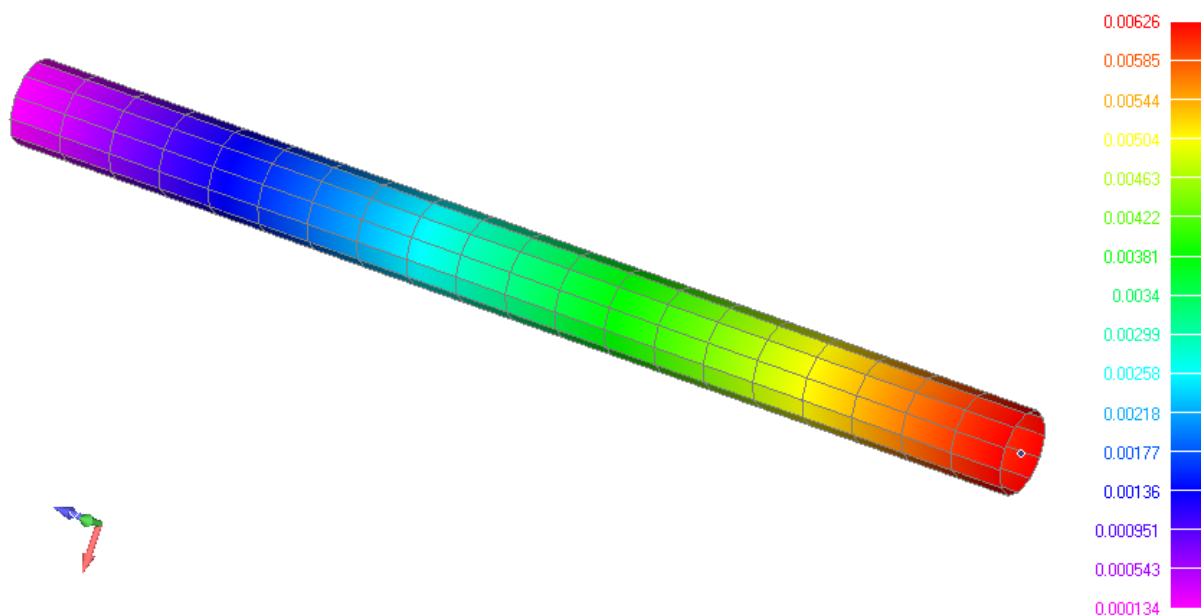
Такође, дебљина попречног зида профила утиче и на деформацију вратила, односно угао увијања. Та зависност је приказана на следећим сликама.



Слика 6.16. Угао увијања при дебљини попречног пресека челичног вратила од 1,75 mm

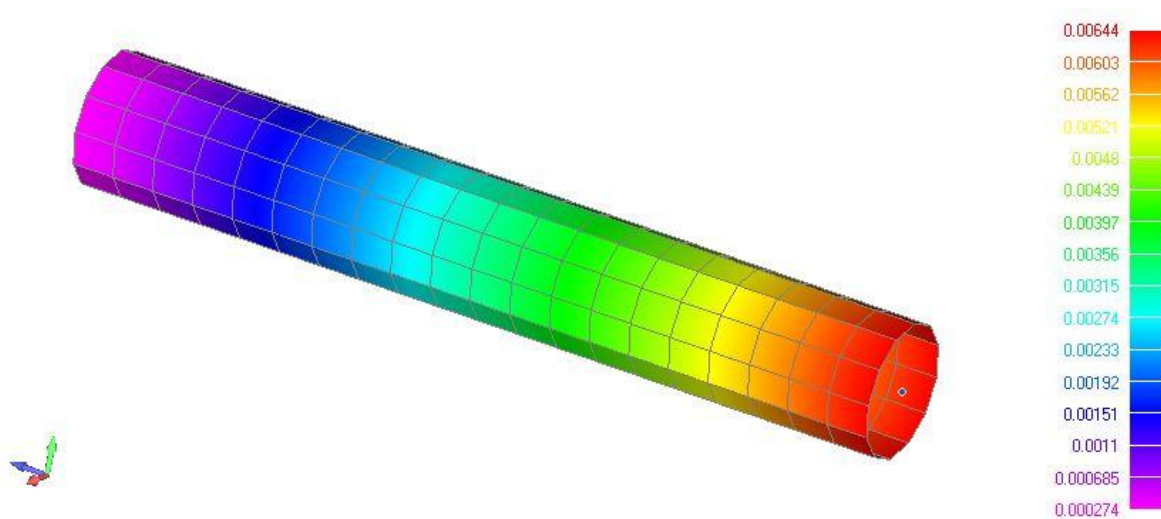


Слика 6.17. Угао увијања при дебљини попречног пресека челичног вратила од 5,25 mm

