

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Техничко цртање са компјутерском графиком

Број индекса: 36/2008

Драган С. Мраовић

**Конструкција кривих сложеног облика са применом
на машинске делове**

завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Др Лозица Ивановић - ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да проучи домаћу и страну литературу из области раванских кривих. На основу прикупљених и систематизованих података треба да размотри значајне особине и карактеристике облика појединих кривих са аспекта њихове практичне примене. Посебну пажњу треба обратити на геометријска и механичка својства кривих примењених у различитим механизмима и машинским елементима. Примену кривих сложеног облика приказати на конкретним примерима из инжењерске праксе.

Препоручена литература:

- [1] Ивановић Л.: Анализа геометријских параметара нееволвентног облика профила зупца цилиндричних зупчаника, Магистарска теза, Крагујевац, 1995.
- [2] B. Bhattacharyya, S.C. Bera: Engineering graphics, I.K. International Publishing House Pvt. Ltd., New Delhi (India), 2009.
- [3] Николић В.: Машински елементи – теорија прорачун примери, Крагујевац, 2004.

Крагујевац, 12.11.2012

ментор:

Име, презиме и звање ментора

Резиме: У оквиру рада описан је значај кривих сложеног облика и њихова примена на машинске делове. Објашњени су неки од начина конструисања кривих сложеног облика и кроз примере је приказана њихова конкретна примена на машинске делове. Одабрани примери имају за циљ да скрену пажњу на неке од машинских делова које свакодневно срећемо, а настали су применом кривих сложеног облика.

Кључне речи: конструкција, криве сложеног облика, примена

Summary: In the labor describes the importance of the complex form of curves and their using to mechanical parts. Explain some ways construction complex shapes curves and is shown by examples of their using to specific mechanical parts. Selected examples are intended to draw attention to some of the mechanical parts which meets every day, if they were construction using the complex shapes curves.

Key words: construction, complex shape curve, use

САДРЖАЈ

1. УВОД	5
2. КРИВЕ СЛОЖЕНОГ ОБЛИКА, КОНСТРУКЦИЈА И ПРИМЕНА НА МАШИНСКЕ ДЕЛОВЕ	6
2.1. КРУГ	6
2.2. КОНУСНИ ПРЕСЕЦИ	7
2.2.1. ЕЛИПСА	7
2.2.2. ПАРАБОЛА	12
2.2.3. ХИПЕРБОЛА	16
3. РУЛЕТЕ	18
3.1. ЕВОЛВЕНТА	19
3.2. ЦИКЛОИДА	23
3.3. ЕПИЦИКЛОИДА	28
3.4. ХИПОЦИКЛОИДА	34
4. СПИРАЛЕ	37
5. ЗАВОЈНИЦЕ	41
6. СИНУСОИДА и КОСИНУСОИДА	48
7. ЗАКЉУЧАК	50
8. ЛИТЕРАТУРА	51

1.УВОД

Крива је геометријски појам, апстракција обичне представе криве линије. У различитим одељцима математике термин крива се дефинише на различите начине, зависно од циљева и метода изучавања. Крива је геометријско место тачака простора чије су координате функције једне променљиве.

Велики број делова машина, алата и прибора (слика 1.1) имају контуре или делове контуре ограничене кружницом, елипсом, параболом, синусидом, еволвентом, циклоидом или неком другом кривом линијом.

Раванске криве се могу дефинирати (задати):

1. Као пресек равни са површином,
2. Као скуп тачака које задовољавају задато својство,
3. Као путања тачке која се креће по одређеном закону (кинетички),
4. Повезивањем више пројектованих елемената,
5. Задавањем диференцијалних својстава (диференцијалним једначинама),
6. Као резултат пресликавања већ познате криве,
7. У аналитичком облику (представља график неке функције).



Слика 1.1 Машински елементи оивичени неком кривом

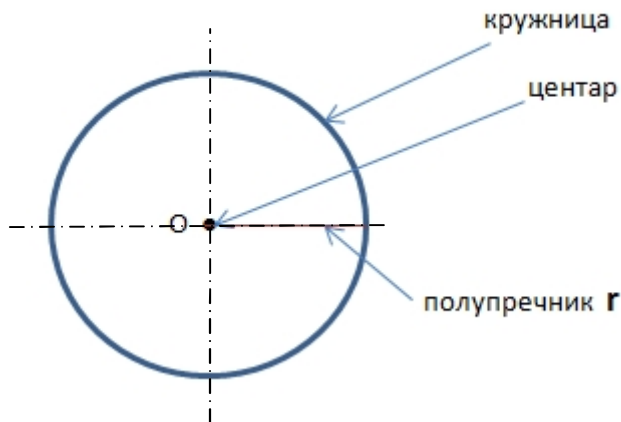
2. КРИВЕ СЛОЖЕНОГ ОБЛИКА, КОНСТРУКЦИЈА И ПРИМЕНА НА МАШИНСКЕ ДЕЛОВЕ

2.1 КРУГ

Овде ћемо приказати конструкције неких равнинских криви које се примјењују у више препознатљивих техничких примера. Једна од најважнијих криви је кружница. Кружница (слика 2.1) је скуп тачака у равнини које су једнако удаљене од једне тачке O , која представља и центар. Растојање r , тачке од средишта кружнице зове се полупречник или радијус кружнице. Сви полупречници једне кружнице су једнаки. Ако је у правоуглом координатном систему тачака $O(0, 0)$ средиште кружнице, а r полупречник, једначина кружнице гласи

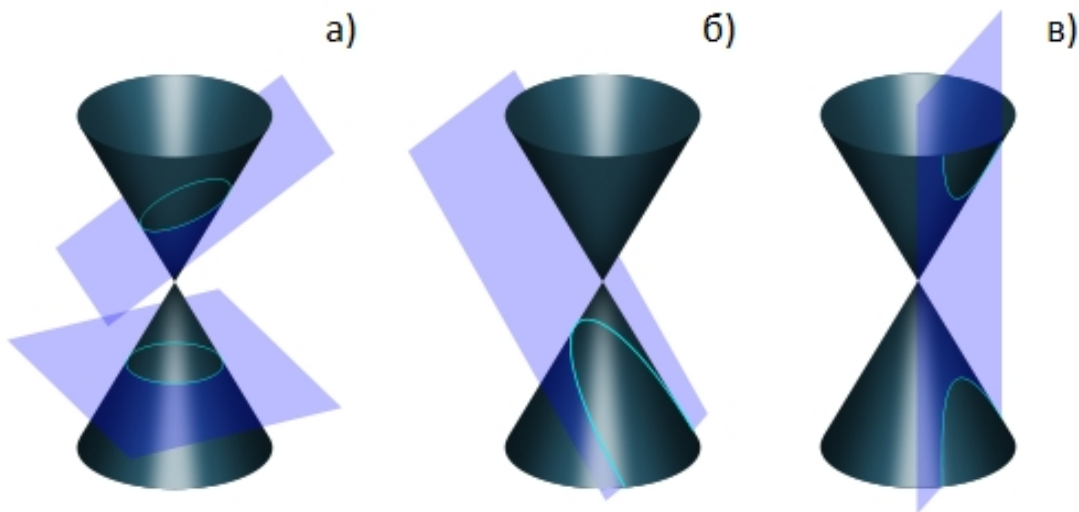
$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

и зове се средишња или централна једначина кружнице.



Слика 2.1 Круг

Ортогонална пројекција круга је углавном елипса. Једино када је раван круга паралелна са пројекцијском равни, пројекција круга је круг. Из тог разлога парабола, хипербола и елипса (слика 2.2) називају се конусни пресеци, јер представљају могуће пресеке конуса и равни. Како при решавању задатака често треба цртати елипсу, понекад параболу или хиперболу, навешћемо неке конструкције тих криви. [4]



Слика 2.2 а) Елипса, б) Парабола, в) Хипербола

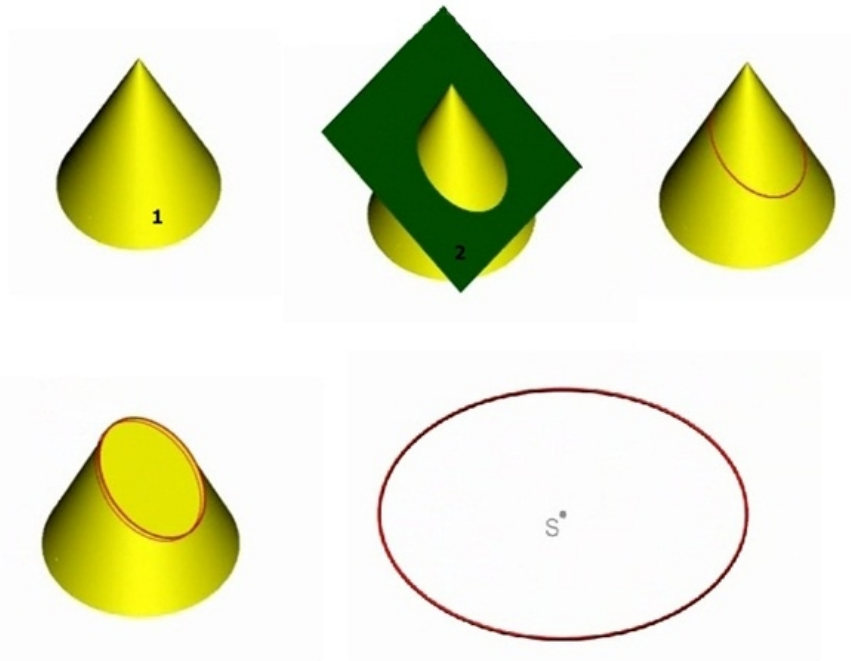
2.2 КОНУСНИ ПРЕСЕЦИ

2.2.1 ЕЛИПСА

Елипса је у математици крива затворена линија у равни, која се може дефинисати као геометријско место тачака чији је збир растојања од две фиксираних тачке увек једнак. Ове две тачке се још називају фокусима елипсе, а тачка која се налази тачно између њих је центар елипсе.

Елипса има два пречника (полупречника) који представљају минимално и максимално растојање њених тачака од њеног центра. Осе елипсе су праве које садрже њене пречнике. Прва, главна оса, пролази кроз обе фокусне тачке и центар, а друга, помоћна, пролази кроз њен центар, и нормална је на прву. Уколико су фокусне тачке елипсе једна те иста тачка, ради се о специјалном случају елипсе, који се назива круг. [4] [7]

Елипса (слика 2.1) настаје ако се правилна купа (1) пресече помоћу равни (2) која је под неким углом у односу на базу купе коју не сече, а сече све изводнице купе.

