

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу

Марија М. Рафаиловић

**Корекција деформационог поља
линеарног троугаоног и тетраедарског
коначног елемента методом глађења
мастер рад**

Крагујевац, 2019.

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Мастер академске студије

Модул: Примењена механика и аутоматско управљање

Предмет: Механика континуума

Број индекса: 351/2016

Марија М. Рафаиловић

**Корекција деформационог поља
линеарног троугаоног и тетраедарског
коначног елемента методом глађења
мастер рад**

Комисија за преглед и одбрану:

1. Др Мирослав Живковић, ред.проф.-ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог мастер рада кандидат треба да:

- опише и анализира формулације линеарних троугаоних и тетраедарских елемената,
- детаљно дефинише теоријске поставке истих уз осврт на њихове главне проблеме,
- опише предложену методу глађења којом се недостаци елемената ублажавају,
- на конкретним примерима упоредно представи перформансе елемената нижег реда у односу на елемент са предложеним деформационим пољем.

Препоручена литература:

- [1] Lee C., Lee P. S., *A new strain smoothing method for triangular and tetrahedral finite elements*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Volume 341, 939-955, 2018.
- [2] Којић М., Славковић Р., Живковић М., Грујовић Н., *Метод коначних елемената 1*, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2010.
- [3] Bathe K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.

Крагујевац, април 2019.

Ментор:

Др Мирослав Живковић, ред. проф.

Срдачно се захваљујем свом ментору професору др Мирославу Живковићу на свесрдној помоћи и стрпљењу које је имао у току израде ове тезе. Такође, захваљујем се на саветима и мотивацији коју је пробудио у мени да истрајем у изради овог рада.

Захваљујем се колеги Милану Бојовићу, др Ненаду Борђевићу и доценту др Владимиру Миловановићу на корисним саветима при изради нумеричких примера.

На самом крају, захвалила бих се својој породици на разумевању и подршци.

Резиме

Примарни циљ ове тезе била је анализа формулација линеарног троугаоног и тетраедарског коначног елемента, као и испитивање њихових перформанси нумеричким примерима. Дакле, први део рада односи се на приказ формулација у Декартовом и природном координатном систему ових елемената, уз детаљно представљено извођење матрице везе између деформација и чворних померања.

Како се ради о елементима нижег реда, познато је њихово константно деформационо поље и веома круто понашање у проблемима оптерећења савијањем, те је у другом делу рада представљена метода глађења деформационог поља (*енгл. Strain Smoothed Element Method*), којом се не уводећи значајне промене МКЕ концепта остварују значајно боље перформансе линеарних елемената у односу на методу коначних елемената. Узимајући у обзир константне деформације околних елемената, у елементима се овом методом креира линеарно деформационо поље, којим се остварује већа тачност, те смањује дисконтинуалност напона на границама елемената.

На крају рада, нумеричким примерима који обухватају два проблема равнот стања напона и тродимензионални проблем оптерећења лопте унутрашњим притиском, испитане су перформансе линеарног и параболичног елемента, који су већ уграђени у програмски пакет РАК, у односу на перформансе елемента са коригованим деформационим пољем, представљеним у [1]. Компаративно представљени резултати добијени у програмским пакетима РАК и Nastran показују одлично слагање ова два софтвера и значајно већу тачност елемента са коригованим деформационим пољем у односу на елемент константних деформација. Поредећи параболични и кориговани елемент, уочено је боље понашање параболичног елемента. Међутим, како се ради о елементу који поседује више степени слободе, добијени резултати су потпуно оправдани.

Кључне речи: елементи нижег реда, тетраедарски елемент, метода глађења деформација, метода коначних елемената

Abstract

The primary purpose of this thesis was to analyse the formulation of the linear triangular and tetrahedral finite elements, as well as to examine their performances using numerical examples. Therefore, the first part of the thesis refers to the review of the formulations of these elements in Cartesian and the natural coordinate system, accompanied by a thoroughly displayed derivation of the matrix of the link between strains and nodal displacements.

As low-order elements are the subject of the thesis, their constant strain field and very stiff behavior is known in bending problems, hence in the second part of the thesis the Strain Smoothed Element Method was displayed, which without introducing significant changes in FEM concepts delivers significantly better performances of the linear elements compared to the FEM. Taking constant strains of the adjacent elements into consideration, using this method the linear strain field is created in these elements, achieving greater precision and hence lowering the discontinuity of the tension on the borders between elements.

At the end of the thesis, numerical examples that encompass two plane stress problems and the three-dimensional problem of subjecting the hollow sphere to internal pressure were used to examine the performances of the linear and parabolic element, which have already been implemented within the program package PAK, in comparison with the performances of element with a corrected strain field, shown in [1]. The comparatively presented results obtained from the program packages PAK and Nastran display great agreement of these two software packages and significantly bigger precision of elements with a corrected strain field compared to the constant strain element. Upon comparing the parabolic and corrected elements, a better behaviour was observed in the parabolic element. However, as an element that has higher degrees of freedom is concerned, the obtained results are fully justified.

Keywords: low-order elements, tetrahedral elements, stiffness behavior, strain smoothed element method, finite element method

Садржај

1. Увод.....	1
2. Деформације	3
2.1 Компоненте малих деформација.....	3
2.1.1 Деформације у Декартовом координатном систему.....	4
3. Напон.....	6
4. 2D и 3D теорија еластичности	8
4.1 Дводимензионална теорија еластичности	8
4.1.1 Деформационо и напонско поље	9
4.2 Тродимензионална теорија еластичности.....	10
4.2.1 Деформационо и напонско поље	10
5. Основне поставке МКЕ.....	12
5.1. Интерполациони полиноми.....	12
6. Троугаони коначни елемент	15
6.1 Генерализована формулација троугаоног елемента	15
6.1.1 Интерполација поља померања.....	15
6.1.2 Деформационо поље	21
6.2 Изопараметарска формулација троугаоног елемента	22
6.2.1 Интерполација геометрије и померања.....	23
6.2.2 Деформационо поље	24
6.3 Дегенерисани троугаони елемент	27
6.3.1 Пример дегенерације 2D елемента	28
7. Тетраедарски коначни елемент	31
7.1 Генерализована формулација тетраедарског елемента	31
7.1.1 Интерполација поља померања.....	31
6.1.2 Деформационо поље	37
7.2 Изопараметарска формулација тетраедарског елемента.....	40
7.2.1 Интерполација геометрије и померања.....	40
7.2.2 Деформационо поље	42
7.3 Дегенерисани тетраедарски елемент.....	46
7.3.1 Пример дегенерације 3D елемента	46
8. Преглед метода глађења деформационог поља коначних елемената	52

8.1 Нова метода глађења деформационог поља троугаоног и тетраедарског коначног елемента	57
8.1.1 Метода глађења деформационог поља троугаоног елемента	57
8.1.2 Метода глађења деформационог поља тетраедарског елемента	58
9. Нумерички примери.....	60
9.1 Куков проблем.....	60
9.2 Блок оптерећен континуалним оптерећењем	64
9.3 Лопта оптерећена унутрашњим притиском.....	66
10. Закључак.....	69
Литература	71
Додатак А	74
Додатак Б.....	76
Додатак Ц.....	77
Додатак Д	78
Додатак Е	81

Листа слика

Слика 2.1.1 Мале деформације	3
Слика 3.1 Дефиниција напона у тачки материјала	6
Слика 4.1.1 Равно стање деформације	8
Слика 4.1.2 Равно стање напона	9
Слика 6.1.1 Линеарни троугаони елемент	16
Слика 6.1.2 Функције облика троугаоног елемента.....	19
Слика 6.1.3 Координатни систем троугаоног елемента	20
Слика 6.1.4 Површинске координате троугаоног елемента.....	20
Слика 6.2.1 Природни координатни систем троугаоног елемента.....	24
Слика 6.3.1 Дегенерација 2D елемента	27
Слика 7.1.1 Линеарни тетраедарски елемент	32
Слика 7.1.2 Запреминске координате тетраедарског елемента	36
Слика 7.2.1 Природни координатни систем линеарног тетраедарског елемента	41
Слика 7.3.1 Дегенерација 3D елемента	46
Слика 8.1.1 Приказ поделе елемента на ћелије	53
Слика 8.1.2 Приказ вишеугаоног елемента и креирања ћелија глађења код NS-FEM методе	53
Слика 8.1.3 Креирање поља изглађене деформације код FS-FEM методе	54
Слика 8.1.4 Креирање поља изглађене деформације ES-FEM методе.....	55
Слика 8.1.5 Приказ константног деформационог поља посматраног елемента и елемената који га окружују	57
Слика 8.1.6 Положај Гаусових интеграционих тачака троугаоног елемента са изглађеним деформационим пољем	58
Слика 8.1.7 Приказ константног деформационог поља посматраног елемента и елемената са којима дели k-ту ивицу	58
Слика 8.1.8 Положај Гаусових интеграционих тачака тетраедарског елемента са изглађеним деформационим пољем	59
Слика 9.1.1 Савијање силом конзоле променљивог попречног пресека	60
Слика 9.1.2 Приказ мреже Куковог проблема.....	61
Слика 9.1.3 Нормализована померања средине слободног краја конзоле за различит број елемената дуж стране.....	62
Слика 9.1.4 Напон σ_{xx} у чвору A за елемент са леве и десне стране	62
Слика 9.2.1 Савијање континуалним оптерећењем блока константног попречног пресека.....	65
Слика 9.2.2 Приказ мреже проблема савијања блока континуалним оптерећењем	65
Слика 9.3.1 Издубљена лопта оптерећена унутрашњим притиском.....	66
Слика 9.3.2 Приказ мреже Ламеовог проблема.....	67

Слика Е.1 Поље померања у вертикалном у – правцу конзоле	81
Слика Е.2 Поље нормалног σ_{xx} напона конзоле	81
Слика Е.3 Поље ефективног напона конзоле	82
Слика Е.4 Поље померања у вертикалном у – правцу блока	82
Слика Е.5 Поље ефективног напона издубљене лопте	83

Листа табела

Табела 9.1.1 Табеларни приказ вертикалног померања тачке на слободном крају конзоле	61
Табела 9.1.2 Фон Мизесов напон у тачки А добијен у програмском пакету РАК	63
Табела 9.1.3 Фон Мизесов напон у тачки А добијен у програмском пакету Nastran	63
Табела 9.1.4 Вертикално померање у тачки А добијено у програмским пакетима РАК и Nastran	64
Табела 9.2.1 Табеларни приказ вертикалног померања тачке А добијеног у програмским пакетима РАК и Nastran	66
Табела 9.3.1 Фон Мизесов напон у тачки G добијен у програмском пакету РАК	67
Табела 9.3.2 Фон Мизесов напон у тачки G добијен у програмском пакету Nastran	67

Листа ознака

Ознака	Назив
$\mathbf{A}^{-1}$	Инверзна матрица система
A	Површина троугаоног коначног елемента
A_k	Површине троуглова
ΔA	Инфинитезимална површина континуума чија је нормала $\mathbf{n}$
a_k, b_k, c_k	Коефицијенти интерполационих функција чвора k
$\mathbf{B}$	Матрица извода интерполационих функција
$\mathbf{B}^k$	Матрица извода интерполационих функција чвора k
$\mathbf{C}$	Конститутивна матрица
$\det \mathbf{A}$	Детерминанта матрице система
$\mathbf{E}$	Тензор мале деформације
E	Јангов модул еластичности
e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}	Нормалне (линијске) компоненте тензора деформације у Декартовом координатном систему
e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}	Смичуће (угаоне) компоненте тензора деформације у Декартовом координатном систему
e_{ij}	Компоненте тензора деформације у индексној нотацији
G	Модул смицања
$\mathbf{H}$	Интерполациона матрица
h_k	Интерполационе функције чвора k
$h_{k,j}$	Парцијални извод интерполационих функција чвора k по Декартовим координатама
h_1^*, h_5^*	Интерполационе функције дегенерисаног тетраедарског коначног елемента
$\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m$	Јединични вектори Декартовог координатног система
$\mathbf{J}$	Јакобијан трансформације између Декартовог и природног координатног система
$\mathbf{J}^{-1}$	Инверзни Јакобијан трансформације
$ \mathbf{J} $	Детерминанта матрице Јакобијана
$\mathbf{L}$	Матрица облика коначног елемента
$\mathbf{L}_k$	Матрица функције облика чвора k

L_k	Функције облика чвора k
$\mathbf{n}$	Вектор нормале елементарне површине
$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$	Спољашње оптерећење коонтинуума
$\Delta \mathbf{F}$	Укупна површинска сила на материјалном елементу
$\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z$	Компоненте површинских сила у Декартовом координатном систему
r, s	Координате материјалних тачака троугаоног елемента у природном координатном систему
r, s, t	Координате материјалних тачака тетраедарског елемента у природном координатном систему
$\mathbf{t}_{sr}^n$	Вектор средњег напона на материјалном елементу чија је нормала $\mathbf{n}$
$\mathbf{t}^n$	Вектор напона у посматраној тачки на површини чија је нормала $\mathbf{n}$
$\mathbf{u}$	Вектор померања материјалних тачака у Декартовом координатном систему
$\mathbf{U}$	Вектор померања чворова елемента
$\mathbf{U}^k$	Вектор померања чвора k
U_i^k	Компоненте вектора померања чвора k у правцу осе i
$u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$	Померања материјалних тачака у правцу оса x, y, z
u_i	Компоненте вектора померања материјалних тачака елемента у Декартовом координатном систему у индексној нотацији
$u_{i,j}$	Градијент деформације
V	Запремина тетраедарског елемента
$V_{P234}, V_{P134}, V_{P124}, V_{P123}$	Запремине тетраедара
$\mathbf{X}$	Вектор координата чворова елемента
$\mathbf{X}^k$	Вектор координата чвора k
X_i^k	Компонента вектора координата чвора k у правцу осе i
x, y, z	Координате материјалних тачака елемента у Декартовом координатном систему
x_i	Координате материјалних тачака елемента у Декартовом координатном систему у индексној нотацији
α	Вектор генерализованих координата

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots, \gamma_1, \gamma_2, \dots$	Полиномни коефицијенти (генерализоване координате)
α_{0i}, α_{pi}	Генерализоване координате у индексној нотацији
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	Компоненте инжењерских деформација
δ_{kj}	Кронкеров делта симбол
ν	Поасонов коефицијент
σ	Тензор напона
σ^n	Нормална компонента вектора напона
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Нормалне компоненте тензора напона
$\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$	Смичуће компоненте тензора напона
σ_{km}	Компоненте тензора напона у индексној нотацији
τ^n	Тангенцијална компонента вектора напона
ϕ^T	Вектор облика интерполационог полинома
Φ	Матрица координата
Φ^{-1}	Инверзна матрица координата

1. Увод

Предмет истраживања ове тезе представљају линеарни троугаони и тетраедарски елементи, који припадају елементима нижег реда у методи коначних елемената. Ове елементе карактерише једноставна формулација која се огледа у линеарној интерполацији поља померања, те представљају уводне елементе МКЕ концепта. Осим тога, за разлику од осталих елемената, мрежа троугаоних и тетраедарских елемената код већине програма за анализу методом коначних елемената се може аутоматски генерисати, чак и код веома сложене геометрије. Дакле, поменуте карактеристике ове елементе чине јако погодним за имплементацију и анализу конструкција.

Са друге стране, главни недостатак линеарних троугаоних и тетраедарских коначних елемената јесте управо апроксимација поља померања линеарним функцијама, које дефинишу константно деформационо и напонско поље унутар елемента. Један од примера ограничења примене ових елемената представљају проблеми оптерећења савијањем. У оваквим проблемима, моделирањем елементима нижег реда дискретизовани модел бива крући од стварног, те резултујуће деформације бивају мање од очекиваних. Разлог томе делом представља константно напонско поље ових елемената, које је у проблемима савијања линеарно, те малим бројем елемената нижег реда није могуће довољно тачно апроксимирати линеарно напонско поље проблема савијања. У литератури је познат проблем смичућег закључавања (*енгл. shear locking*), које се јавља моделирањем линеарним троугаоним елементима проблема чистог савијања греде. Дакле, у моделу се јављају лажне смичуће деформације, те се енергија деформисања осим савијања, делом троши и на смицање.

Изузев превише крутог понашања, познато је и запреминско закључавање (*енгл. volumetric locking*) које се јавља код материјала чије су вредности Поасоновог коефицијента блиске једној половини. Сви наведени недостаци нас не ограничавају да елементе нижег реда користимо, већ нам говоре да је неопходан велики број елемената за адекватну апроксимацију. Дакле, намеће се питање велике дисконтинуалности деформација и напона на границама линеарних елемената, које метода померања у МКЕ инклутира код веома грубе мреже.

У циљу побољшања перформанси елемената нижег реда, у литератури су деценијама уназад развијене бројне нумеричке методе за повећање тачности елемената при веома грубој мрежи и смањење осетљивости елемента на запреминско закључавање. Једна од метода која се у МКЕ показала веома ефикасном јесте метода глађења деформација (*енгл. Smoothed Finite Element Method*), која не уводећи значајне промене МКЕ концепта доводи до знатно боље конвергенције и тачности решења елемената нижег реда. Већ 2000. година развијена је читава фамилија метода глађења, међу којима се метода глађења заснована на ивици (*енгл. Edge-based Smoothed Finite Element Method*) показала најефикаснијом, те је метода представљена у [1] разматрана и у овом раду.

Наведене чињенице представљају основну мотивацију овог рада који садржајно обухвата 10 поглавља, тематски подељених у три целине. Прва целина обједињује теоријске поставке методе коначних елемената и формулацију линеарних троугаоних и тетраедарских елемената у Декартовом и природном координатном систему.

Друга целина представља преглед метода глађења деформационог поља ових елемената. Најзад, трећа целина представља нумеричке примере којима су анализирани перформансе поменутих елемената.

У поглављу 1 представљени су основни проблеми који се јављају применом линеарних троугаоних и тетраедарских елемената.

У поглављу 2 представљена је основна теорија малих деформација, као једне од фундаменталних величина методе коначних елемената. Приказан је начин дефинисања компоненти тензора мале деформације у односу на Декартов координатни систем.

У поглављу 3 уведен је појам напона као механичке величине, затим је представљен начин дефинисања напона у тачки материјала у односу на координатне равни Декартовог координатног система.

У поглављу 4 описано је поље померања, деформационо и напонско поље, као и напонско-деформациона веза дводимензионалног и тродимензионалног проблема деформисања. Представљена је теорија еластичности изотропних линеарно еластичних материјала базирана на генералисаном Хуковом закону за троосно напонско стање, на основу којег су потом представљени и специјални случајеви 3D деформисања - равно стање напона и деформације.

Поглавље 5 описује интерполационе полиноме 1D, 2D и 3D елемената, којима се апроксимира поље померања коначних елемената. На примеру једнодимензионалног елемента, приказан је општи поступак изражавања интерполационог полинома помоћу вредности померања у чворовима, на основу којих потом следе облици интерполационих функција у чворовима елемента.

У поглављу 6 детаљно је анализирана формулација троугаоног коначног елемента. Процедура извођења матрице извода интерполационих функција, којом је дефинисана веза између деформација и чворних померања, детаљно је представљена у Декартовом, потом и у природном координатном систему елемента. Такође, на конкретном примеру, приказано је добијање троугаоног елемента дегенерацијом основног квадрилатералног дводимензионалног елемента.

Поглавље 7 описује извођење матрице извода интерполационих функција за случај генерализоване и изопараметарске формулације тетраедарског елемента. Такође, приказано је на конкретном примеру добијање тетраедарског елемента дегенерацијом основног тродимензионалног елемента.

У поглављу 8 дат је преглед метода глађења деформационог поља коначних елемената, са посебним освртом на методе примењене код линеарних троугаоних и тетраедарских елемената. Представљена је нова метода глађења којом се значајно повећава тачност рада ових елемената.

У поглављу 9 анализирани су перформансе тетраедарских елемената нумеричким примерима. Разматрана су два проблема равног стања напона и тродимензионални проблем оптерећења лопте унутрашњим притиском. Овим примерима анализирана је конвергенција решења како линеарних, тако и параболичних тетраедарских елемената, у односу на предложени кориговани елемент.

У поглављу 10 дата су запажања и закључци, као и даљи могући правци истраживања.

2. Деформације

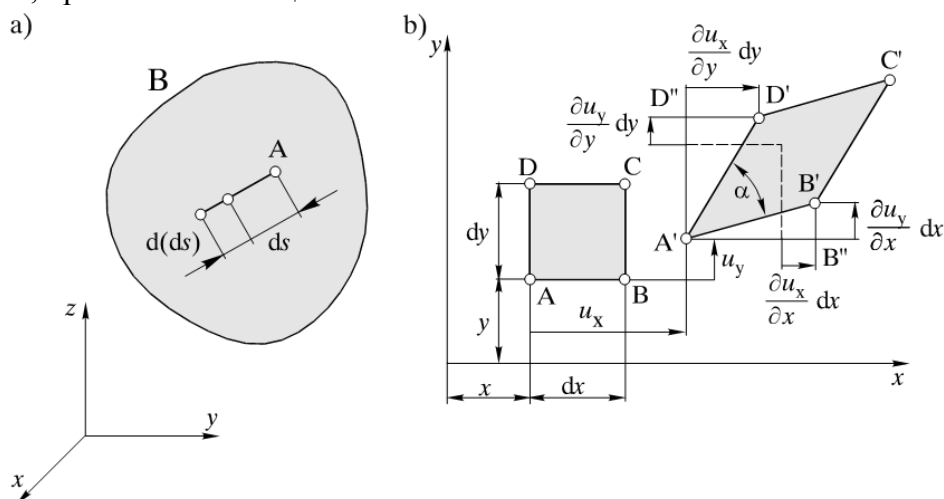
Деформација је механичка величина којом се дефинише мера промене облика, односно стање деформисаности континуума, које настаје услед дејства спољашњег оптерећења. У зависности од степена деформисаности материјала, деформације можемо генерално класификовати у две групе: мале и велике деформације. Мале деформације налазе примену код солида које одликује реверзибилно понашање при дејству оптерећења. Дакле, примењују се у случајевима када се материјал (непрекидна средина) по престанку дејства оптерећења враћа у првобитан облик. За разлику од њих, велике деформације одликује значајно и трајно деформисање материјала. [2]

Осим што представљају величине које дефинишу степен и меру деформације, мале деформације такође су и величине директно повезане са напонима у материјалу, те је од великог значаја њихово познавање при проучавању проблема деформисања материјала. Из тог разлога, у наставку ће бити разматрана основна теорија малих деформација као једне од фундаменталних механичких величина у механици континуума.

2.1 Компоненте малих деформација

По својој природи разликујемо две врсте малих деформација: нормалне (линијске) и угаоне (смичуће). Компонента нормалне деформације се дефинише као однос прираштаја дужине правога линијског елемента и његове почетне дужине. Са друге стране, компоненте смичуће деформације дефинишемо као промену угла између два почетно управна правца. Дакле, компоненте линијске деформације су бездимензијске величине, док је јединица мере смичуће компоненте деформације радијан.

Да бисмо дефинисали компоненте малих деформација посматраћемо чврсто тело В и тачку А, приказане на слици 2.1.1.



Слика 2.1.1 Мале деформације [2]

Према дефиницији, нормална деформација у правцу осе x у тачки А материјала представља однос прираштаја дужине правога линијског елемента $d(ds)$ и његове почетне дужине ds .

Ако је линијски елемент пре деформације био у правцу осе x , онда је деформација e_{xx} једнака:

$$e_{xx} = \frac{d(dx)}{dx} \quad (2.1.1)$$

На сличан начин се могу дефинисати нормалне деформације у било ком правцу у тачки А, као и у било којој другој тачки, при чему скуп свих нормалних деформација у некој тачки даје издужење тј. скраћење свих линијских елемената у посматраној тачки.

Као што смо рекли, смичућу деформацију дефинишемо као промену угла између два почетно ортогонална линијска елемента, те се смичућа деформација која одговара осама x и y дефинише као:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (2.1.2)$$

где је α угао између линијских елемената $A'B'$ и $A'D'$ који су се пре деформације поклапали са осама x и y . На сличан начин могуће је дефинисати смичућу деформацију за било која два првобитно међусобно управна правца. Скуп свих смичућих деформација у посматраној тачки материјала дефинише кривљење, односно промену облика материјала.

2.1.1 Деформације у Декартовом координатном систему

Компоненте деформација у Декартовом координатном систему могу се представити помоћу поља померања $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ у правцу оса x , y , z . Правоугаоник $ABCD$, слика 2.1.1 б, инфинитезималних димензија dx и dy ће услед дејства оптерећења да се трансформише у четвороугао $A'B'C'D'$. Дакле, тачка А ће се померити у правцу x за $u(x, y)$, односно за $v(x, y)$ у правцу осе y . Како се тачке А и В налазе на малом растојању, према теорији малих деформација померање тачке В се може изразити преко померања тачке А на следећи начин:

$$u_{B'}(x+dx, y) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} dx \text{ и } v_{B'}(x, y+dy) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (2.1.3)$$

Применом дефиниције нормалне деформације, линијска деформација у правцу осе x представљаће однос линијског елемента ($A'B'-AB$) и његове почетне дужине AB , односно:

$$e_{xx} = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'} - dx}{dx} \quad (2.1.4)$$

где је:

$$\begin{aligned} \overline{A'B'} &= \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} dx \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

У претходној релацији, због претпоставке да су деформације мале, чланови вишег реда се могу занемарити, тако да се иста редукује на облик:

$$\overline{A'B'} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx \quad (2.1.6)$$

Како је $AB = dx$, нормална компонента деформације једнака је:

$$e_{xx} = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1.7)$$

Применом истог поступка се могу добити и друге две нормалне деформације, e_{yy} и e_{zz} .

Како смичуће деформације дефинишу промену угла између два почетно управна правца, за дефинисање смичуће деформације γ_{xy} посматраћемо углове $B'A'B''$ и $D'A'D''$.

С обзиром да разматрамо мале деформације, претпостављамо да су тангенси углова једнаки самим угловима, те након занемаривања чланова вишег реда следи:

$$\gamma_{xy} = B'A'B'' + D'A'D'' = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1.8)$$

Аналогно претходној процедури, могуће је добити помоћу одговарајућих померања у равнима x-z и y-z и друге две компоненте смичуће деформације, γ_{xz} и γ_{yz} респективно.

Изрази за све нормалне и смичуће деформације које одговарају Декартовом координатном систему x, y, z су:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Смичуће деформације e_{ij} се могу представити помоћу инжењерских γ_{ij} релацијом:

$$e_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad e_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} \quad e_{zx} = \frac{\gamma_{zx}}{2} \quad (2.1.10)$$

Коришћењем индексне нотације поменуте деформације се могу написати као:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1.11)$$

при чему важи да је $e_{11} = e_{xx}$, $e_{22} = e_{yy}$, $e_{33} = e_{zz}$, $e_{12} = e_{xy}$, $e_{23} = e_{yz}$, $e_{31} = e_{zx}$.

Такође, могуће је дефинисати тензор мале деформације, следећег облика:

$$\mathbf{E} = e_{km} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m \quad (2.1.12)$$

где су e_{km} компоненте ($e_{11} e_{12} \dots e_{33}$), $\mathbf{i}_k$ и $\mathbf{i}_m$ јединични вектори Декартовог система, а $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_m$ је тензорски производ који означава придруживање вектора.

У развијеном облику, према Ајнштајновој конвенцији поновљених индекса, ова једначина је следећег облика:

$$\mathbf{E} = e_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + e_{12} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \dots + e_{33} \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 \quad (2.1.13)$$

3. Напон

Друга значајна механичка величина у механици непрекидних средина представља напон, те ће у овом поглављу бити кратко представљен појам напона посматрајући чврсто, односно деформибилно тело. Основна претпоставка од које се полази при дефинисању напона огледа се у међусобном дејству материјалних делића континуума унутрашњим силама, које чине напонско поље. Дакле, услед дејства спољашњег оптерећења доћи ће до поремећаја равнотежног стања тела, изазивајући на тај начин његово деформисање, све до тренутка успостављања равнотеже спољашњих и унутрашњих сила. Стање унутрашњих сила, насталих као последица нарушавања неутралног стања материјала, описује се напонским пољем.