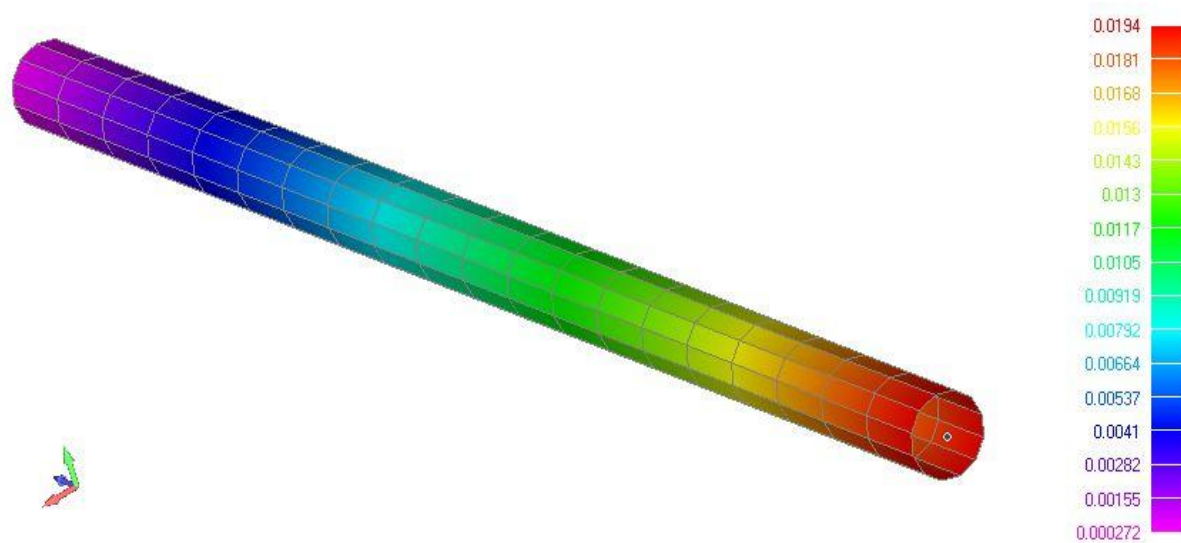


Слика 6.18. Угао увијања при дебљини попречног пресека челичног вратила од 7 mm

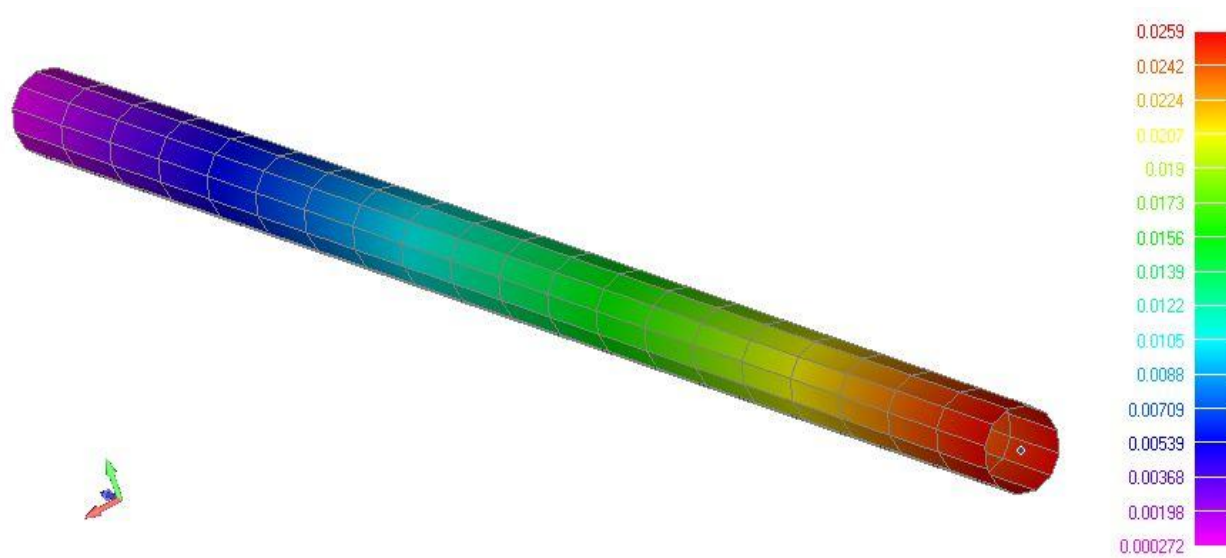
Промена дужине вратила директно утиче на промену угла увијања. На следећим сликама је приказана промена угла увијања код различитих материјала при истим променама дужина вратила, како би се касније могла одрадiti коректна анализа зависности ових параметара. Резултати су приказани следећим редоследом: прво за челик, затим за алуминијум и на крају за сиви лив.



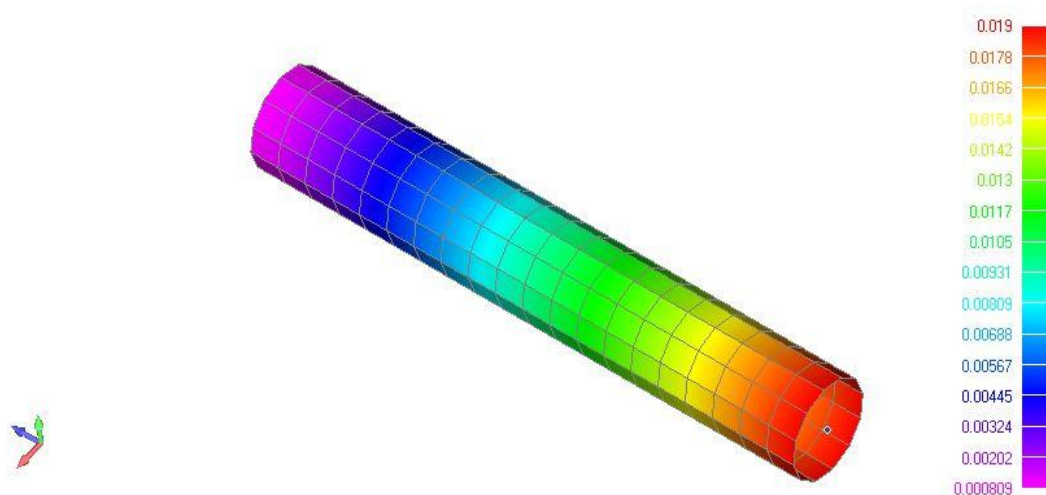
Слика 6.19. Угао увијања челичног карданског вратила при дужини од 200 mm



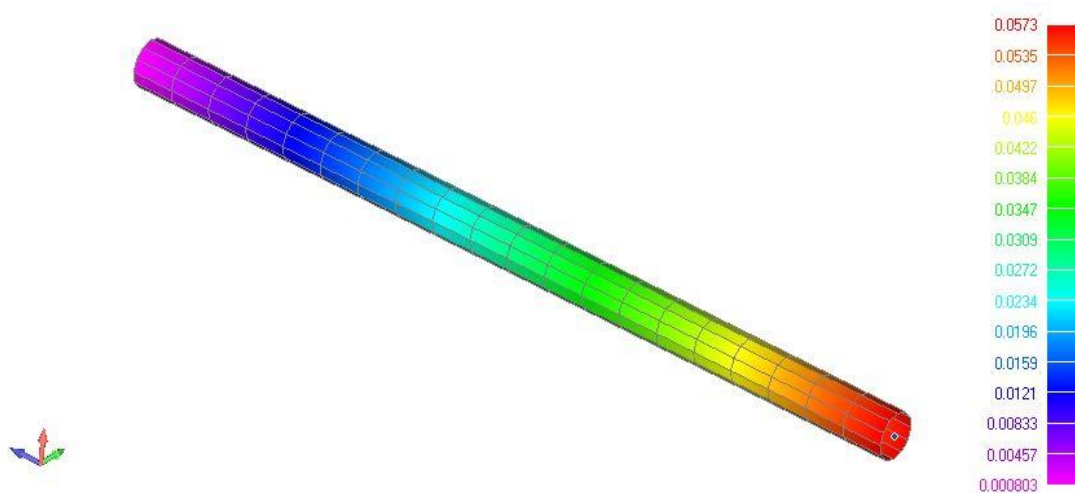
Слика 6.20. Угао увијања челичног карданског вратила при дужини од 600 mm