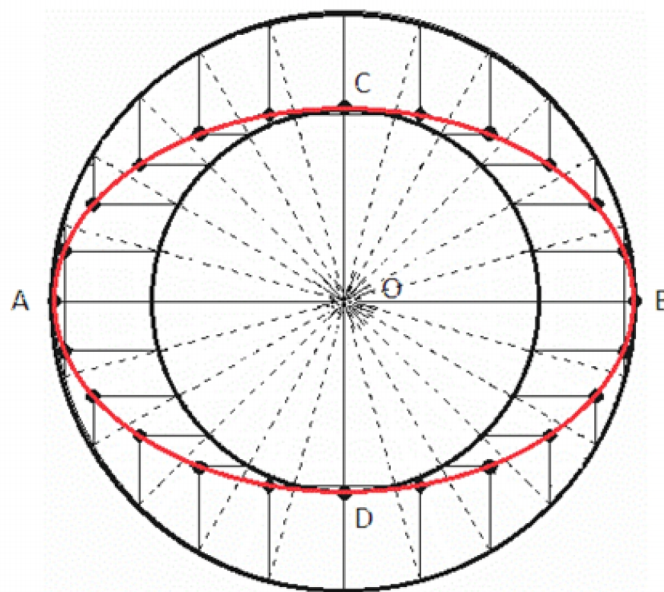


Слика 2.1 Поступак настајања елипсе

Треба ли да одредимо пројекцију круга, можемо да одредимо пројекције појединих његових тачака, али би то био тежак и нетачан посао. Много лакше је да узмемо два спрегнута пречника на кругу, па ће пројекције тих двеју спрегнутих пречника круга бити спрегнути пречници елипсе, сама елипса је потпуно одређена. Ако на кругу узмемо било која два спрегнута пречника, прав угао који они заклапају између себе неће се показивати у пројекцији као прав угао него било какав већи или мањи. У том случају кажемо да нам је елипса задата спрегнутим пречницима. Ако на кругу одабермо спрегнуте пречнике тако да је један од њих паралелан са пројекцијском равни, прав угао који они заклапају показаће се и у пројекцији као прав угао (јер му је један крак паралелан са пројекцијском равни). У том случају имамо два спрегнута пречника који стоје под правим углом, а то су осе елипсе. У том случају кажемо да нам је елипса задана осама.

Према томе да ли је елипса задана осама или спрегнутим пречницима различита је и конструкција елипсе.

Један од метода конструисања је помоћу конца дужине $2a$ чији су крајеви прчвршћени у тачкама F_1 и F_2 (слика 2.2).



Слика 2.3 Конструкција елипсе помоћу две кружнице

У техници срећемо се са пуно примера примене елипсе приликом израде делова као што су елиптичне прирубнице цеви (слика 2.5), елиптични зупчаници (слика 2.4) и сл. Поред тога често се срећемо са елипсом као естетским детаљем, на пример у ауто индустрији (слика 2.6.а), изради намештаја (слика 2.6.б) и сл.



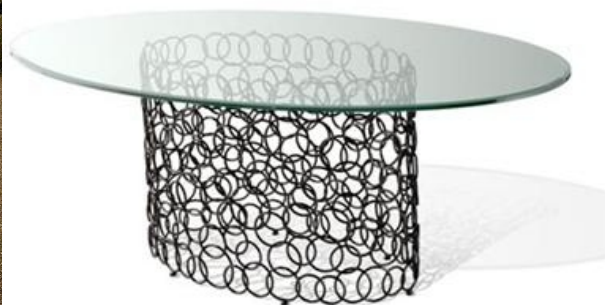
Слика 2.4 Елиптични зупчаници



Слика 2.5 Елиптична прирубница цеви



а)



б)

Слика 2.6 Преимена елипсе из естетских разлога а) фарови аутомобила, б) сто

Авиони који имају крила која формирају пуну елипсу (слика 2.7). Ово су примерци авиона са елиптичним крилима који су се по први пут појавили 30-их година прошлог века и који су имали и неке предности као што је бољи индуковани отпора у односу на класичне авионе, али чија израда конструкције крила је била скупља од осталих, па су полако пали у заборав. Овај авион, са оваквим крилима има неке предности у односу на "нормалне" авионе, а то је да је величина крила мања, да су више компактнији и стабилнији. Такође, како се ваздушни вртлози формирају на крајевима крила и утичу на стварање тзв. индукованог отпора који је штетан, они овде повећавају потисну снагу авиона чак и до 30 %.

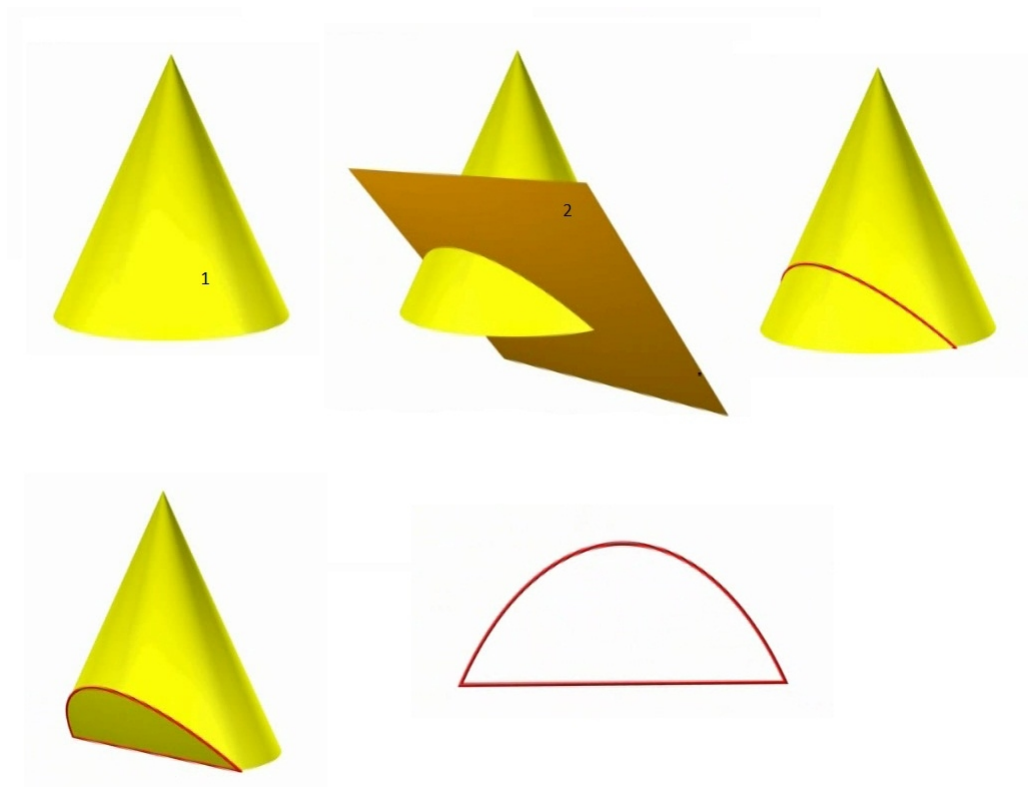


Слика 2.7 Авион са елипсастим крилима

2.2.2 ПАРАБОЛА

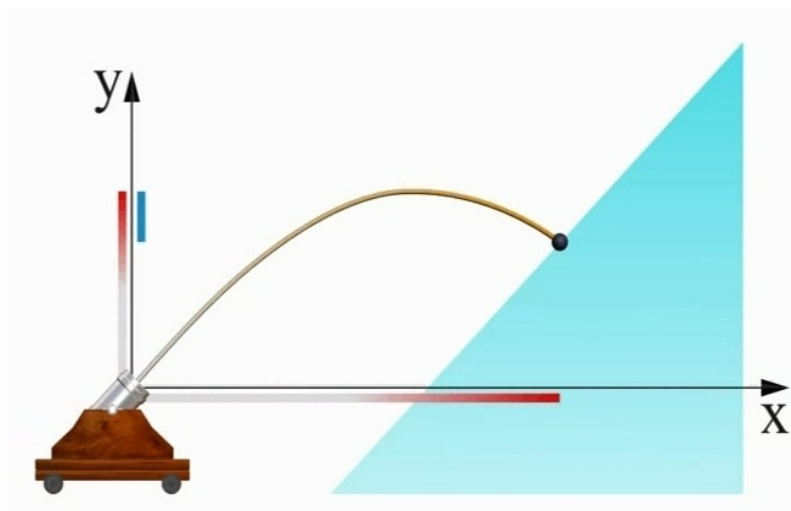
Парабола је крива у равни, која може да се представи као конусни пресек створен пресеком равни са правилном купом, при чему је раван паралелна са изводницом конуса. Она има веома широку примену у индустрији.

Према дефиницији, да је парабола геометријско место тачака које су подједнако удаљене од једне сталне праве (директрисе параболе) и од једне сталне тачке (жиже), конструкција параболе је прилично једноставна. Парабола (слика 2.8) настаје ако се правилна купа (1) пресече помоћу равни (2) која је паралелна са изводницом купе. [4]



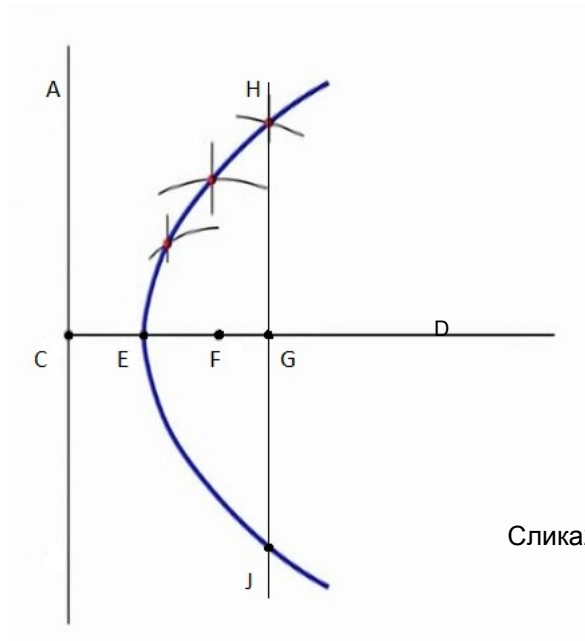
Слика 2.8 Поступак настајања параболе

Парабола је такође и крива која настаје путањом пројектила код косог хитца (слика 2.9).