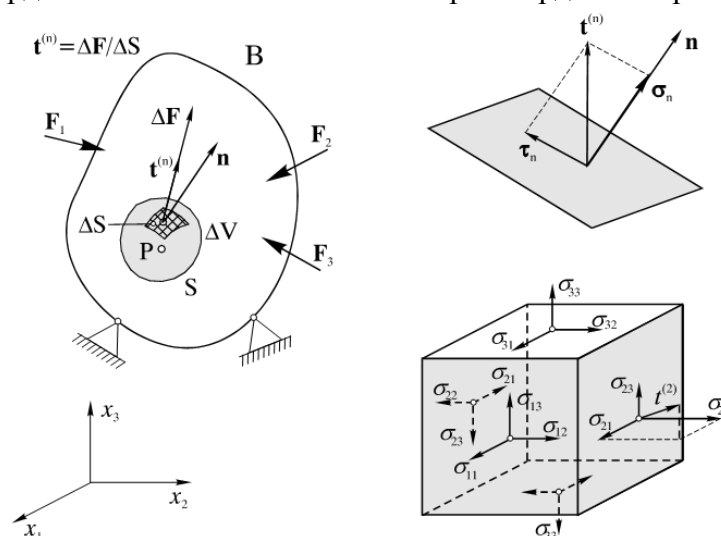
Да бисмо дефинисали напон, у околини тачке P посматраћемо инфинитезималну запремину тела оптерећеног спољашњим силама $F_1, F_2, \dots, F_n$, слика 3.1. Дејство околног материјала на материјални елемент површине ΔS се преноси путем укупне површинске силе ΔF . На површини ΔS чија је нормала $\mathbf{n}$ можемо дефинисати вектор средњег напона, као однос укупне површинске силе и инфинитезималне површине ΔS на коју дејствује, односно [2,3]:

$$\mathbf{t}_{sr}^n = \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} \quad (3.1)$$

Док је вектор напона у уоченој материјалној тачки елементарне површине ΔS чија је нормала $\mathbf{n}$ једнак:

$$\mathbf{t}^n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} \quad (3.2)$$

Вектор напона $\mathbf{t}^n$ може се разложити на нормалну компоненту σ_n која има правац нормале $\mathbf{n}$, и тангенцијалну компоненту τ_n која делује у равни елементарне површине ΔS , слика 3.1 (б). Међутим, с обзиром да се у посматраној тачки континуума може поставити безброј елементарних површина ΔS и њима одговарајућих нормала $\mathbf{n}$, неодређеност напонског стања дефинисаног са безброј вектора $\mathbf{t}^n$ се елиминише дефинисањем координатног система и напона за три координатне равни.



Слика 3.1 Дефиниција напона у тачки материјала

Овако дефинисан скуп нормалних и смичућих напона чини девет функција координата материјалне тачке, које чине тензор напона. Тензор напона, узимајући у обзир Ајнштајнову конвенцију сабирања поновљених индекса, има облик:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{km} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m = \sigma_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \sigma_{12} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \dots + \sigma_{33} \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 \quad (3.3)$$

где су σ_{km} компоненте $(\sigma_{11} \sigma_{12} \dots \sigma_{33})$, $\mathbf{i}_k$ и $\mathbf{i}_m$ јединични вектори Декартовог система, а $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_m$ је тензорски производ који означава придруживање вектора.

Компоненте тензора напона у матричном облику се представљају на следећи начин:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Уобичајене ознаке компонената тензора напона у Декартовом систему x, y, z су:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

4. 2D и 3D теорија еластичности

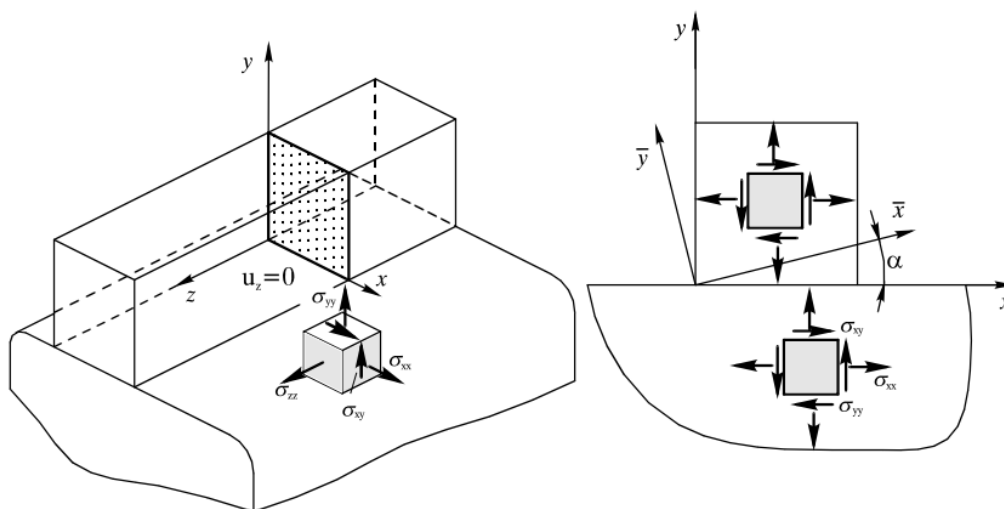
У овом поглављу биће описано поље померања, деформационо и напонско поље, а затим и напонско-деформациона веза димензионалног и тродимензионалног проблема деформисања. Дакле, ово поглавље практично представља увод у примену методе коначних елемената 2D и 3D солида.

Такође, важно је напоменути да претходно описане механичке величине, напони и деформације, дефинишу само стање унутрашњих сила и стање деформисаности материјала, не и његове карактеристике. Наравно, за решавање било којег проблема деформисања континуума неопходно је познавати и карактеристике материјала које су изражене везама између напона и деформације, у литератури познатим конститутивним релацијама. Како класична теорија еластичности примарно представља теорију за изотропне линеарно еластичне материјале чије деформисање описује теорија малих деформација, у овом поглављу биће само оне представљене.

4.1 Дводимензионална теорија еластичности

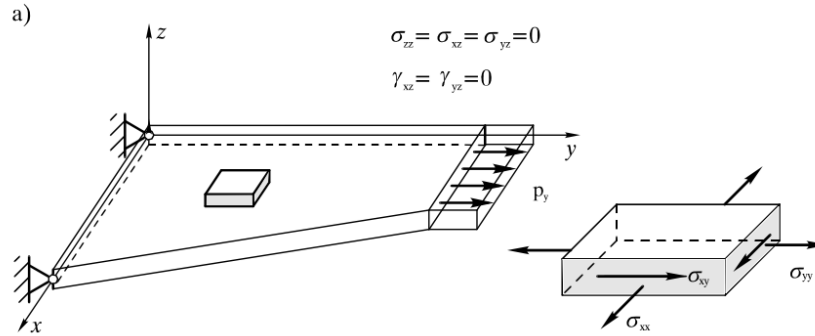
Постоји велики број конструкција од практичног значаја код којих услед дејства оптерећења настају напонска и деформациона стања која описује дводимензионална теорија еластичности. Оно што их, у општем случају, карактерише јесте геометрија у облику призме, а зависно од њених релативних димензија и начина оптерећења, разликујемо два случаја: равно стање деформације и равно стање напона.

Равно деформационо стање јавља се код структура чија је једна димензија (дужина) знатно већа од друге две, док оптерећење које је дужински равномерно распоређено делује управно у односу на лонгитудиналну осу. На слици 4.1.1 приказана је дугачка структура константог попречног пресека у равни xu , оптерећена силама смештеним у равнима паралелним равни xu , са оптерећењем константним у односу на координату z . Дакле, тело се деформише идентично у свим правцима $z = const.$, те су померања у овом правцу занемарљива.[2,4]



Слика 4.1.1 Равно стање деформације [2]

Равно напонско стање се дефинише као стање у коме су нормалне и тангенцијалне компоненте напона управне на раван елемента једнаке нули. Проблем равног стања напона настаје као последица дејства оптерећења смештеног у равни структуре, при чему је у општем случају једна димензија, дебелина структуре, доста мања у односу на друге две. Пример овог проблема дат је на слици 4.1.2 на којој је приказана танка мембрана у равни x у, оптерећена силама смештеним у истој равни.



Слика 4.1.2 Равно стање напона [2]

4.1.1 Деформационо и напонско поље

Било да је у питању проблем равног стања деформације или равног стања напона, у оба случаја попречни пресеци у односу на z осу се деформишу на исти начин. Такође, померања тачака дуж z осе су занемарљива, те се проблем одређивања напона и деформација у телу своди на одређивање напона и деформација у x у равни. Дакле, поље померања тачака дефинисано је векторским пољем које има две компоненте, померање у правцу осе x и y , односно:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) \quad (4.1.1)$$

Идентично деформисање тела у свим пресецима $z = \text{const.}$, изискује да су померања у правцу z занемарљива у случају равног стања деформације, те је линијска деформација за овај правац једнака нули, односно:

$$e_{zz} = 0 \quad (4.1.2)$$

Осим тога, и одговарајуће смичуће компоненте деформације су једнаке нули:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (4.1.3)$$

Дакле, вектор деформације чине три компоненте деформације:

$$\mathbf{e} = [e_{xx} \quad e_{yy} \quad \gamma_{xy}]^T \quad (4.1.4)$$

Конститутивна матрица за изотропни еластични материјал је облика:

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

где E представља Јангов модул еластичности, а ν Поасонов коефицијент.

У релацији (4.1.5) прве две врсте и колоне одговарају нормалним компонентама σ_{xx} , σ_{yy} и e_{xx}, e_{yy} , док трећа врста и колона одговарају смичућем напону σ_{xy} и смичућој деформацији γ_{xy} . Код овог проблема напон σ_{zz} је различит од нуле, и одређује се тако да услов (4.1.2) буде задовољен.

Услов који треба да буде испуњен за попречни z правац у случају равног стања напона је претпоставка да је нормални напон у свакој материјалној тачки једнак нули, односно:

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (4.1.6)$$

Такође, као и у случају равног стања деформације, важи претпоставка да су смичуће деформације (4.1.3) једнаке нули, као и смичући напони $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$. У овом случају је деформација e_{zz} различита од нуле и одређује се тако да услов (4.1.6) буде задовољен.

С обзиром на уведене претпоставке, конститутивна матрица за равно стање напона је облика:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.1.7)$$

4.2 Тродимензионална теорија еластичности

Код многих конструкција због геометрије, механичких карактеристика или врсте оптерећења, напонско стање материјала се не може описати дводимензионалном теоријом еластичности. Примери оваквих проблема срећу се код солида неправилног облика, као и код призматичних солида изложених дејству произвољног оптерећења. У том случају, проблем постаје тродимензионални, те ће у овој глави бити укратко представљена тродимензионална анализа напона и деформација чврстог тела, коју можемо сматрати неким видом проширења дводимензионалне теорије еластичности. Односно, равнско стање напона и деформације представљају специјалне случајеве тродимензионалног деформисања који се изводе директно на основу генерализаног Хуковог закона за троосно стање деформације, који ће такође бити укратко представљен у наставку. [2,5]

4.2.1 Деформационо и напонско поље

Дакле, поље померања материјалних тачака сада је дефинисано векторским пољем које има три компоненте, померање у правцу оса x, y и z , односно:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z) \quad (4.2.1)$$

Деформационо поље сада дефинише свих шест компоненти деформација, три нормалне и три смичуће, које одређујемо диференцирањем померања у складу са дефиницијом (2.1.9). Дакле, можемо дефинисати вектор деформације као:

$$\mathbf{e} = [e_{xx} \ e_{yy} \ e_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T \quad (4.2.2)$$

Напонско стање, узимајући у обзир симетричност смичућих компоненти, чиниће шест компоненти тензора напона, које можемо представити у облику матрице колоне као:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx}]^T \quad (4.2.3)$$

Како разматрамо само еластични изотропни материјал, еластична конститутивна матрица се изводи на основу генерализаног Хуковог закона, који представља проширење једноосног Хуковог закона. Овај закон уједно представља и фундаменталну релацију у еластичности, јер се на основу њега директно могу извести конститутивне матрице равног стања напона и равног стања деформације, које су претходно представљене.

Узимајући у обзир деформације у попречним правцима које се јављају при једноосном затезању и принцип суперпозиције деформација при еластичном деформисању, веза између деформације и напона дефинисана је следећим релацијама:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \sigma_{xy} \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \sigma_{yz} \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \sigma_{zx} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

у којима је E Јангов модул еластичности, ν Поасонов коефицијент, а G модул смицања.

Инвертовањем матрице флексибилности која следи директно на основу релација (4.2.4) и узимањем у обзир везе између модула смицања, Поасоновог коефицијента и модула еластичности, $G = E / 2(1 + \nu)$, конститутивна матрица је облика:

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 1-\nu & 1-\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

5. Основне поставке МКЕ

Основна идеја методе коначних елемената огледа се у дискретизацији континуума елементима коначног облика и апроксимацији непознатог решења унутар елемената једноставним функцијама. Функције којима се апроксимира поље непознате величине унутар елемента називамо функцијама облика, интерполационим функцијама или интерполационим моделима. Уопштено говорећи, најчешће коришћена врста функције за апроксимацију непознатих променљивих су полиноми, те се управо из тог разлога користе за апроксимацију непознатих померања тачака унутар елемента. Осим тога, полиноми представљају функције које се једноставно могу диференцирати и интегралити, те уколико полиномима апроксимирамо поље померања унутар елемента, релативно једноставним математичким законитостима можемо доћи до његових деформација. Наравно, што је већи ред полинома, апроксимација ће бити тачнија. Међутим, овакво решење у нумеричким методама је временски скупље и захтева већи меморијски простор за смештај података, те је у инжењерској пракси веома важно наћи оптимално решење датог проблема.

У зависности од реда интерполационог полинома, елементи се могу поделити на линеарне и елементе вишег реда. За описивање понашања непознате променљиве унутар линеарних елемената користе се интерполационе функције првог реда, док су интерполациони модели елемената вишег реда уобичајено квадратне или кубне функције. Дакле, у зависности од реда димензије, линеарни елементи могу имати два, три или четири угаона чвора, док се код елемената вишег реда, због већег броја константи у интерполационим полиномима, уводе додатни, секундарни чворови. Међучворове или унутрашње чворове је потребно дефинисати како би број непознатих константи, генерализованих координата, интерполационих полинома био једнак броју степени слободе чворова. [6]

Дакле, циљ овог поглавља је представљање интерполационих полинома 1D, 2D и 3D елемената којима се апроксимира поље померања. Такође, за случај једнодимензионалних елемената биће описан општи поступак изражавања интерполационог полинома помоћу вредности померања у чворовима, на основу којих следе облици интерполационих функција у чворовима елемента. Процедура која ће бити описана на најједноставнијем, линијском, елементу примењује се потпуно аналогно и код сложенијих елемената, са једином разликом у броју интерполационих полинома по чвору, који за случај дводимензионалних и тродимензионалних елемената износи два и три, респективно.

5.1. Интерполациони полиноми

Полиномна функција којом се апроксимира поље локалног померања $u(x)$ материјаних тачака једнодимензионалног елемента у литератури се представља у функцији x координата, следећег облика:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots \quad (5.1.1)$$

где су $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ полиномни коефицијенти тј. генерализоване координате.

Слично, код дводимензионалних елемената локална померања u_1 и u_2 се претпостављају у облику интерполационог полинома у функцији координата x и y на следећи начин:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \dots \\ u_2(x, y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy + \beta_5 x^2 + \beta_6 y^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Аналогно, интерполациони полиноми локалних померања тродимензионалног елемента су облика:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 zx + \alpha_8 x^2 + \alpha_9 y^2 + \dots \\ u_2(x, y, z) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z + \beta_5 xy + \beta_6 yz + \beta_7 zx + \beta_8 x^2 + \beta_9 y^2 + \dots \\ u_3(x, y, z) &= \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y + \gamma_4 z + \gamma_5 xy + \gamma_6 yz + \gamma_7 zx + \gamma_8 x^2 + \gamma_9 y^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

где су са $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$ и $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ означене генерализоване координате.

Претходним релацијама дефинисан је општи облик интерполационих полинома коначних елемената. Основна претпоставка коначних елемената јесте дефинисање поља померања унутар елемента једноставним функцијама помоћу чворних вредности померања. Чворне вредности померања представљају непознате величине у системима једначина, при чему решавањем истог долазимо до непознатих нодалних вредности, чијим одређивањем и померања материјалних тачака унутар елемента постају позната. Дакле, потребно је интерполационе полиноме изразити у функцији нодалних вредности елемента. Генерална процедура изражавања поља померања материјалних тачака помоћу непознатих померања у чворовима биће приказана за линијски елемент са k чворова.

Интерполациони полином дефинисан једначинама (5.1.1) можемо представити у матричном облику као:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\alpha} \quad (5.1.4)$$

где је $\mathbf{u}$ вектор локалних померања материјалних тачака:

$$\mathbf{u} = u(x) \quad (5.1.5)$$

$\boldsymbol{\phi}^T$ вектор облика интерполационе функције:

$$\boldsymbol{\phi}^T = \{1 \quad x \quad x^2 \quad \dots\} \quad (5.1.6)$$

и $\boldsymbol{\alpha}$ вектор генерализованих координата:

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots\}^T \quad (5.1.7)$$

Да бисмо одредили генерализоване координате у функцији чворних померања, потребно је да број чворних померања буде једнак броју генерализованих координата интерполационог полинома. Затим, решавањем једначине (5.1.4) за чворне вредности померања, добијамо:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\text{у чвору 1}) \\ \mathbf{u}(\text{у чвору 2}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\text{у чвору } k) \end{Bmatrix} = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^T(\text{у чвору 1}) \\ \boldsymbol{\phi}^T(\text{у чвору 2}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}^T(\text{у чвору } k) \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\alpha} \quad (5.1.8)$$

где је $\mathbf{U}$ вектор чворних вредности поља променљиве одговарајућег елемента, а Φ матрица координата коју директно одређујемо заменом чворних координата у релацију (5.1.6). Претпостављајући да је матрица Φ регуларна, можемо изразити вектор генерализованих координата као:

$$\boldsymbol{\alpha} = \Phi^{-1}\mathbf{U} \quad (5.1.9)$$

Заменом једначине (5.1.9) у (5.1.4) следи:

$$\mathbf{u} = \phi^T \boldsymbol{\alpha} = \phi^T \Phi^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{L} \mathbf{U} \quad (5.1.10)$$

где је интерполациона матрица $\mathbf{L}$ облика:

$$\mathbf{L} = \phi^T \Phi^{-1} = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_k] \quad (5.1.11)$$

Матрица дефинисана претходном релацијом у литератури је позната као матрица облика коначног елемента, при чему њени елементи представљају интерполационе функције у чворовима елемента. Наведени поступак изражавања поља померања унутар елемента помоћу вредности померања у чворовима је општи и применљив код свих елемената. Како су предмет ове тезе линеарни троугаони и линеарни тетраедарски елемент, у поглављима која следе биће детаљно описани поступци одређивања интерполационих функција у чворовима ових елемената.

6. Троугаони коначни елемент

Троугаони коначни елемент припада фамилији 2D коначних елемената и уједно представља први елемент који је коришћен за анализу моделирања континуума. Често се у литератури назива Турнеровим елементом, из разлога што је још 1956., Турнер први у својем раду предложио, као један од начина анализе 2D солида матричном методом, дискретизацију троугаоним доменама [7]. Са друге стране, линеарна полиномна апроксимација троугаоних домена се још пре појаве методе коначних елемената користила успешно за решавање диференцијалних једначина код раванских проблема [8]. Овај елемент убрзо налази широку примену за анализу разних конструкција у аеронаутичком и грађевинском инжењерству. Осим тога, значај овог елемента у анализи гравитационих брана и тунела бива велик [9].

Главни разлог сврсисходности овог елемента јесте његова једноставност, која уједно омогућава примену методе коначних елемената. Међутим, одликује га ограничена тачност због линеарне апроксимације поља померања, која претпоставља константне деформације и напоне дуж елемента. Самим тим, у зонама велике промене померања потребно је обезбедити финију мрежу.

За формулацију троугаоног коначног елемента је развијено више приступа, те ће у овом поглављу исти бити представљени. Теоријске поставке у овом поглављу биће разматране за линеарни, односно трочворни троугаони елемент, мада се скоро све законитости могу применити и на елементе вишег реда.

6.1 Генерализована формулација троугаоног елемента

Генерализована формулација коначних елемената подразумева претпоставку апроксимације поља померања унутар елемента полиномним функцијама чије су непознате коефицијенти које називамо генерализованим координатама. Померање било које тачке унутар елемента се претпоставља као линеарна комбинација њених координата у односу на Декартов координатни систем, при чему је број непознатих коефицијената полинома дефинисан бројем чворова, односно бројем непознатих померања по елементу. Оно што се код ове формулације може уочити, што ће бити и описано у овом поглављу, је да изражавањем генерализованих координата у функцији померања чворова, добијамо полиномне коефицијенте који представљају линеарне комбинације померања чворова елемента. Такође, све релације у овом поглављу односиће се на троугаоне елементе са правим страницама. [10]

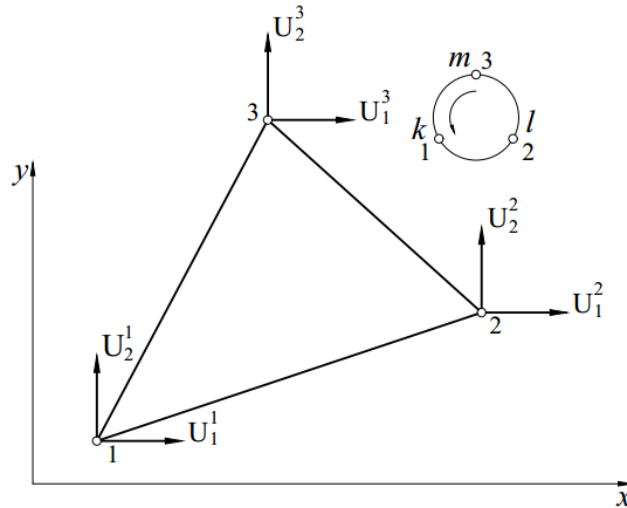
6.1.1 Интерполација поља померања

Као што је појашњено у претходном поглављу, поље померања тачака у случају раванског стања деформације и напона дефинисано је векторским пољем које има две компоненте, компоненту померања у правцу оса x и y . Дакле, коначни елемент којим апроксимирамо ово поље померања мора имати чворове који леже у равни x и y , и чија померања имају хоризонталну и вертикалну компоненту, односно:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{Bmatrix} \quad (6.1.1)$$

где се индекси 1 и 2 односе на осе x и y , респективно.

Све релације за линеарни троугаони елемент биће изведене у односу на Декартов координатни систем. Геометрија овог елемента дефинисана је са три чвора чија се нумерација врши у позитивном математичком смеру, односно у смеру супротном од кретања казаљке на сату, слика 6.1.1.



Слика 6.1.1 Линеарни троугаони елемент

Вектор положаја чвора k у глобалном Декартовом координатном систему је облика:

$$\mathbf{X}^k = \begin{bmatrix} X_1^k & X_2^k \end{bmatrix}^T \quad (6.1.2)$$

где индекси 1 и 2 одговарају осама x и y , респективно.

Такође, вектор померања чворова дефинишу две компоненте померања у правцу оса x и y , при чему за k -ти чвор исти можемо представити у облику:

$$\mathbf{U}^k = \begin{bmatrix} U_1^k & U_2^k \end{bmatrix}^T \quad (6.1.3)$$

Интерполација померања материјалних тачака линеарног троугаоног елемента претпоставља се у облику [11]:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 U_1^1 + L_2 U_1^2 + L_3 U_1^3 \\ u_2 &= L_1 U_2^1 + L_2 U_2^2 + L_3 U_2^3 \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Ова релација се у компоненталном облику може представити на следећи начин:

$$u_i = \sum_{k=1}^3 L_k U_i^k \quad i = 1, 2 \quad (6.1.5)$$

где су U_i^k компоненте померања чвора k у правцу осе i , а $L_k(x, y)$ функције облика, односно интерполационе функције чвора k , при чему индекс $i=1$ одговара оси x , а $i=2$ оси y .

У матричном облику, релација (6.1.4) је облика:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix} \quad (6.1.6)$$

или:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2 \quad \mathbf{L}_3] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{U}^3 \end{Bmatrix} \quad (6.1.7)$$

где је $\mathbf{u}$ вектор померања тачке унутар елемента, $\mathbf{U}^k$ вектор померања чворова елемента и $\mathbf{L}_k$ матрице функције облика елемента и чвора k .

Подматрице $\mathbf{L}_k$ у релацији (6.1.7) су облика:

$$\mathbf{L}_k = \begin{bmatrix} L_k & 0 \\ 0 & L_k \end{bmatrix} \quad (6.1.8)$$

Интерполационе функције L_k одређујемо кренувши од претпоставке да три чвора троугаоног елемента дефинишу линеарно поље померања, тако да се локална померања тачака елемента u_1 и u_2 апроксимирају интерполационим полиномом који је линеаран по x и y , следећег облика:

$$u_i = \alpha_{0i} + \alpha_{pi}x_p \quad i, p = 1, 2 \quad (6.1.9)$$

Релација (6.1.9) је потпуно аналогна релацији (5.1.2), при чему је правило поновљених индекса примењено како би се системи једначина који одговарају двома компонентама померања објединили једном релацијом.

У развијеном облику, релација (6.1.9) је:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_{01} + \alpha_{11}x + \alpha_{21}y \\ u_2 &= \alpha_{02} + \alpha_{12}x + \alpha_{22}y \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

где су $\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{11}, \alpha_{12}$ и α_{21}, α_{22} генерализоване координате, а x и y координате тачака елемента у Декартовом координатном систему.

Ако затим претпоставимо да је поље померања дефинисано преко вредности померања у чворовима U_i^1 , U_i^2 и U_i^3 , тада чворне вредности морају да задовоље интерполациони полином (6.1.9), те заменом чворних вредности у релацију (6.1.9) добијамо систем од три једначине са три непознате генерализоване координате за сваку компоненту померања. Овај систем једначина у индексној нотацији се може представити на следећи начин:

$$U_i^k = \alpha_{0i} + \alpha_{pi}X_p^k \quad i, p = 1, 2 \quad k = 1, 3 \quad (6.1.11)$$

У развијеном облику релација (6.1.11) је облика:

$$\begin{aligned} U_i^1 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i} X_1^1 + \alpha_{2i} X_2^1 \\ U_i^2 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i} X_1^2 + \alpha_{2i} X_2^2 \\ U_i^3 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i} X_1^3 + \alpha_{2i} X_2^3 \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

Решавањем овог система једначина долазимо до генерализованих координата које су облика:

$$\begin{aligned} \alpha_{0i} &= \frac{U_i^1 (X_1^2 X_2^3 - X_1^3 X_2^2) + U_i^2 (X_1^3 X_2^1 - X_1^1 X_2^3) + U_i^3 (X_1^1 X_2^2 - X_1^2 X_2^1)}{X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2)} \\ \alpha_{1i} &= \frac{U_i^1 (X_2^2 - X_2^3) + U_i^2 (X_2^3 - X_2^1) + U_i^3 (X_2^1 - X_2^2)}{X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2)} \\ \alpha_{2i} &= \frac{U_i^1 (X_1^3 - X_1^2) + U_i^2 (X_1^1 - X_1^3) + U_i^3 (X_1^2 - X_1^1)}{X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2)} \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

Генерализоване координате дефинисане претходном релацијом се могу изразити у виду детерминанти као:

$$\begin{aligned} \alpha_{0i} &= \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} U_i^1 & U_i^2 & U_i^3 \\ X_1^1 & X_1^2 & X_1^3 \\ X_2^1 & X_2^2 & X_2^3 \end{vmatrix} & \alpha_{1i} &= \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} U_i^1 & U_i^2 & U_i^3 \\ X_2^1 & X_2^2 & X_2^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \alpha_{2i} &= \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} U_i^1 & U_i^2 & U_i^3 \\ 1 & 1 & 1 \\ X_1^1 & X_1^2 & X_1^3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Детаљно решавање система једначина (6.1.12) приказано је у додатку А.

У релацији (6.1.14) са A је означена површина троугаоног елемента, која се према [12] може представити као половина површине паралелограма, а можемо је израчунати помоћу координата чворова у односу на Декартов координатни систем, следећом детерминантом:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_1^1 & X_1^2 & X_1^3 \\ 1 & 1 & 1 \\ X_2^1 & X_2^2 & X_2^3 \end{vmatrix} = X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2) \quad (6.1.15)$$

где су $X_1^1, X_1^2, X_1^3, X_2^1, X_2^2, X_2^3$ координате темена троугла.