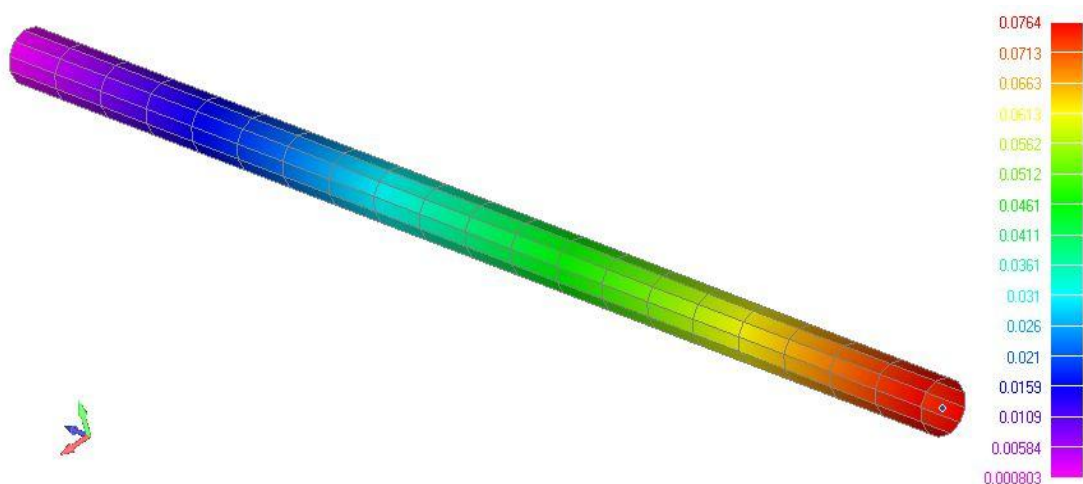
Слика 6.21. Угао увијања челичног карданског вратила при дужини од 800 mm



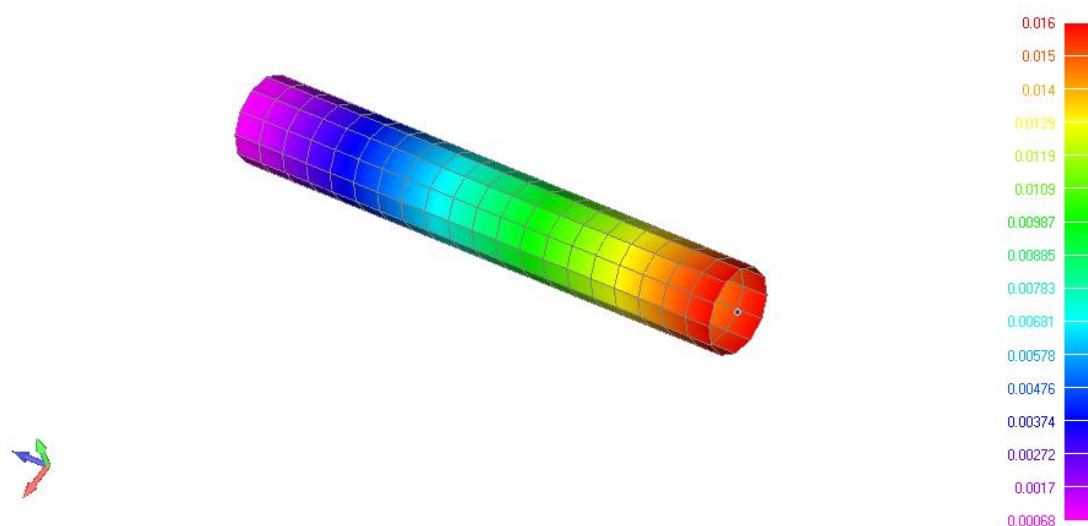
Слика 6.22. Угао увијања алуминијумског карданског вратила при дужини од 200 mm



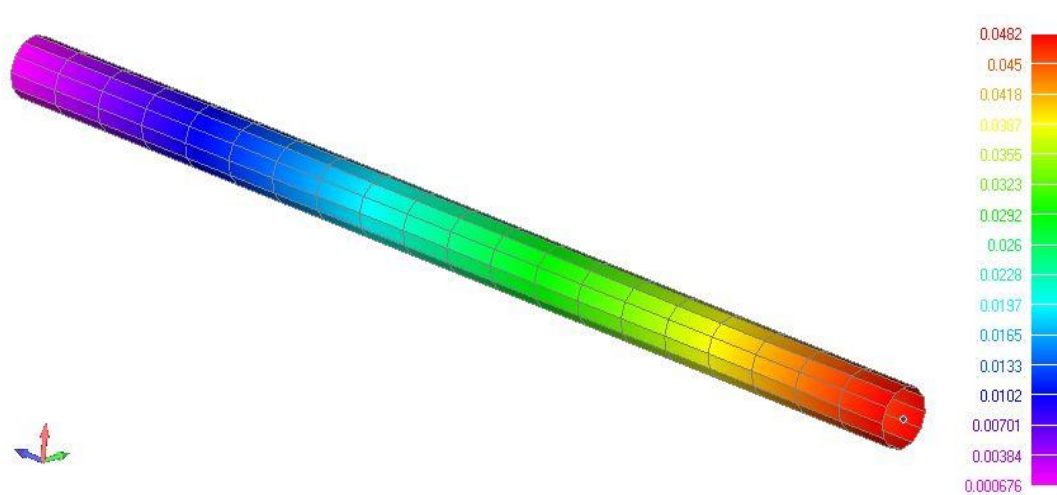
Слика 6.23. Угао увијања алуминијумског карданског вратила при дужини од 600 mm



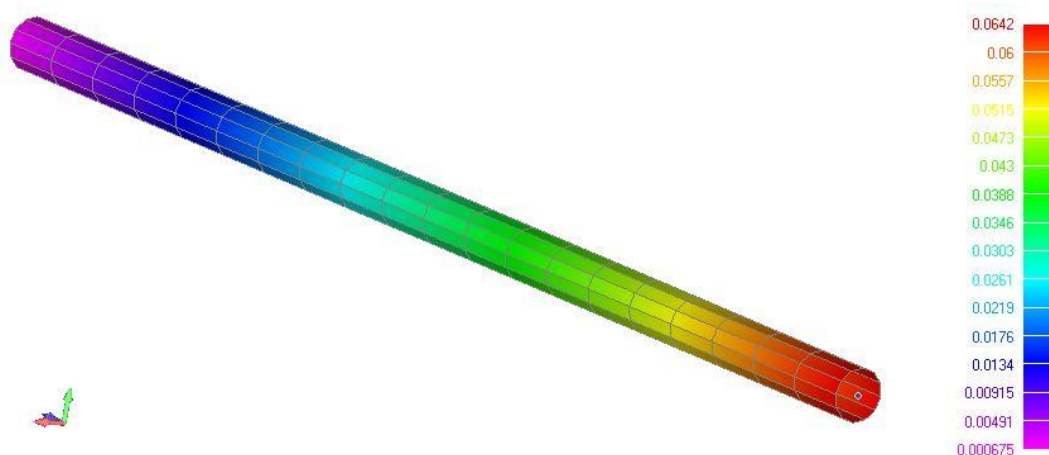
Слика 6.24. Угао увијања алуминијумског карданског вратила при дужини од 800 mm