Слика 2.9 Косии хитац

Један од начина цртања параболе (слик 2.10) ја када нам је задата директриса AB и жижа F , повучемо било коју праву CD нормалну на директрису и нека пролази кроз жижу F . Кроз било коју тачку G на правој CD повучемо линију паралелну директриси. Са центром у тачки F и радијусом CG описујемо лук који пресеца праву, која пролази кроз тачку G , и добијамо пресечне тачке H и J . Тачке H и J представљају две тачке параболе. Цртање довољног броја тачака на овај начин ће нам омогућити да нацртамо параболу са теменом у тачки E . [4] [2]



Слика2.10 Конструисање параболе

Ако у некој произвољној равни имамо параболу и хоћемо да јој одредимо ортогоналну пројекцију, свакој тачки параболе одговараће у пројекцији једна тачка, свакој тангенти тангента, па и бесконачно удаљеној тачки бесконачно удаљена тачка. Пројекција параболе биће поново парабола. Једино правом углу између тетива и оса неће, углавном, одговарати прав угао, осим у случају да је једна од тих двеју правих, тетива или оса паралелна са пројекцијском равни. Пројекција тетиве остаће тетива нове параболе, али пројекција осе неће бити оса нове параболе него само прек параболе спрегнут са поменутом тетивом. Наводимо сада без доказа нека правила о параболу, која нам касније могу послужити да лакше нацртамо саму криву. Ако узмемо две, било које тачке параболе, па их спојимо, та дуж је тетива параболе. Паралелно са њом можемо да павучемо колико год хоћемо нових тетива исте параболе. Преполовимо ли сваку од тих тетива, њихова средишта нанизаће се по једној правој коју називамо пречником параболе. Тај пречник је спрегнут са поменутим тетивама, а и тетиве саме су спрегнуте са тим пречником.

1) Парабола пресеца свој пречник у једној тачки и тангента у тој тачки је паралелна са тетивама које су спрегнуте са тим пречником. Узмемо ли неку другу тетиву параболе, која није паралелна са предходним тетивама, добићемо и неки други пречник параболе који је спрегнут са новом тетивом, али је тај нови пречник паралелан са првим пречником.

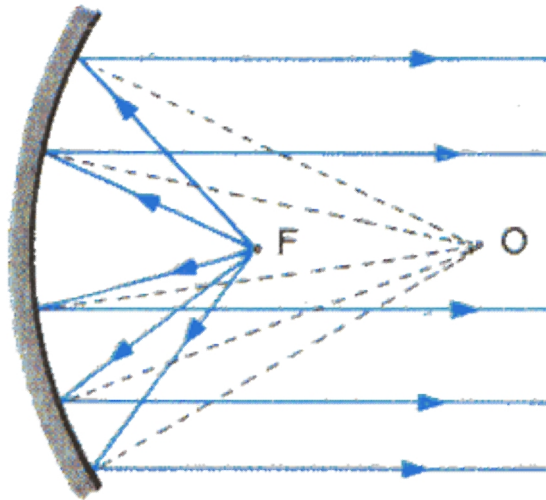
2) Сви пречници параболе су паралелни између себе, а паралелни су и са осом параболе. (Јер је и оса параболе само један од њених пречника, са једином разликом што су тетиве спрегнуте са осом управне на њу).

3) Када у крајњим тачкама неке тетиве павучемо тангенте на параболу, тангенте се пресецају у једној тачки пречника спрегнутог са том тетивом.

4) Парабола пресеца тај пречник у тачки која полови дуж од пресека тангенти до средишта тетиве.

Ова нам правила дају могућност да једноставно конструишемо део параболе између двеју задатих тачака. Парабола је одређена ако је пред крајњих тачака једне њене тетиве позната и тачка у којој парабола пресеца прек спрегнут са том тетивом, или када поред тетиве имамо и тангенте у њеним крајњим тачкама. У првом случају одређују пречник параболе пресечна тачка и тачка која полови дату тетиву, а у другом случају пречник пролази кроз средиште тетиве и кроз тачку у којој се секу дате тангенте.

Примена параболе. Уколико се пресече конус помоћу равни која је паралелна изводници конуса добијамо параболу. Параболично огледало (слика 2.11) има облик ротационе параболе, тј. површи која настаје ротацијом параболе око своје осе. Ако се извор светла или неких таласа налази у жижи таквог огледала њихови одбијени зраци биће паралелни оси параболе. [9]



Слика 2.11 Параболично огледало

Према закону рефлексije угао ударања једнак је углу одбијања таласа. Сваки зрак који пролази кроз жижу након рефлексije о параболу паралелан је оси параболе. То има јако велику примену код сателитских антена (слика 2.12). Технички парабола се примењује за такозване параболичне прелазе код разних машинских делова као што су нпр. постоља машина.

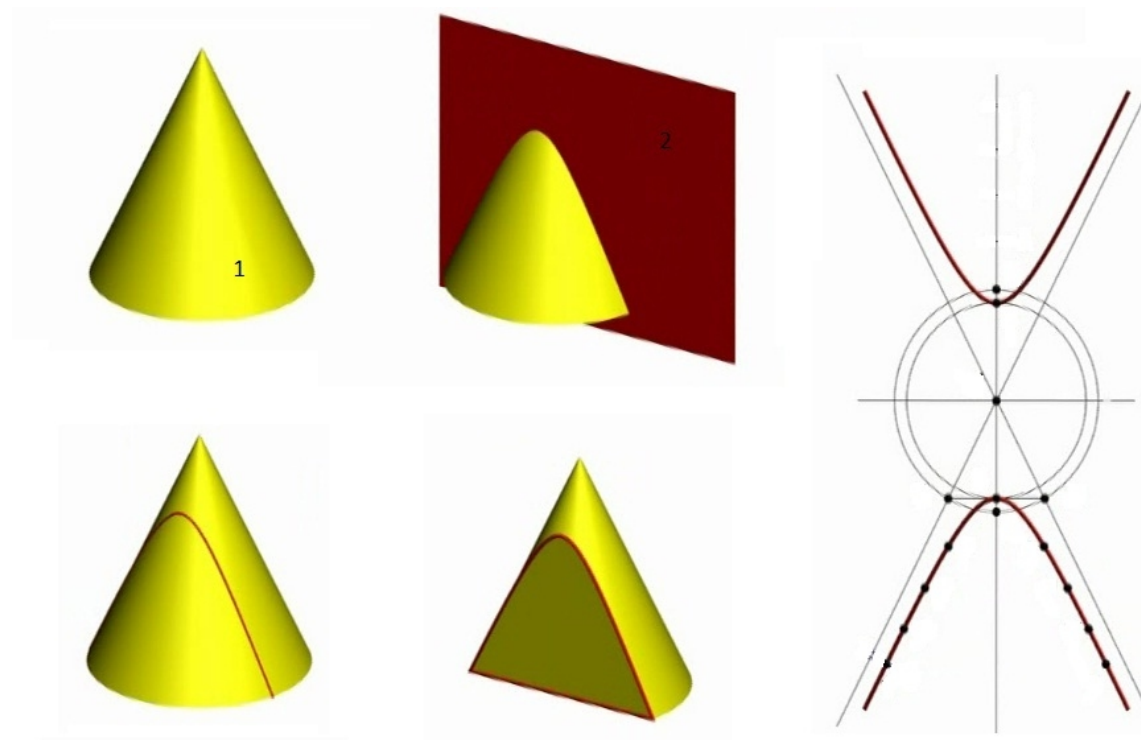


Слика 2.12 Сателитске антене

2.2.3 ХИПЕРБОЛА

Хипербола је геометријски положај тачака које имају једнаку разлику одстојања од двеју сталних тачака. Састоји се из два симетрична дела који се називају гране хиперболе, има два фокуса и две асимптоте. Тачка пресека асимптота представља центар симетрије хиперболе.

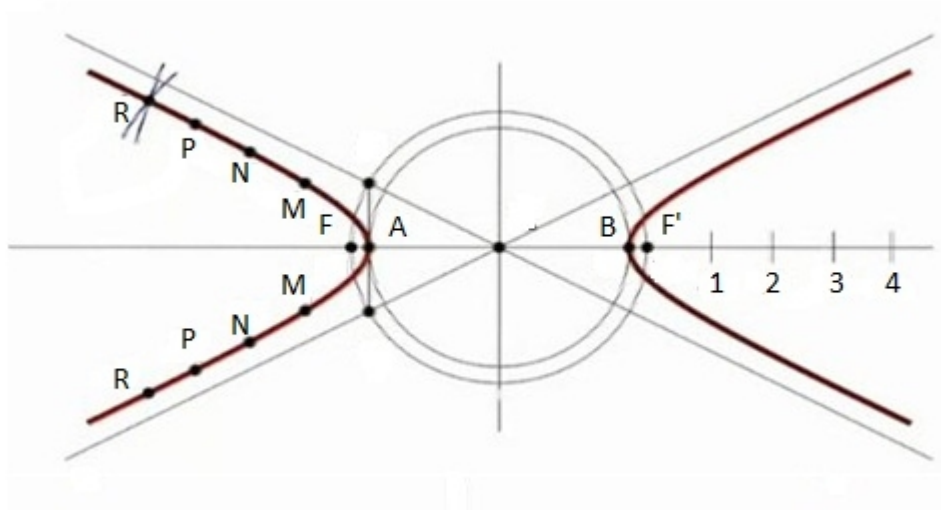
Хипербола (слика 2.13) настаје када конус 1 пресече права 2, која је нормална на базу конуса. [4]



Слика 2.13 Поступак настајања хиперболе

За цртање хиперболе (слика 2.14) полазимо од попречне осе АВ и две жиже F и F' које леже на попречном правцу АВ. Изаберемо тачку 1 са десне стране тачке F' и са центрима у тачкама F и F' и радијус B1, описује четири лука (по два из сваке тачке и по један са сваке стране осе). Сада поново из тачака F и F' као центара описујемо четири лука радијуса A1 (по два из сваке тачке и по један са сваке стране осе тако да се пресецају са

предходно описаним луковима), тако добијамо тачке M које се налазе на кривој хиперболе. Када поновимо читав поступак за радијусе A_2, B_2, A_3, B_3 и A_4, B_4 добићемо тачке N, P и R , кроз које пролази крива хиперболе. Спојимо све тачке при чему су нам тачке A и B темена хиперболе. [4]



Слика 2.14 Конструкција хиперболе

Примену хиперболе најчешће у прекси срећемо код хиперболоидних зупчасти парова. Хиперболоидни зупчасти парови (слика 2.15) се користе за пренос снаге и кретања између вратила чије се осе мимоилазе под неким углом.



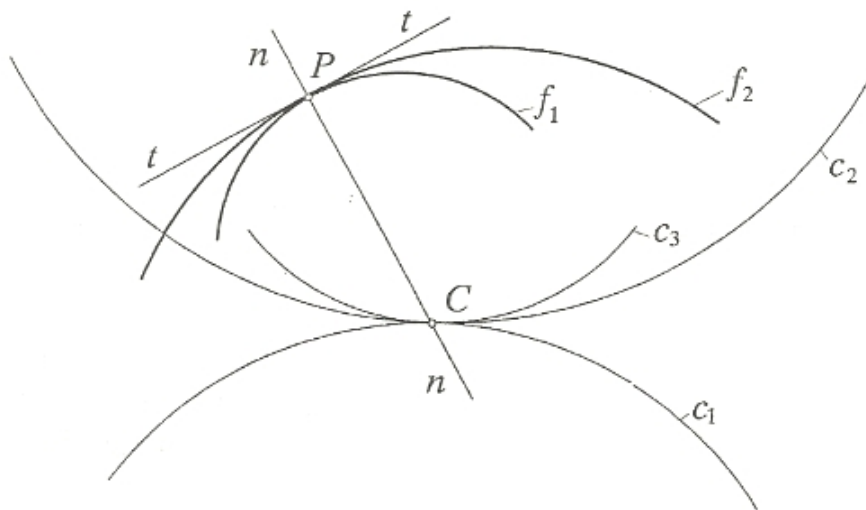
слика 2.15 Хиперболоидни зупчасти пар

3. РУЛЕТЕ

Рулете представљају криве које се добијају као путање тачке везане за неку криву, која се котрља по некој непокретној линији. Оправданост избора рулета за описивање спрегнутих профила може се потврдити теоремом Камуса.