Заменом добијених генерализованих координата (6.1.13) у интерполацију померања (6.1.9) добијамо:

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{1}{2A} \left\{ U_i^1 \left[X_1^2 X_2^3 - X_1^3 X_2^2 + x(X_2^2 - X_2^3) + y(X_1^3 - X_1^2) \right] + \right. \\ &\quad U_i^2 \left[X_1^3 X_2^1 - X_1^1 X_2^3 + x(X_2^3 - X_2^1) + y(X_1^1 - X_1^3) \right] + \\ &\quad \left. U_i^3 \left[X_1^1 X_2^2 - X_1^2 X_2^1 + x(X_2^1 - X_2^2) + y(X_1^2 - X_1^1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

Односно:

$$u_i = \frac{1}{2A} [U_i^1(a_1 + xb_1 + yc_1) + U_i^2(a_2 + xb_2 + yc_2) + U_i^3(a_3 + xb_3 + yc_3)] \quad (6.1.17)$$

Упоредивањем израза (6.1.17) и (6.1.5) следи релација за функцију облика у k -том чвору:

$$L_k = \frac{1}{2A}(a_k + xb_k + yc_k) \quad k=1,2,3 \quad (6.1.18)$$

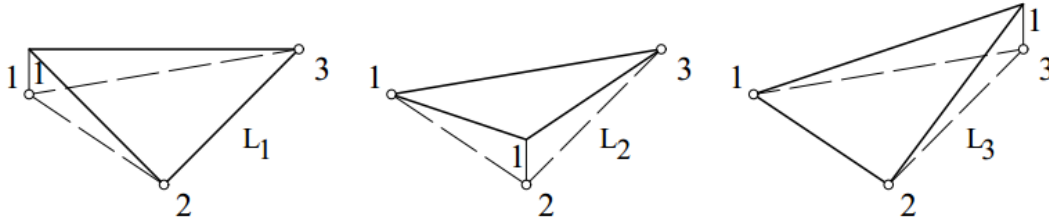
где су коефицијенти a_k , b_k и c_k :

$$a_k = X_1^l X_2^m - X_1^m X_2^l \quad b_k = X_2^l - X_2^m \quad c_k = X_1^m - X_1^l \quad k,l,m=1,2,3 \quad (6.1.19)$$

Дакле, ови коефицијенти се добијају цикличном пермутацијом индекса k,l,m - $klm \rightarrow lmk \rightarrow mkl$, односно:

$$\begin{aligned} a_1 &= X_1^2 X_2^3 - X_1^3 X_2^2 & b_1 &= X_2^2 - X_2^3 & c_1 &= X_1^3 - X_1^2 \\ a_2 &= X_1^3 X_2^1 - X_1^1 X_2^3 & b_2 &= X_2^3 - X_2^1 & c_2 &= X_1^1 - X_1^3 \\ a_3 &= X_1^1 X_2^2 - X_1^2 X_2^1 & b_3 &= X_2^1 - X_2^2 & c_3 &= X_1^2 - X_1^1 \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

Важно је напоменути да се општи интерполациони полином примењује по целом домену елемента и описује промену поља померања у функцији генерализованих координата, док се са L_k дефинише поље променљиве по целом домену укључујући и границе елемента. Такође, функције облика L_k представљају облике померања када се цртају над посматраним елементом, те у случају линеарне интерполације (6.1.9) облика су приказаног на слици 6.1.2 [5].



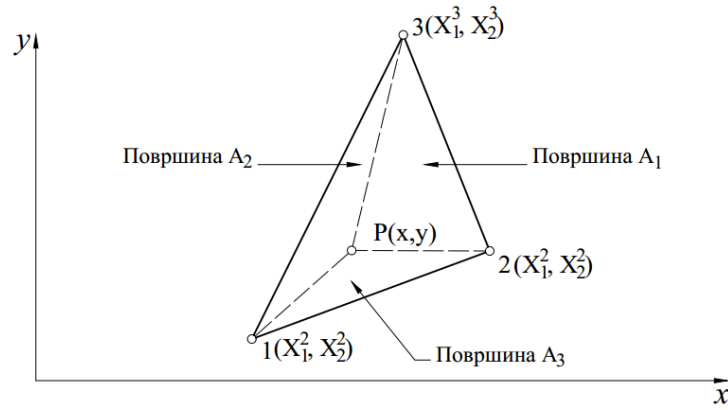
Слика 6.1.2 Функције облика троугаоног елемента

Осим тога, једно од важних правила за функцију облика L_k је да има јединичну вредност у чвору k на који се односи, док у осталим чворовима има вредност нуле.

У литератури се при формулацији линеарног троугаоног елемента срећемо са површинским (енгл. *area*) координатама које представљају природне координате троугаоног елемента, слика 6.1.3. Положај произвољне тачке троугла P , чије су координате x и y у Декартовом координатном систему, може се дефинисати преко површинских координата на следећи начин [10,13]:

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (6.1.21)$$

где су A_k површине троуглова 1, 2 и 3 према слици 6.1.3, а A површина елемента.

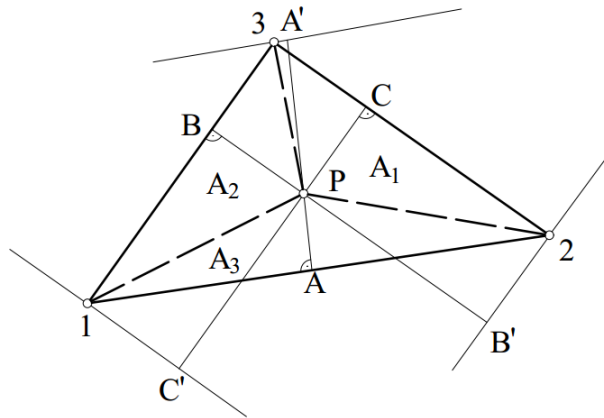


Слика 6.1.3 Координатни систем троугаоног елемента

Очигледно важи једнакост:

$$L_1 + L_2 + L_3 = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A} = 1 \quad (6.1.22)$$

Површинске координате се у литератури такође дефинишу као однос растојања тачке P до супротне стране елемента и растојања чвора до те стране, слика 6.1.4. Дакле, површинске координате тежишта елемента су $L_1 = L_2 = L_3 = 1/3$. [5]



Слика 6.1.4 Површинске координате троугаоног елемента

Како деформације елемента одређујемо парцијалним диференцирањем у односу на Декартове координате, потребно је координате произвољне тачке троугла x и y дефинисати преко површинских координата L_k , те за линеарни троугаони елемент важи једнакост:

$$\begin{aligned} x &= L_1 X_1^1 + L_2 X_1^2 + L_3 X_1^3 \\ y &= L_1 X_2^1 + L_2 X_2^2 + L_3 X_2^3 \end{aligned} \quad (6.1.23)$$

Уз коришћење релације $L_1 + L_2 + L_3 = 1$, претходна једначина се може написати у матричном облику:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_1^1 & X_1^2 & X_1^3 \\ X_2^1 & X_2^2 & X_2^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \quad (6.1.24)$$

Инвертовањем ове релације добијамо:

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (6.1.25)$$

где је површина троугаоног елемента дефинисана релацијом (6.1.15), а коефицијенти a_k, b_k и c_k релацијом (6.1.20). Напоменимо да се валидност релације (6.1.24) може лако проверити потврђивањем тачних вредности координата у чворовима елемента, а које се очигледно могу добити заменом јединичне вредности природних координата у чворовима на које се односе.

Дакле, површинске координате се могу изразити преко Декартових координата на следећи начин:

$$L_k = \frac{A_k}{A} = \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y) \quad k=1, 2, 3 \quad (6.1.26)$$

Као што можемо видети, упоређивањем израза (6.1.26) и (6.1.18), површинске координате представљају функције облика троугаоног елемента. Дакле, сваком скупу површинских координата (L_1, L_2, L_3) одговара јединствени скуп Декартових координата (x, y) .

6.1.2 Деформационо поље

Компоненте деформације одређујемо према дефиницији, на основу (2.1.9), диференцирањем померања (6.1.17) по Декартовим координата, при чему у троугаоном елементу у било којој тачки можемо дефинисати три компоненте деформације:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial L_1}{\partial x} U_1^1 + \frac{\partial L_2}{\partial x} U_1^2 + \frac{\partial L_3}{\partial x} U_1^3 \\ e_{yy} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial L_1}{\partial y} U_2^1 + \frac{\partial L_2}{\partial y} U_2^2 + \frac{\partial L_3}{\partial y} U_2^3 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial L_1}{\partial y} U_1^1 + \frac{\partial L_1}{\partial x} U_2^1 + \frac{\partial L_2}{\partial y} U_1^2 + \frac{\partial L_2}{\partial x} U_2^2 + \frac{\partial L_3}{\partial y} U_1^3 + \frac{\partial L_3}{\partial x} U_2^3 \end{aligned} \quad (6.1.27)$$

Парцијални изводи интерполационих функција L_k по Декартовим координата су једнаки:

$$\begin{aligned} L_{k,x} &= \frac{\partial L_k}{\partial x} = \frac{1}{2A} b_k \\ L_{k,y} &= \frac{\partial L_k}{\partial y} = \frac{1}{2A} c_k \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

Након одређивања парцијалних извода интерполационих функција, компоненте деформације можемо представити у облику:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{2A} \sum_{k=1}^3 b_k U_1^k \\ e_{yy} &= \frac{1}{2A} \sum_{k=1}^3 c_k U_2^k \end{aligned} \quad (6.1.29)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2A} \sum_{k=1}^3 (c_k U_1^k + b_k U_2^k)$$

Сада, користећи релације (6.1.29) и изводе интерполационих функција (6.1.28), матрични облик компонената деформације је:

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,x} & 0 & L_{2,x} & 0 & L_{3,x} & 0 \\ 0 & L_{1,y} & 0 & L_{2,y} & 0 & L_{3,y} \\ L_{1,y} & L_{1,x} & L_{2,y} & L_{2,x} & L_{3,y} & L_{3,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix} \quad (6.1.30)$$

Дакле, матрица извода интерполационих функција је облика:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (6.1.31)$$

где су коефицијенти који фигуришу у матрици дефинисани према (6.1.20).

Такође, релацију (6.1.30) можемо представити у облику:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^1 & \mathbf{B}^2 & \mathbf{B}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{U}^3 \end{Bmatrix} \quad (6.1.32)$$

где је матрица $\mathbf{B}^k$ за чвор k облика:

$$\mathbf{B}^k = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, 3 \quad (6.1.33)$$

Добијени облик матрице $\mathbf{B}^k$ је применљив код свих 2D елемената, при чему је број подматрица $\mathbf{B}^k$ укупне матрице $\mathbf{B}$ елемента дефинисан бројем чворова.

Такође, важно је уочити да матрица $\mathbf{B}$ садржи елементе који имају константне вредности, те је деформација у овом елементу константна.

6.2 Изопараметарска формулација троугаоног елемента

У претходном поглављу описана је генерализована формулација троугаоног елемента код које су, у односу на локални координатни систем x, y , претпостављена померања $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ у виду полинома као линеарна комбинација координата x и y , у којима непознати коефицијенти α_{0i} , α_{1i} и α_{2i} , $i = 1, 2$, представљају генерализоване координате. Такође, уочено је да су генерализоване координате линеарне комбинације померања чворова.

Проблем код ове формулације се јавља код закривљене геометрије, када је неопходно применити велики број елемената како би се адекватно представила геометрија анализираниог проблема, те у овим околностима изопараметарски концепт који се приписује најчешће Таиг-у [14] и Игнс-у [15], добија предност. Наиме, изопараметарска формулација се заснива на пресликавању из x, y простора елемента чије површи могу бити закривљене, у елемент чије су координате чворова r_i, s_i у природном координатном систему једнаке ± 1 .

Дакле, интерполационе функције се сада дефинишу у природном координатном систему r, s елемента, при чему се геометрија и поље померања интерполирају истим функцијама облика.

6.2.1 Интерполација геометрије и померања

Интерполација за координате x и y тачака унутар елемента и померања су:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{X} \quad (6.2.1)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{U} \quad (6.2.2)$$

где је интерполациона матрица $\mathbf{H}$ облика:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \quad (6.2.3)$$

и вектори координата чворова $\mathbf{X}$ и померања чворова $\mathbf{U}$ у Декартовом координатном систему:

$$\mathbf{X}^T = [X_1^1 \quad X_2^1 \quad X_1^2 \quad X_2^2 \quad X_1^3 \quad X_2^3] \quad (6.2.4)$$

$$\mathbf{U}^T = [U_1^1 \quad U_2^1 \quad U_1^2 \quad U_2^2 \quad U_1^3 \quad U_2^3] \quad (6.2.5)$$

У компоненталном облику, релације (6.2.1) и (6.2.2) се могу написати као:

$$x_i = \sum_{k=1}^3 h_k X_i^k \quad i=1, 2 \quad (6.2.6)$$

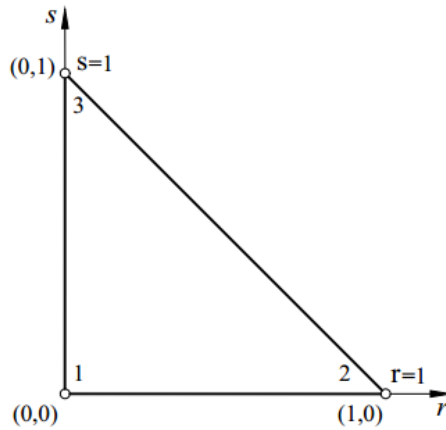
и

$$u_i = \sum_{k=1}^3 h_k U_i^k \quad i=1, 2 \quad (6.2.7)$$

где $i=1$ одговара оси x , а $i=2$ оси y .

Интерполационе функције $h_k(r, s)$ дефинисане су у природном координатном систему елемента, слика 6.2.1, при чему у случају линеарног троугаоног елемента имају облик [10]:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 - r - s \\ h_2 &= r \\ h_3 &= s \end{aligned} \quad (6.2.8)$$



Слика 6.2.1 Природни координатни систем троугаоног елемента

Дакле, интерполационе функције су линеарне по координатама r и s , те се интерполација геометрије и померања такође назива линеарном.

Такође, као што је истакнуто у претходном поглављу, функција $h_k = 1$ у чвору k , а једнака је нули у свим осталим чворовима. Дакле:

$$h_k(r_j, s_j) = \delta_{kj} \quad (6.2.9)$$

где је δ_{kj} Кронкеров делта симбол ($\delta_{kj} = 1, k = j$; $\delta_{kj} = 0, k \neq j$).

Дакле, једначином (6.2.1) дефинисана је веза између Декартових и природних координата у свакој тачки елемента.

Важно је напоменути да се интерполационе функције (6.2.8) могу одредити потпуно аналогно као и интерполационе функције генерализоване формулације, са једином разликом што је полазни интерполациони полином линеаран по природним координатама r и s . У додатку Б приказано је одређивање интерполационих функција у природном координатном систему троугаоног елемента.

6.2.2 Деформационо поље

У овом поглављу биће дефинисана веза између деформација и чворних померања линеарног троугаоног елемента код којег компоненте деформације, према дефиницији (2.1.9), одређујемо диференцирањем померања (6.2.2) у односу на Декартове координате на следећи начин:

$$\begin{aligned} e_{xx} = u_{1,1} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h_k}{\partial x} U_1^k \\ e_{yy} = u_{2,2} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h_k}{\partial y} U_2^k \\ \gamma_{xy} = u_{1,2} + u_{2,1} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h_k}{\partial y} U_1^k + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h_k}{\partial x} U_2^k \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Дакле, три компоненте деформације линеарног троугаоног елемента дефинишу вектор деформације чији је матрични облик на основу (6.2.10):

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & 0 & h_{2,1} & 0 & h_{3,1} & 0 \\ 0 & h_{1,2} & 0 & h_{2,2} & 0 & h_{3,2} \\ h_{1,2} & h_{1,1} & h_{2,2} & h_{2,1} & h_{3,2} & h_{3,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix} \quad (6.2.11)$$

Како су интерполационе функције h_k функције природних координата r и s , да бисмо одредили њихове изводе у односу на Декартове координате, неопходно је применити поступак посредног диференцирања према којем важи [2]:

$$h_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial x_j} = \frac{\partial h_k}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} + \frac{\partial h_k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} \quad (6.2.12)$$

Као што је познато, везе парцијалних извода координата природног и Декартовог координатног система, представљају матрицу Јакобијана $\mathbf{J}$, те важи релација:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (6.2.13)$$

где је вектор извода $\partial / \partial \mathbf{r}$ дефинисан као:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (6.2.14)$$

а вектор извода $\partial / \partial \mathbf{x}$ као:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6.2.15)$$

Очигледно, вектор извода по Декартовим координатама можемо изразити преко инверзног Јакобијана следећом релацијом:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (6.2.16)$$

Дакле, у складу са релацијом (6.2.13) можемо дефинисати Јакобијан трансформације између Декартовог и природног координатног система као:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (6.2.17)$$

Односно инверзни Јакобијан као:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6.2.18)$$

Сада се изводи дефинисани релацијом (6.2.12) могу изразити у облику:

$$h_{k,j} = J_{j1}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial r} + J_{j2}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial s} \quad (6.2.19)$$

Изводи $\partial h_k / \partial r, \partial h_k / \partial s$ се добијају диференцирањем које следи директно из дефиниције h_k према одговарајућим изразима датим једначинама (6.2.8).

Да бисмо одредили матрицу извода интерполационих функција, најпре ћемо интерполацију геометрије (6.2.1) представити у компоненталном облику као:

$$\begin{aligned} x &= h_1 X_1^1 + h_2 X_1^2 + h_3 X_1^3 = (1-r-s) X_1^1 + r X_1^2 + s X_1^3 \\ y &= h_1 X_2^1 + h_2 X_2^2 + h_3 X_2^3 = (1-r-s) X_2^1 + r X_2^2 + s X_2^3 \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Сада су елементи матрице Јакобијана (6.2.17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= X_1^2 - X_1^1 & \frac{\partial x}{\partial s} &= X_1^3 - X_1^1 \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= X_2^2 - X_2^1 & \frac{\partial y}{\partial s} &= X_2^3 - X_2^1 \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

или у матричном облику:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} X_1^2 - X_1^1 & X_2^2 - X_2^1 \\ X_1^3 - X_1^1 & X_2^3 - X_2^1 \end{bmatrix} \quad (6.2.22)$$

Инверзни Јакобијан трансформације одређујемо преко кофактора, при чему је детаљан поступак приказан у додатку Ц. Крајњи облик инверзне матрице Јакобијана је:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} X_2^3 - X_2^1 & X_2^1 - X_2^2 \\ X_1^1 - X_1^3 & X_1^2 - X_1^1 \end{bmatrix} \quad (6.2.23)$$

где је $|\mathbf{J}|$ детерминанта матрице Јакобијана облика:

$$\det J = \begin{vmatrix} X_1^2 - X_1^1 & X_2^2 - X_2^1 \\ X_1^3 - X_1^1 & X_2^3 - X_2^1 \end{vmatrix} = X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2) = 2A \quad (6.2.24)$$

Сада су према (6.2.19) изводи интерполационих функција h_1 , h_2 и h_3 у односу на Декартове координате облика:

$$\begin{aligned} h_{1,1} &= \frac{\partial h_1}{\partial x} = J_{11}^{-1} \frac{\partial h_1}{\partial r} + J_{12}^{-1} \frac{\partial h_1}{\partial s} = \frac{1}{2A} (X_2^2 - X_2^3) \\ h_{1,2} &= \frac{\partial h_1}{\partial y} = J_{21}^{-1} \frac{\partial h_1}{\partial r} + J_{22}^{-1} \frac{\partial h_1}{\partial s} = \frac{1}{2A} (X_1^3 - X_1^1) \\ h_{2,1} &= \frac{\partial h_2}{\partial x} = J_{11}^{-1} \frac{\partial h_2}{\partial r} + J_{12}^{-1} \frac{\partial h_2}{\partial s} = \frac{1}{2A} (X_2^3 - X_2^1) \\ h_{2,2} &= \frac{\partial h_2}{\partial y} = J_{21}^{-1} \frac{\partial h_2}{\partial r} + J_{22}^{-1} \frac{\partial h_2}{\partial s} = \frac{1}{2A} (X_1^1 - X_1^3) \\ h_{3,1} &= \frac{\partial h_3}{\partial x} = J_{11}^{-1} \frac{\partial h_3}{\partial r} + J_{12}^{-1} \frac{\partial h_3}{\partial s} = \frac{1}{2A} (X_2^1 - X_2^2) \\ h_{3,2} &= \frac{\partial h_3}{\partial y} = J_{21}^{-1} \frac{\partial h_3}{\partial r} + J_{22}^{-1} \frac{\partial h_3}{\partial s} = \frac{1}{2A} (X_1^2 - X_1^1) \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

Заменом добијених вредности у вектор деформације (6.2.11) добијамо:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} X_2^2 - X_2^3 & 0 & X_2^3 - X_2^1 & 0 & X_2^1 - X_2^2 & 0 \\ 0 & X_1^3 - X_1^2 & 0 & X_1^1 - X_1^3 & 0 & X_1^2 - X_1^1 \\ X_1^3 - X_1^2 & X_2^2 - X_2^3 & X_1^1 - X_1^3 & X_2^3 - X_2^1 & X_1^2 - X_1^1 & X_2^1 - X_2^2 \end{bmatrix} \quad (6.2.26)$$

Матрица извода интерполационих функција $\mathbf{B}$ елемента је облика:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}^1 \quad \mathbf{B}^2 \quad \mathbf{B}^3] \quad (6.2.27)$$

где су подматрице $\mathbf{B}^k$ чвора k облика:

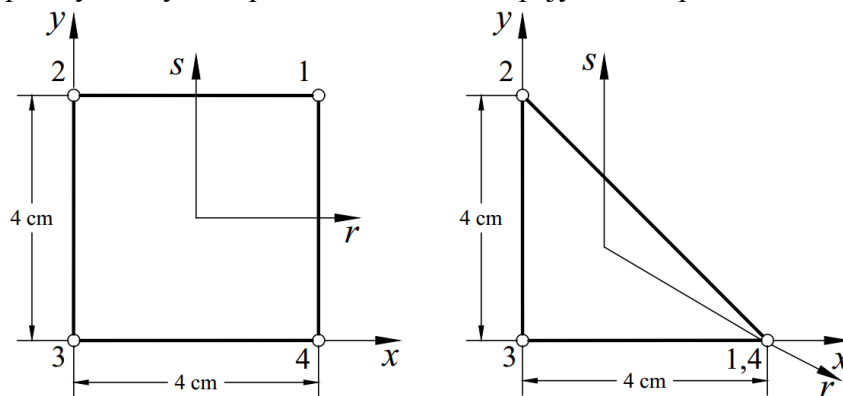
$$\mathbf{B}^k = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} X_2^l - X_2^m & 0 \\ 0 & X_1^m - X_1^l \\ X_1^m - X_1^l & X_2^l - X_2^m \end{bmatrix} \quad (6.2.28)$$

Као што можемо видети, чланови матрице $\mathbf{B}$ елемента су управо коефицијенти b_k и c_k дефинисани релацијама (6.1.19) односно (6.1.20), те претходну релацију можемо написати у облику:

$$\mathbf{B}^k = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix} \quad (6.2.29)$$

6.3 Дегенерисани троугаони елемент

Дегенерисани троугаони елемент подразумева елемент који се добија дисторзијом основног 2D квадрилатералног елемента. На слици 6.3.1 приказан је троугаони елемент добијен дегенерацијом, односно поклапањем одговарајућих угаоних чворова основног елемента. Дакле, добијање интерполационих функција дегенерисаних елемената управо узима у обзир поклапање одговарајућих чворова.



Слика 6.3.1 Дегенерација 2D елемента

Наиме, за троугаони елемент представљен сликом 6.3.1 усвојено је поклапање чворова 1 и 2, те је неопходно кориговати интерполациону функцију h_1 , при чему остале интерполационе функције остају непромењене. Ова процедура биће илустрована примером.

6.3.1 Пример дегенерације 2D елемента

Циљ овог примера практично представља доказ да поклапањем било која два чвора основног квадрилатералног елемента добијамо линеарни троугаони елемент, односно елемент са константном деформацијом.

Координате x и y тачака троугаоног коначног елемента, узимајући у обзир интерполационе функције 2D елемената, су:

$$x = x_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)X_1^1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)X_1^2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)X_1^3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)X_1^4$$

$$y = x_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)X_2^1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)X_2^2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)X_2^3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)X_2^4$$

Како разматрамо троугаони елемент добијен поклапањем чворова 1 и 4, заменом услова $X_i^4 = X_i^1$, добијамо:

$$x = x_1 = \frac{1}{2}(1+r)X_1^1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)X_1^2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)X_1^3$$

$$y = x_2 = \frac{1}{2}(1+r)X_2^1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)X_2^2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)X_2^3$$

Заменом вредности координата чворова, координате тачака троугаоног елемента у Декартовом координатном систему су облика:

$$x = 2(1+r)$$

$$y = (1-r)(1+s)$$

Да бисмо одредили компоненте деформације, неопходно је одредити Јакобијан и инверзни Јакобијан, те су одговарајући изводи једнаки:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = 2 \quad \frac{\partial y}{\partial r} = -(1+s)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 1-r$$

Сада су Јакобијан и инверзни Јакобијан облика:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & -(1+s) \\ 0 & (1-r) \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2(1-r)} \begin{bmatrix} 1-r & 1+s \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \left(\frac{1+s}{1-r} \right) \\ 0 & \frac{1}{1-r} \end{bmatrix}$$

Аналогно интерполацији за геометрију, компоненте померања тачака у правцу оса x и y узимајући у обзир услов $U_i^4 = U_i^1$ су:

$$u_1 = \frac{1}{2}(1+r)U_1^1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)U_1^2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)U_1^3$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(1+r)U_2^1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)U_2^2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)U_2^3$$

Односно, изводи компонената померања по природним координата r и s су:

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{1}{2}U_1^1 - \frac{1}{4}(1+s)U_1^2 - \frac{1}{4}(1-s)U_1^3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} = \frac{1}{4}(1-r)U_1^2 - \frac{1}{4}(1-r)U_1^3$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{1}{2}U_2^1 - \frac{1}{4}(1+s)U_2^2 - \frac{1}{4}(1-s)U_2^3$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial s} = \frac{1}{4}(1-r)U_2^2 - \frac{1}{4}(1-r)U_2^3$$

На основу повезаности вектора извода по Декартовим координата $\partial/\partial \mathbf{x}$ и вектора извода по природним координатама $\partial/\partial \mathbf{r}$ која је дефинисана инверзним Јакобијаном, следе изрази за компоненте вектора деформације у Декартовом координатном систему:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\left(\frac{1+s}{1-r}\right) \\ 0 & \frac{1}{1-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}(1+s) & 0 & -\frac{1}{4}(1-s) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(1-r) & 0 & -\frac{1}{4}(1-r) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix}$$

Након сређивања, претходна релација је облика:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix}$$

Аналогно изводима компоненте померања тачака у правцу осе x у односу на Декартове координате, долазимо и до релација за изводе компоненте померања у правцу осе y :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\left(\frac{1+s}{1-r}\right) \\ 0 & \frac{1}{1-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}(1+s) & 0 & -\frac{1}{4}(1-s) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1-r) & 0 & -\frac{1}{4}(1-r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix}$$

Односно:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix}$$

Компоненте вектора деформације коначно су облика:

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix}$$

На основу добијеног израза, можемо закључити да је вектор деформације за било коју вредност померања чворова U_i^k независан од природних координата r и s . Дакле, добијен је троугаони елемент константних деформација.

У анализираном примеру добијања линеарног троугаоног елемента, можемо приметити да је матрица Јакобијана $\mathbf{J}$ сингуларна, тј. да је њена детерминанта једнака нули за вредност природне координате $r = +1$, као и да ова сингуларност изостаје приликом одређивања матрице извода интерполационих функција.

7. Тетраедарски коначни елемент

Тетраедарски коначни елемент припада фамилији 3D коначних елемената и уједно представља најједноставнији елемент ове фамилије. Ограничавају га четири површи, при чему може имати различит број чворова, уобичајено од четири до двадесет. Такође, овај елемент одликују три степена слободе по чвору, померања у правцу оса x , y и z .

У овом раду биће разматран линеарни тетраедарски елемент, односно четворочворни тетраедарски елемент. Прве препоруке примене ових елемената јављају се још 1962. [16], док су Rashid и Rockenhauser 1968. први применили тродимензионалну анализу на реалним проблемима [17]. У литератури се често назива елементом константних деформација, јер се поље померања интерполира линеарном полиномном функцијом.

Како је линеарни тетраедарски елемент еквивалентан троугаоном елементу у 2D анализи, да би се постигао довољан степен тачности решења, очигледно је за дискретизацију непходан велики број ових елемената. Као и у случају троугаоног елемента, у зависности од избора координатног система, развијено је више приступа за његово формулисање, те ће у наставку исти бити детаљно представљени.

7.1 Генерализована формулација тетраедарског елемента

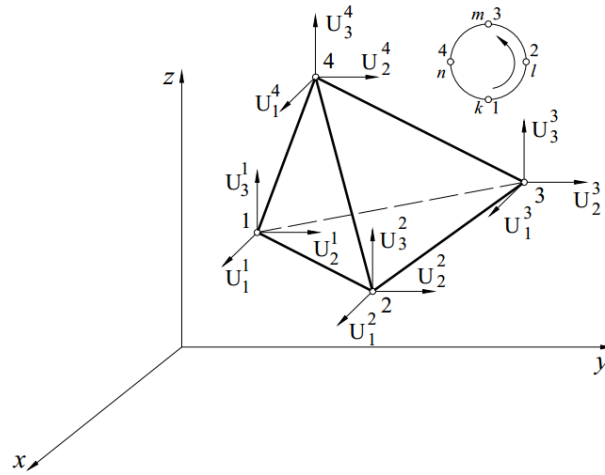
Генерализована формулација тетраедарског елемента заснива се на истим претпоставкама као и у случају формулације 2D троугаоног елемента, које су представљене детаљно у претходном поглављу. Дакле, како се ради о елементу чији чворови имају три координате, поље померања унутар тетраедарског елемента се интерполира функцијама облика које су линеарне по координатама x , y и z . Такође, с обзиром да разматрамо линеарни тетраедарски елемент, број непознатих генерализованих координата у интерполацији померања ће у овом случају бити четири. Дакле, поступак одређивања функција облика тетраедарског елемента је потпуно аналоган поступку добијања функција облика троугаоног елемента. Дакле, матрице овог елемента биће дефинисане у односу на Декартов координатни систем, при чему ће се све релације у овом поглављу односити на елементе са правим ивицама.