Слика 6.25. Угао увијања карданског вратила од сивог лива при дужини од 200 mm

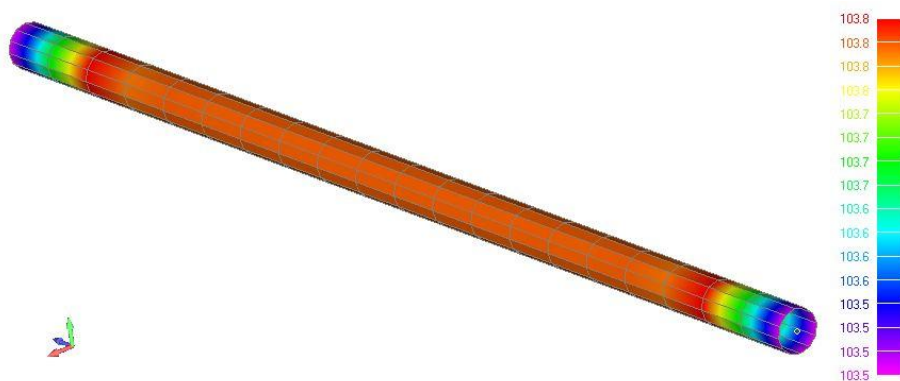


Слика 6.26. Угао увијања карданског вратила од сивог лива при дужини од 600 mm

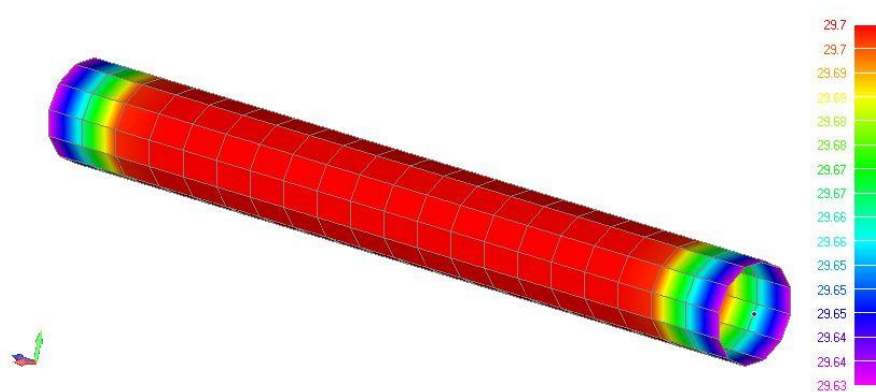


Слика 6.27. Угао увијања карданског вратила од сивог лива при дужини од 800 mm

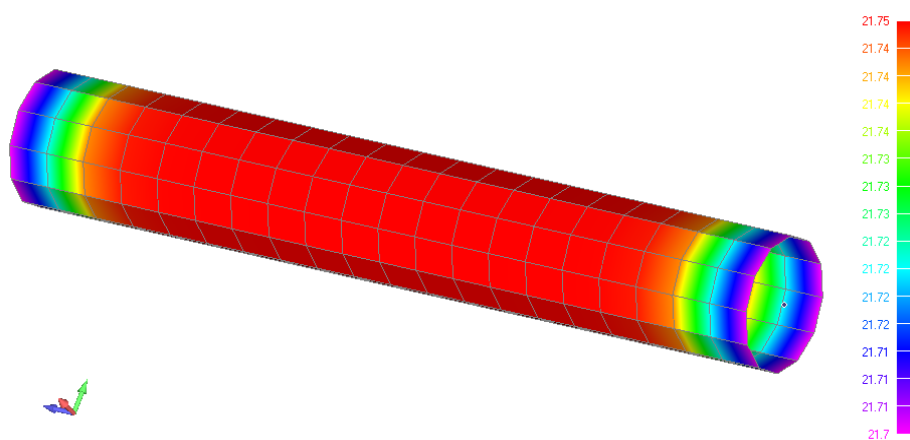
Уколико дође до промене пречника челичног вратила, а остале димензије остану исте, тангенцијални напон се мења на начин који је приказан следећим сликама.



Слика 6.28. Тангенцијални напон челичног карданског вратила уколико је вредност пречника 15,75 mm

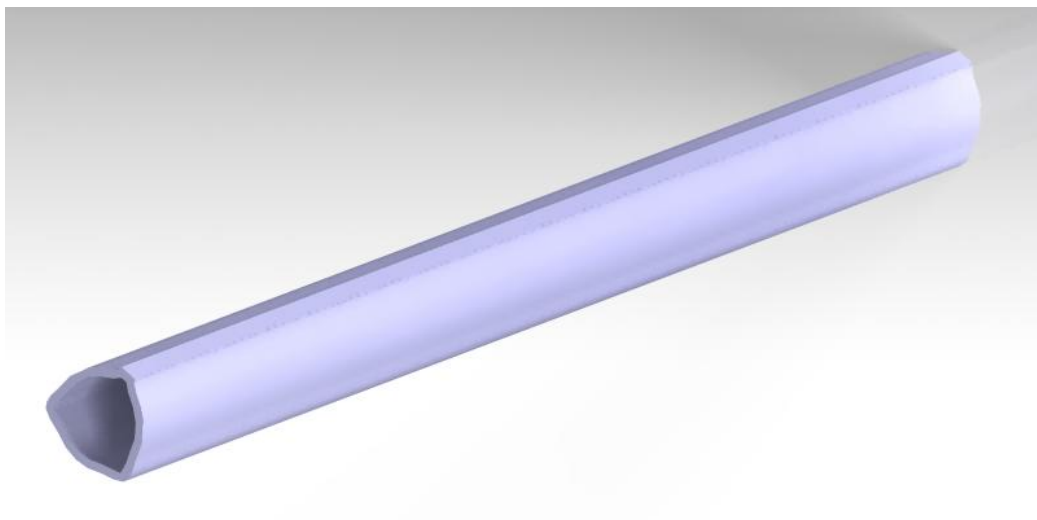


Слика 6.29. Тангенцијални напон челичног карданског вратила уколико је вредност пречника 47,25 mm