Теорема Камуса: При котрљању по датим центроидама c_1 и c_2 неке помоћне циклоиде c_3 тачка P , везана за њу описује криве f_1 и f_2 које су узајамно обвојене криве при релативном кретању центроида c_1 и c_2 .

Доказ теореме (слика 3.1) се заснива на томе да се у тачки додира C све три центроида поклапају тренутни центри обртања C_{12} , C_{13} и C_{23} . Рулете f_1 и f_2 су путање тачке P при њеном релативном кретању по центроидама и, према томе, вектор брзине тачке P има правац тангенте на поменуте криве. Истовремено брзина је управна на праву која спаја тачке P и C . Према томе, заједничка нормала на криве f_1 и f_2 при њиховом релативном кретању мора да пролази кроз тренутни центар обртања, што је сагласно основном закону спрезања. [1]



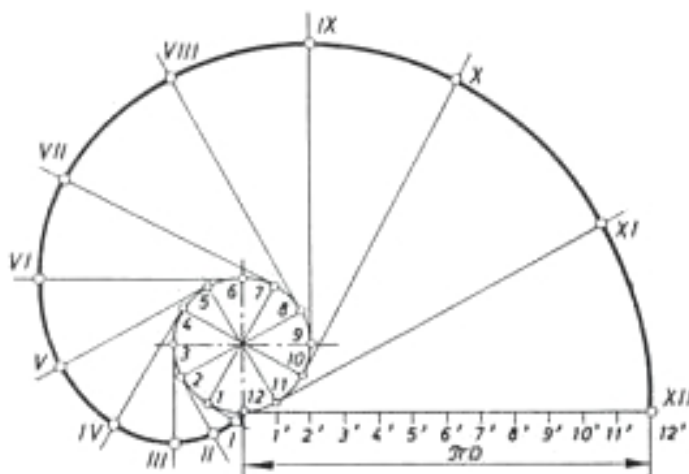
Слика 3.1 Теорема Камуса

У групу рулета спадају разне врсте еволвенти и циклоида, које имају јако широку примену у савременом свету.

3.1 ЕВОЛВЕНТА

Крива која је математички дефинисана има у свакој тачки једнозначно одређен положај нормале и средиште кривине криве. Еволвента је крива линија коју описује тачка на правој која се котрља по кружници без клизања.

Свака еволвента (слика 3.2) кружнице има два крака и бесконачно много завоја. Кружницу пречника (D) делимо на 12 једнаких делова. Из последње тачке повлачимо тангенту дужине πD коју делимо такође на 12 једнаких делова. Затим се на тангенте из осталих тачака наносе одговарајуће дужи $12-1'$, $12-2'$... и добијају тачке еволвенте круга. Спајањем добијених тачака глатком кривом добијамо еволвенту. [2] [5]



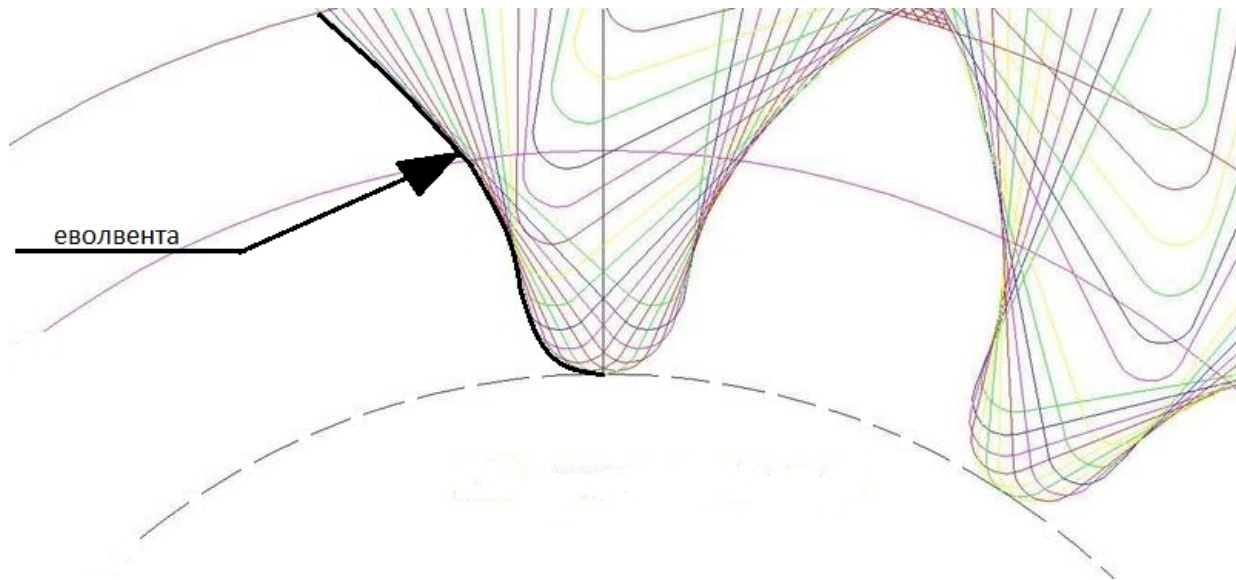
Слика 3.2 Конструисање еволвенте

Еволвента је крива линија која настаје котрљањем без клизања праве (изводнице или генератрисе) по кругу. Свака тачка те праве описује по једну еволвенту. Круг по коме се генератриса котрља је основни круг или еволуту за дату криву. Сасвим поједностављено, еволвента се може схватити као крива линија настала одмотавањем затегнутог конца, предходно намотаног на основни цилиндар. Свака тачка на тако замишљеном концу описује по једну еволвенту. Битне особине еволвенте су:

- [illegible]

Слика 3.3 Еквидистантне еволвенте

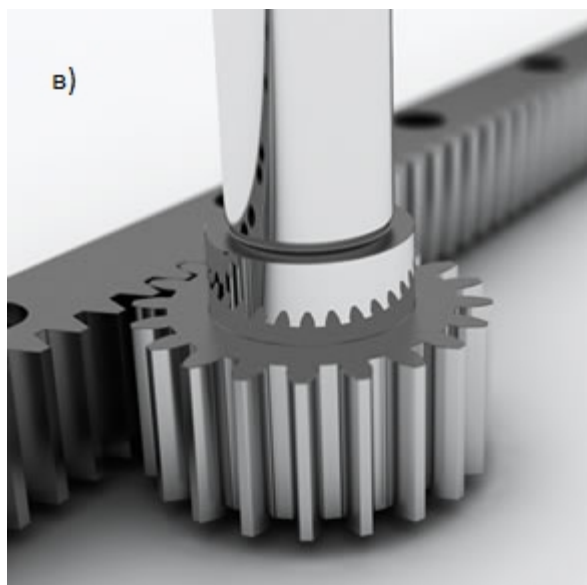
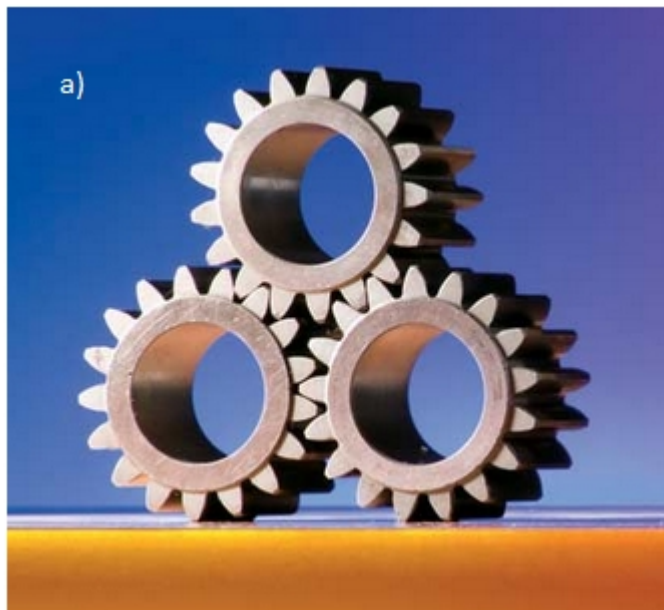
Еволвента кружнице најчешће се примењује при конструисању и изради озубљења зупчаника. Бочна линија зупца зупчаника, код еволвентног озубљења је еволвента кружнице (слика 3.4). Зупчаници са еволвентним профилем су погоднији за израду резањем и више се примењују при спрезању еволвентних профила, одвија се додир две конвексне (испупчене) површине па су присутна велика напрезања и хабања.



Слика 3.4 Еволвента

Цилиндрични еволвентни зупчасти преносници преносе снагу и врше претварање једног обртног кретања у друго или обртно или праволинијско. То су такви преносници код којих су осе вратила спрегнутих зупчаника међусобно паралелне. Кинематске површине зупчастих парова су цилиндри који се котрљају један по другоме без клизања. У пракси се примењују:

- Цилиндрични еволвентни зупчаници са спољашњим озубљењем (слика 3.5 а)
- Унутрашњи парови (слика 3.5 б)
- Равни цилиндрични зупчасти парови (слика 3.5 в)

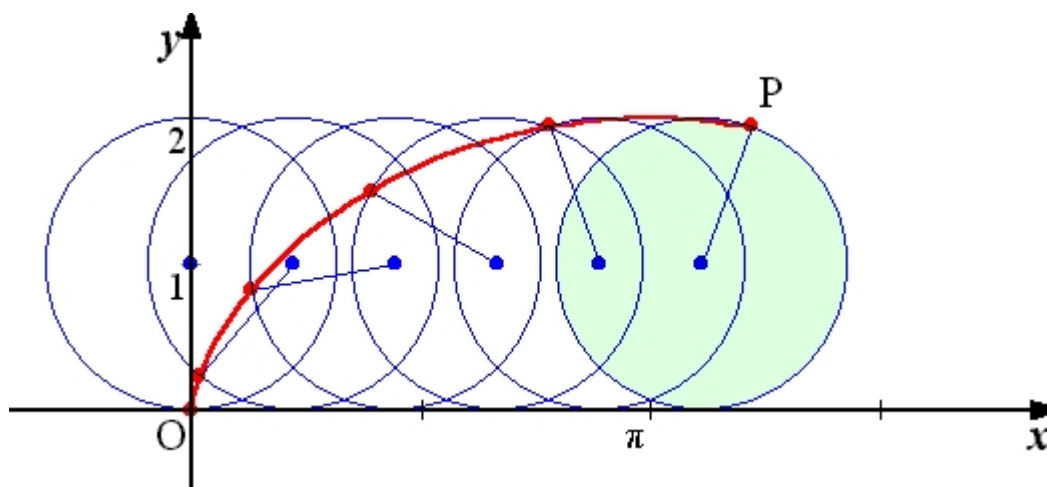


Слика 3.5 а) Цилиндрични еволвентни зупчаници са спољашњим озубљењем б) Унутрашњи парови в) Равни цилиндрични зупчasti парови