7.1.1 Интерполација поља померања

Линеарни тетраедарски елемент приказан је у Декартовом координатном систему на слици 7.1.1. Геометрија овог елемента дефинисана је са четири чвора, при чему се нумерација прва три чвора врши у позитивном математичком смеру, односно у смеру супротном од кретања казаљке на сату, посматрајући последњи чвор. Вектор положаја чвора k у глобалном Декартовом координатном систему је облика:

$$\mathbf{X}^k = \begin{bmatrix} X_1^k & X_2^k & X_3^k \end{bmatrix}^T \quad (7.1.1)$$

где индекси 1, 2 и 3 одговарају осама x , y и z , респективно.



Слика 7.1.1 Линеарни тетраедарски елемент

Такође, вектор померања чворова дефинишу три компоненте померања у правцу оса x, y и z , при чему за k -ти чвор исти можемо представити у облику:

$$\mathbf{U}^k = \begin{bmatrix} U_1^k & U_2^k & U_3^k \end{bmatrix}^T \quad (7.1.2)$$

. Дакле, компоненте померања материјалних тачака образују вектор:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1(x, y, z) \\ u_2(x, y, z) \\ u_3(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (7.1.3)$$

Интерполација померања материјалних тачака линеарног тетраедарског елемента претпоставља се у облику [13]:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 U_1^1 + L_2 U_1^2 + L_3 U_1^3 + L_4 U_1^4 \\ u_2 &= L_1 U_2^1 + L_2 U_2^2 + L_3 U_2^3 + L_4 U_2^4 \\ u_3 &= L_1 U_3^1 + L_2 U_3^2 + L_3 U_3^3 + L_4 U_3^4 \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Ову релацију у компоненталном облику можемо представити на следећи начин:

$$u_i = \sum_{k=1}^4 L_k U_i^k \quad i=1,2,3 \quad (7.1.5)$$

где је U_i^k компонента померања чвора k у правцу осе i , а $L_k(x, y, z)$ функције облика, односно интерполационе функције чвора k , при чему индекс $i=1$ одговара оси x , $i=2$ оси y и $i=3$ оси z .

У матричном облику, релација (7.1.4) је облика:

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathbf{L}^T \mathbf{U}_1 \\ u_2 &= \mathbf{L}^T \mathbf{U}_2 \\ u_3 &= \mathbf{L}^T \mathbf{U}_3 \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

где су: $\mathbf{L}^T = \{L_1 L_2 L_3 L_4\}$, $\mathbf{U}_1 = \{U_1^1 U_1^2 U_1^3 U_1^4\}^T$, $\mathbf{U}_2 = \{U_2^1 U_2^2 U_2^3 U_2^4\}^T$, $\mathbf{U}_3 = \{U_3^1 U_3^2 U_3^3 U_3^4\}^T$.

Уколико се изврши регруписавање чланова у вектору чворних померања, изрази за интерполацију (7.1.6) такође се могу представити као:

$$\begin{aligned} u_1 &= \{L_1 \ 0 \ 0 \ L_2 \ 0 \ 0 \ L_3 \ 0 \ 0 \ L_4 \ 0 \ 0\}^T \mathbf{U} \\ u_2 &= \{0 \ L_1 \ 0 \ 0 \ L_2 \ 0 \ 0 \ L_3 \ 0 \ 0 \ L_4 \ 0\}^T \mathbf{U} \\ u_3 &= \{0 \ 0 \ L_1 \ 0 \ 0 \ L_2 \ 0 \ 0 \ L_3 \ 0 \ 0 \ L_4\}^T \mathbf{U} \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

или матрично:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1^T \\ \mathbf{L}_2^T \\ \mathbf{L}_3^T \end{bmatrix} \mathbf{U} \quad (7.1.8)$$

где су $\mathbf{L}_1^T$, $\mathbf{L}_2^T$ и $\mathbf{L}_3^T$ вектори интерполационих функција:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1^T &= [L_1 \ 0 \ 0 \ L_2 \ 0 \ 0 \ L_3 \ 0 \ 0 \ L_4 \ 0 \ 0] \\ \mathbf{L}_2^T &= [0 \ L_1 \ 0 \ 0 \ L_2 \ 0 \ 0 \ L_3 \ 0 \ 0 \ L_4 \ 0] \\ \mathbf{L}_3^T &= [0 \ 0 \ L_1 \ 0 \ 0 \ L_2 \ 0 \ 0 \ L_3 \ 0 \ 0 \ L_4] \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

а $\mathbf{U}$ вектор померања чворова, дефинисани као:

$$\mathbf{U}^T = [U_1^1 U_2^1 U_3^1 U_1^2 U_2^2 U_3^2 U_1^3 U_2^3 U_3^3 U_1^4 U_2^4 U_3^4] \quad (7.1.10)$$

Интерполационе функције L_k одређујемо кренувши од претпоставке да четири чвора тетраедарског елемента образују линеарно поље померања, тако да се локална померања тачака елемента u_1, u_2 и u_3 апроксимирају полиномом који је линеаран по x , y и z , следећег облика:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_{01} + \alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z \\ u_2 &= \alpha_{02} + \alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z \\ u_3 &= \alpha_{03} + \alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z \end{aligned} \quad (7.1.11)$$

У компоненталном облику претходна релација се може представити као:

$$u_i = \alpha_{0i} + \alpha_{pi}x_p \quad i, p = 1, 2, 3 \quad (7.1.12)$$

где су $\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{03}$ и $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{33}$ генерализоване координате, а x, y и z координате материјалних тачака елемента у Декартовом координатном систему.

Ако затим претпоставимо да је поље померања елемента u_i дефинисано преко вредности померања у чворовима U_i^1, U_i^2, U_i^3 и U_i^4 , тада чворне вредности морају да задовоље интерполационе полиноме (7.1.11), те заменом чворних вредности у релацију (7.1.11) добијамо систем од четири једначине са четири непознате генерализоване координате за сваку компоненту померања. У индексној нотацији, овај систем од дванаест линеарних једначина, можемо представити у следећем облику:

$$U_i^k = \alpha_{0i} + \alpha_{pi}X_p^k \quad i, p = 1, 2, 3 \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (7.1.13)$$

Односно у развијеном облику:

$$\begin{aligned} U_i^1 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i} X_1^1 + \alpha_{2i} X_2^1 + \alpha_{3i} X_3^1 \\ U_i^2 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i} X_1^2 + \alpha_{2i} X_2^2 + \alpha_{3i} X_3^2 \\ U_i^3 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i} X_1^3 + \alpha_{2i} X_2^3 + \alpha_{3i} X_3^3 \\ U_i^4 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i} X_1^4 + \alpha_{2i} X_2^4 + \alpha_{3i} X_3^4 \end{aligned} \quad (7.1.14)$$

Дакле, потребно је за сваки правац i померања чворова решити систем једначина (7.1.13), а затим добијене вредности генерализованих координата заменити у релације (7.1.11). Систем линеарних једначина дефинисан претходном релацијом ћемо представити у матричном облику:

$$\begin{Bmatrix} U_i^1 \\ U_i^2 \\ U_i^3 \\ U_i^4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ 1 & X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ 1 & X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \\ 1 & X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{0i} \\ \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \alpha_{3i} \end{Bmatrix} \quad (7.1.15)$$

Очигледно, непознате генерализоване координате i -тог правца померања одређујемо на основу:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{0i} \\ \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \alpha_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ 1 & X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ 1 & X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \\ 1 & X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U_i^1 \\ U_i^2 \\ U_i^3 \\ U_i^4 \end{Bmatrix} \quad (7.1.16)$$

Да бисмо одредили генерализоване координате, неопходно је одредити инверзну матрицу система (7.1.15), коју ћемо означити као $\mathbf{A}^{-1}$. Детаљан начин извођења ове матрице преко кофактора описан је у додатку Д, те ћемо је представити према дефиницији у следећем облику:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \quad (7.1.17)$$

где су a_k, b_k, c_k и d_k кофактори матрице облика:

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{vmatrix} X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \\ X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 \end{vmatrix} & b_1 &= -\begin{vmatrix} 1 & X_2^2 & X_3^2 \\ 1 & X_2^3 & X_3^3 \\ 1 & X_2^4 & X_3^4 \end{vmatrix} & c_1 &= -\begin{vmatrix} X_1^2 & 1 & X_3^2 \\ X_1^3 & 1 & X_3^3 \\ X_1^4 & 1 & X_3^4 \end{vmatrix} & d_1 &= -\begin{vmatrix} X_1^2 & X_2^2 & 1 \\ X_1^3 & X_2^3 & 1 \\ X_1^4 & X_2^4 & 1 \end{vmatrix} \\ a_2 &= \begin{vmatrix} X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \\ X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 \\ X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \end{vmatrix} & b_2 &= \begin{vmatrix} 1 & X_2^3 & X_3^3 \\ 1 & X_2^4 & X_3^4 \\ 1 & X_2^1 & X_3^1 \end{vmatrix} & c_2 &= \begin{vmatrix} X_1^3 & 1 & X_3^3 \\ X_1^4 & 1 & X_3^4 \\ X_1^1 & 1 & X_3^1 \end{vmatrix} & d_2 &= \begin{vmatrix} X_1^3 & X_2^3 & 1 \\ X_1^4 & X_2^4 & 1 \\ X_1^1 & X_2^1 & 1 \end{vmatrix} \\ a_3 &= \begin{vmatrix} X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 \\ X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \end{vmatrix} & b_3 &= -\begin{vmatrix} 1 & X_2^4 & X_3^4 \\ 1 & X_2^1 & X_3^1 \\ 1 & X_2^2 & X_3^2 \end{vmatrix} & c_3 &= -\begin{vmatrix} X_1^4 & 1 & X_3^4 \\ X_1^1 & 1 & X_3^1 \\ X_1^2 & 1 & X_3^2 \end{vmatrix} & d_3 &= -\begin{vmatrix} X_1^4 & X_2^4 & 1 \\ X_1^1 & X_2^1 & 1 \\ X_1^2 & X_2^2 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (7.1.18)$$

$$a_4 = \begin{vmatrix} X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \end{vmatrix} \quad b_4 = \begin{vmatrix} 1 & X_2^1 & X_3^1 \\ 1 & X_2^2 & X_3^2 \\ 1 & X_2^3 & X_3^3 \end{vmatrix} \quad c_4 = \begin{vmatrix} X_1^1 & 1 & X_3^1 \\ X_1^2 & 1 & X_3^2 \\ X_1^3 & 1 & X_3^3 \end{vmatrix} \quad d_4 = \begin{vmatrix} X_1^1 & X_2^1 & 1 \\ X_1^2 & X_2^2 & 1 \\ X_1^3 & X_2^3 & 1 \end{vmatrix}$$

а $\det A$ детерминанта матрице система:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ 1 & X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ 1 & X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \\ 1 & X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 \end{vmatrix} = 6V \quad (7.1.19)$$

Дакле, детерминанта матрице система једнака је запремини паралелопипеда, која је у односу 1:6 са запремином тетраедра [12].

Након замене (7.1.17) у (7.1.16) генерализоване координате се могу написати у облику:

$$\begin{aligned} \alpha_{0i} &= \frac{1}{6V} (a_1 U_i^1 + a_2 U_i^2 + a_3 U_i^3 + a_4 U_i^4) \\ \alpha_{1i} &= \frac{1}{6V} (b_1 U_i^1 + b_2 U_i^2 + b_3 U_i^3 + b_4 U_i^4) \\ \alpha_{2i} &= \frac{1}{6V} (c_1 U_i^1 + c_2 U_i^2 + c_3 U_i^3 + c_4 U_i^4) \\ \alpha_{3i} &= \frac{1}{6V} (d_1 U_i^1 + d_2 U_i^2 + d_3 U_i^3 + d_4 U_i^4) \end{aligned} \quad (7.1.20)$$

Заменом добијених генерализованих координата (7.1.20) у интерполацију померања (7.1.12) добијамо:

$$u_i = \frac{1}{6V} [U_i^1 (a_1 + x b_1 + y c_1 + z d_1) + U_i^2 (a_2 + x b_2 + y c_2 + z d_2) + U_i^3 (a_3 + x b_3 + y c_3 + z d_3) + U_i^4 (a_4 + x b_4 + y c_4 + z d_4)] \quad (7.1.21)$$

Упоређивањем израза (7.1.21) и (7.1.5) следи релација за функцију облика у k -том чвору:

$$L_k = \frac{1}{6V} (a_k + x b_k + y c_k + z d_k) \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (7.1.22)$$

На основу израза за кофакторе (7.1.18), можемо дефинисати општи облик коефицијената a_k , b_k , c_k и d_k као:

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^k \begin{vmatrix} X_2^l & X_1^l & X_3^l \\ X_2^m & X_1^m & X_3^m \\ X_2^n & X_1^n & X_3^n \end{vmatrix} & b_k &= (-1)^k \begin{vmatrix} 1 & X_2^l & X_3^l \\ 1 & X_2^m & X_3^m \\ 1 & X_2^n & X_3^n \end{vmatrix} \\ c_k &= (-1)^k \begin{vmatrix} X_1^l & 1 & X_3^l \\ X_1^m & 1 & X_3^m \\ X_1^n & 1 & X_3^n \end{vmatrix} & d_k &= (-1)^k \begin{vmatrix} X_1^l & X_2^l & 1 \\ X_1^m & X_2^m & 1 \\ X_1^n & X_2^n & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad k, l, m, n = 1, 2, 3, 4 \quad (7.1.23)$$

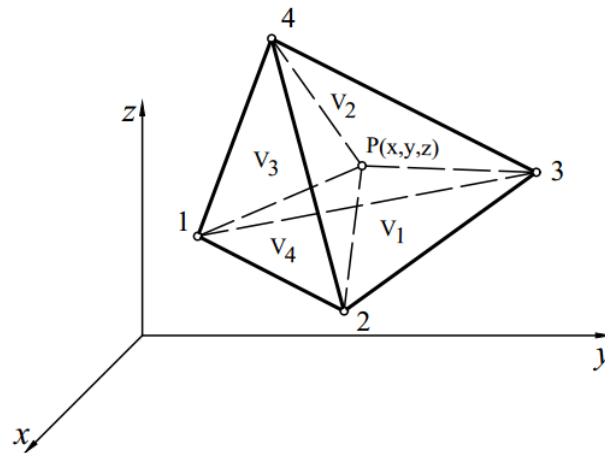
Дакле, ови коефицијенти се добијају цикличном пермутацијом индекса k, l, m, n - $klmn \rightarrow lmnk \rightarrow mnkl \rightarrow nklm$.

Функције облика $L_k(x, y, z)$ представљају облике померања када се цртају над посматраним елементом, међутим како зависе од три променљиве, њихова геометријска репрезентација није једноставна за представљање. Међутим, посматрањем само страница елемента, можемо уочити да функције облика линеарног тетраедарског елемента узимају облике над страницама који су идентични облицима дефинисаним код трочворног троугаоног елемента. Такође, као и у случају линеарног троугаоног елемента, једно од важних правила за функцију облика L_k је да има јединичну вредност у чвору k на који се односи, док у осталим чворовима има вредност нуле.

Слично површинским координатама у случају 2D елемента, у литератури се често при формулацији линеарног тетраедарског елемента срећемо са запреминским (енгл. *volume*) координатама, према којима се положај произвољне тачке троугла P може дефинисати на следећи начин [13]:

$$L_1 = \frac{V_{P234}}{V} \quad L_2 = \frac{V_{P134}}{V} \quad L_3 = \frac{V_{P124}}{V} \quad L_4 = \frac{V_{P123}}{V} \quad (7.1.24)$$

Дакле, запреминске координате L_k , слика 7.1.2, представљају однос запремине тетраедра којег образују тачка P и површина наспрамна чвору k и укупне запремине тетраедра.



Слика 7.1.2 Запреминске координате тетраедарског елемента

Очигледно важи једнакост:

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = \frac{V_{P234} + V_{P134} + V_{P124} + V_{P123}}{V} = 1 \quad (7.1.25)$$

Како деформације елемента одређујемо парцијалним диференцирањем у односу на Декартове координате, потребно је координате произвољне тачке троугла x, y и z дефинисати преко запреминских координата L_k , те за линеарни тетраедарски елемент елемент важи једнакост:

$$\begin{aligned} x &= L_1 X_1^1 + L_2 X_1^2 + L_3 X_1^3 + L_4 X_1^4 \\ y &= L_1 X_2^1 + L_2 X_2^2 + L_3 X_2^3 + L_4 X_2^4 \\ z &= L_1 X_3^1 + L_2 X_3^2 + L_3 X_3^3 + L_4 X_3^4 \end{aligned} \quad (7.1.26)$$

Уз коришћење релације $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$, претходна једначина се може написати у матричном облику:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ X_1^1 & X_1^2 & X_1^3 & X_1^4 \\ X_2^1 & X_2^2 & X_2^3 & X_2^4 \\ X_3^1 & X_3^2 & X_3^3 & X_3^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} \quad (7.1.27)$$

Инвертовањем ове релације добијамо:

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (7.1.28)$$

где је V запремина тетраедарског елемента дефинисана релацијом (7.1.19), а коефицијенти a_k, b_k, c_k и d_k релацијом (7.1.23). Као и у случају површинских координата, релација (7.1.27) се може лако проверити потврђивањем тачних вредности координата у чворовима елемента, а које се очигледно могу добити заменом јединичне вредности природних координата у чворовима на које се односе.

Дакле, запреминске координате се могу изразити преко Декартових координата на следећи начин:

$$L_k = \frac{V_k}{V} = \frac{1}{6V} (a_k + b_k x + c_k y + d_k z) \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (7.1.29)$$

Као што можемо видети, запреминске координате представљају геометријску интерпретацију функције облика (7.1.22).

6.1.2 Деформационо поље

Компоненте деформације одређујемо према дефиницији, на основу (2.1.9), диференцирањем померања (7.1.6) у матричном, односно (7.1.4) у компоненталном облику, по Декартовим координата, при чему у тетраедарском елементу у било којој тачки можемо дефинисати свих шест компонената деформације:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \mathbf{L}_{,x}^T \mathbf{U}_1 = \frac{\partial L_1}{\partial x} U_1^1 + \frac{\partial L_2}{\partial x} U_1^2 + \frac{\partial L_3}{\partial x} U_1^3 + \frac{\partial L_4}{\partial x} U_1^4 \\ e_{yy} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} = \mathbf{L}_{,y}^T \mathbf{U}_2 = \frac{\partial L_1}{\partial y} U_2^1 + \frac{\partial L_2}{\partial y} U_2^2 + \frac{\partial L_3}{\partial y} U_2^3 + \frac{\partial L_4}{\partial y} U_2^4 \\ e_{zz} &= \frac{\partial u_3}{\partial z} = \mathbf{L}_{,z}^T \mathbf{U}_3 = \frac{\partial L_1}{\partial z} U_3^1 + \frac{\partial L_2}{\partial z} U_3^2 + \frac{\partial L_3}{\partial z} U_3^3 + \frac{\partial L_4}{\partial z} U_3^4 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = \mathbf{L}_{,y}^T \mathbf{U}_1 + \mathbf{L}_{,x}^T \mathbf{U}_2 = \frac{\partial L_1}{\partial y} U_1^1 + \frac{\partial L_1}{\partial x} U_2^1 + \frac{\partial L_2}{\partial y} U_1^2 + \frac{\partial L_2}{\partial x} U_2^2 + \\ &\quad \frac{\partial L_3}{\partial y} U_1^3 + \frac{\partial L_3}{\partial x} U_2^3 + \frac{\partial L_4}{\partial y} U_1^4 + \frac{\partial L_4}{\partial x} U_2^4 \end{aligned} \quad (7.1.30)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{yz} &= \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = \mathbf{L}_{,z}^T \mathbf{U}_2 + \mathbf{L}_{,y}^T \mathbf{U}_3 = \frac{\partial L_1}{\partial z} U_2^1 + \frac{\partial L_1}{\partial y} U_3^1 + \frac{\partial L_2}{\partial z} U_2^2 + \frac{\partial L_2}{\partial y} U_3^2 + \\
&\quad \frac{\partial L_3}{\partial z} U_2^3 + \frac{\partial L_3}{\partial y} U_3^3 + \frac{\partial L_4}{\partial z} U_2^4 + \frac{\partial L_4}{\partial y} U_3^4 \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = \mathbf{L}_{,z}^T \mathbf{U}_1 + \mathbf{L}_{,x}^T \mathbf{U}_3 = \frac{\partial L_1}{\partial z} U_1^1 + \frac{\partial L_1}{\partial x} U_3^1 + \frac{\partial L_2}{\partial z} U_1^2 + \frac{\partial L_2}{\partial x} U_3^2 + \\
&\quad \frac{\partial L_3}{\partial z} U_1^3 + \frac{\partial L_3}{\partial x} U_3^3 + \frac{\partial L_4}{\partial z} U_1^4 + \frac{\partial L_4}{\partial x} U_3^4
\end{aligned}$$

Парцијални изводи интерполационих функција L_k , дефинисаних релацијом (7.1.22), по Декартовим координата су једнаки:

$$\begin{aligned}
L_{k,x} &= \frac{\partial L_k}{\partial x} = \frac{1}{6V} b_k \\
L_{k,y} &= \frac{\partial L_k}{\partial y} = \frac{1}{6V} c_k \\
L_{k,z} &= \frac{\partial L_k}{\partial z} = \frac{1}{6V} d_k
\end{aligned} \tag{7.1.31}$$

Након замене (7.1.31) у (7.1.30), компоненте деформације можемо представити у облику:

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{1}{6V} \sum_{k=1}^4 b_k U_1^k \\
e_{yy} &= \frac{1}{6V} \sum_{k=1}^4 c_k U_2^k \\
e_{zz} &= \frac{1}{6V} \sum_{k=1}^4 d_k U_3^k \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{6V} \sum_{k=1}^4 (c_k U_1^k + b_k U_2^k) \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{6V} \sum_{k=1}^4 (d_k U_2^k + c_k U_3^k) \\
\gamma_{zx} &= \frac{1}{6V} \sum_{k=1}^4 (b_k U_3^k + d_k U_1^k)
\end{aligned} \tag{7.1.32}$$

Међутим, да бисмо боље увидели компоненте матрице извода интерполационих функција, одредићемо парцијалне изводе вектора интерполационих функција дефинисаних релацијом (7.1.9):

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{1,x} &= \frac{1}{6V} [b_1 \ 0 \ 0 \ b_2 \ 0 \ 0 \ b_3 \ 0 \ 0 \ b_4 \ 0 \ 0] \\
\mathbf{L}_{1,y} &= \frac{1}{6V} [c_1 \ 0 \ 0 \ c_2 \ 0 \ 0 \ c_3 \ 0 \ 0 \ c_4 \ 0 \ 0] \\
\mathbf{L}_{1,z} &= \frac{1}{6V} [d_1 \ 0 \ 0 \ d_2 \ 0 \ 0 \ d_3 \ 0 \ 0 \ d_4 \ 0 \ 0] \\
\mathbf{L}_{2,x} &= \frac{1}{6V} [0 \ b_1 \ 0 \ 0 \ b_2 \ 0 \ 0 \ b_3 \ 0 \ 0 \ b_4 \ 0]
\end{aligned} \tag{7.1.33}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{2,y} &= \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{L}_{2,z} &= \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{L}_{3,x} &= \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \\
\mathbf{L}_{3,y} &= \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \\
\mathbf{L}_{3,z} &= \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Сада, користећи релације (7.1.30), интерполације (7.1.8) и изводе вектора интерполационих функција (7.1.33), матрични облик компонената деформације је:

$$\begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{1,x} \\ \mathbf{L}_{2,y} \\ \mathbf{L}_{3,z} \\ \mathbf{L}_{1,y} + \mathbf{L}_{2,x} \\ \mathbf{L}_{2,z} + \mathbf{L}_{3,y} \\ \mathbf{L}_{1,z} + \mathbf{L}_{3,x} \end{bmatrix} \mathbf{U} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 \\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & b_3 & 0 & c_4 & b_4 & 0 \\ 0 & d_1 & c_1 & 0 & d_2 & c_2 & 0 & d_3 & c_3 & 0 & d_4 & c_4 \\ d_1 & 0 & b_1 & d_2 & 0 & b_2 & d_3 & 0 & b_3 & d_4 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \\ U_3^3 \\ U_1^4 \\ U_2^4 \\ U_3^4 \end{Bmatrix} \quad (7.1.34)$$

Дакле, матрица извода интерполационих функција је облика:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 \\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & b_3 & 0 & c_4 & b_4 & 0 \\ 0 & d_1 & c_1 & 0 & d_2 & c_2 & 0 & d_3 & c_3 & 0 & d_4 & c_4 \\ d_1 & 0 & b_1 & d_2 & 0 & b_2 & d_3 & 0 & b_3 & d_4 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \quad (7.1.35)$$

где су коефицијенти који фигуришу у матрици дефинисани према (7.1.18).

Такође, релацију (7.1.34) можемо представити у облику:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^1 & \mathbf{B}^2 & \mathbf{B}^3 & \mathbf{B}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{U}^3 \\ \mathbf{U}^4 \end{Bmatrix} \quad (7.1.36)$$

где је матрица $\mathbf{B}^k$ за чвор k облика:

$$\mathbf{B}^k = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_k & 0 & 0 \\ 0 & c_k & 0 \\ 0 & 0 & d_k \\ c_k & b_k & 0 \\ 0 & d_k & c_k \\ d_k & 0 & b_k \end{bmatrix} \quad k=1,2,3,4 \quad (7.1.37)$$

Добијени облик матрице $\mathbf{B}^k$ је применљив код свих 3D елемената, при чему је број подматрица $\mathbf{B}^k$ укупне матрице $\mathbf{B}$ елемента дефинисан бројем чворова.

Такође, важно је уочити да матрица $\mathbf{B}$ садржи елементе који имају константне вредности, те је деформација у овом елементу константна.

7.2 Изопараметарска формулација тетраедарског елемента

Потпуно аналогно формулацији троугаоног елемента, у наставку ће бити представљена изопараметарска формулација тетраедарског елемента. Пресликавање елемента се у овом случају из x, y, z простора врши у природни координатни систем r, s, t елемента, са координатама такође једнаким ± 1 .

7.2.1 Интерполација геометрије и померања

Интерполација геометрије и померања материјалних тачака елемента су:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{X} \quad (7.2.1)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{U} \quad (7.2.2)$$

где је интерполациона матрица $\mathbf{H}$ облика:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_4 \end{bmatrix} \quad (7.2.3)$$

и вектори координата чворова $\mathbf{X}$ и померања чворова $\mathbf{U}$ у Декартовом координатном систему:

$$\mathbf{X}^T = [X_1^1 \ X_2^1 \ X_3^1 \ X_1^2 \ X_2^2 \ X_3^2 \ X_1^3 \ X_2^3 \ X_3^3 \ X_1^4 \ X_2^4 \ X_3^4] \quad (7.2.4)$$

$$\mathbf{U}^T = [U_1^1 \ U_2^1 \ U_3^1 \ U_1^2 \ U_2^2 \ U_3^2 \ U_1^3 \ U_2^3 \ U_3^3 \ U_1^4 \ U_2^4 \ U_3^4] \quad (7.2.5)$$

У компоненталном облику, релације (7.2.1) и (7.2.2) се могу написати као:

$$x_i = \sum_{k=1}^4 h_k X_i^k \quad i=1,2,3 \quad (7.2.6)$$

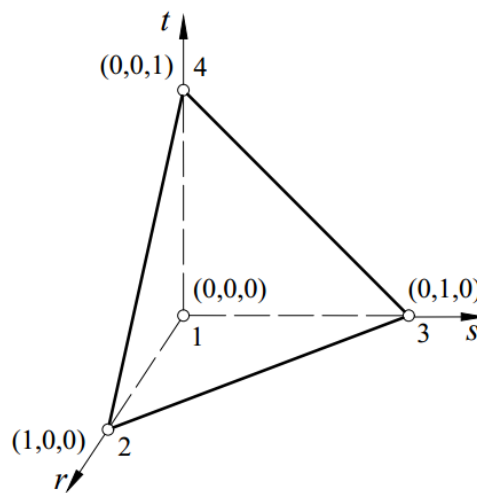
и

$$u_i = \sum_{k=1}^4 h_k U_i^k \quad i=1,2,3 \quad (7.2.7)$$

где $i=1$ одговара оси x , $i=2$ оси y и $i=3$ оси z .