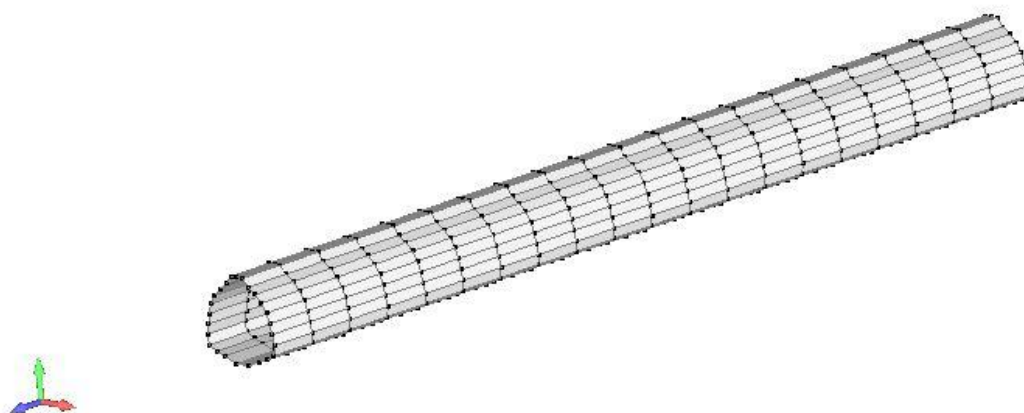
Слика 6.30. Тангенцијални напон челичног карданског вратила уколико је вредност пречника 63 mm

Профил попречног пресека такође може бити различит, поред пуног и шупљег уобичајеног кружног профила вратила, занимљиво је да примену на тржишту налазе и профили другачијег облика. Један од таквих профила вратила је, већ поменуто, вратило произвођача *Cerjak*, из Словеније. Модел вратила је урађен у софтверском програму CATIA V5, слика 6.31.



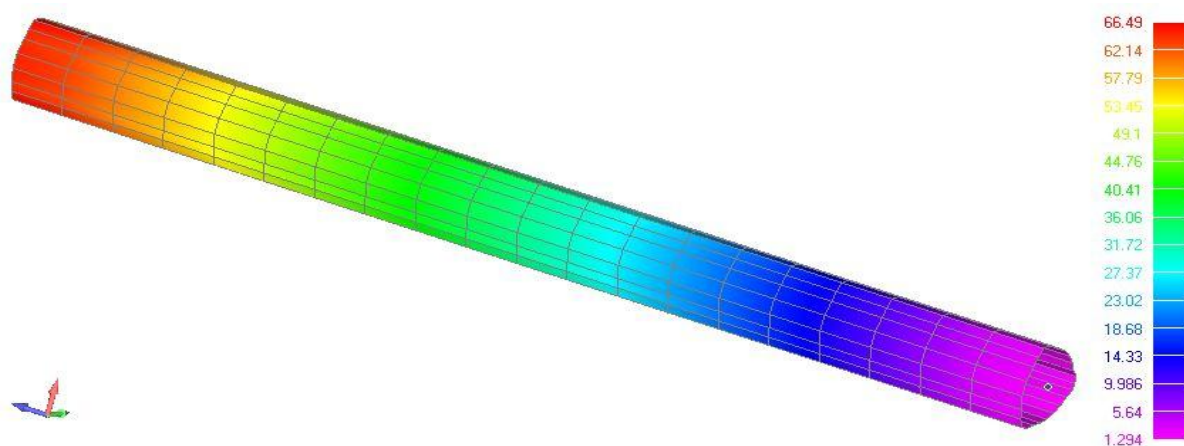
Слика 6.31. 3D модел карданског вратила, произвођача *Cerjak*

Тако измоделирано карданско вратило је пребачено као "stp" формат у програмски пакет FEMAP, где је геометрија искоришћена за постављање изопараметарских четвороугаоних коначних елемената љуски. Укупно је искоришћено 500 елемената, и то по 20 елемената у аксијалном правцу и 25 елемената у правцу обода попречног пресека. Више елемената је коришћено него код обичног профила вратила због специфичније геометрије, а тиме и тачности резултата.



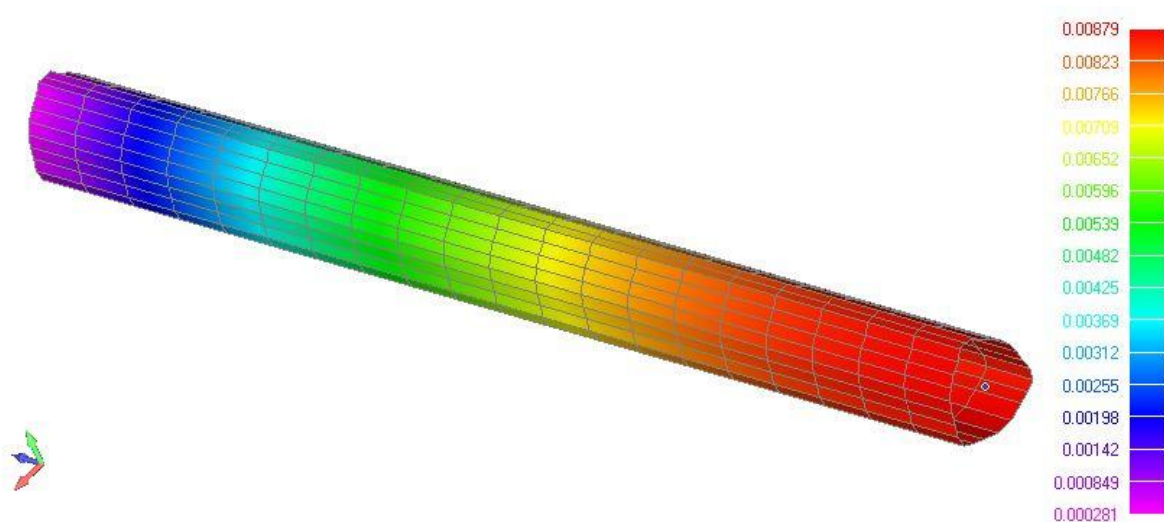
Слика 6.32. Изглед мреже карданског вратила, произвођача *Cerjak*

Оптерећење је задато преко торзије површина, због асиметричности попречног пресека и немогућности једноставног одређивања тангентних сила у чворовима. Као проблем се јавља и немогућност одређивања тежишта профила како би се задао момент на једном крају вратила. На вратилу, сем укљештења на једном крају, такође је потребно и поставити ограничење у аксијалном правцу, односно ограничити транслацију, у овом случају по z -оси. Добијени тангентијални напон челичног карданског вратила услед увијања приказан је на слици 6.33.



Слика 6.33. Расподела тангентијалног напона услед увијања челичног вратила произвођача Cerjak, МПа

Док је угао увијања челичног карданског вратила приказан на слици 6.34.



Слика 6.34. Угао увијања челичног карданског вратила произвођача Cerjak, rad

7. Анализа резултата

Резултати добијени применом МКЕ могу мање или више одступати од тачних, док МКЕ софтвери не могу открити ова неслагања, већ само формалне и суштинске грешке у моделима. Зато је неопходно извршити упоређивање тачности резултата добијених још неком методом, а такође је потребно и добро разумевање суштине решаваног проблема.

Уколико постоји оправдана сумња у тачност резултата добијених МКЕ потребно је проверити неке од основних корака при раду:

- коришћење одговарајућих јединица за све величине,
- одговарајуће карактеристике материјала и модела,
- постављење граничних услова и оптерећења и да ли одговарају реалним.