Код цилиндричних зупчастих парова са спољашњим озубљењем, спрегнути зупчаници имају супротне смерове обртања, док парови са унутрашњим озубљењем имају исте смерове обртања. Равним зупчастим паром врши се претварање обртног у праволинијско кретање. [3]

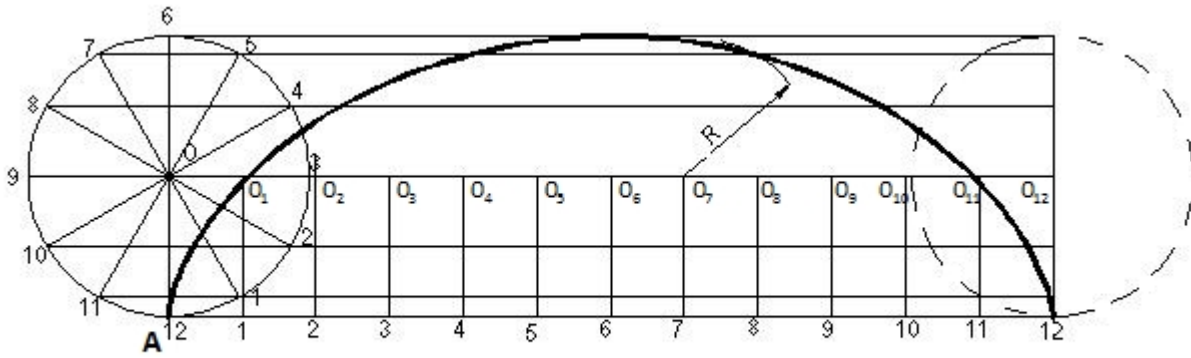
3.2 ЦИКЛОИДА

Циклоида (слика 3.5) је крива која настаје када се тачка на кругу котрља без клизања по глаткој равни.



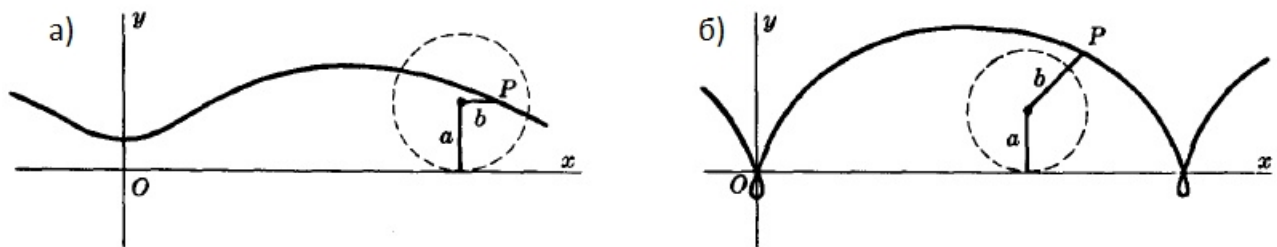
Слика 3.5 настајање циклоиде

Путања једне тачке на кругу полупречника R при пуном окрету ($2\pi R$) описује једну грану обичне циклоиде. Обична циклоида се још назива правом циклоидом или ортоциклоидом. Обична циклоида (слика 3.6) је крива коју описује тачка A , која се налази на кружници, када се кружница котрља без клизања по правцу. Та кружница се зове додирна кружница или изводница, а права се зове директриса. Одређена је додирна кружница полупречника R . У доњој тачки вертикалног положаја кружнице, тачки A , повучемо тангенту (x -оса). Кружницу поделимо на 12 једнаких делова, исто то урадимо и са тангентом на кружницу. Кроз тачке обележене на кружници повлачимо праве паралелне x -оси, затим обележимо средишта $O_1, O_2, \dots, O_{12}$ на правој која пролази кроз средиште круга, паралелној x -оси. Са полупречником R из центара $O_1, O_2, \dots, O_{12}$ описујемо лукове тако да они пресецају праве пресецају праве које пролазе кроз одговарајуће тачке. Цртањем глатке криве кроз добијене пресечне тачке добијамо праву циклоиду. [3] [4] [5]



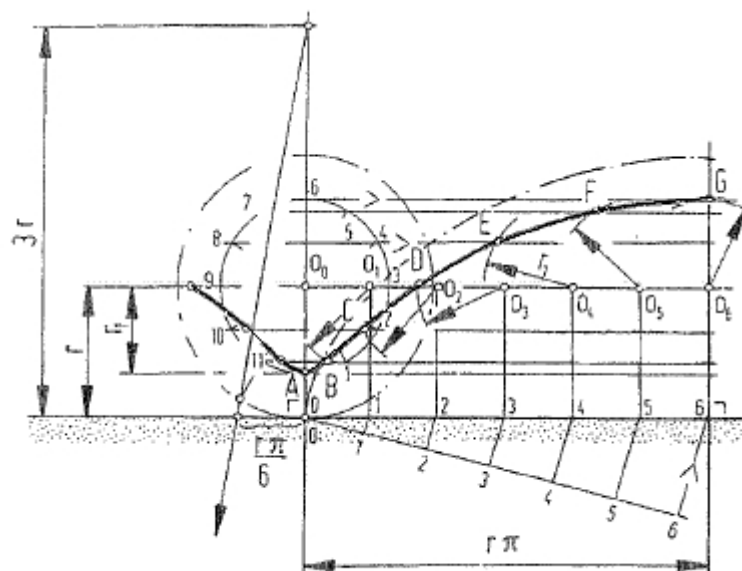
Слика 3.6

Поред праве циклоиде постоје скраћена и продужена циклоида (слика 3.7) чија конструкција је слична конструкцији праве циклоиде.



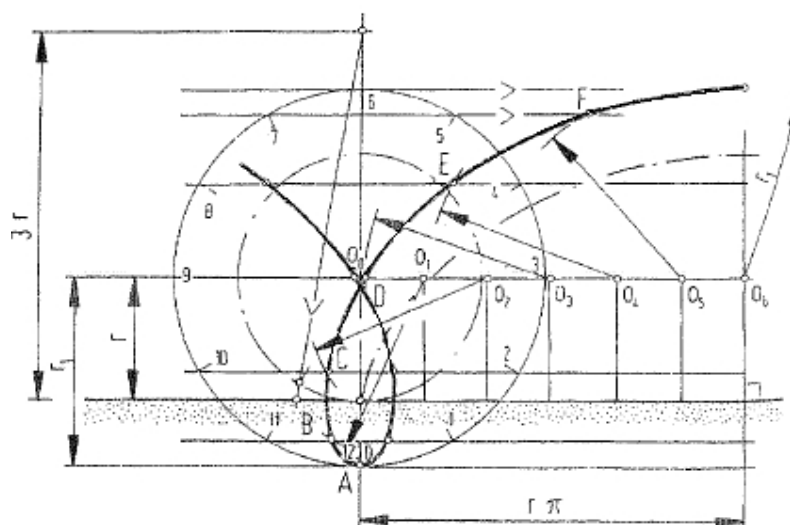
Слика 3.7 а) скраћена циклоида, б) продужена циклоида

Конструкција скраћене циклоиде (слика 3.8) . Једна тачка унутар додирне кружнице $r, < r$ описује једну скраћену (заокружену, заобљену) циклоиду. Удаљеност тачке (нпр. А) од средишта додирне кружнице означена је полупречником r , наноси се такође на правце из подеоних тачака кружнице полупречника r , (који су нормални на правац по коме се котрља круг). Пресеци кружних лукова полупречника r , око O_1, O_2 итд. Са исто нумерисаним правима које пролазе кроз те тачке добијемо тачке скраћене циклиде. [4]



Слика 3.8 конструисање скраћене циклоиде

Конструкција продужене циклоиде (слика 3.9). ако је тачка која се посматра изван додирне кружнице ($r_1 > r$), она описује продужену (заплетену односно замршену) циклоиду. Удаљеност тачке (нпр. А) од средишта додирне кружнице означен је полупречником r_1 . Кроз подеоне тачке кружнице полупречника r_1 повучене су нормале на раван по којој се котрља круг. Око O_1, O_2 итд. Описане су помоћне кружнице са полупречником r_1 које у пресецима са једнако нумерисаним нормалама дају тачке продужене циклоиде. [4]



Слика 3.9 конструкција продужене циклоиде

Настајање циклоиде најчешће срећемо код зупчасте летве (слика 3.10). Зупчаник се котрља по зупчастој летви и тако тачка која се налази на подеоном кругу зупчаника описује путању циклоиде.



Слика 3.10 зупчаста летва

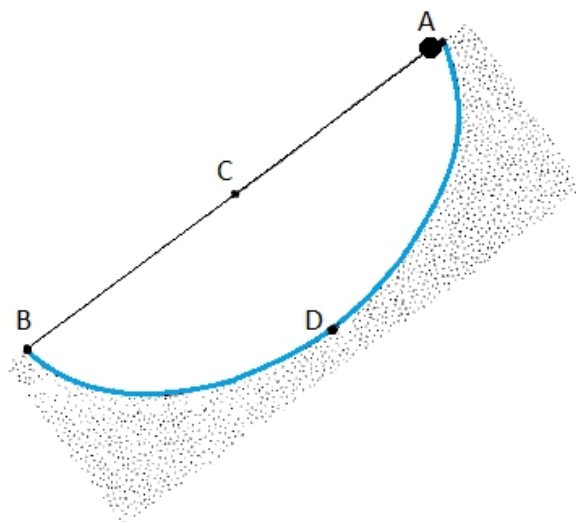
Још један од примера настајања циклоиде са којим се свакодневно срећемо је котрљање точка возила по путу, тачније једна тачка, приликом котрљања описује циклоиду (слика 3.11).