Интерполационе функције $h_k(r,s,t)$ дефинисане су у природном координатном систему елемента, слика 7.2.1, при чему у случају линеарног тетраедарског елемента имају облик [10]:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 - r - s - t \\ h_2 &= r \\ h_3 &= s \\ h_4 &= t \end{aligned} \quad (7.2.8)$$



Слика 7.2.1 Природни координатни систем линеарног тетраедарског елемента

Дакле, интерполационе функције су линеарне по координатама r, s и t , те се интерполација геометрије и померања такође назива линеарном. Такође, као што је истакнуто у претходном поглављу, функција $h_k = 1$ у чвору k , а једнака је нули у свим осталим чворовима.

Дакле,

$$h_k(r_j, s_j, t_j) = \delta_{kj} \quad (7.2.9)$$

где је δ_{kj} Кронкеров делта симбол ($\delta_{kj} = 1, k = j$; $\delta_{kj} = 0, k \neq j$).

Дакле, једначином (7.2.1) дефинисана је веза између Декартових и природних координата у свакој тачки елемента.

Напоменимо да се интерполационе функције (7.2.8) могу одредити на исти начин као и интерполационе функције троугаоног елемента, са једином разликом што је полазни интерполациони полином у овом случају линеаран по природним координатама r, s и t .

7.2.2 Деформационо поље

У овом поглављу биће дефинисана веза између деформација и чворних померања линеарног тетраедарског елемента, код којег компоненте деформације, према дефиницији (2.1.9), одређујемо диференцирањем померања (7.2.2) у односу на Декартове координате на следећи начин:

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= u_{1,1} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial h_k}{\partial x} U_1^k \\
 e_{yy} &= u_{2,2} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial h_k}{\partial y} U_2^k \\
 e_{zz} &= u_{3,3} = \frac{\partial u_3}{\partial z} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial h_k}{\partial z} U_3^k \\
 \gamma_{xy} &= u_{1,2} + u_{2,1} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial h_k}{\partial y} U_1^k + \sum_{k=1}^4 \frac{\partial h_k}{\partial x} U_2^k \\
 \gamma_{yz} &= u_{2,3} + u_{3,2} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial h_k}{\partial z} U_2^k + \sum_{k=1}^4 \frac{\partial h_k}{\partial y} U_3^k \\
 \gamma_{zx} &= u_{3,1} + u_{1,3} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial h_k}{\partial x} U_3^k + \sum_{k=1}^4 \frac{\partial h_k}{\partial z} U_1^k
 \end{aligned} \tag{7.2.10}$$

Дакле, шест компонената деформације линеарног тетраедарског елемента дефинишу деформационо поље које можемо записати у матричном облику као:

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 & h_{2,1} & 0 & 0 & h_{3,1} & 0 & 0 & h_{4,1} & 0 & 0 \\ 0 & h_{1,2} & 0 & 0 & h_{2,2} & 0 & 0 & h_{3,2} & 0 & 0 & h_{4,2} & 0 \\ 0 & 0 & h_{1,3} & 0 & 0 & h_{2,3} & 0 & 0 & h_{3,3} & 0 & 0 & h_{4,3} \\ h_{1,2} & h_{1,1} & 0 & h_{2,2} & h_{2,1} & 0 & h_{3,2} & h_{3,1} & 0 & h_{4,2} & h_{4,1} & 0 \\ 0 & h_{1,3} & h_{1,2} & 0 & h_{2,3} & h_{2,2} & 0 & h_{3,3} & h_{3,2} & 0 & h_{4,3} & h_{4,2} \\ h_{1,3} & 0 & h_{1,1} & h_{2,3} & 0 & h_{2,1} & h_{3,3} & 0 & h_{3,1} & h_{4,3} & 0 & h_{4,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \\ U_3^3 \\ U_1^4 \\ U_2^4 \\ U_3^4 \end{Bmatrix} \tag{7.2.11}$$

Из релације (7.2.11) видимо да матрица везе деформације и чворних померања представља матрицу извода интерполационих функција $h_k(r,s,t)$ дефинисаних у односу на Декартове координате. Како су интерполационе функције h_k функције природних координата r , s и t , да бисмо одредили њихове изводе у односу на Декартове координате, неопходно је применити поступак посредног диференцирања према којем важи:

$$h_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial x_j} = \frac{\partial h_k}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} + \frac{\partial h_k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \frac{\partial h_k}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_j} \quad (7.2.12)$$

Као што је познато, везе парцијалних извода координата природног и Декартовог координатног система, представљају матрицу Јакобијана $\mathbf{J}$, те важи релација:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (7.2.13)$$

где је вектор извода $\partial / \partial \mathbf{r}$ дефинисан као:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (7.2.14)$$

а вектор извода $\partial / \partial \mathbf{x}$ као:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7.2.15)$$

Очигледно, вектор извода по Декартовим координатама можемо изразити преко инверзног Јакобијана следећом релацијом:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (7.2.16)$$

Дакле, у складу са релацијом (7.2.13) можемо дефинисати Јакобијан трансформације између Декартовог и природног система као:

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (7.2.17)$$

Односно инверзни Јакобијан као:

$$\mathbf{J}^{-1} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7.2.18)$$

Сада се изводи дефинисани релацијом (7.2.12) могу изразити у облику:

$$h_{k,j} = J_{j1}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial r} + J_{j2}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial s} + J_{j3}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial t} \quad (7.2.19)$$

Изводи $\partial h_k / \partial r, \partial h_k / \partial s$ се добијају диференцирањем које следи директно из дефиниције h_k према одговарајућим изразима датим једначинама (7.2.8).

Да бисмо одредили матрицу извода интерполационих функција, најпре ћемо интерполацију геометрије (7.2.1) представити у компоненталном облику као:

$$\begin{aligned}
x &= h_1 X_1^1 + h_2 X_1^2 + h_3 X_1^3 + h_4 X_1^4 = (1-r-s-t) X_1^1 + r X_1^2 + s X_1^3 + t X_1^4 \\
y &= h_1 X_2^1 + h_2 X_2^2 + h_3 X_2^3 + h_4 X_2^4 = (1-r-s-t) X_2^1 + r X_2^2 + s X_2^3 + t X_2^4 \\
z &= h_1 X_3^1 + h_2 X_3^2 + h_3 X_3^3 + h_4 X_3^4 = (1-r-s-t) X_3^1 + r X_3^2 + s X_3^3 + t X_3^4
\end{aligned} \tag{7.2.20}$$

Сада су елементи матрице Јакобијана (7.2.17):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial r} &= X_1^2 - X_1^1 & \frac{\partial y}{\partial r} &= X_2^2 - X_2^1 & \frac{\partial z}{\partial r} &= X_3^2 - X_3^1 \\
\frac{\partial x}{\partial s} &= X_1^3 - X_1^1 & \frac{\partial y}{\partial s} &= X_2^3 - X_2^1 & \frac{\partial z}{\partial s} &= X_3^3 - X_3^1 \\
\frac{\partial x}{\partial t} &= X_1^4 - X_1^1 & \frac{\partial y}{\partial t} &= X_2^4 - X_2^1 & \frac{\partial z}{\partial t} &= X_3^4 - X_3^1
\end{aligned} \tag{7.2.21}$$

или у матричном облику:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} X_1^2 - X_1^1 & X_2^2 - X_2^1 & X_3^2 - X_3^1 \\ X_1^3 - X_1^1 & X_2^3 - X_2^1 & X_3^3 - X_3^1 \\ X_1^4 - X_1^1 & X_2^4 - X_2^1 & X_3^4 - X_3^1 \end{bmatrix} \tag{7.2.22}$$

Инверзни Јакобијан трансформације одређујемо преко кофактора потпуно аналогно процедури описаној у додатку Д, при чему је крајњи облик инверзне матрице Јакобијана:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} & J_{31} \\ J_{12} & J_{22} & J_{32} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{bmatrix} \tag{7.2.23}$$

где је са $|\mathbf{J}|$ означена детерминанта матрице Јакобијана облика:

$$\det J = \begin{vmatrix} X_1^2 - X_1^1 & X_2^2 - X_2^1 & X_3^2 - X_3^1 \\ X_1^3 - X_1^1 & X_2^3 - X_2^1 & X_3^3 - X_3^1 \\ X_1^4 - X_1^1 & X_2^4 - X_2^1 & X_3^4 - X_3^1 \end{vmatrix} = 6V \tag{7.2.24}$$

док су $J_{11}, J_{12}, J_{13}, \dots, J_{33}$ означени кофактори, чији је крајњи облик:

$$\begin{aligned}
J_{11} &= (X_2^3 - X_2^1)(X_3^4 - X_3^1) - (X_3^3 - X_3^1)(X_2^4 - X_2^1) \\
J_{12} &= (X_3^3 - X_3^1)(X_1^4 - X_1^1) - (X_3^4 - X_3^1)(X_1^3 - X_1^1) \\
J_{13} &= (X_1^3 - X_1^1)(X_2^4 - X_2^1) - (X_2^3 - X_2^1)(X_1^4 - X_1^1) \\
J_{21} &= (X_3^2 - X_3^1)(X_2^4 - X_2^1) - (X_2^2 - X_2^1)(X_3^4 - X_3^1) \\
J_{22} &= (X_1^2 - X_1^1)(X_3^4 - X_3^1) - (X_3^2 - X_3^1)(X_1^4 - X_1^1) \\
J_{23} &= (X_2^2 - X_2^1)(X_1^4 - X_1^1) - (X_1^2 - X_1^1)(X_2^4 - X_2^1) \\
J_{31} &= (X_2^2 - X_2^1)(X_3^3 - X_3^1) - (X_3^2 - X_3^1)(X_2^3 - X_2^1) \\
J_{32} &= (X_3^2 - X_3^1)(X_1^3 - X_1^1) - (X_1^2 - X_1^1)(X_3^3 - X_3^1) \\
J_{33} &= (X_1^2 - X_1^1)(X_2^3 - X_2^1) - (X_2^2 - X_2^1)(X_1^3 - X_1^1)
\end{aligned} \tag{7.2.25}$$

У релацији (7.2.24) са V је означена, без доказивања, запремина паралелопипеда у којој је садржано шест запремина тетраедра.

Сада су према (7.2.19) изводи интерполационих функција h_1 , h_2 , h_3 и h_4 у односу на Декартове координате облика:

$$\begin{aligned}
 h_{1,1} &= \frac{1}{6V} \left[(X_2^3 X_3^2 - X_2^2 X_3^3) + (X_2^4 X_3^3 - X_2^3 X_3^4) + (X_3^4 X_2^2 - X_3^2 X_2^4) \right] = b_1 \\
 h_{2,1} &= \frac{1}{6V} \left[(X_2^3 X_3^4 - X_2^4 X_3^3) + (X_2^4 X_3^1 - X_2^1 X_3^4) + (X_3^3 X_2^1 - X_3^1 X_2^3) \right] = b_2 \\
 h_{3,1} &= \frac{1}{6V} \left[(X_2^1 X_3^4 - X_2^4 X_3^1) + (X_2^2 X_3^1 - X_2^1 X_3^2) + (X_3^2 X_2^4 - X_3^4 X_2^2) \right] = b_3 \\
 h_{4,1} &= \frac{1}{6V} \left[(X_2^1 X_3^2 - X_2^2 X_3^1) + (X_2^2 X_3^3 - X_2^3 X_3^2) + (X_3^1 X_2^3 - X_3^3 X_2^1) \right] = b_4 \\
 h_{1,2} &= \frac{1}{6V} \left[(X_3^3 X_1^2 - X_3^2 X_1^3) + (X_3^4 X_1^3 - X_3^3 X_1^4) + (X_1^4 X_3^2 - X_1^2 X_3^4) \right] = c_1 \\
 h_{2,2} &= \frac{1}{6V} \left[(X_3^3 X_1^4 - X_3^4 X_1^3) + (X_3^4 X_1^1 - X_3^1 X_1^4) + (X_1^3 X_3^1 - X_1^1 X_3^3) \right] = c_2 \\
 h_{3,2} &= \frac{1}{6V} \left[(X_3^1 X_1^4 - X_3^4 X_1^1) + (X_3^2 X_1^1 - X_3^1 X_1^2) + (X_1^2 X_3^4 - X_1^4 X_3^2) \right] = c_3 \\
 h_{4,2} &= \frac{1}{6V} \left[(X_3^1 X_1^2 - X_3^2 X_1^1) + (X_3^2 X_1^3 - X_3^3 X_1^2) + (X_1^1 X_3^3 - X_1^3 X_3^1) \right] = c_4 \\
 h_{1,3} &= \frac{1}{6V} \left[(X_1^3 X_2^2 - X_1^2 X_2^3) + (X_1^4 X_2^3 - X_1^3 X_2^4) + (X_2^4 X_1^2 - X_2^2 X_1^4) \right] = d_1 \\
 h_{2,3} &= \frac{1}{6V} \left[(X_1^3 X_2^4 - X_1^4 X_2^3) + (X_1^4 X_2^1 - X_1^1 X_2^4) + (X_2^3 X_1^1 - X_2^1 X_1^3) \right] = d_2 \\
 h_{3,3} &= \frac{1}{6V} \left[(X_1^1 X_2^4 - X_1^4 X_2^1) + (X_1^2 X_2^1 - X_1^1 X_2^2) + (X_2^2 X_1^4 - X_2^4 X_1^2) \right] = d_3 \\
 h_{4,3} &= \frac{1}{6V} \left[(X_1^1 X_2^2 - X_1^2 X_2^1) + (X_1^2 X_2^3 - X_1^3 X_2^2) + (X_2^1 X_1^3 - X_2^3 X_1^1) \right] = d_4
 \end{aligned} \tag{7.2.26}$$

Заменом добијених вредности у вектор деформације (7.2.11) добијамо:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 \\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & b_3 & 0 & c_4 & b_4 & 0 \\ 0 & d_1 & c_1 & 0 & d_2 & c_2 & 0 & d_3 & c_3 & 0 & d_4 & c_4 \\ d_1 & 0 & b_1 & d_2 & 0 & b_2 & d_3 & 0 & b_3 & d_4 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \tag{7.2.27}$$

Матрица извода интерполационих функција $\mathbf{B}$ елемента је облика:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}^1 \quad \mathbf{B}^2 \quad \mathbf{B}^3 \quad \mathbf{B}^4] \tag{7.2.28}$$

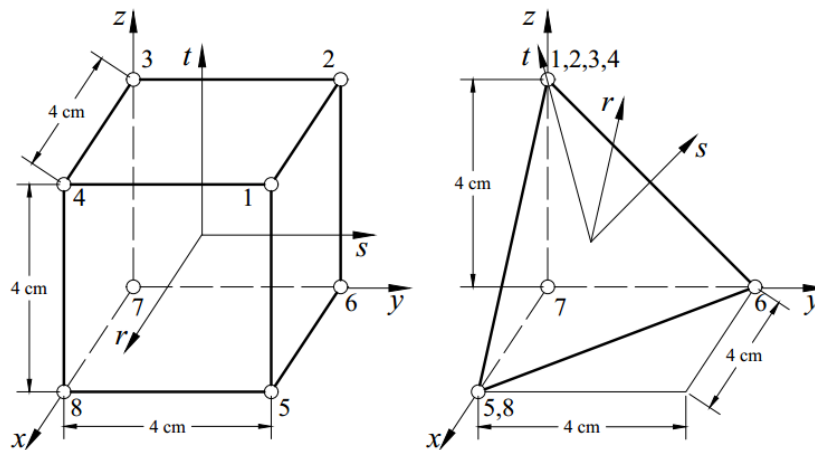
где су подматрице $\mathbf{B}^k$ чвора k облика:

$$\mathbf{B}^k = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_k & 0 & 0 \\ 0 & c_k & 0 \\ 0 & 0 & d_k \\ c_k & b_k & 0 \\ 0 & d_k & c_k \\ d_k & 0 & b_k \end{bmatrix} \quad (7.2.29)$$

Као што можемо видети, чланови матрице $\mathbf{B}$ тетраедарског елемента су управо коефицијенти b_k, c_k и d_k дефинисани релацијама (7.1.18), односно (7.1.23).

7.3 Дегенерисани тетраедарски елемент

Дегенерација 3D елемената врши се потпуно аналогно процедури добијања дегенерисаних 2D елемената, објашњеној у поглављу 6.3. Како разматрамо линеарни тетраедарски елемент, дегенерисани тетраедарски елемент добијамо поклапањем одговарајућих чворова основог, односно линеарног, 3D елемента. На слици 7.3.1 представљен је тетраедарски елемент добијен поклапањем чворова 1, 2, 3 и 4, а затим 5 и 8.



Слика 7.3.1 Дегенерација 3D елемента

За тетраедарски елемент представљен сликом 7.3.1 и усвојено поклапање чворова неопходно је кориговати интерполациону функцију h_1 и h_5 , при чему остале интерполационе функције, h_6 и h_7 , остају непромењене. Процедура дегенерације 3D елемента у разматрани тетраедарски елемент биће представљена примером у наставку.

7.3.1 Пример дегенерације 3D елемента

Аналогно 2D дегенерацији, циљ примера представља доказ да поклапањем било која одговарајућа четири, односно два чвора, добијамо тетраедарски елемент са константном деформацијом. Дакле, за анализирани тетраедарски елемент, поклапање чворова 1, 2, 3 и 4 изискује поклапање координата $X_i^1 = X_i^2 = X_i^3 = X_i^4$, односно померања $U_i^1 = U_i^2 = U_i^3 = U_i^4$.

На исти начин, за поклапање чворова 5 и 8 важе једнакости координата $X_i^5 = X_i^8$, односно померања $U_i^5 = U_i^8$. Заменом ових једнакости у релацију којом су дефинисане координате x, y и z тачака елемента, добијамо:

$$x_i = h_1^* X_i^1 + h_5^* X_i^5 + h_6 X_i^6 + h_7 X_i^7$$

где индекс i узима вредност 1, 2 или 3 за x, y и z координату, респективно.

Кориговане интерполационе функције имају облик:

$$\begin{aligned} h_1^* &= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t) + \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t) + \\ &\frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t) + \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t) = \frac{1}{2}(1+t) \\ h_5^* &= h_5 + h_8 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t) + \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t) = \\ &\frac{1}{4}(1+r)(1-t) \end{aligned}$$

Координате x, y и z тачака унутар елемента су сада облика:

$$\begin{aligned} x &= x_1 = \frac{1}{2}(1+t) X_1^1 + \frac{1}{4}(1+r)(1-t) X_1^5 + \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) X_1^6 + \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) X_1^7 \\ y &= x_2 = \frac{1}{2}(1+t) X_2^1 + \frac{1}{4}(1+r)(1-t) X_2^5 + \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) X_2^6 + \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) X_2^7 \\ z &= x_3 = \frac{1}{2}(1+t) X_3^1 + \frac{1}{4}(1+r)(1-t) X_3^5 + \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) X_3^6 + \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) X_3^7 \end{aligned}$$

Заменом вредности координата чворова, координате тачака тетраедарског елемента у Декартовом координатном систему су облика:

$$\begin{aligned} x &= (1+r)(1-t) \\ y &= \frac{1}{2}(1-r)(1+s)(1-t) \\ z &= 2(1+t) \end{aligned}$$

Да бисмо одредили компоненте деформације, неопходно је одредити Јакобијан и инверзни Јакобијан, те су одговарајући изводи једнаки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= 1-t & \frac{\partial y}{\partial r} &= -\frac{1}{2}(1+s)(1-t) & \frac{\partial z}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= 0 & \frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{1}{2}(1-r)(1-t) & \frac{\partial z}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= -(1+r) & \frac{\partial y}{\partial t} &= -\frac{1}{2}(1-r)(1+s) & \frac{\partial z}{\partial t} &= 2 \end{aligned}$$

Сада су Јакобијан и инверзни Јакобијан облика:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1-t & -\frac{1}{2}(1+s)(1-t) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-r)(1-t) & 0 \\ -(1+r) & -\frac{1}{2}(1-r)(1+s) & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-t} & \frac{1+s}{(1-r)(1-t)} & 0 \\ 0 & \frac{2}{(1-r)(1-t)} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{1+r}{1-t} & \frac{1+s}{(1-r)(1-t)} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Аналогно интерполацији за геометрију, компоненте померања тачака у правцу оса x , y и z у Декартовом координатном систему су:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}(1+t)U_1^1 + \frac{1}{4}(1+r)(1-t)U_1^5 + \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)U_1^6 + \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)U_1^7 \\ u_2 &= \frac{1}{2}(1+t)U_2^1 + \frac{1}{4}(1+r)(1-t)U_2^5 + \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)U_2^6 + \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)U_2^7 \\ u_3 &= \frac{1}{2}(1+t)U_3^1 + \frac{1}{4}(1+r)(1-t)U_3^5 + \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)U_3^6 + \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)U_3^7 \end{aligned}$$

Односно, изводи компонената померања у односу на природне координате r, s и t су:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1-t)U_i^5 - \frac{1}{8}(1+s)(1-t)U_i^6 - \frac{1}{8}(1-s)(1-t)U_i^7 \\ \frac{\partial u_i}{\partial s} &= \frac{1}{8}(1-r)(1-t)U_i^6 - \frac{1}{8}(1-r)(1-t)U_i^7 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \frac{1}{2}U_i^1 - \frac{1}{4}(1+r)U_i^5 - \frac{1}{8}(1-r)(1+s)U_i^6 - \frac{1}{8}(1-r)(1-s)U_i^7 \end{aligned}$$

где индекс i узима вредност 1, 2 или 3 за за померање у правцу осе x, y и z координату, респективно.

На основу везе вектора извода по Декартовим координата $\partial/\partial \mathbf{x}$ и вектора извода по природним координатама $\partial/\partial \mathbf{r}$ која је дефинисана инверзним Јакобијаном, следе изрази извода компонената померања тачака у односу на Декартов координатни систем:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-t} & \frac{1+s}{(1-r)(1-t)} & 0 \\ 0 & \frac{2}{(1-r)(1-t)} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{1+r}{1-t} & \frac{1+s}{(1-r)(1-t)} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1-t) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1+s)(1-t) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1-s)(1-t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8}(1-r)(1-t) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1-r)(1-t) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(1+r) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1-r)(1+s) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1-r)(1-s) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^5 \\ U_2^5 \\ U_3^5 \\ U_1^6 \\ U_2^6 \\ U_3^6 \\ U_1^7 \\ U_2^7 \\ U_3^7 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-t} & \frac{1+s}{(1-r)(1-t)} & 0 \\ 0 & \frac{2}{(1-r)(1-t)} & 0 \\ \frac{1+r}{2(1-t)} & \frac{1+s}{(1-r)(1-t)} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1-t) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1+s)(1-t) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1-s)(1-t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8}(1-r)(1-t) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1-r)(1-t) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(1+r) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1-r)(1+s) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1-r)(1-s) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^5 \\ U_2^5 \\ U_3^5 \\ U_1^6 \\ U_2^6 \\ U_3^6 \\ U_1^7 \\ U_2^7 \\ U_3^7 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-t} & \frac{1+s}{(1-r)(1-t)} & 0 \\ 0 & \frac{2}{(1-r)(1-t)} & 0 \\ \frac{1+r}{2(1-t)} & \frac{1+s}{(1-r)(1-t)} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1-t) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1+s)(1-t) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1-s)(1-t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8}(1-r)(1-t) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1-r)(1-t) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(1+r) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1-r)(1+s) & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(1-r)(1-s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^5 \\ U_2^5 \\ U_3^5 \\ U_1^6 \\ U_2^6 \\ U_3^6 \\ U_1^7 \\ U_2^7 \\ U_3^7 \end{Bmatrix}$$

Након сређивања, ови изрази имају облик:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^5 \\ U_2^5 \\ U_3^5 \\ U_1^6 \\ U_2^6 \\ U_3^6 \\ U_1^7 \\ U_2^7 \\ U_3^7 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial z} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^5 \\ U_2^5 \\ U_3^5 \\ U_1^6 \\ U_2^6 \\ U_3^6 \\ U_1^7 \\ U_2^7 \\ U_3^7 \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^5 \\ U_2^5 \\ U_3^5 \\ U_1^6 \\ U_2^6 \\ U_3^6 \\ U_1^7 \\ U_2^7 \\ U_3^7 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Компоненте тензора деформације коначно су облика:

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_3}{\partial z} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^5 \\ U_2^5 \\ U_3^5 \\ U_1^6 \\ U_2^6 \\ U_3^6 \\ U_1^7 \\ U_2^7 \\ U_3^7 \end{Bmatrix}$$

На основу добијеног израза можемо закључити да је вектор деформације за било коју вредност померања чворова U_i^k независан од природних координата r и s . Дакле, добијен је тетраедарски елемент константних деформација.

Процес елиминисања страница поклапањем одговарајућих чворова, односно групе страница, у случају линеарних елемената даје директно жељени дегенерисани елемент. Међутим, у случају елемената вишег реда, било да су у питању дводимензионални или тродимензионални елементи, неопходно је увести још неке претпоставке у погледу интерполационих функција [10].

8. Преглед метода глађења деформационог поља коначних елемената

У овом поглављу биће укратко представљен концепт методе глађења деформација, са посебним акцентом на примену код троугаоних и тетраедарских коначних елемената, који представљају предмет истраживања ове тезе. Свака од метода која ће бити представљена у овом поглављу поседује себи својствене карактеристике и предности, при чему се у методи коначних елемената примењују пре свега са циљем решавања недостатака које коначни елементи нижег реда поседују. Ови недостаци се односе првенствено на проблем дисконтинуитета напона на границама елемената, потом и на њихову осетљивост на запреминско закључавање.

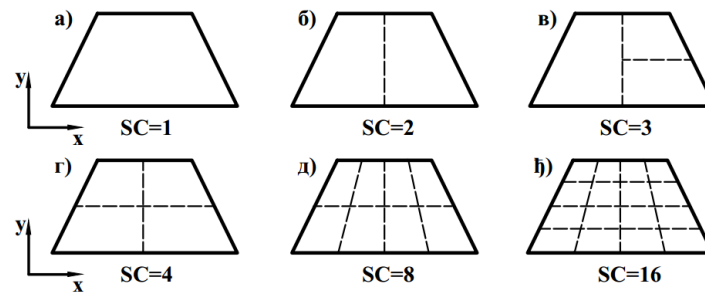
Као што и сам назив каже, метода глађења деформација у МКЕ се примењује у циљу глађења (*енгл. smooth*) деформационог поља углавном коначних елемената нижег реда. Ова метода је јако слична стандардној методи коначних елемената, изузев разлике у начину рачунања матрице крутости система. Пре примене у методи коначних елемената, можемо рећи да је метода глађења деформација нашла најпре примену за стабилизацију решења чворне интеграције Гаусове безмрежне методе [18]. Коришћењем истих принципа, примена методе глађења је потом проширена и на коначне елементе, код којих је у зависности од врсте интеграционих домена, тзв. домена глађења, развијено више врста ове методе, те разликујемо: методу глађења деформација засновану на ћелији (*енгл. Cell-based smoothed finite element method – CS-FEM*), методу глађења засновану на чвору (*енгл. Node-based smoothed finite element method – NS-FEM*), методу глађења деформационог поља засновану на ивици (*енгл. Edge-based smoothed finite element method – ES-FEM*), методу глађења засновану на страници (*енгл. Face-based smoothed finite element method – FS-FEM*) и др. [19]

Метода глађења деформација заснована на ћелији

Прве примене глађења деформација у методи коначних елемената јавиле су се 2006. године, када је Lui и др. [19] предложио глађење деформационог поља четвороугаоних четворочворних елемената. На овај начин настаје метода глађења деформација коначних елемената заснована на ћелији, чија се основна идеја огледа у просторном усредњавању градијента деформационог поља тзв. функцијама глађења (*енгл. smoothing function*).

Изузев примарног циља, који се огледа у смањењу крутости елемента, ова метода је код изопараметарског елемента такође примењена како би се превазишла ограничено дозвољена дисторзија овог елемента. Дакле, услов сингуларности матрице Јакобијана, који за последицу даје захтев ограничења углова између граничних ивица елемента на вредност мању од 180° , делимично онемогућавају примену елемената код великог деформисања, код којих се дисторзиони елементи не могу избећи.

Примењујући концепт глађења деформација безмрежних метода у методу коначних елемената, настаје процедура код које се дискретизација домена такође врши елементима, а глађење деформација врши управо дуж елемента. На слици 8.1.1 приказане су ћелије којима се елемент може даље поделити.