У раду је извршено упоређивање, неких основних резултата, добијених нумеричком методом са резултатима добијеним аналитичким путем, како би даља поређења била меродавна при анализи резултата добијених МКЕ.

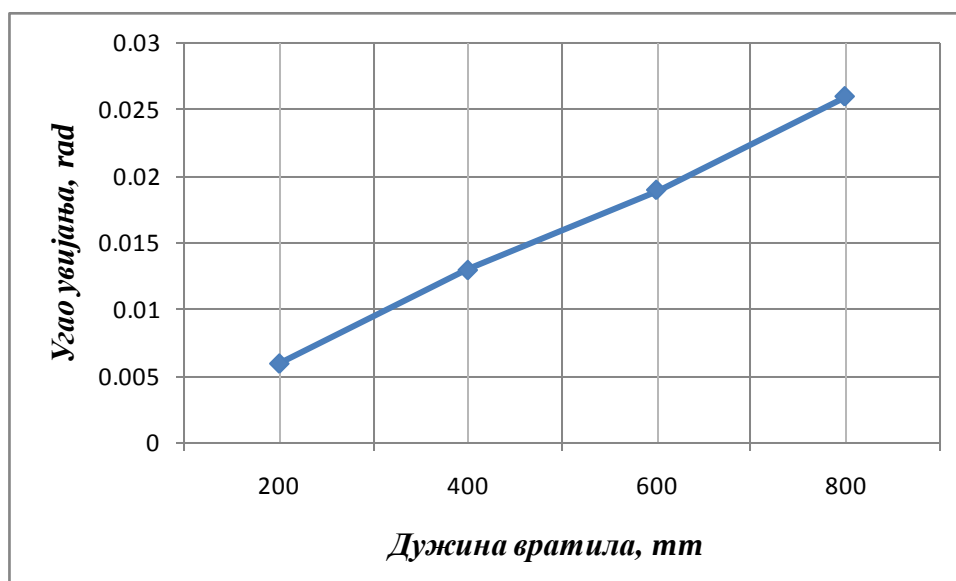
Анализа резултата омогућава добијање јасније слике о напонском-деформационом стању које влада у конструкцији. Упоредни приказ резултата, добијених аналитичким и нумеричким прорачуном за челично карданско вратило, дат је у табели 7.1.

Табела 7.1. Вредности напона услед увијања (тангенцијални напон) и угла увијања добијене аналитичким и нумеричким путем

Врста прорачуна	Напон услед увијања, МПа	Угао увијања, рад
Аналитички	42,27	0,0129
Нумерички	46,59	0,0116

Резултати добијени у завршној фази утичу на доношење одговарајућих одлука конструктора. У зависности од тога какви су резултати и које зависности показују могуће је после темељне анализе предложити оптималније решење за посматрану конструкцију, било да су димензије у питању, коришћени материјал, облик конструкције и друго.

Први резултати добијени нумеричким путем у раду односе се на утицај промене дужине вратила. Дужина вратила директно утиче на деформацију, односно угао увијања вратила. Са дијаграма на слици 7.1, се види скоро линеарна растућа зависност, односно са повећањем дужине карданског вратила расте и вредност угла увијања вратила.



Слика. 7.1. Зависност дужине челичног карданског вратила и угла увијања

Такође, уколико се уместо челика користи алуминијум или сиви лив као материјал за карданско вратило долази до промене угла увијања, што се може закључити и из обрасца (5.15) где фигурише модул клизања за конкретни материјал који се користи. У табели 7.2, се виде вредности угла увијања за ове материјале.

Табела 7.2. Вредности угла увијања за Č, AL, SL

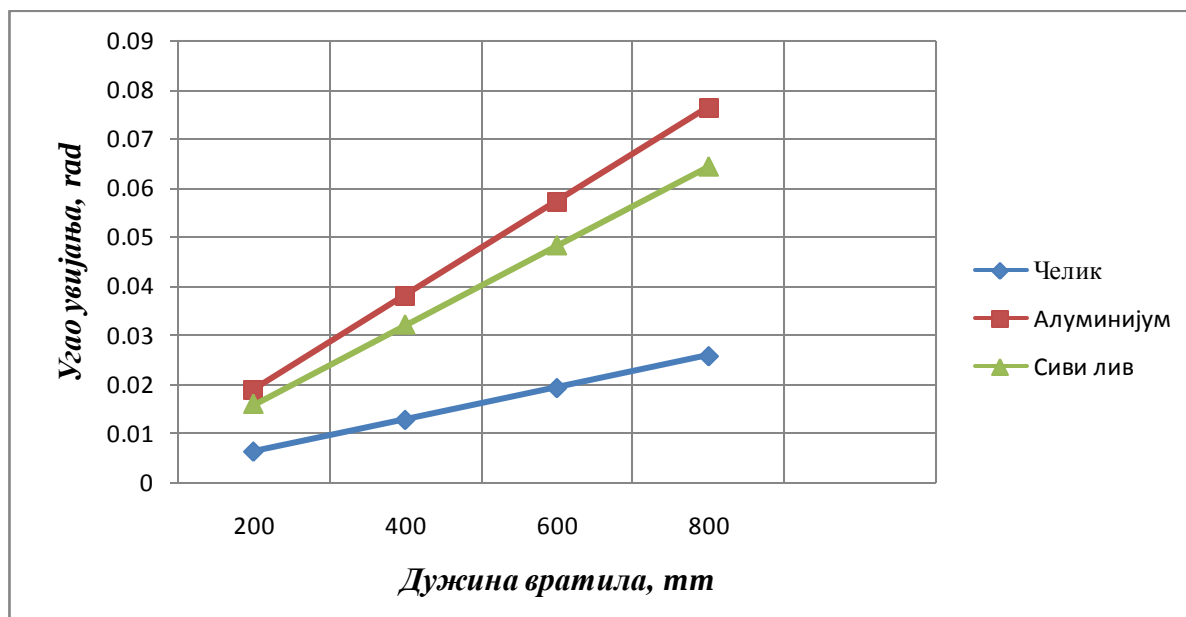
Материјал	Угао увијања, rad
Č	0,0129
AL	0,0382
SL	0,0321

Поред материјала и дужине вратила, на вредност угла увијања, такође утичу и димензије поречног пресека вратила, слика 7.2. Ова зависност је обрнуто пропорционална, односно што је већа дебљина попречног пресека вратила, то је и присуство деформација на увијање мање.