Слика 3.11 Замишљена циклоида коју описује тачка на точку возила

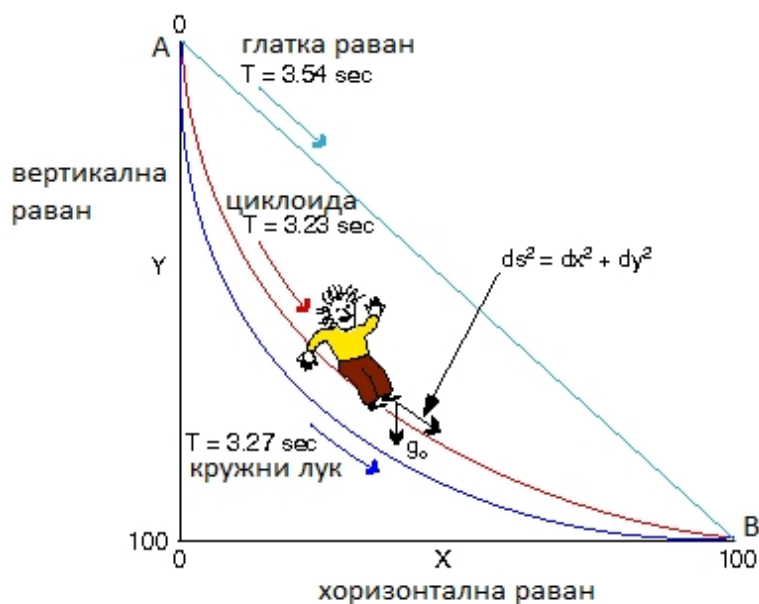
Циклоида има пуно занимљивих својстава, од којих ћемо поменути само нека.

Котрљајући се по луку циклоиде ADB материјална тачка ће прећи пут од тачке А до тачке В у краћем времену него котрљајући се правцем ACB, при томе мислећи на котрљање без трења, под утицајем силе земљине теже и без почетне брзине (слика 3.11). Из тог разлога кажемо да је циклоида крива најкраћег времена. [11]



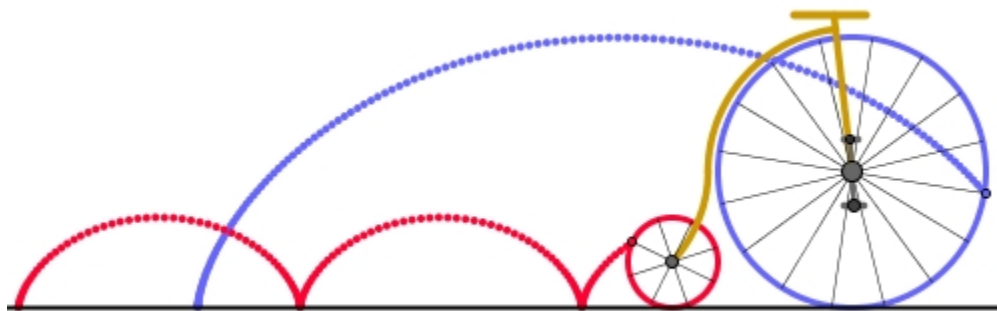
Слика 3.11 циклоида, крива најкраћег времена

Проблем брахистохорне криве (криве најкраћег времена) се може решити прорачуном вариација и први га је формулисао научник Johann Bernoulli. То показује пример (слика 3.12) када се тело масе M пусти да се слободно креће низ глатку равну, циклоиду и кружни лук које имају заједничке тачке А (на y - координати) и В (на x – координати). [11]



Слика 3.12 Пример брахистохорне криве

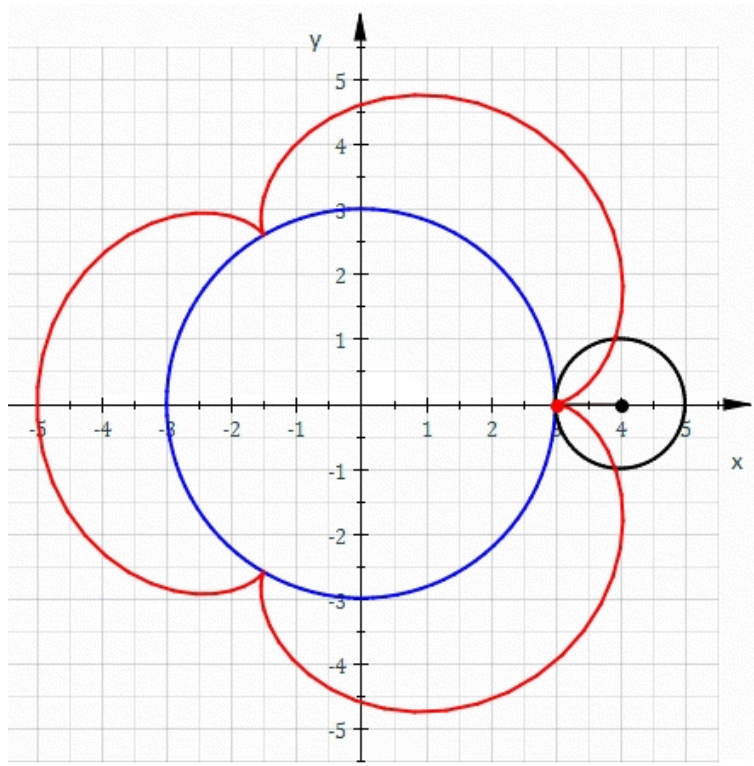
Још једна од занимљивости коју срећемо је бициклоида, она се састоји из две обичне циклоиде. Бициклоиду (слика 3.13) описују два круга различитих полупречника која се котрљају по заједничкој правој.



Слика 3.13 Настајање бициклоиде

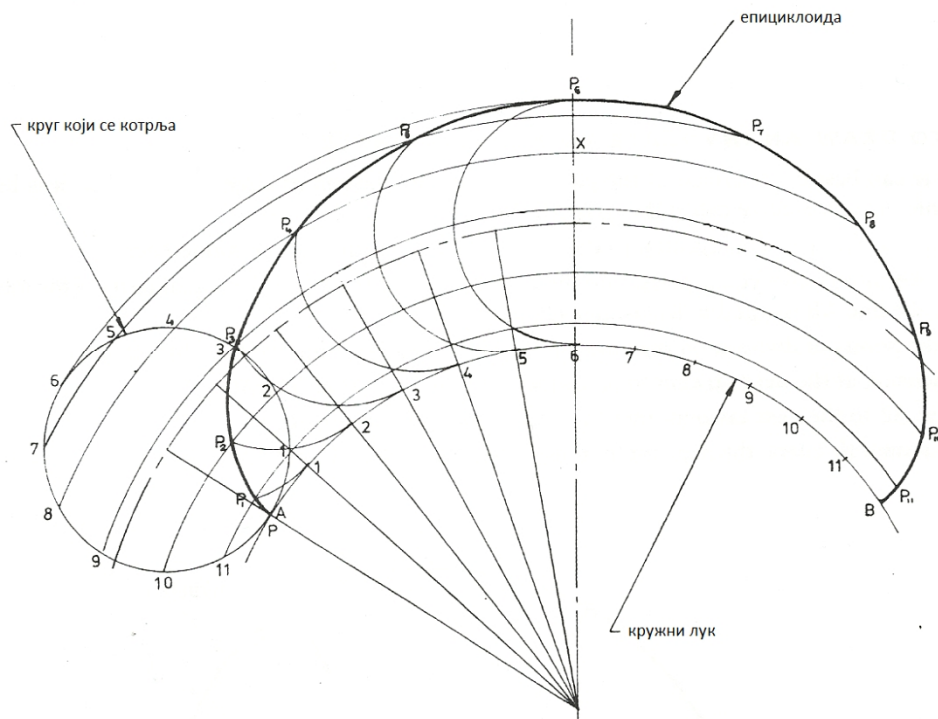
3.3 ЕПИЦИКЛОИДА

Епициклоида настаје котрљањем кружнице без клизања по спољашњости кружног лука (слика 3.14). Њу описује фиксирана тачка на кружници која се котрља по кружном луку.



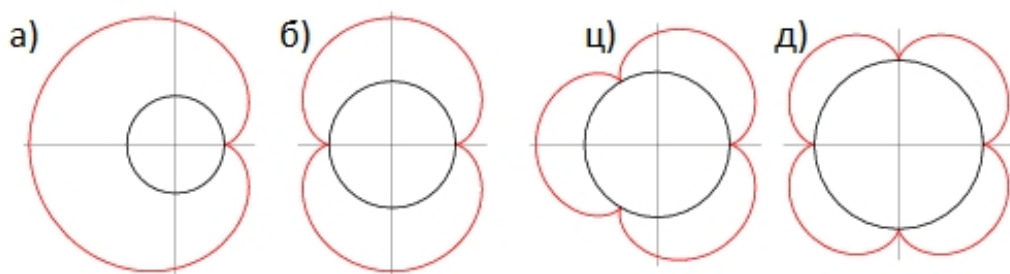
Слика 3.14 Епициклоида

Конструкција циклоиде (слика 3.15). Нацртамо кружницу која се котрља и нацртамо кружни лук тако да тангира кружницу која се котрља у тачки А. Поделитемо кружницу која се котрља на дванаест једнаких делова, почевши од тачке А. Нека је Р тачка на кружници коинцидентна са тачком А, у почетном положају. Означимо АВ на кружном луку тако да та дужина буде једнака обиму круга који се котрља и поделитемо га на дванаест једнаких делова, то значи да су тачке 1, 2, 3 итд. које се налазе круг при котрљању по кружном луку коинцидентне тачкама 1, 2, 3 итд. на кружном луку. Како се круг котрља према тачки 1 на кружном луку, тачка Р се благо уздиже до позиције P_1 . Да би одредили P_1 цртамо кружни лук са центром у центру кружног лука по коме се котрља круг и тако да пролази кроз тачке 1 и 11. На исти начин добијамо и тачке $P_2, P_3, \dots, P_6$. Тачке од P_6 до P_{11} можемо добити преношењем дужина, нпр. $XP_4 = XP_8$. [2] [5]



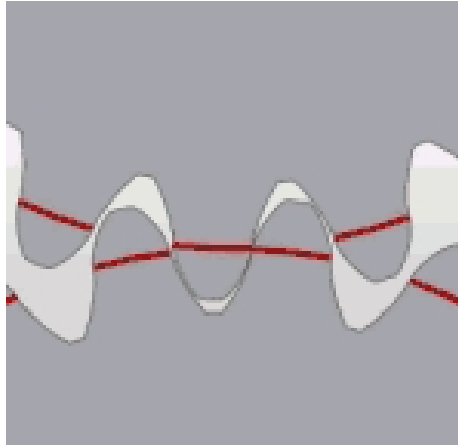
Слика 3.15 Конструисање еписиклоиде

Ако су полупречник круга који се котрља и полупречник круга по коме се врши котрљање једнаки, настаје кардиоида (крива срцастог облика) (слика 3.16.а). Ако је $R : r$ рационалан број, еписиклоида ће бити затворена крива и имаће толико грана (слика 3.16. б, ц, д). [8]



Слика 3.16 Примери еписиклоиде а) $R : r = 1:1$, б) $R : r = 2:1$, ц) $R : r = 3:1$, д) $R : r = 4:1$

Примена епициклоиде се среће код циклоидних зупчаника, тачније линија главе зупца има облик епициклоиде. Зупчаници са циклоидним профилем имају повољне радне карактеристике у кинематичком и динамичком погледу, односно у току спрезања додирују се конкавна (подножна површина једног зупца) и конвексна површина (темена површина другог зупца), па је контактни притисак и хабање бокова мање (слика 3.17).