Слика 8.1.1 Приказ поделе елемента на ћелије

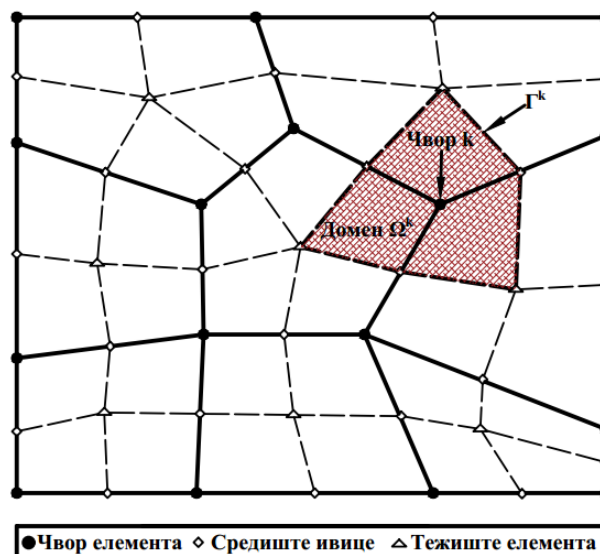
Број ћелија треба бирати тако да решење добијено методом глађења деформација буде што приближније тачном. Осим тога, можемо приметити да у случају постојања једне ћелије код квадрилатералног елемента, добијено решење одговара у методи коначних елемената решењу добијеном применом редуковане интеграције [20].

Избором константних функција глађења, површинска интеграција дуж елемента се редукује у линијску интеграцију дуж ивица ћелија, што поједностављује формулацију вишеугаоних елемената. Такође, као што је представљено у [19], пресликавање елемената из Декартовог система у природни није неопходно, чиме је дозвољена примена чак и веома дисторзионих елемената. Осим тога, може се показати да у случају линеарних функција облика основног елемента, CS-FEM метода бива потпуно еквивалентна стандардној методи коначних елемената [21].

Након четвороугаоних елемената, ова метода је примењена и код вишеугаоних дводимензионалних елемената [22], за смањење осетљивости на запреминско закључавање, најзад и код анализе плоча и љуски [23,24]. 2012. године Nguyen-Xuan и др. проширују ову методу на хексаедарске елементе [25].

Метода глађења деформација заснована на чвору

Код NS-FEM методе, дискретизација домена врши се такође коначним елементима, при чему се матрица крутости одређује интеграцијом дуж домена креираних помоћу чворова.



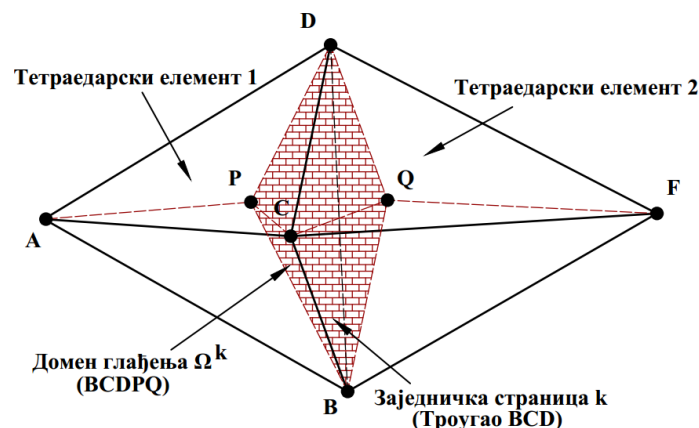
Слика 8.1.2 Приказ вишеугаоног елемента и креирања ћелија глађења код NS-FEM методе

Ова метода је најпре примењена код вишеугаоног елемента, при чему је на слици 8.1.2 приказан начин креирање домена Ω^k дуж којег се врши глађење деформација и интеграција. Дакле, овај домен настаје повезивањем тежишта околних елемената чвора k и средишта страница којима исти припада.

С обзиром да омогућава веома једноставну дискретизацију, ова метода се веома једноставно може имплементирати како код троугаоних, тако и код тетраедарских елемената [26]. Међутим, овом методом се не решава проблем осетљивости елемената на запреминско закључавање. Осим тога, процесорско време методе је веће у поређењу са методом коначних елемената.

Метода глађења деформација заснована на страници

За смањење осетљивости тродимензионалних елемената на запреминско закључавање, FS-FEM метода се показала доста погодном [27]. Ову методу можемо сматрати природном надоградњом ES-FEM методе дводимензионалних проблема. На примеру тетраедарског елемента, код којег је метода најпре нашла примену, на слици 8.1.3 приказан је домен глађења деформација Ω^k , формиран повезивањем заједничке странице k тетраедарских елемената и њихових тежишта. Анализирани домен је неопходно дискретизовати тетраедарским елементима, при чему се матрица крутости система сада рачуна на основу изглађених домена.



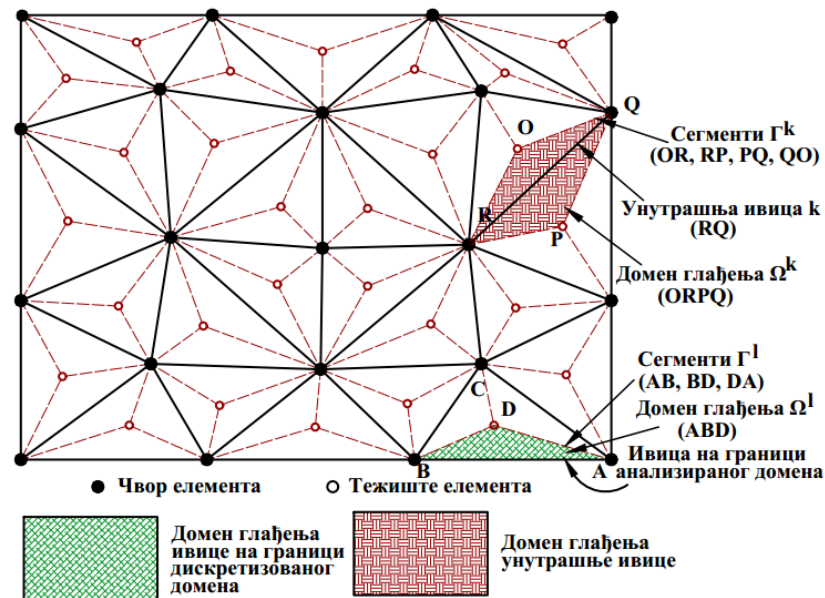
Слика 8.1.3 Креирање поља изглађене деформације код FS-FEM методе

Примењујући методу на тетраедарским елементима, чак се и у домену нелинеарне анализе остварују значајно боље перформансе у односу на стандардну методу коначних елемената. Због тога што не укључује додатне параметре и степене слободе, FS-FEM метода се може једноставно имплементирати. Због једноставности која је карактерише, ова метода је примењена чак и код виско-еласто-пластичне анализе тродимензионалних проблема [28]. У односу на методу коначних елемената, добијају су већа померања, што нам говори да се интеграцијом дуж домена FS-FEM методе остварује мање круто понашање модела. Међутим, као и код NS-FEM методе, процесорско време поредећи са методом коначних елемената је веће.

Метода глађења деформација заснована на ивици

Концепт ES-FEM методе представља основу методе глађења деформација представљене у раду [1]. У погледу повећања тачности методе коначних елемената, не уводећи значајне промене МКЕ концепта, ES-FEM метода се показала најефикаснијом. Иако се генерално може применити код елемената различитог облика, ова метода се најчешће примењује код троугаоних елемената [20], те ће на њиховом примеру начин формирања изглађеног деформационог поља бити детаљније представљен.

Потпуно аналогно, метода се може једноставно применити и код четвороугаоних, вишеугаоних и тетраедарских коначних елемената [29,30]. Као и код МКЕ, неопходно је извршити дискретизацију домена, при чему матрицу крутости одређујемо на основу деформација одређених у доменима глађења. Домени глађења код ове методе засновани су на ивицама елемента и креирају се спајањем крајњих тачака посматране ивице и тежишта елемента којима је ивица заједничка. На слици 8.1.4 приказан је начин креирања поља изглађене деформације код троугаоног елемента.



Слика 8.1.4 Креирање поља изглађене деформације код ES-FEM методе

Глађење деформационог поља $\mathbf{e} = \nabla_s \mathbf{u}$ коначног елемента врши се дуж ивице k елемента, креирањем домена глађења Ω^k којем иста припада.

На овај начин, унутар домена Ω^k деформационо поље ће бити изглађено и облика [20]:

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = \int_{\Omega^k} \mathbf{e}(\mathbf{x}) \Phi_k(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega^k} \nabla_s \mathbf{u}(\mathbf{x}) \Phi_k(\mathbf{x}) d\Omega \quad (8.1.1)$$

где је ∇_s матрица диференцијалног оператора облика:

$$\nabla_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (8.1.2)$$

и $\Phi_k(\mathbf{x})$ дата функција глађења која задовољава услов јединичне вредности, тј:

$$\int_{\Omega^k} \Phi_k(\mathbf{x}) d\Omega = 1 \quad (8.1.3)$$

У готово свим методама глађења дводимензионалне дискретизације, изабрана функција глађења је константна и облика:

$$\Phi_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1/A^k, & \mathbf{x} \in \Omega^k \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega^k \end{cases} \quad (8.1.4)$$

где је A^k површина домена глађења Ω^k облика:

$$A^k = \int_{\Omega^k} d\Omega = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{N_e^k} A_e^j \quad (8.1.5)$$

где је са N_e^k означен број елемената којима је ивица k заједничка, а са A_e^j њихове површине. Дакле, за ивице смештене на границама дискретизованог домена важи једнакост $N_e^k = 1$, док у свим осталим случајевима N_e^k има вредност два.

Избором константне функције глађења (8.4), можемо закључити да је и деформационо поље домена глађења такође константно. Да бисмо извели матрицу крутости домена Ω^k , вектор деформације који одговара домену глађења представимо у матричном облику као:

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = \sum_{I \in N_n^k} \tilde{\mathbf{B}}^I(\mathbf{x}_k) \mathbf{U}^I \quad (8.1.6)$$

где је са N_n^k означен укупан број чворова елемената којима је посматрана ивица заједничка.

У релацији (8.1.6) матрица $\tilde{\mathbf{B}}^I(\mathbf{x}_k)$ представља изглађену матрицу извода интерполационих функција дефинисану дуж домена глађења Ω^k , коју одређујемо као:

$$\tilde{\mathbf{B}}^I(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{A^k} \sum_{j=1}^{N_e^k} \frac{1}{3} A_e^j \mathbf{B}^j \quad (8.1.7)$$

где је $\mathbf{B}^j$ стандардна матрица извода интерполационих функција троугаоних елемената који садрже ивицу k , дефинисана релацијом (6.2.29).

Сада можемо дефинисати изглађену матрицу крутости $\tilde{\mathbf{K}}_k$ као:

$$\tilde{\mathbf{K}}_k = \int_{\Omega^k} \tilde{\mathbf{B}}^{IT} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{B}}^j d\Omega = \tilde{\mathbf{B}}^{IT} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{B}}^j A^k \quad (8.1.8)$$

Дакле, закључујемо да су нам за одређивање матрице крутости ES-FEM методе неопходне површине елемената и њима одговарајуће матрице извода интерполационих функција.

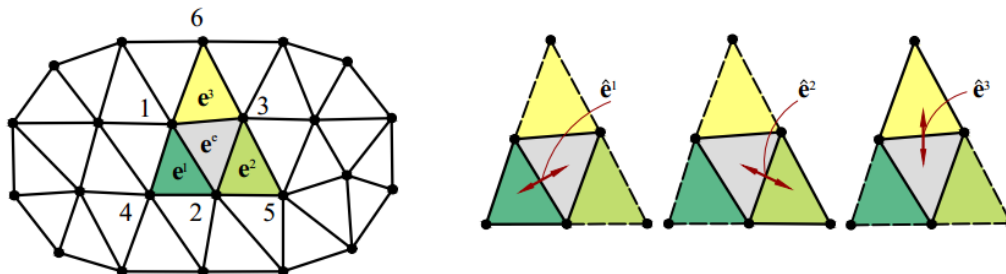
8.1 Нова метода глађења деформационог поља троугаоног и тетраедарског коначног елемента

У овом поглављу биће представљена метода глађења деформационог поља линеарног троугаоног и тетраедарског коначног елемента, представљена у раду [1]. За разлику од претходно описаних метода, код којих се у креираним доменима глађења конструише константно деформационо поље, у овој методи се узимајући у обзир константне деформације околних елемената формира деформационо поље које је линеарно. Оно што такође ову методу чини ефикасном, јесте чињеница да се домени глађења не креирају и да се линеарност деформационог поља остварује без увођења додатних параметара.

Дакле, дискретизација домена, интерполационе функције и степени слободе остају непромењени у односу на стандардну формулацију ових елемената. Нумеричким примерима представљеним у раду [1], показано је да се овом методом постижу боље перформансе чак и у односу на методу глађења деформација засновану на ивици, која је у литератури позната као најефикаснија метода.

8.1.1 Метода глађења деформационог поља троугаоног елемента

Као што је већ речено, у овој методи глађење деформационог поља посматраног елемента врши се узимањем у обзир деформација околних елемената, при чему се као критеријум узима у обзир заједничка ивица. Дакле, за сваки трочворни троугаони елемент, постојаће три околна елемента са којима исти дели ивицу, слика 8.1.5.



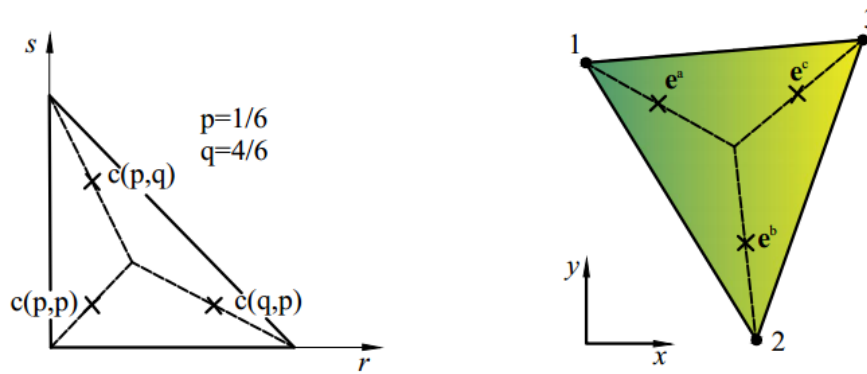
Слика 8.1.5 Приказ константног деформационог поља посматраног троугаоног елемента и елемената који га окружују

Дуж сваке ивице деформације се гледе тако да за посматрани и њему суседни елемент важи [1]:

$$\hat{\mathbf{e}}^k = \frac{1}{A^e + A^k} (A^e \mathbf{e}^e + A^k \mathbf{e}^k) \quad k = 1, 2, 3 \quad (8.1.9)$$

где су $\mathbf{e}^e$ и $\mathbf{e}^k$ вектори деформација посматраног елемента и к-тог елемента који га окружује, а A^e и A^k њихове површине, респективно.

Изглађене деформације између елемената се потом користе за одређивање матрице крутости, која се сада у посматраном елементу рачуна у три интеграционе тачке, слика 8.1.6.



Слика 8.1.6 Положај Гаусових интеграционих тачака троугаоног елемента са изглађеним деформационим пољем

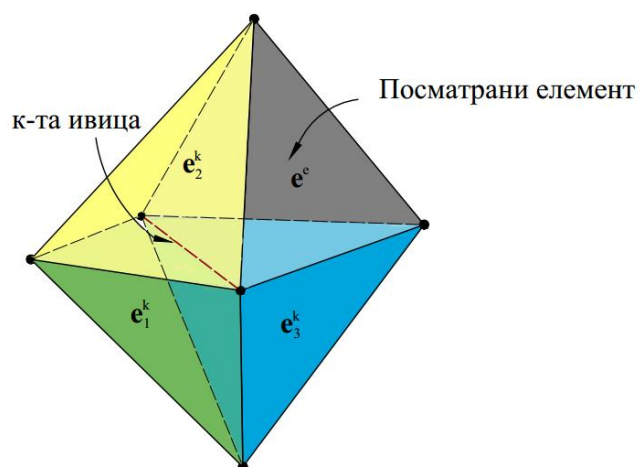
У Гаусовим интеграционим тачкама деформације се усредњавају тако да важи:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^a &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{e}}^1 + \hat{\mathbf{e}}^3) \\ \mathbf{e}^b &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{e}}^1 + \hat{\mathbf{e}}^2) \\ \mathbf{e}^c &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{e}}^2 + \hat{\mathbf{e}}^3) \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

Можемо приметити да за ивицу која се налази на граници дискретизованог домена деформационо поље задржава стандардни облик, тј. $\hat{\mathbf{e}}^k = \mathbf{e}^e$. Дакле, као и код осталих метода глађења, код предложене методе деформационо поље елемената смештених на границама дискретизованог домена се у мањој мери глади у односу на унутрашње елементе, због мањег броја елемената који га окружују.

8.1.2 Метода глађења деформационог поља тетраедарског елемента

За разлику од троугаоног елемента, код тетраедарског елемента број околних елемената дуж заједничке ивице варира и у уској је вези са генерисаном мрежом, слика 8.1.7.



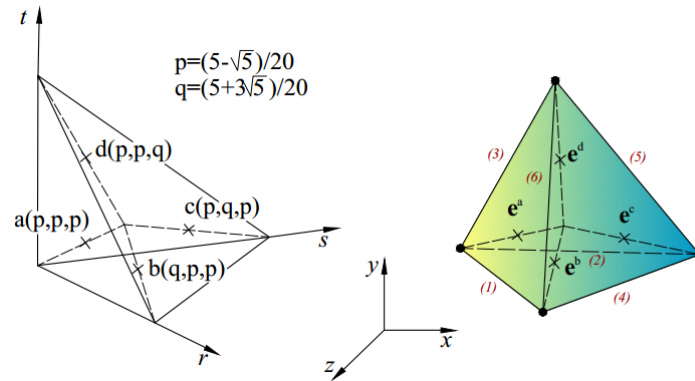
Слика 8.1.7 Приказ константног деформационог поља посматраног тетраедарског елемента и елемената са којима дели k -ту ивицу

Дуж сваке ивице тетраедра деформације се глате, те за посматране елементе важи једнакост [1]:

$$\hat{\mathbf{e}}^k = \frac{1}{V^e + \sum_{i=1}^{n_k} V_i^k} \left(V^e \mathbf{e}^e + \sum_{i=1}^{n_k} V_i^k \mathbf{e}_i^k \right) \quad k=1,2,3,4,5,6 \quad (8.1.11)$$

где је n_k број елемената који деле заједничку ивицу k са посматраним елементом, $\mathbf{e}^e$ и $\mathbf{e}_i^k$ представљају векторе деформација посматраног елемента и i -тог елемента са којим дели k -ту ивицу, а V^e и V_i^k представљају њихове запремине, респективно.

Изглађене деформације између елемената се потом користе за одређивање матрице крутости, која се сада у посматраном елементу рачуна у четири интеграционе тачке, слика 8.1.8.



Слика 8.1.8 Положај Гаусових интеграционих тачака тетраедарског елемента са изглађеним деформационим пољем

У Гаусовим интеграционим тачкама деформације се усредњавају тако да важе следеће релације:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^a &= \frac{1}{5} (\hat{\mathbf{e}}^1 + \hat{\mathbf{e}}^2 + \hat{\mathbf{e}}^3 + \hat{\mathbf{e}}^4 + \hat{\mathbf{e}}^e) \\ \mathbf{e}^b &= \frac{1}{5} (\hat{\mathbf{e}}^1 + \hat{\mathbf{e}}^4 + \hat{\mathbf{e}}^6 + \hat{\mathbf{e}}^5 + \hat{\mathbf{e}}^e) \\ \mathbf{e}^c &= \frac{1}{5} (\hat{\mathbf{e}}^2 + \hat{\mathbf{e}}^4 + \hat{\mathbf{e}}^5 + \hat{\mathbf{e}}^3 + \hat{\mathbf{e}}^e) \\ \mathbf{e}^d &= \frac{1}{5} (\hat{\mathbf{e}}^3 + \hat{\mathbf{e}}^5 + \hat{\mathbf{e}}^6 + \hat{\mathbf{e}}^2 + \hat{\mathbf{e}}^e) \\ \hat{\mathbf{e}} &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \hat{\mathbf{e}}^k \end{aligned} \quad (8.1.12)$$

Можемо приметити да за ивицу смештену на ивици дискретизованог домена, која припада само једном елементу, деформационо поље задржава стандардни облик тј. $\hat{\mathbf{e}}^k = \mathbf{e}^e$.

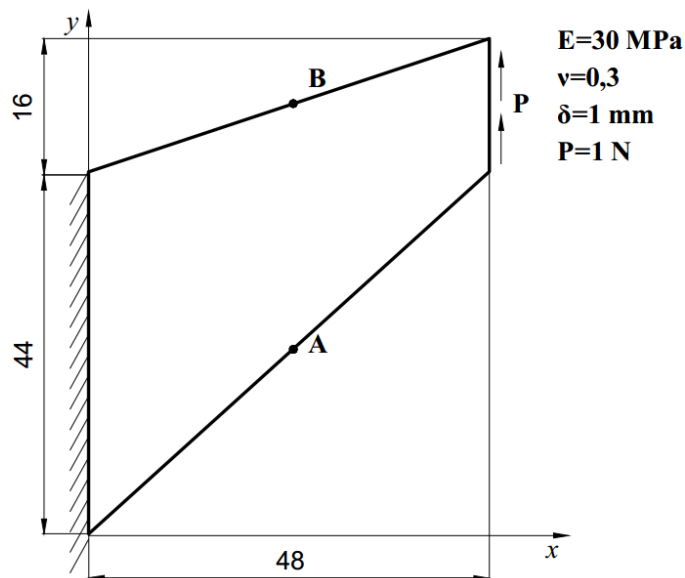
9. Нумерички примери

У овом поглављу биће представљена нумеричка анализа у циљу провере и упоредног приказа тачности, односно конвергенције решења, линеарних и тетраедарских елемената са међучворовима, уграђених у софтверски пакет РАК [31]. За разлику од тетраедарских елемената са међучворовима, линеарни елементи у проблемима са доминантним савијањем због линеарне интерполације поља померања бивају веома крути, те ће на примерима савијања греде и блока, променљивог и константног попречног пресека респективно, перформансе истих бити представљене.

Дакле, нумерички примери ће обухватати два дводимензионална проблема равног стања напона, потом и тродимензионални проблем у којем ће се разматрати лопта изложена дејству притиска. Главна идеја овог поглавља јесте упоредни приказ конвергенције решења тетраедарских елемената нижег и вишег реда са конвергенцијом коригованог елемента представљеног у овом раду. Напонско-деформациони прорачун биће спроведен и у програмском пакету Nastran [32], те ће се уједно компарацијски представити перформансе елемената уграђених у ова два софтвера. Пре и пост-процесирање извршено је у програму Femap [32].

9.1 Куков проблем

Куков проблем у литератури представља пример савијања конзоле променљивог попречног пресека, оптерећене силом на слободном крају укупне вредности $P=1\text{ N}$. Димензије и материјалне карактеристике конзоле које одговарају равном стању напона представљене су на слици 9.1.1.

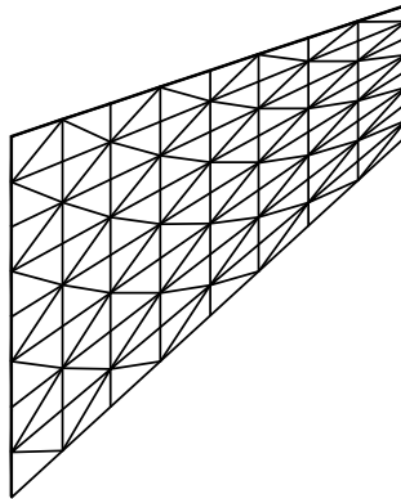


Слика 9.1.1 Савијање силом конзоле променљивог попречног пресека

Како би се тетраедарским елементима адекватно представило основно напонско стање, равно стање напона у равни xy , моделирана је половина дебљине конзоле уз гранични услов $u_z = 0$ за чворове на средњој равни конзоле. Како би се долично представило деформисање попречног пресека у укљештењу, спречено је померање изван равни zy ,

тј. $u_x = 0$ за све чворове овог пресека, и вертикално померање $u_y = 0$ за средишњи чвор смештен на средњој равни елемента, тј. чвор смештен на средњој линији.

Овим примером анализирана је конвергенција нумеричког решења, најпре за померање на средини слободног краја конзоле у односу на тачно решење дато у [33], потом за фон Мизесов напон у тачки А у односу на референтно решење дато у [1]. Перформансе елемената испитиване су при повећању броја коначних елемената, односно за густину мреже $N \times N$ ($N = 2, 4, 8, 16, 32, 64$). По дебљини конзоле коришћена су два слоја елемената. Приказ мреже Куковог проблема представљен је на слици 9.1.2.



Слика 9.1.2 Приказ мреже Куковог проблема

Конвергенција нумеричког решења за вертикално померање средине слободног краја конзоле применом линеарног и тетраедарског елемента са међучворовима испитивана је у програмским пакетима ПАК и Nastran. У табели 9.1.1 добијени нумерички резултати упоређени су са тачним решењем, $u_2 = 23,91\text{mm}$, датим у [33], које је добијено великим бројем 2D коначних елемената, које уједно представља и аналитичко решење овог проблема. Грешка добијених резултата израчуната је у процентима релацијом $|u_{ref} - u_f|/u_{ref} \times 100$, где се индекси *ref* и *f* односе на референтно и добијено нумеричко решење, респективно. Такође, поље анализираног вертикалног померања Куковог проблема дато је у додатку Е.

Табела 9.1.1 Табеларни приказ вертикалног померања тачке на слободном крају конзоле

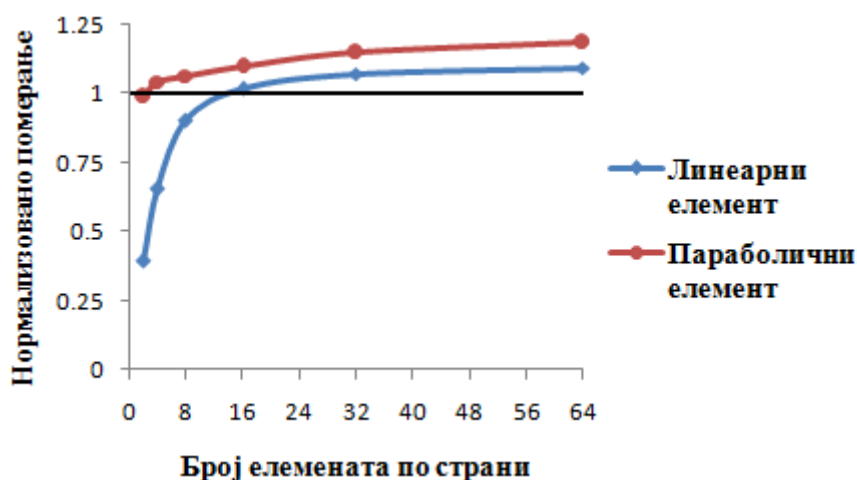
Померање [mm]		ПАК-Nastran		
		Линеарни елемент		Параболични елемент
N	[mm]	[%]	[mm]	[%]
2	9,44	60,51	23,64	1,13
4	15,72	34,25	24,95	4,34
8	21,52	9,99	25,5	6,64
16	24,31	1,67	26,27	9,87
32	25,63	7,19	27,45	14,8
64	26,2	9,57	28,4	18,77

Референтно решење: 23,91

На основу добијених резултата, уочавамо да постоји одлично слагање нумеричких резултата померања у ова два софтвера.

Како линеарни елемент претпоставља линеарну интерполацију поља померања, можемо приметити да спорије конвергира тачном решењу, за разлику од елемента са међучворовима који претпоставља параболичну промену померања у елементу. Елемент са међучворовима чак и за веома грубу мрежу брзо конвергира тачном решењу, разлог томе представља управо претпостављена параболична промена померања елемента, која у потпуности описује разматрани проблем савијања.

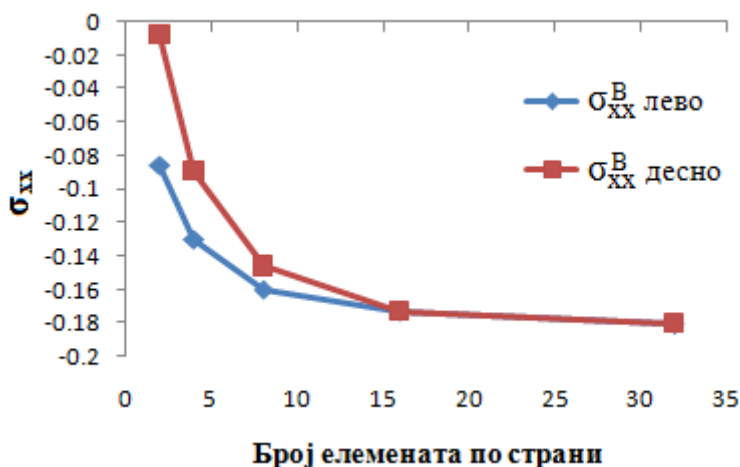
На слици 9.1.3 приказана су нормализована померања средине слободног краја конзоле у односу на тачно решење $u_2 = 23,91\text{mm}$.