Слика 7.2. Зависност дебљине попречног пресека вратила и угла увијања

На слици 7.3, је представљен заједнички утицај материјала и дужине вратила на деформације, односно угао увијања. Са дијаграма се види да најмање деформације трпи челик, док алуминијум и сиви лив имају приближне вредности угла увијања и знатно су веће него код челика. Алуминијум трпи највеће деформације, што произилази из тога што је његов модул еластичности најмањи. Види се такође, да се са порастом дужине вратила деформације нагло повећавају.



Слика 7.3. Зависност дужине и угла увијања вратила за различите материјале

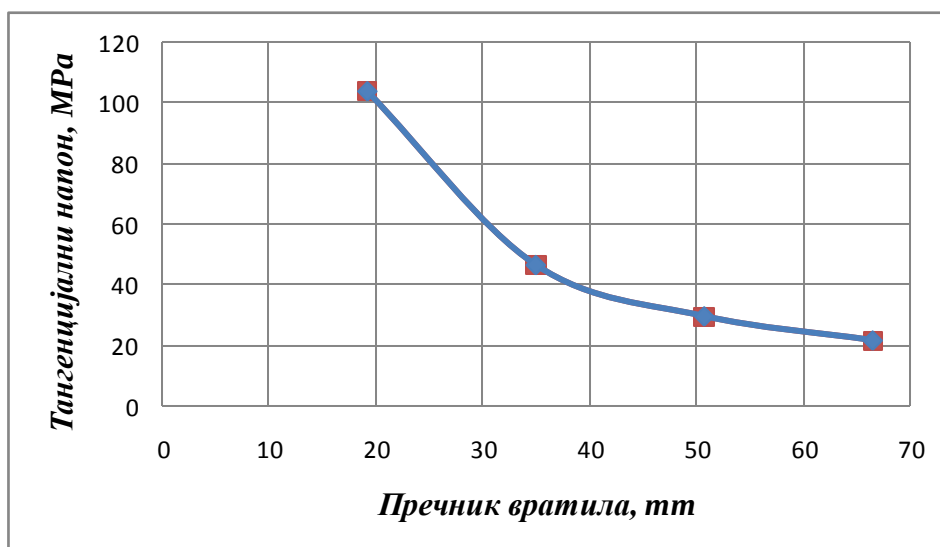
Већ је показано да димензије попречног пресека вратила утичу на деформације, међутим већи утицај показују на вредност напона услед увијања вратила. Утицај дебљине попречног пресека на тангенцијални напон је приказан на слици 7.4.



Слика 7.4. Зависност дебљине зида попречног пресека вратила и тангенцијалног напона

Са дијаграма се види да, што је тање вратило, уколико трпи и веће напоне. Ти напони се смањују повећањем дебљине зида вратила. Може се закључити да би пуно вратило трпело и најмање напоне, али то носи и разне недостатке као што је повећање тежине вратила, тако да је потребно сагледати све аспекте и наћи оптимално решење.

На слици 7.5, је приказан утицај промене пречника вратила, док дебљина зида остаје иста. Сличну зависност даје промена пречника као и дебљина зида, ако све димензије остану непромењене, односно уколико се пречник вратила повећава напон се смањује и обрнуто, ако се пречник смањује напон расте.



Слика 7.5. Зависност пречника вратила и тангенцијалног вратила

Као завршна анализа рађена је за челично карданско вратило, произвођача Cerjak, чији је профил попречног пресека другачијег облика од кружног. Он је одговарајућих димензија у односу на испитивано вратило прстенастог попречног пресека. Једина разлика је у облику профила попречног пресека. Добијене вредности за тангенцијални напон и угао увијања дате су у табели 7.3, где су дате и вредност, њему аналогног вратила прстенастог пресека.

Табела 7.3. Вредности тангенцијалног напона и угла увијања за два различита профила попречног пресека

Облик профила попречног пресека	Тангенцијални напон, <i>MPa</i>	Угао увијања <i>rad</i>
Стандарни прстенасти попречни пресек	46,59	0,0129
Нестандардни профил попречног пресека	66,49	0,00879

Из табеле се види да је облик профила попречног пресека такође битан при избору вратила и да су вредности добијених напона и деформација различите за ова два профила. Стандардни профил више погодује због мањег напона, док се мање деформације ипак јављају код нестандарног профила.

8. Закључак

Елементи за везивање вратила под углом и међупросторних оса називају се карданским механизмима, универзалним зглобовима или карданима. Како је све већа примена, неопходност и масовност употребе карданских вратила, јер се процењује да само у Србији има преко 500000 пољопривредних карданских вратила у употреби, не поставља се питање актуелности теме овог рада.

Област примене карданских механизма, њихова експлоатациона својства, поузданост и трајност у различитим условима, одређени су експлоатационим својствима и конструкционим карактеристикама коришћених карданских механизма. О значају и важности тих конструкционих карактеристика, односно како основне димензије, као што су: дужина, дебљина попречног пресека зида вратила, пречник вратила, као и измена облика профила попречног пресека, утичу на промену напона и деформација код карданских преносника, се највише говори у раду.

У раду је извршена анализа утицаја промене неких основних димензија вратила, утицаја промене профила попречног пресека, као и утицаја промене материјала, на напонско-деформационо стање вратила. Такође је урађена упоредна анализа аналитичког прорачуна са резултатима добијеним нумеричким путем.

Први корак је упознавање са темом и теоријским основама, као и досадашњим истраживањима везаним за ову област. Следећи корак, у раду, је везан за интересантност теме и циљ истраживања. Кратак преглед историјског развоја карданских вратила је, такође, неопходан како би се могло лакше сагледати проблем било које врсте везан за ове преноснике.

Употреба и значај примене карданских вратила, њихова подела, основни елементи карданских механизма, њихово подмазивање, коришћени материјали, све то чини потребну теоријску основу, која је описана у раду, како би се могло кренути са прорачуном вратила.

После аналитичког прорачуна статичке анализе вратила (са теоријском допуном), као и прорачун основних величина које описују динамичку стабилност, најпре је формиран модел за нумеричку анализу. Сагласност добијених резултата (урађена упоредна анализа аналитичког и нумеричког прорачуна вратила), је била потврда да је формиран модел за нумеричку анализу, у погледу избора типа коначног елемента, начина дефинисања материјала и његових карактеристика и друго, добар тако да се са сигурношћу може применити за анализу реалног вратила.

За формирање нумеричког модела коришћен је програмски пакет FEMAP, док је за добијање резултата анализе коришћен компјутерски програм NxNastran. Као савремена нумеричка метода коришћена је метода коначних елемената (МКЕ) која се занима на

дискретизацији стварног модела. То подразумева поделу неке структуре на коначан број елемената малих димензија, у овом случају вратило је моделирано изопараметарским четвороугаоним коначним елементима љуски.

Да би се извршила анализа напонско–деформационог стања одређеног елемента применом МКЕ потребно је да се прати следећа процедура: креирање геометријског модела, додељивање материјала, дефинисање параметара мреже коначних елемената, односно, генерисање мреже, креирање ослонаца и оптерећења, спецификација положаја и правца дејства оптерећења, прорачун и генерисање извештаја.