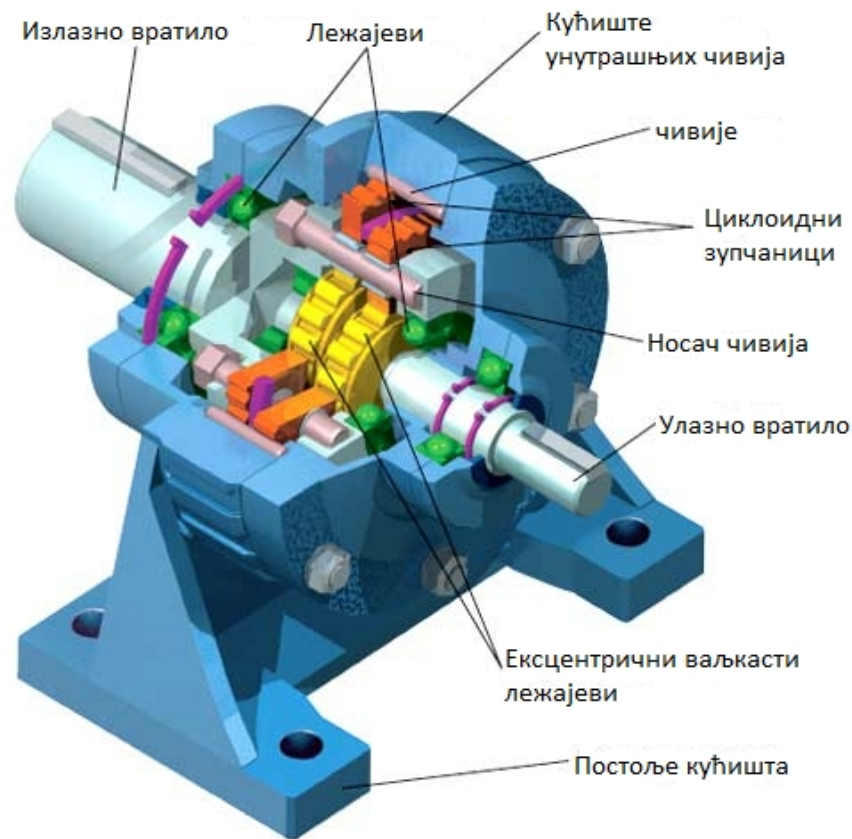
Слика 3.17 Циклоидни зупчаник

Ова врста је веома осетљива на промену осног растојања. Израда бокова циклоидних зупчаника је тежа од израде еволвентних бокова. Због тога је дуго времена била ограничена на област прецизне механике, тј. користили су се најчешће у индустрији сатова (слика 3.18). [3]



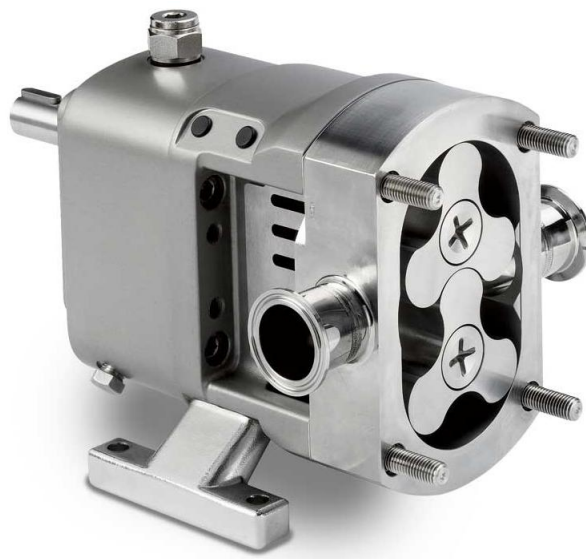
Слика 3.18 Механизам сата

У данашње време примена циклоидних зупчаника је у наглом порасту. Данас се користе у изградњи циклоредуктора, пумпи, дизалица итд. Циклоредуктор (слика 3.19) представља планетарни преносник снаге. Циклоредуктори имају веома компактну конструкцију, у њима нема аксијалних сила, а улазно и излазно вратило су коаксијални у свакој варијанти. Због тога су нашли широку примену код машина и уређаја са знатним габаритним ограничењима. Основне карактеристике циклоредуктора су: дуг и поуздан радни век, мања маса, запремина за исту снагу редуктора у поређењу са осталим редукторима, широк опсег преносних односа, могућност поузданог рада у условима динамичких оптерећења, отпорност на шок оптерећења од преко 500%, компактност конструкције, велики степен искоришћења 95%, мале вибрације, низак ниво буке.



Слика 3.19 Циклоредуктор

Зупчаста пумпа са циклоидним зупцима (слика 3.20) успоставља проток течности између зуба два упарена зупчаника. Један зупчаник је уклињен на погонско вратило, покреће и други са узупчаним преносом, који је слободан на својој осовини. Чеоне површине зуба прати контура кућишта пумпе, са минималним зазором, а бочно заптивање је са равним плочама са обе стране. Простор ниског притиска је успостављен на улазу, као простор где се зуби са преносом два зупчаника удаљавају и остављају слободан простор, са смањеним притиском. Течност утиче у тај простор и преноси се (гура) са зубима према излазу. При међусобном зупчању, течност се истискује из простора између два зуба, са великом принудом, на оба зупчаника, што повећава притисак у течности на излазу из пумпе. Овакав тип пумпе је са типичном одређеном брзином и са константним протоком. Обично раде на релативно ниском притиску. Једноставне су конструкције и израде, лако се одржавају. Веома су поуздане и као такве постале су стандард за инсталације уља, за подмазивање мотора са унутрашњим сагоревањем.



Слика 3.20 Зупчаста пумпа са циклоидним зупцима

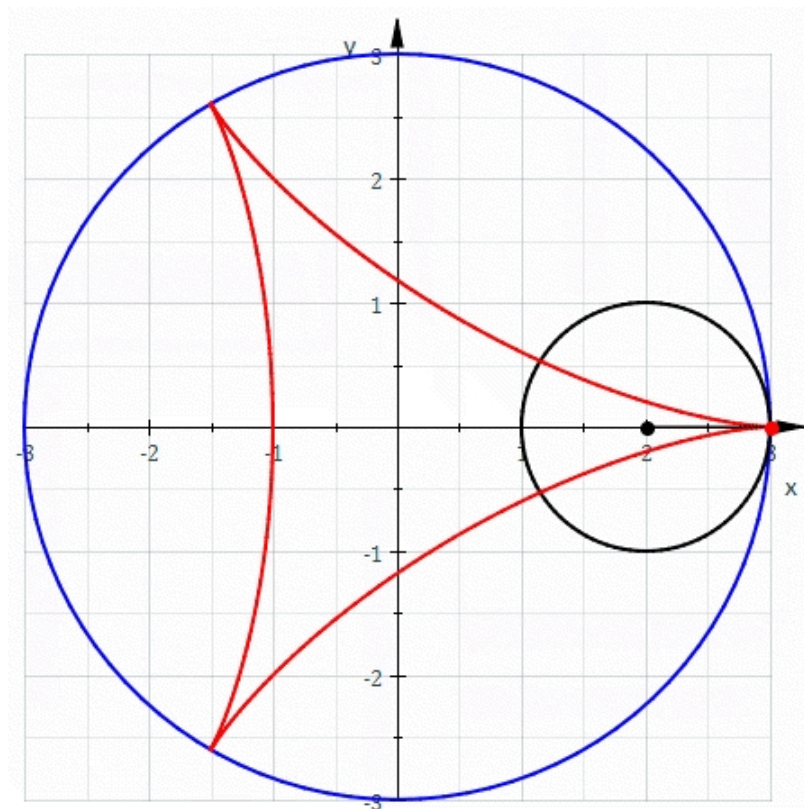
Такође епициклоида се користи код механизма за претварање кружног кретања у праволинијско као што су брагасте осовине код мотора (слика 3.21). Брагаста осовина је једна од најважнијих делова мотора са унутрашњим сагоревањем и служи за претварање кружног кретања осовине у праволинијско кретање вентила.



Слика 3.21 Брегаста осовина

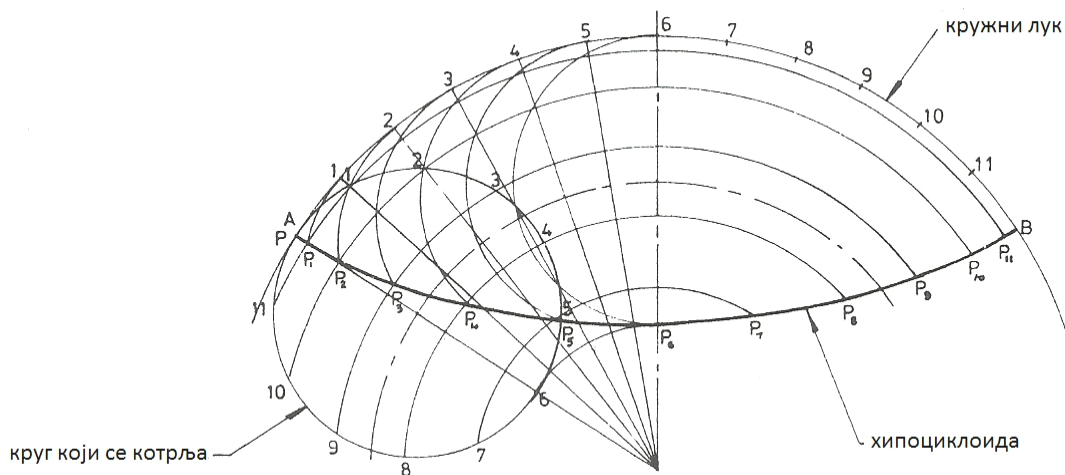
2.4 ХИПОЦИКЛОИДА

Хипоциклоида настаје котрљањем кружнице без клизања по унутрашњости кружног лука (слика 3.21). Њу описује фиксирана тачка која се налази на кружници која се котрља по унутрашњости кружног лука.