Слика 9.1.3 Нормализована померања средине слободног краја конзоле за различит број елемената дуж стране

Из приказаних резултата дијаграма и табеле 9.1.1, примећујемо да нумеричка решења конвергирају ка вредностима нешто већим од аналитичких. У додатку Е приказано је анализирано поље вертикалног померања козоле.

Како је већ напоменуто, линеарни тетраедарски елементи претпостављају линеарну интерполацију поља померања, самим тим континуалност померања у чворовима је остварена. Са друге стране, напонско поље које зависи од деформационог, дефинисаног преко извода померања, ће бити константно унутар елемента.



Слика 9.1.4 Напон σ_{xx} у чвору В за елемент са леве и десне стране

Дакле, између елемената, и у заједничким чворовима, постојаће дисконтинуитет напона и деформација. На слици 9.1.4 приказане су вредности напона у тачки В, за елемент са леве, односно десне стране чвора В, респективно. Поље овог напона приказано је у додатку Е, при чему уочавамо да са повећањем густине мреже дисконтинуитет напона на границама елемената опада.

Како се у раду [1] корекција деформационог поља односи на линеарне тетраедарске елементе, за фон Мизесов напон у тачки А конзоле разматрана је конвергенција нумеричког решења најпре линеарног елемента, уграђеног у софтверски пакет РАК, у односу на кориговани елемент представљен у раду. Осим тога, значајно је упоредити перформансе параболичних елемената са коригованим, због деформационог и напонског поља која су у случају оба елемента линеарна. Из тог разлога, напонско деформациони прорачун у РАК-у спроведен је и за тетраедарске елементе са међучворовима.

У табелама 9.1.2 и 9.1.3 дат је приказ нумеричких резултата добијених у програмским пакетима РАК и Nastran за фон Мизесов напон у тачки А, у односу на референтно решење дато у [1], за различиту густину мреже. Грешка добијених резултата израчуната је у процентима релацијом $|\sigma_{ref} - \sigma_f| / \sigma_{ref} \times 100$, где се индекси *ref* и *f* односе на референтно и добијено нумеричко решење, респективно.

Табела 9.1.2 Фон Мизесов напон у тачки А добијен у програмском пакету РАК

Напон [MPa]	РАК					
	Линеарни елемент		Параболични елемент		Кориговани елемент	
<i>N</i>	[MPa]	[%]	[MPa]	[%]	[MPa]	[%]
2	0,0727	69,34	0,1853	21,85	0,1209	48,99
4	0,1772	25,26	0,2297	3,12	0,2105	11,19
8	0,2112	10,92	0,2278	3,92	0,2290	3,40

Референтно решење: 0,2371

Како у методи померања у МКЕ која је имплементирана у РАК-у постоји континуалност померања, али не и њихових извода, напони у чвору А гредe одређени су усредњавањем вредности напона свих елемената којима посматрани чвор припада. У случају линеарних елемената напон је израчунат у интеграционој тачки смештеној у средишту елемента, док је код параболичних елемената коришћена интеграција са четири интеграционе тачке, те је чвору елемента од интереса додељена вредност напона која одговара интеграционој тачки најближој посматраном чвору.

Табела 9.1.3 Фон Мизесов напон у тачки А добијен у програмском пакету Nastran

Напон [MPa]	Nastran					
	Линеарни елемент		Параболични елемент		Кориговани елемент	
<i>N</i>	[MPa]	[%]	[MPa]	[%]	[MPa]	[%]
2	0,0727	69,34	0,2388	0,72	0,1209	48,99
4	0,1772	25,26	0,2352	0,8	0,2105	11,19
8	0,2112	10,92	0,2356	0,63	0,2290	3,40

Референтно решење: 0,2371

Посматрајући приказане резултате, најпре линеарних и параболичних елемената, уочавамо да линеарни елементи знатно спорије конвергирају ка референтном решењу. Ове елементе описује константо напонско поље, те је неопходан велики број елемената како би се достигло тачно решење. Дакле, можемо уочити да се са повећањем густине мреже тачност ових елемената повећава. Са друге стране, параболични елементи претпостављају линеарно напонско поље, самим тим, чак и за веома грубу мрежу, у случају оптерећења савијањем имају значајно већу тачност у поређењу са линеарним елементима.

Поређењем линеарног елемента имплементираних у програмском пакету РАК и коригованог елемента представљеног у раду, примећујемо значајно бржу конвергенцију коригованог елемента. Разлог томе такође представља линеарно деформационо поље које кориговани елемент претпоставља. Даље можемо приметити да елемент са међучворовима брже конвергира референтном решењу у односу на кориговани елемент. Оба елемента имају линеарно деформационо и напонско поље, међутим интерполационе функције ових елемената нису истог реда. Дакле, говоримо о елементима са различитим бројем степени слободе, те је потпуно очекивано да параболични елемент брже конвергира ка референтном решењу при истој густини мреже.

Посматрајући резултате добијене у РАК-у и Nastran-у, у случају линеарних елемената ова два софтвера се савршено слажу. Код параболичних елемената постоји одступање нумеричких резултата добијених у ова два софтвера. Наиме, софтверски пакет Nastran вредност напона у чворовима одређује екстраполацијом на основу вредности у интеграционим тачкама, самим тим екстраполиране вредности у чворовима бивају веће. Са друге стране, вредности добијене у софтверском пакету РАК представљају тачне вредности добијене у интеграционим тачкама.

Како би се потврдила компатибилност рада ова два софтвера, у оба софтвера проверене су вредности померања у чвору А применом параболичног елемента. Добијени резултати представљени су у табели 9.1.4.

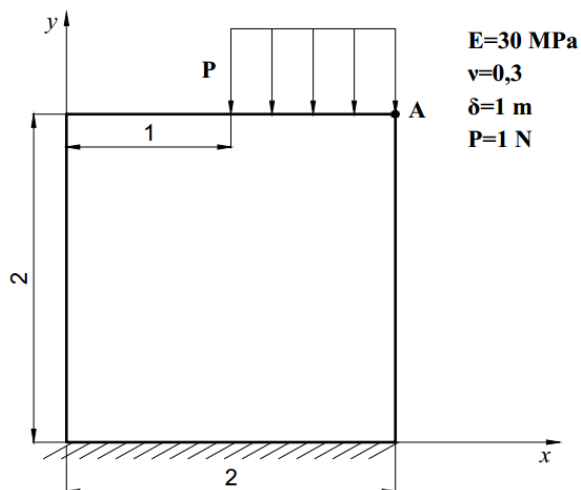
Табела 9.1.4 Вертикално померање у тачки А добијено у програмским пакетима РАК и Nastran

Померање	РАК	Nastran
N	$[mm]$	$[mm]$
2	0,17085	0,170845
4	0,19217	0,19217
8	0,20854	0,20854

С обзиром на подударност добијених резултата померања, закључујемо да напони у интеграционим тачкама ова два елемента морају бити једнаки.

9.2 Блок оптерећен континуалним оптерећењем

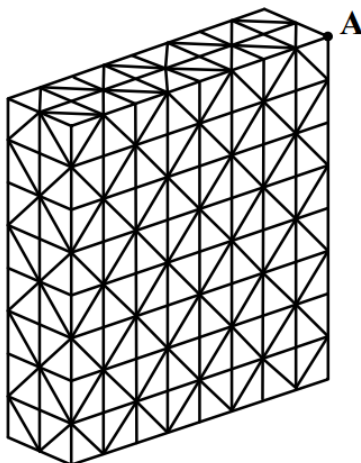
У овом примеру анализиране су перформансе линеарног и тетраедарског елемента са међучворовима за случај савијања блока континуалним оптерећењем, које делује дуж половине горње ивице блока укупне вредности $P = 1N$. Димензије и материјална својства модела дата су на слици 9.2.1.



Слика 9.2.1 Савијање континуалним оптерећењем блока константног попречног пресека

Доња ивица блока је укљештена, при чему је за моделирање равног стања напона у равни xu анализирана половина дебљине блока уз гранични услов $u_z = 0$ за чворове на средњој равни блока. Како би се долично представило деформисање попречног пресека у укљештењу, спречено је померање изван равни xz , тј. $u_y = 0$ за све чворове овог пресека, и хоризонтално померање $u_x = 0$ за чвор смештен на средњој линији елемента.

На овом примеру разматрана је конвергенција нумеричког решења за вертикално померање у тачки А, за различиту густину мреже $N \times N$ ($N = 2, 4, 8$), при чему је на слици 9.2.2 приказана мрежа којом је модел дискретизован. По дебљини блока коришћена су два слоја елемената.



Слика 9.2.2 Приказ мреже проблема савијања блока континуалним оптерећењем

У табели 9.2.1 приказани су нумерички резултати вертикалног померања тачке А добијени у РАК-у и Nastran-у коришћењем линеарних и тетраедарских елемената са међучворовима, у односу на резултате коригованог елемента преузете из [1]. Референтно решење разматраног проблема такође је дато у [1]. Такође, у додатку Е приказано је поље анализираног вертикалног померања блока, добијено линеарним и тетраедарским елементима са међучворовима.

Табела 9.2.1 Табеларни приказ вертикалног померања тачке *A* добијеног у програмским пакетима *РАК* и *Nastran*

Померање [$\times 10^{-8} m$]	РАК-Nastran					
	Линеарни елемент		Параболични елемент		Кориговани елемент	
<i>N</i>	[<i>m</i>]	[%]	[<i>m</i>]	[%]	[<i>m</i>]	[%]
2	-6,4882	17,21	-7,993	1,98	-8,1969	4,59
4	-7,4795	4,56	-7,9107	0,93	-7,8770	0,51
8	-7,7654	0,91	-7,8949	0,73	-7,8431	0,07

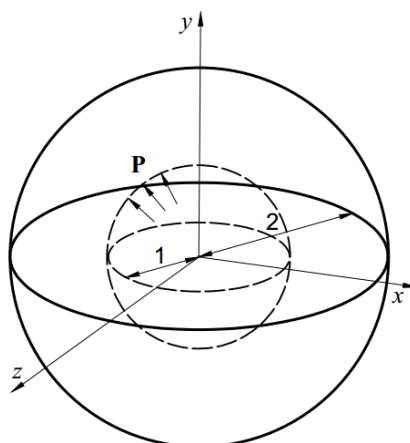
Референтно решење: -7,8372

Посматрањем резултата линеарног и коригованог елемента, уочавамо значајно бољу конвергенцију елемента са коригованим деформационим пољем. Конвергенција линеарног елемента са повећањем броја коначних елемената се повећава, док кориговани елемент чак и при веома грубој мрежи остварује добре резултате.

Поредећи параболични и кориговани елемент, уочавамо нешто бољу конвергенцију елемента са међучворовима. Како говоримо о елементу који има већи број степени слободе по елементу, бржа конвергенција елемента са међучворовима у случају оптерећења савијањем је и очекивана при истој густини мреже.

9.3 Лопта оптерећена унутрашњим притиском

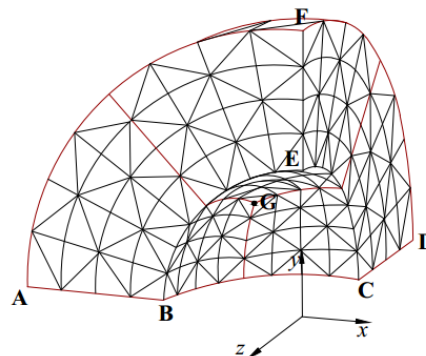
Последњи пример који анализирамо представља издубљену лопту, унутрашњег пречника $a=1m$ и спољашњег пречника $b=2m$, оптерећену унутрашњим притиском $P=100Pa$, слика 9.3.1. С обзиром да лопта има три осе симетрије, анализираће се осмина модела уз одговарајуће граничне услове: $u_z=0$ за чворове на површини $ABEF$, $u_x=0$ за чворове на површини $CDEF$ и $u_y=0$ за чворове на површини $ABCD$. Материјалне карактеристике проблема су $E=1\times 10^3 Pa$ и $\nu=0,3$. Разматрани пример у литератури је познат као тродимензионални Ламеов проблем.



Слика 9.3.1 Издубљена лопта оптерећена унутрашњим притиском

На овом примеру разматрана је конвергенција нумеричког решења за ефективни напон у тачки *G* лопте.

Лопта је подељена на три дела, при чему је сваки од њих моделиран мрежом густине $N \times N \times N$ ($N = 2, 4, 8, 16$). Приказ мреже дат је на слици 9.3.2.



Слика 9.3.2 Приказ мреже Ламеовог проблема

Нумеричка анализа извршена је коришћењем линеарног тетраедарског елемента и елемента са међучворовима, при чему су добијена решења упоређена са решењима добијеним применом коригованог елемента. Аналитичко решење, као и перформансе коригованог елемента за Ламеов проблем дате су у [1]. У табелама 9.3.1 и 9.3.2 представљени су резултати добијени у софтверским пакетима РАК и Nastran, респективно. Поље ефективног напона Ламеовог проблема дато је у додатку Е.

Табела 9.3.1 Фон Мизесов напон у тачки G добијен у програмском пакету РАК

Напон [Pa]		РАК				
		Линеарни елемент		Параболични елемент		Кориговани елемент
N	[Pa]	[%]	[Pa]	[%]	[Pa]	[%]
2	115,6	32,56	139,76	18,47	166,7563	2,73
4	129,56	24,42	151,42	11,67	166,3370	2,97
8	154,53	9,85	162,8	5,03	166,6823	2,77
16	161,475	5,80	167,6	2,23	169,5621	1,09

Аналитичко решење: 171,4286

Табела 9.3.2 Фон Мизесов напон у тачки G добијен у програмском пакету Nastran

Напон [Pa]		Nastran				
		Линеарни елемент		Параболични елемент		Кориговани елемент
N	[Pa]	[%]	[Pa]	[%]	[Pa]	[%]
2	115,6235	32,55	163,9382	4,36	166,7563	2,73
4	129,5830	24,40	168,215	1,87	166,3370	2,97
8	154,5146	9,86	170,6606	0,45	166,6823	2,77
16	161,4878	5,80	171,175	0,15	169,5621	1,09

Аналитичко решење: 171,4286

У случају тродимензионалног напонског стања, примећујемо да линеарни елементи спорије конвергирају аналитичком решењу у односу на параболичне елементе. Такође, са повећањем густине мреже ови елементи конвергирају ка аналитичком решењу. Дакле, у случајевима велике нелинеарности поља физичких величина, неопходно је применити веома густу мрежу.

Применом елемента са коригованим деформационим пољем, са релативно грубом мрежом уочавамо доста добро слагање резултата са аналитичким, што илуструје погодност примене ових елемента у случајевима просторног напонског стања.

Напоменимо да је напон у тачки G лопте одређен усредњавањем вредности напона елемената којима је овај чвор заједнички. У случају линеарног елемента, у РАК-у је коришћена нумеричка интеграција са интеграционом тачком у тежишту елемента. Код елемената са међучворовима коришћена је интеграција са четири интеграционе тачке, те је чвору од интереса придружена вредност напона њему најближе интеграционе тачке.

Резултати добијени применом линеарних елемената у оба софтвера се одлично слажу. Међутим, како Nastran вредност напона у чворовима елемената рачуна екстраполацијом, примећујемо да применом елемената са међучворовима постоји одступање резултата добијених у ова два софтвера.

10. Закључак

Један од циљева овог рада била је анализа постојећих формулација линеарног троугаоног и тетраедарског коначног елемента, те су представљене три групе ових елемената – генерализовани, изопараметарски и дегенерисани коначни елементи. Дакле, у раду је детаљно изложено извођење матрице извода интерполационих функција, најпре у глобалном Декартовом, потом и у природном, локалном, координатном систему ових елемената. Такође, на конкретним примерима, поклапањем одговарајућих чворова основног дводимензионалног, односно тродимензионалног елемента, илустрован је поступак добијања дегенерисаног троугаоног и тетраедарског елемента, респективно.

Како говоримо о елементима са константним деформационим, односно напонским пољем, јасно је веома круто понашање ових елемената које је нарочито изражено у проблемима оптерећења савијањем. Изузев тога, позната је и чињеница дисконтинуалности напона на границама елемента, која код веома грубе мреже може бити нарочито изражена. Дакле, у случајевима велике нелинеарности поља физичке величине, неопходно је користити веома густу мрежу како би апроксимација била довољно тачна. Због дужег времена трајања анализе коју веома густа мрежа имплицира, овакво решење у инжењерској пракси не би било оптимално, те се чешће прибегава апроксимацији већег реда, тј. коришћењу елемената са међучворовима.

Са циљем превазилажења постојећих проблема у стандардној формулацији линеарних елемената, у раду је представљена метода глађења деформационог поља, којом се без увођења додатних параметара и степени слободе, постижу знатно боље перформансе елемената при истој густини мреже. Коришћењем константних деформација околних елемената, деформационо поље се глади дуж заједничке ивице, те се у елементима формира кориговано поље које је линеарно. На овај начин, задржавањем истих интерполационих функција, добијамо елемент који је мање крут, те остварује значајно бржу конвергенцију.

Наведени проблеми, на конкретним примерима су нумеричком анализом показани. Разматрана су два проблема равнoг стања напона, потом и тродимензионални проблем у којем је анализирана лопта оптерећена унутрашњим притиском. Главна идеја ових примера била је анализа перформанси тетраедарских елемената већ уграђених у програмски пакет РАК, потом и упоређивање брзине конвергенције у односу на кориговани елемент представљен у раду. Како се поменута метода глађења односи пре свега на линеарне тетраедарске елементе, превасходни циљ био је упоређивање перформанси линеарног и коригованог елемента. С обзиром да се у литератури наведени проблеми са којим се сусрећемо применом линеарних елемената решавају апроксимацијом већег реда, тј. применом тетраедарских елемената са међучворовима, анализиране су такође и перформансе ових елемената.

Анализом проблема оптерећења савијањем, уочена је веома спора конвергенција линеарних елемената. Како је већ поменуто, код ових елемената се због константног деформационог поља напон рачуна само у интеграционој тачки смештеној у тежишту елемента, те се веома грубом мрежом не постиже адекватна апроксимација линеарног деформационог поља проблема савијања.

Дакле, поређењем решења са коригованим елементом, уочена је значајно бржа конвергенција елемента са предложеним деформационим пољем. Са друге стране, параболични елементи управо због линеарне апроксимације деформационог поља која у потпуности описује проблем савијања, чак и при веома грубој мрежи, остварују значајно већу тачност у поређењу како са линеарним, тако и са коригованим елементом. Међутим, како говоримо о елементима који поље померања интерполирају квадратном полиномном функцијом, број чворова ових елемената је већи, те је потпуно очекивана бржа конвергенција ових елемената при истој густини мреже. Слични закључци су изведени и у случају анализе тродимензионалног напонског стања, коригованим елементом се због апроксимације деформационог поља већег реда остварује већа тачност.

У раду је напонско-деформациони прорачун спроведен такође и у програмском пакету Nastran, те је уочено одлично слагање резултата ова два софтвера у случају линеарних елемената. Код параболичних елемената, уочено је одступање нумеричких резултата за случај анализе поља ефективног напона. Наиме, због екстраполације коју софтверски пакет Nastran укључује при одређивању вредности напона у чворовима, добијене вредности су нешто веће у поређењу са вредностима добијеним у програмском пакету РАК, који напон рачуна само у интеграционим тачкама.

С обзиром на уочене погодности примене елемената са модификованим деформационим пољем, како за проблеме савијања, тако и за општа напонска стања, намеће се даљи могући правац истраживања, који се односи пре свега на имплементацију коригованог елемента у програмски пакет РАК и испитивање перформанси истог на конкретним примерима.

Литература

- [1] Lee C., Lee P. S., *A new strain smoothing method for triangular and tetrahedral finite elements*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Volume 341, 939-955, 2018.
- [2] Којић М., Славковић Р., Живковић М., Грујовић Н., *Метод коначних елемената I*, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2010.
- [3] Јовичић Г., Живковић М., *Интегритет и век конструкција*, Факултет инжењерских наука, Крагујевац, 2016.
- [4] Timoshenko S., Goodier J. N., *Theory of elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1951. Преузето са: <https://www.scribd.com/doc/114461790/Timoshenko-S-P-and-Goodier-J-N-Theory-of-Elasticity>
- [5] Oñate E., *Structural Analysis with the Finite Element Method*, Linear Statics, Volume 1: Basis and Solids (Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences), Springer 2009. Преузето са: <https://www.scribd.com/doc/119717165/Structural-Analysis-with-the-Finite-Element-Method-Linear-Statics-Volume-1-Basis-and-Solids-E-Onate>
- [6] Rao S. S., *The Finite Element Method in Engineering*, Elsevier Science & Technology Books, Fourth Edition, Miami, 2004. Преузето са: http://www.engineering108.com/Data/Engineering/Mechanical/CAD_CAM/The_Finite_Element_Method_in_Engineering_S.S.Rao.pdf
- [7] Turner M.J., Clough R.W., Martin H., Topp L.J., *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, J. Aeron. Sci., Volume 23, 805-823, 1956.
- [8] Courant R., *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*, Bull. Am. Math. Soc., Volume 49, 1-23, 1943.
- [9] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z., *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, Sixth Edition, Elsevier, 2005.
- [10] Bathe K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [11] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The Finite Element Method*, Volume 1: The Basis, Fifth Edition, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [12] Strang G., *Linear Algebra and Its Applications*, Thomson Brooks/Cole, Fourth Edition, Belmont, 2006. Преузето са: <http://www.math.hcmus.edu.vn/~bxtang/Linear%20algebra%20and%20its%20applications.pdf>
- [13] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z., *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, Sixth Edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006.
- [14] Taig I. C., *Structural Analysis by the Matrix Displacement Method*, English Electric Aviation Report No. S017, 1961.

- [15] Irons B. M., *Engineering Application of Numerical Integration in Stiffness Method*, Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Volume 14, 2035-2037, 1966.
- [16] Gallagher R. H., Padlog J., Bijlaard J. J., *Stress analysis of heated complex shapes*, ARS Journal, 700-707, 1962.
- [17] Rashid Y. R. and Rockenhauser W., *Pressure vessel analysis by finite element techniques*, Proc. Conf. on Prestressed Concrete Pressure Vessels, Inst. Civ. Eng., 1968.
- [18] Chen J. S., Yoon S., Wu C. T., *A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., Volume 53, 2587-2615, 2001.
- [19] Liu G. R., Dai K. Y., Nguyen T. T., *A smoothed finite element method for mechanics problems*, Comput. Mech., Volume 39, 859-887, 2007.
- [20] Liu G. R., Nguyen-Thoi T., Lam K. Y., *An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for static, free and forced vibration analyses of solids*, Journal of Sound and Vibration, Volume 320, 1100-1130, 2009.
- [21] Liu G. R., Nguyen T. T., Dai K. Y., Lam K. Y., *Theoretical aspects of the smoothed finite element method (SFEM)*, Int. J. Numer. Meth. Engng, Volume 71, 902-930, 2007.
- [22] Dai K. Y., Liu G. R., Nguyen T. T., *An n-sided polygonal smoothed finite element method (nSFEM) for solid mechanics*, Finite Elem. Anal. Des., Volume 43, 847-860, 2007.
- [23] Nguyen-Xuan H., Rabczuk T., Bordas S., Debonnie J. F., *A smoothed finite element method for plate analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 197, 1184-1203, 2008.
- [24] Nguyen-Thanh N., Rabczuk T., Nguyen-Xuan H., Bordas S., *A smoothed finite element method for shell analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 198, 165-177, 2008.
- [25] Nguyen-Xuan H., Nguyen H. V., Bordas S., Rabczuk T., Duflot M., *A cell-based smoothed finite element method for three dimensional solid structures*, KSCE Journal of Civil Engineering, Volume 16, 1230-1242, 2012.
- [26] Nguyen-Thoi T., Liu G. R., Nguyen-Xuan H., *Additional properties of the node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for solid mechanics problems*, Int. J. Comput. Methods, Volume 6, 633-666, 2009.
- [27] Nguyen-Thoi T., Liu G. R., Lam K. Y., Zhang G. Y., *A face based smoothed finite element method (FS-FEM) for 3D linear and geometrically non-linear solid mechanics problems using 4-node tetrahedral elements*, Int. J. Numer. Methods Eng., Volume 78, 324-353, 2009.
- [28] Nguyen-Thoi T., Liu G. R., Vu-Do H. C., Nguyen-Xuan H., *A face-based smoothed finite element method (FS-FEM) for visco-elastoplastic analyses of 3D solids using tetrahedral mesh*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Volume 198, 3479-3498, 2009.

- [29] He Z. C., Li G. Y., Zhong Z. H., Chneg A. G., Zhang G. Y., Liu G. R., Li E., Zhou Z., *An edge-based smoothed tetrahedron finite element method (ES-T-FEM) for 3D static and dynamic problems*, Comput. Mech., Volume 52, 221-236, 2013.
- [30] He Z. C., Liu G. R., Zhong Z. H., Wu S. C., Zhang G. Y., Cheng A. G., *An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for analyzing three-dimensional acoustic problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Volume 199, 20-33, 2009.
- [31] Којић М., Славковић Р., Живковић М., Грујовић Н., ПАК-С Програм за анализу конструкција МКЕ, Корисничко упутство, Крагујевац, 2016.
- [32] Femap with NX NASTRAN Analysis software:
<https://www.plm.automation.siemens.com/global/en/products/simcenter/femap.html>
- [33] Slavković R., Živković M., Kojić M., *Enhanced 8-node three-dimensional solid and 4-node shell elements with incompatible generalized displacements*, Communic. Numer. Methods Eng., Volume 10, 699-709, 1994.