После добијених резултата анализе, могу се сагледати следеће зависности:

- Утицај промене дебљине попречног пресека вратила δ на тангенцијални напон τ ,
- Утицај промене дужине карданског вратила l на угао увијања θ ,
- Утицај промене пречника D_s , при истој дебљини зида вратла, на тангенцијални напон τ ,
- Утицај промене материјала на угао увијања θ ,
- Утицај промене дужине l на критични број обртаја,
- Утицај промене стандардног цевастог профила вратила са профилем фирме *Cerjak*, на тангенцијални напон τ и угао увијања θ .

Испитивања су имала за основни циљ утврђивање статичке анализе напона вратила и померања истог, будући да је то величина која директно утиче на комплетан рад целог карданског преносника у којем се вратило налази.

Приликом анализе не стандардног профила *Cerjak*, може се закључити да и такав профил може наћи примену, јер показује мању деформацију него обично вратило кружног попречног пресека. Међутим, тангенцијални напон овог профила је већи него код обичног, тако да у будућности ту има још довољно простора за налажење неког оптималног решења, и можда налажење још нових профила који би показали боље карактеристике.

Како је већ поменуто, област примене карданских вратила је велика и самим тим је потребан стални њихов развој и напредак, поготово у конструкционом смислу. У раду су показане само неке зависности и њих можемо искористити за надоградњу знања везано за ову област. Међутим, велики нестотатак у Србији и свету је то што је обављен знатан број истраживања на тему карданских вратила, али они су углавном везани за теоријска истраживања кинематике и динамике карданских вратила, док је приметан недостатак практичних истраживања ових механизма. Они имају велике предности, као и мане на којима се може још пуно радити, и остављају простор за коришћење можда неких нових материјала, димензија, облика профила, све у зависности од потреба и могућности.

9. Литература

- [1] Симић, Д., Јанковић, А., "Карданско вратило", Специјално издање интернационалног часописа MBM, Крагујевац, 1993
- [2] Танасијевић, С., "Механички преносници", Машински факултет у Крагујевцу, 1994.
- [3] Стефановић, А., "Друмска возила", Центар за моторе и моторна возила Машинског факултета у Нишу и Центар за безбедност саобраћаја Машинског факултета у крагујевцу, 2010.
- [4] Којић, М., Славковић, Р., Живковић, М., Грујовић, Н., "Метод коначних елемената-линеарна анализа", Машински факултет у Крагујевцу, 1998.
- [5] Николић, В., "Машински елементи", Машински факултет у Крагујевцу, 2004.
- [6] Ђорђевић, З., "Динамичко понашање вратила од композитних материјала", Докторска дисертација, Крагујевац, 2008.
- [7] Ашоња, А., "Дијагностика стања котрљајних лежајева и њен утицај на поузданост карданских вратила на пољопривредним машинама", Докторска дисертација, Нови Сад, 2012.
- [8] Seherr-Thoss, H.Chr., Schmelz, F., Aucktor, E., "Universal Joints and Driveshafts", 2006, Birkhäuser, ISBN: 9783540301691
- [9] Mills, A. (2007)., "Robert Hooke's 'universal joint' and its application to sundials and the sundial-clock", Notes & Records of the Royal Society, No.61, pp.219-236.
- [10] Hummel, S. R., Chassapis, S. (2000)., "Configuration design and optimization of universal joints with manufacturing tolerances", Mechanism and Machine Theory, Vol.35, No.3, pp.463-476.
- [11] Bayrakceken, H., Tasgetiren, S. & Yavuz, I., "Two cases of failure in the power transmission system on vehicles: A universal joint yoke and a drive shaft", Engineering Failure Analysis 14, 2007, pp. 716–724, ISSN:1350-6307
- [12] Маринковић, Д., Köppe, H., Gabbert, U., "Finite element development for generally shaped piezoelectric active laminates part I - linear approach", Engineering, Vol. 2, No 1, 2004, pp. 11 – 24.
- [13] Селиванов, В. Г. (1994)., "Причины отказов сельскохозяйственной техники при испытаниях", Механизация и электрификация сельского хозяйства, №.12, 23-24

- [14] Ивановић, Л., Јосифовић, Д., Ракић, Б., Стојановић, Б., Илић, А., "Shape Variations Influence on Load Capacity of Cardan Joint Cross Shaft", The 7th International Symposium KOD 2012, Machine and Industrial Design in Mechanical Engineering, 24 - 26 May 2012, Balatonfüred, Hungary, Proceedings, pp. 205-210
- [15] Francis, C. Moon (2003). Franz Reuleaux: Contributions to 19th C. Kinematics and Theory of Machines, Sibley School of Mechanical and Aerospace Engineering Cornell University, Ithaca, New York.
- [16] Каталог. "Карданска вратила", FKL-Темерин, Србија, 2011.
- [17] Каталог. "Карданске греди", Cerjak, Словенија, 2011.
- [18] Каталог: Gelenkwellenbau Gwb, немачка, 2002.
- [19] Digital Library of Kinematiss Cardan: Hooke's Universal Joint:
http://ecommons2.library.cornell.edu/web_archive/explore.cornell.edu/scene465f.html?scene=Digital%20Library%20of%20Kinematics&stop, приступљено у јуну 2013.
- [20]<http://www.meskrusevac.edu.rs/saobracaj/images/download/Transmisija.pdf>, присупљено у мају 2013.
- [21]<http://share.pdfonline.com/3f57f6e08f4641b591341525c9e013ee/MAIN%201.htm>, приступљено у мају 2013.
- [22]<http://www.am.unze.ba/mkpr/MKE%201.pdf>, приступљено у јуну 2013.
- [23]<http://books.google.rs/books?id=Op6A1t0gEDgC&pg=PA150&lpq=PA150&dq=double+cardan+homokinetic+joint&source>, приступљено у априлу 2013.
- [24]<https://www.asme.org/getmedia/f47f8dae-5d5c-4b9e-abd0-1ff665b17100/232>, приступљено у јуну 2013.
- [25]http://www.monasfts.com/e_refer_01.htm, приступљено у јуну 2013
- [26]<http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/09/>, приступљено у мају 2013.
- [27]<http://www.srboauto.co.rs/>, приступљено у мају 2013.
- [28]http://www.masinac.org/downloads/masinski%20elementi%201/prof.%20radivoje%20mitrovic/predavanja/me1_5_vratila_i_osovine.pdf, приступљено у мају 2013.
- [29]<http://ttl.masfak.ni.ac.rs/SA/PREDAVANJE5%20%202007%20%20INZINJERSKA%20PROCEDURALNOST.pdf>, приступљено у јуну 2013.