Додатак А

Полазни систем једначина за решавање је облика:

$$\begin{aligned} U_i^1 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i} X_1^1 + \alpha_{2i} X_2^1 \\ U_i^2 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i} X_1^2 + \alpha_{2i} X_2^2 \\ U_i^3 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i} X_1^3 + \alpha_{2i} X_2^3 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Изражавањем непознате генерализоване координате α_{0i} из прве једначине следи:

$$\alpha_{0i} = U_i^1 - \alpha_{1i} X_1^1 - \alpha_{2i} X_2^1 \quad (\text{A.2})$$

Уврштавањем добијеног израза у другу једначину система (A.1) следи:

$$\begin{aligned} U_i^2 &= U_i^1 - \alpha_{1i} X_1^1 - \alpha_{2i} X_2^1 + \alpha_{1i} X_1^2 + \alpha_{2i} X_2^2 = \\ U_i^1 - \alpha_{1i} (X_1^1 - X_1^2) - \alpha_{2i} (X_2^1 - X_2^2) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Сада се генерализована координата α_{1i} може изразити као:

$$\alpha_{1i} = \frac{U_i^1 - U_i^2 - \alpha_{2i} (X_2^1 - X_2^2)}{X_1^1 - X_1^2} \quad (\text{A.3a})$$

Заменом (A.2) и (A.3a) у трећу једначину система (A.1) следи:

$$\begin{aligned} U_i^3 &= U_i^1 - \alpha_{1i} (X_1^1 - X_1^3) - \alpha_{2i} (X_2^1 - X_2^3) = \\ U_i^1 - \frac{U_i^1 - U_i^2 - \alpha_{2i} (X_2^1 - X_2^2)}{X_1^1 - X_1^2} (X_1^1 - X_1^3) - \alpha_{2i} (X_2^1 - X_2^3) = \\ \frac{U_i^1 (X_1^1 - X_1^2) - (U_i^1 - U_i^2 - \alpha_{2i} (X_2^1 - X_2^2)) (X_1^1 - X_1^3) - \alpha_{2i} (X_2^1 - X_2^3) (X_1^1 - X_1^2)}{X_1^1 - X_1^2} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Након груписања чланова који множе компоненте померања следи:

$$\begin{aligned} U_i^1 (X_1^3 - X_1^2) + U_i^2 (X_1^1 - X_1^3) + U_i^3 (X_1^2 - X_1^1) + \\ \alpha_{2i} [X_1^1 (X_2^3 - X_2^2) + X_1^2 (X_2^1 - X_2^3) + X_1^3 (X_2^2 - X_2^1)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4a})$$

Из добијеног израза генерализована координата α_{2i} је облика:

$$\alpha_{2i} = \frac{U_i^1 (X_1^3 - X_1^2) + U_i^2 (X_1^1 - X_1^3) + U_i^3 (X_1^2 - X_1^1)}{X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2)} \quad (\text{A.4b})$$

Заменом (A.4b) у (A.3.a) следи:

$$\alpha_{1i} = \frac{U_i^1 - U_i^2 - \frac{U_i^1 (X_1^3 - X_1^2) + U_i^2 (X_1^1 - X_1^3) + U_i^3 (X_1^2 - X_1^1)}{X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2)} (X_1^1 - X_1^2)}{X_1^1 - X_1^2} \quad (\text{A.5})$$

Бројилац израза (A.5) је:

$$\begin{aligned} U_i^1 X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + U_i^1 X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + U_i^1 X_1^3 (X_2^1 - X_2^2) - U_i^2 X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) - \\ U_i^2 X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) - U_i^2 X_1^3 (X_2^1 - X_2^2) - U_i^3 (X_1^3 - X_1^2) (X_2^1 - X_2^2) - \\ U_i^3 (X_1^1 - X_1^3) (X_2^2 - X_2^2) - U_i^3 (X_1^2 - X_1^1) (X_2^1 - X_2^2) \end{aligned} \quad (\text{A.5a})$$

Груписањем чланова који множе компоненте померања следи:

$$\begin{aligned} & U_i^1 \left[X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) - X_1^2 (X_2^2 - X_2^3) \right] + U_i^2 \left[X_1^1 (X_2^3 - X_2^1) - X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) \right] + \\ & U_i^3 (X_1^1 - X_1^2) (X_2^1 - X_2^2) = U_i^1 (X_2^2 - X_2^3) (X_1^1 - X_1^2) + U_i^2 (X_2^3 - X_2^1) (X_1^1 - X_1^2) + \\ & U_i^3 (X_1^1 - X_1^2) (X_2^1 - X_2^2) \end{aligned} \quad (\text{A.5б})$$

Сада је релација (А.5) облика:

$$\alpha_{1i} = \frac{(X_1^1 - X_1^2) \left[U_i^1 (X_2^2 - X_2^3) + U_i^2 (X_2^3 - X_2^1) + U_i^3 (X_2^1 - X_2^2) \right]}{(X_1^1 - X_1^2) \left[X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2) \right]} \quad (\text{A.5ц})$$

Након елиминисања заједничких чинилаца у релацији (А.5.ц) генерализована координата α_{1i} је облика:

$$\alpha_{1i} = \frac{U_i^1 (X_2^2 - X_2^3) + U_i^2 (X_2^3 - X_2^1) + U_i^3 (X_2^1 - X_2^2)}{X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2)} \quad (\text{A.5д})$$

Када су познати изрази за генерализоване координате α_{1i} и α_{2i} , сада се може одредити и трећа генерализована координата α_{0i} , дефинисана релацијом (А.2):

$$\begin{aligned} \alpha_{0i} = U_i^1 & - \frac{U_i^1 X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + U_i^2 X_1^1 (X_2^3 - X_2^1) + U_i^3 X_1^1 (X_2^1 - X_2^2)}{X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2)} - \\ & \frac{U_i^1 X_2^1 (X_1^3 - X_1^2) + U_i^2 X_2^1 (X_1^1 - X_1^3) + U_i^3 X_2^1 (X_1^2 - X_1^1)}{X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Бројилац релације (А.6) је:

$$\begin{aligned} & U_i^1 X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + U_i^1 X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + U_i^1 X_1^3 (X_2^1 - X_2^2) - U_i^1 X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) - \\ & U_i^2 X_1^1 (X_2^3 - X_2^1) - U_i^3 X_1^1 (X_2^1 - X_2^2) - U_i^1 X_2^1 (X_1^3 - X_1^2) - U_i^2 X_2^1 (X_1^1 - X_1^3) - \\ & U_i^3 X_2^1 (X_1^2 - X_1^1) = U_i^1 \left[X_1^2 (X_2^3 - X_2^1 + X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2 - X_2^1) \right] + \\ & U_i^2 \left[X_1^1 (-X_2^3 + X_2^1 - X_2^1) + X_1^3 X_2^1 \right] + U_i^3 \left[X_1^1 (-X_2^1 + X_2^2 + X_2^1) - X_1^2 X_2^1 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6а})$$

Сада је релација (А.6) облика:

$$\alpha_{0i} = \frac{U_i^1 (X_1^2 X_2^3 - X_1^3 X_2^2) + U_i^2 (X_1^3 X_2^1 - X_1^1 X_2^3) + U_i^3 (X_1^1 X_2^2 - X_1^2 X_2^1)}{X_1^1 (X_2^2 - X_2^3) + X_1^2 (X_2^3 - X_2^1) + X_1^3 (X_2^1 - X_2^2)} \quad (\text{A.6б})$$

Додатак Б

Полазни интерполациони полином којим се апроксимира померање трочворног троугаоног елемента у природном координатном систему је облика:

$$u_i = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}r + \alpha_{2i}s \quad i = 1, 2 \quad (\text{Б.1})$$

Чворови троугаоног елемента задовољавају функцију померања, те важи:

$$\begin{aligned} U_i^1 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i}r_1 + \alpha_{2i}s_1 \\ U_i^2 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i}r_2 + \alpha_{2i}s_2 \\ U_i^3 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i}r_3 + \alpha_{2i}s_3 \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

Да бисмо одредили непознате генерализоване координате, потребно је у систем од шест линеарних једначина (Б.2) заменити познате координате чворова у природном координатном систему r, s :

$$\begin{aligned} (r_1, s_1) &= (0, 0) \\ (r_2, s_2) &= (1, 0) \\ (r_3, s_3) &= (0, 1) \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Сада је систем једначина (Б.2) облика:

$$\begin{aligned} U_i^1 &= \alpha_{0i} \\ U_i^2 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i} \\ U_i^3 &= \alpha_{0i} + \alpha_{2i} \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

Односно:

$$\begin{aligned} \alpha_{0i} &= U_i^1 \\ \alpha_{1i} &= U_i^2 - U_i^1 \\ \alpha_{2i} &= U_i^3 - U_i^1 \end{aligned} \quad (\text{Б.4a})$$

Уврштавањем (Б.4a) у (Б.1) следи:

$$u_i = U_i^1(1-r-s) + U_i^2r + U_i^3s \quad (\text{Б.5})$$

Дакле, интерполационе функције које одговарају чворовима троугаоног елемента у про природном координатном систему су облика:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1-r-s \\ h_2 &= r \\ h_3 &= s \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Додатак Ц

Матрица Јакобијана линеарног троугаоног елемента је облика:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} X_1^2 - X_1^1 & X_2^2 - X_2^1 \\ X_1^3 - X_1^1 & X_2^3 - X_2^1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ц.1})$$

Ако претпоставимо да је матрица Јакобијана регуларна, инверзна матрица матрице $\mathbf{J}$ је према [12] облика:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det J} \text{adj} J \quad (\text{Ц.2})$$

где је $\det J$ детерминанта матрице Јакобијана, а $\text{adj} J$ адјунгована матрица матрице Јакобијана.

Детерминанта матрице Јакобијана троугаоног елемента је облика:

$$\det J = \begin{vmatrix} X_1^2 - X_1^1 & X_2^2 - X_2^1 \\ X_1^3 - X_1^1 & X_2^3 - X_2^1 \end{vmatrix} = (X_1^2 - X_1^1)(X_2^3 - X_2^1) - (X_2^2 - X_2^1)(X_1^3 - X_1^1) =$$

$$X_1^1(X_2^2 - X_2^3) + X_1^2(X_2^3 - X_2^1) + X_1^3(X_2^1 - X_2^2) = 2A \quad (\text{Ц.3})$$

Дакле, детерминанта матрице Јакобијана једнака је површини паралелограма, односно двоструком производу површине троугаоног елемента.

Адјунговану матрицу матрице Јакобијана одређујемо на следећи начин:

$$\text{adj} J = [J_{ij}]^T \quad (\text{Ц.4})$$

где су J_{ij} кофактори које рачунамо према:

$$J_{ij} = (-1)^{i+j} \det D_{ij} \quad (\text{Ц.5})$$

где је D_{ij} детерминанта добијена из $\det J$ изостављањем i -те врсте и j -те колоне.

Релацију (Ц.2) сада можемо представити у облику:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{Ц.6})$$

Кофактори (Ц.5) су облика:

$$\begin{aligned} J_{11} &= (-1)^2 (X_2^3 - X_2^1) \\ J_{21} &= (-1)^3 (X_2^2 - X_2^1) \\ J_{12} &= (-1)^3 (X_1^3 - X_1^1) \\ J_{22} &= (-1)^4 (X_1^2 - X_1^1) \end{aligned} \quad (\text{Ц.7})$$

Заменом добијених кофактора у релацију (Ц.6), инверзна матрица Јакобијана је облика:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} X_2^3 - X_2^1 & X_2^1 - X_2^2 \\ X_1^1 - X_1^3 & X_1^2 - X_1^1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ц.8})$$

Додатак Д

Полазни систем једначина за решавање је облика:

$$\begin{aligned} U_i^1 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i}X_1^1 + \alpha_{2i}X_2^1 + \alpha_{3i}X_3^1 \\ U_i^2 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i}X_1^2 + \alpha_{2i}X_2^2 + \alpha_{3i}X_3^2 \\ U_i^3 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i}X_1^3 + \alpha_{2i}X_2^3 + \alpha_{3i}X_3^3 \\ U_i^4 &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i}X_1^4 + \alpha_{2i}X_2^4 + \alpha_{3i}X_3^4 \end{aligned} \quad (\text{Д.1})$$

Матрични облик релације (Д.1) је:

$$\begin{Bmatrix} U_i^1 \\ U_i^2 \\ U_i^3 \\ U_i^4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ 1 & X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ 1 & X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \\ 1 & X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{0i} \\ \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \alpha_{3i} \end{Bmatrix} \quad (\text{Д.2})$$

Односно:

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} \quad (\text{Д.2a})$$

Непознате генерализоване координате у матричном облику можемо представити као:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{0i} \\ \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \alpha_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ 1 & X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ 1 & X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \\ 1 & X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U_i^1 \\ U_i^2 \\ U_i^3 \\ U_i^4 \end{Bmatrix} \quad (\text{Д.3})$$

Односно:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U} \quad (\text{Д.3a})$$

Ако претпоставимо да је матрица система $\mathbf{A}$ регуларна матрица, њена инверзна матрица се према [12] одређује на следећи начин:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj} \mathbf{A} \quad (\text{Д.4})$$

где је $\det \mathbf{A}$ детерминанта матрице $\mathbf{A}$, а $\text{adj} \mathbf{A}$ Адјунгована матрица матрице $\mathbf{A}$.

Детерминанта матрице система $\mathbf{A}$ је облика:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ 1 & X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ 1 & X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \\ 1 & X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 \end{vmatrix} = 6V \quad (\text{Д.5})$$

Дакле, детерминанта матрице система једнака је запремини паралелопипеда, у којој је садржано шест запремина тетраедарског елемента.

Адјунговану матрицу система, можемо одредити као:

$$\text{adj} \mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]^T \quad (\text{Д.6})$$

где су $\mathbf{A}_{ij}$ кофактори које рачунамо према:

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{D}_{ij} \quad (\text{Д.7})$$

где је $\mathbf{D}_{ij}$ детерминанта добијена из $\det \mathbf{A}$ изостављањем i -те врсте и j -те колоне.

Релацију (Д.4) сада можемо представити на следећи начин:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \quad (\text{Д.8})$$

Кофактори a_k које одређујемо према (Д.7) су једнаки:

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^2 \begin{vmatrix} X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \\ X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 \end{vmatrix} \\ a_2 &= (-1)^3 \begin{vmatrix} X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \\ X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \\ X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 \\ X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \end{vmatrix} \\ a_3 &= (-1)^4 \begin{vmatrix} X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 \\ X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \end{vmatrix} \\ a_4 &= (-1)^5 \begin{vmatrix} X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Д.9})$$

Односно b_k :

$$\begin{aligned} b_1 &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & X_2^2 & X_3^2 \\ 1 & X_2^3 & X_3^3 \\ 1 & X_2^4 & X_3^4 \end{vmatrix} \\ b_2 &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & X_2^1 & X_3^1 \\ 1 & X_2^3 & X_3^3 \\ 1 & X_2^4 & X_3^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & X_2^3 & X_3^3 \\ 1 & X_2^4 & X_3^4 \\ 1 & X_2^1 & X_3^1 \end{vmatrix} \\ b_3 &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & X_2^1 & X_3^1 \\ 1 & X_2^2 & X_3^2 \\ 1 & X_2^4 & X_3^4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & X_2^4 & X_3^4 \\ 1 & X_2^1 & X_3^1 \\ 1 & X_2^2 & X_3^2 \end{vmatrix} \\ b_4 &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & X_2^1 & X_3^1 \\ 1 & X_2^2 & X_3^2 \\ 1 & X_2^3 & X_3^3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Д.10})$$

Односно c_k :

$$c_1 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & X_1^2 & X_3^2 \\ 1 & X_1^3 & X_3^3 \\ 1 & X_1^4 & X_3^4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X_1^2 & 1 & X_3^2 \\ X_1^3 & 1 & X_3^3 \\ X_1^4 & 1 & X_3^4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & X_1^1 & X_3^1 \\ 1 & X_1^3 & X_3^3 \\ 1 & X_1^4 & X_3^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1^1 & 1 & X_3^1 \\ X_1^3 & 1 & X_3^3 \\ X_1^4 & 1 & X_3^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1^3 & 1 & X_3^3 \\ X_1^4 & 1 & X_3^4 \\ X_1^1 & 1 & X_3^1 \end{vmatrix} \\
c_3 &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & X_1^1 & X_3^1 \\ 1 & X_1^2 & X_3^2 \\ 1 & X_1^4 & X_3^4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X_1^1 & 1 & X_3^1 \\ X_1^2 & 1 & X_3^2 \\ X_1^4 & 1 & X_3^4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X_1^4 & 1 & X_3^4 \\ X_1^1 & 1 & X_3^1 \\ X_1^2 & 1 & X_3^2 \end{vmatrix} \\
c_4 &= (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & X_1^1 & X_3^1 \\ 1 & X_1^2 & X_3^2 \\ 1 & X_1^3 & X_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1^1 & 1 & X_3^1 \\ X_1^2 & 1 & X_3^2 \\ X_1^3 & 1 & X_3^3 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{Д.11}$$

Односно d_k :

$$\begin{aligned}
d_1 &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & X_1^2 & X_2^2 \\ 1 & X_1^3 & X_2^3 \\ 1 & X_1^4 & X_2^4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X_1^2 & X_2^2 & 1 \\ X_1^3 & X_2^3 & 1 \\ X_1^4 & X_2^4 & 1 \end{vmatrix} \\
d_2 &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & X_1^1 & X_2^1 \\ 1 & X_1^3 & X_2^3 \\ 1 & X_1^4 & X_2^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1^3 & X_2^3 & 1 \\ X_1^4 & X_2^4 & 1 \\ X_1^1 & X_2^1 & 1 \end{vmatrix} \\
d_3 &= (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & X_1^1 & X_2^1 \\ 1 & X_1^2 & X_2^2 \\ 1 & X_1^4 & X_2^4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X_1^4 & X_2^4 & 1 \\ X_1^1 & X_2^1 & 1 \\ X_1^2 & X_2^2 & 1 \end{vmatrix} \\
d_4 &= (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & X_1^1 & X_2^1 \\ 1 & X_1^2 & X_2^2 \\ 1 & X_1^3 & X_2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1^1 & X_2^1 & 1 \\ X_1^2 & X_2^2 & 1 \\ X_1^3 & X_2^3 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{Д.12}$$

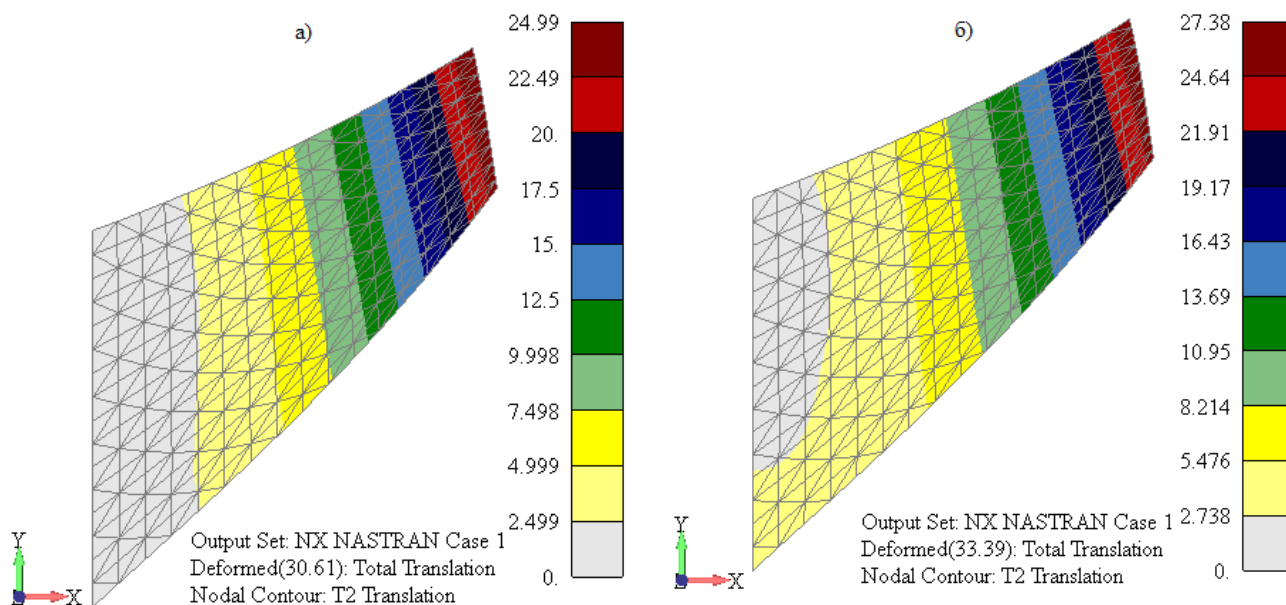
У општем облику кофактори a_k, b_k, c_k и d_k се сада могу представити као:

$$\begin{aligned}
a_k &= (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} X_1^l & X_2^l & X_3^l \\ X_1^m & X_2^m & X_3^m \\ X_1^n & X_2^n & X_3^n \end{vmatrix} = (-1)^k \begin{vmatrix} X_2^l & X_1^l & X_3^l \\ X_2^m & X_1^m & X_3^m \\ X_2^n & X_1^n & X_3^n \end{vmatrix} \\
b_k &= (-1)^k \begin{vmatrix} 1 & X_2^l & X_3^l \\ 1 & X_2^m & X_3^m \\ 1 & X_2^n & X_3^n \end{vmatrix} \\
c_k &= (-1)^k \begin{vmatrix} X_1^l & 1 & X_3^l \\ X_1^m & 1 & X_3^m \\ X_1^n & 1 & X_3^n \end{vmatrix} \\
d_k &= (-1)^k \begin{vmatrix} X_1^l & X_2^l & 1 \\ X_1^m & X_2^m & 1 \\ X_1^n & X_2^n & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{Д.13}$$

Додатак Е

У овом додатку приказана су поља померања, нормалног и ефективног напона нумеричких примера анализираних у претходном одељку. Све изложене конфигурације одговарају деформисаној, са увећавајућим фактором 5.

На слици Е.1 приказано је поље померања у вертикалном правцу конзоле променљивог пресека.

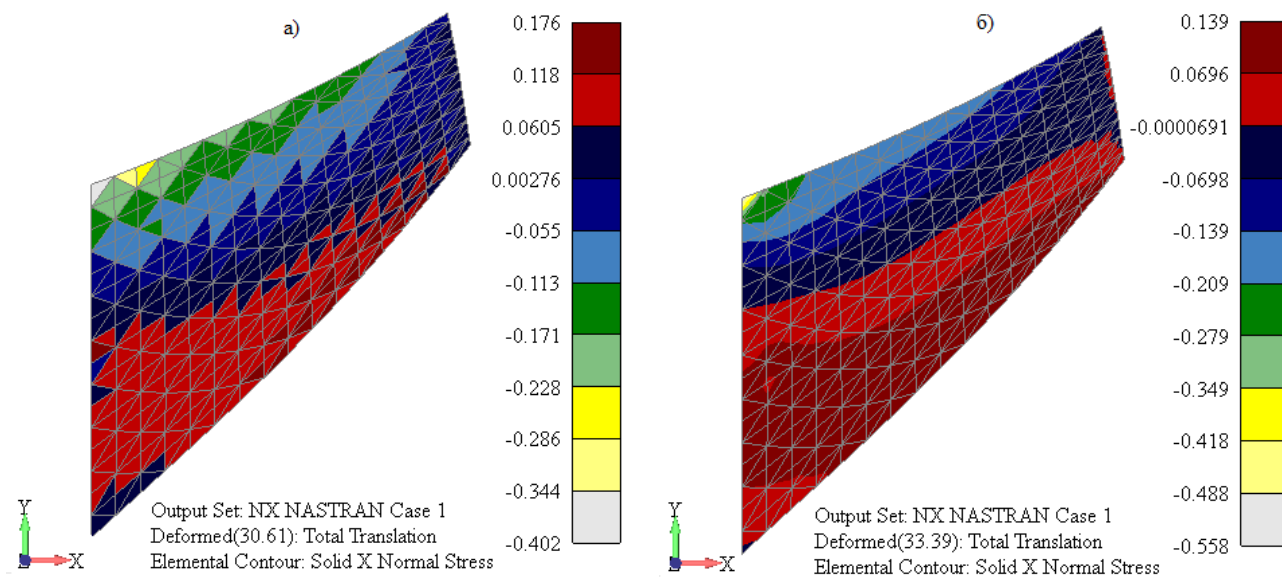


Слика Е.1 Поље померања у вертикалном правцу конзоле добијено

а) линеарним тетраедарским елементима

б) тетраедарским елементима са међучворовима

На слици Е.2 приказано је поље нормалног напона σ_{xx} конзоле променљивог пресека.

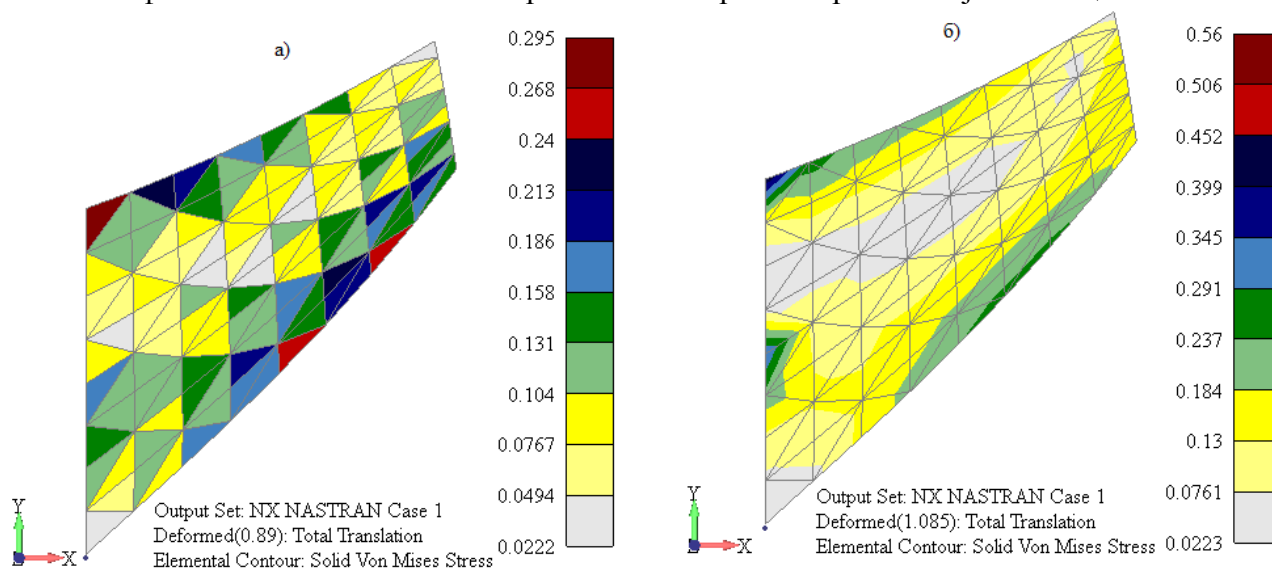


Слика Е.2 Поље нормалног σ_{xx} напона конзоле добијено

а) линеарним тетраедарским елементима

б) тетраедарским елементима са међучворовима

Поље ефективног напона конзоле променљивог пресека приказано је на слици Е.3.

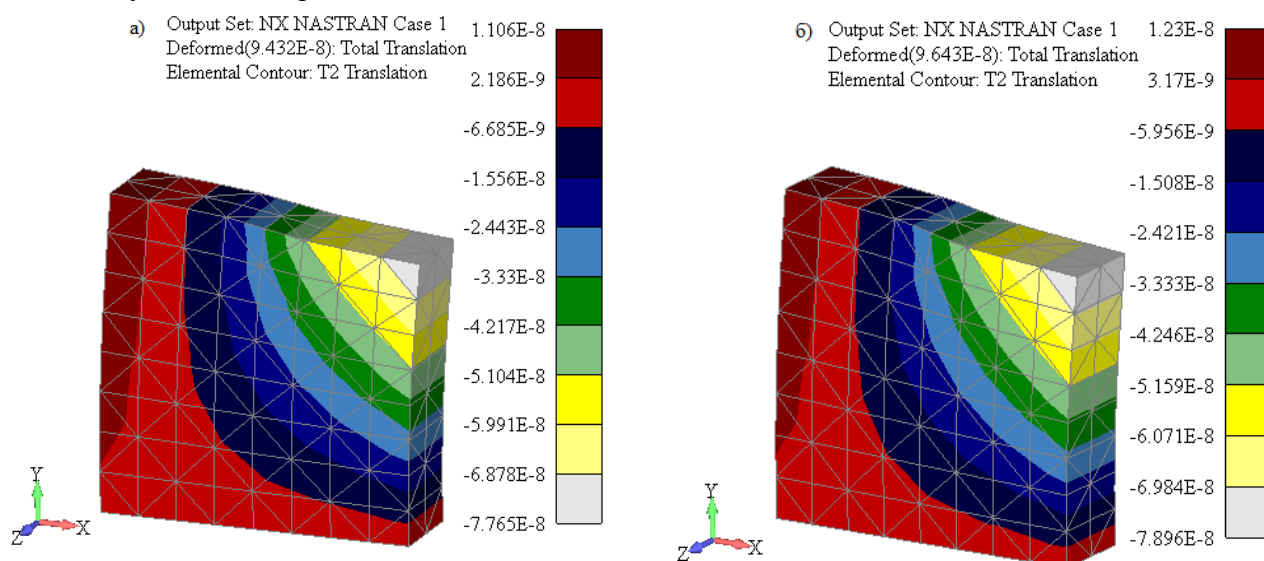


Слика Е.3 Поље ефективног напона конзоле добијено

а) линеарним тетрадарским елементима

б) тетрадарским елементима са међучворовима

На слици Е.4 приказано је поље померања у вертикалном у - правцу блока оптерећеног континуалним оптерећењем.

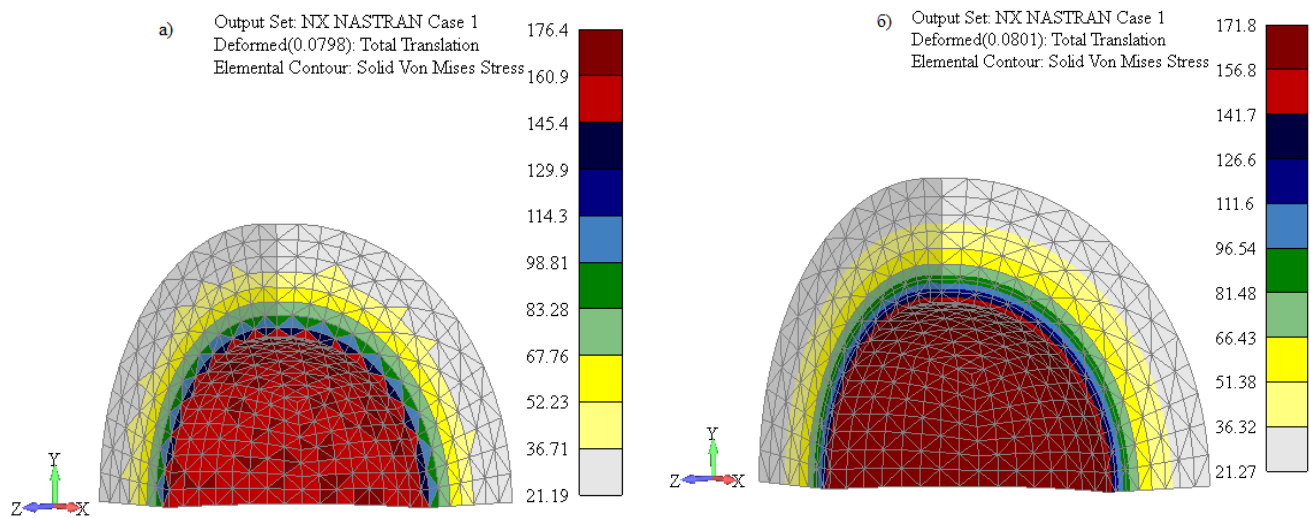


Слика Е.4 Поље померања у вертикалном у – правцу блока добијено

а) линеарним тетрадарским елементима

б) тетрадарским елементима са међучворовима

На слици Е.5 приказано је поље ефективног напона издубљене лопте, оптерећене унутрашњим притиском.



Слика Е.5 Поље ефективног напона издубљене лопте добијено
 а) линеарним тетраедарским елементима
 б) тетраедарским елементима са међучворовима