Слика 3.21 Хипоциклоида

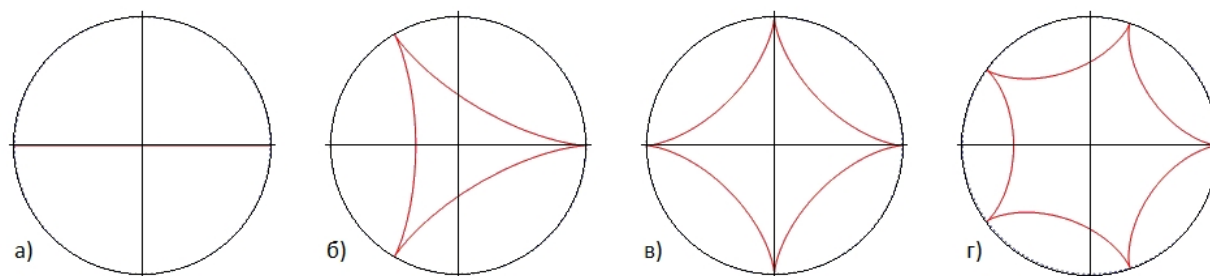
Конструкција хипоциклоиде је веома слична конструкцији епициклоиде при чему се круг котрља по унутрашњој страни кружнице (слика 3.22). Нацртамо кружницу која се котрља и нацртамо кружни лук тако да његова унутрашња страна тангира кружницу која се котрља, у тачки А. Поделитемо кружницу која се котрља на дванаест једнаких делова, почевши од тачке А. Нека је Р тачка на кружници коинцидентна са тачком А, у почетном положају. Означимо АВ на кружном луку тако да та дужина буде једнака обиму круга који се котрља и поделитемо га на дванаест једнаких делова, то значи да су тачке 1, 2, 3 итд. које се налазе круг при котрљању по кружном луку коинцидентне тачкама 1, 2, 3 итд. на кружном луку. Како се круг котрља према тачки 1 на кружном луку, тачка Р се благо спушта до позиције P_1 . Да би одредили P_1 цртамо кружни лук са центром у центру кружног лука по коме се котрља круг и тако да пролази кроз тачке 1 и 11. На исти начин добијамо и тачке $P_2, P_3, \dots, P_6$. Тачке од P_6 до P_{11} можемо добити преношењем дужина, нпр. $XP_4 = XP_8$. Занимљиво је напоменути да када круг који се ротира има исти полупречника као кружница по којој се котрља, хипоциклоида формира дијаметар кружнице по којој се врши котрљање. [2] [4]



Слика 3.22 конструисање хипоциклоиде

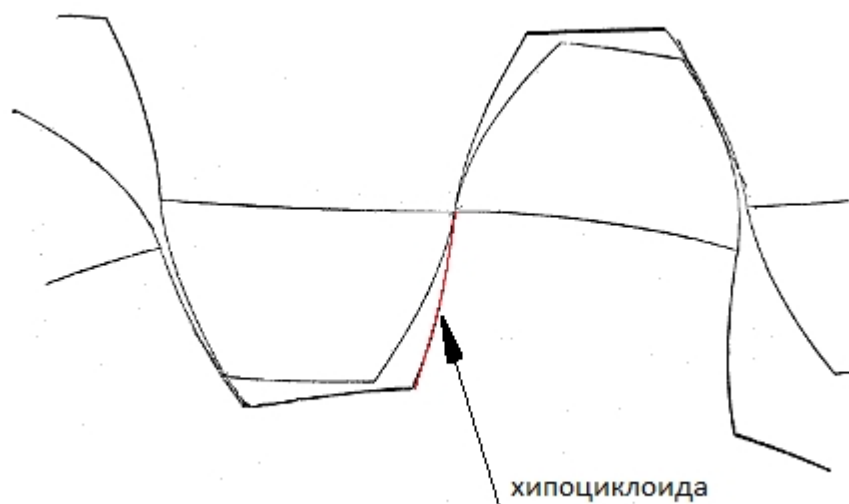
Када се круг полупречника r котрља по унутрашњој страни кружнице полупречника R , ако је $R = 2r$, настаје линија која представља дужину пречника по коме се врши котрљање (слика 3.23 а). Када имамо однос $R : r = 3 : 1$ има три крака, три шиљка и три темена, а зове се Steiner-ова крива (слика 3.23 б). Ако је $R : r = 3 : 1$ имамо по четири крака, шиљка и темена, а таква крива зове се

астероида (слика 3.23 в). Генерално ако је однос $R : r$ реалан број хипоциклоида ће се затворити и имаће толико кракова, шиљака и темена.



Слика 3.23 а) $R : r = 2 : 1$, б) $R : r = 3 : 1$, в) $R : r = 4 : 1$, г) $R : r = 5 : 1$

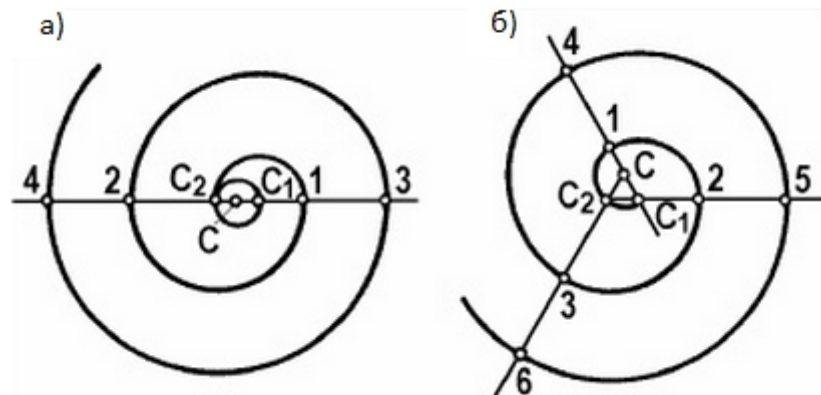
Хипоциклоиду најчешће срећемо код циклоидних зупчаника. Тачније хипоциклоида описује бочну линију корена зупца циклоидних зупчаника (слика 3.24).



Слика 3.24 Хипоциклоида као корен бочне линије зупца

4. СПИРАЛЕ

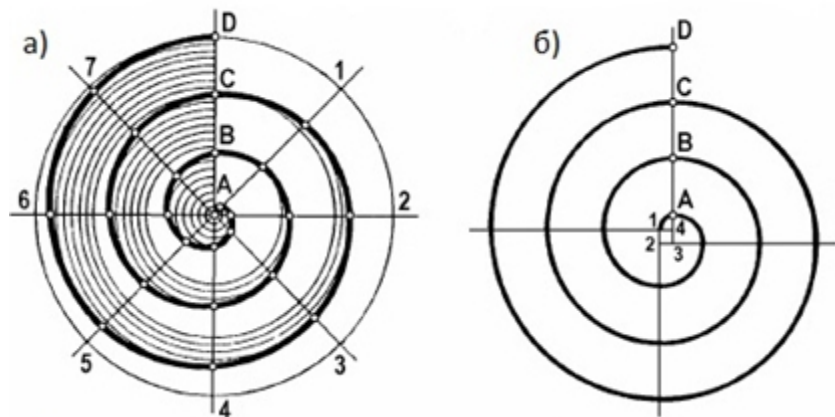
Спирале представљају криве које се кружно удаљавају од свог центра. Оне могу бити дводимензионалне и тродимензионалне. Конструисање дводимензионалне спирале изводи се из два, три и више средишта и зависи од облика и величине тзв. "ока", које може бити у облику кружнице, троугла, квадрата, шестоугла и слично. Најпре се нацрта тзв. "око", нпр. кружница пречника C_1C_2 (слика 4.1 а). Из тачака C_1 и C_2 опишу се две међусобно спојене полукружнице. Горња полукружница C_21 из средишта C_1 , а доња полукружница 12 из средишта C_2 . Када "око" (слика 4.1 б) има облик правилног једнакокраког троугла C_1C_2C , странице троугла простиру се од центра према спољашњости. Коришћењем темена троугла за средишта, описујемо у смеру казаљке на сату низ међусобно спојених кружних лукова. Средиште првог кружног лука је тачка C , она описује лук од тачке C_1 до тачке C_2 , поступак поновимо за сваку следећу тачку. [5]



Слика 4.1 Конструисање спирале а) када је центар спирале круг, б) када је центра спирале троугао

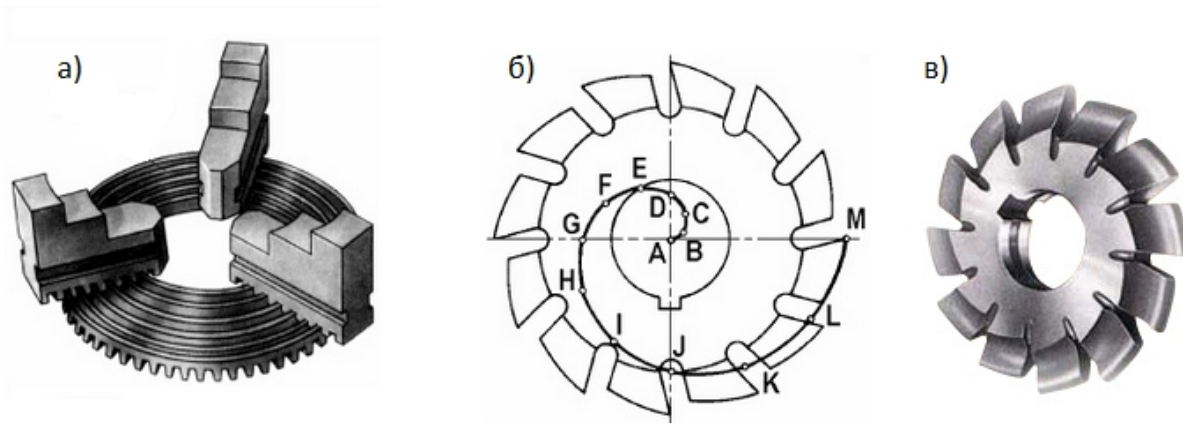
Спирале такође представљају скуп раванских криви које имају примену у машинству. Најважнији представник ове врсте криви јест Архимедова спирала (слика 4.2), коју описује тачка која се креће константном брзином по правцу који се обрће око средишта A константном угаоном брзином (слика 4.2 а). Архимедова спирала може се конструисати на различите начине. Један од начина је тај да прво нацртамо спољашњу кружницу спирала и њен полупречник поделимо на онолико делова колики

је корак завојнице (слика 4.2 а) корак је 3). Сваки тако добијени део поделимо поновно на одређени број делова. Исто то урадимо са основном кружницом (на слици 4.2.а) извршена је подела на 8 једнаких делова), а затим из центра А описујемо кружне лукове добијених тачака на полупречнику до одговарајућих подеоних праваца основне кружнице. Пресечне тачке су тачке Архимедове спирале. У већини случајева је задовољавајуће спиралу конструисати приближно помоћу кружних лукова (слика 4.2 б). Код овог начина конструисања спирале, прво је потребно да нацртамо мали квадрат чија је страница једнака четвртини удаљености двеју тачака на спирали које су на истом правцу (нпр. $AB \cdot 0,25$). У продужетку страница квадрата нацртамо правце, затим нпр. из темена квадрата 4 опишемо четвртину кружнице полупречника једнаког страници квадрата. Премјештањем шестара у следеће теме, нпр. теме 3 наставити започети кружни лук. Поступак понављамо до коначног облика жељене спирале. Конструкција спирале биће тачнија ако се уместо квадрата употребимо правилни многоугао (полигон). [5]



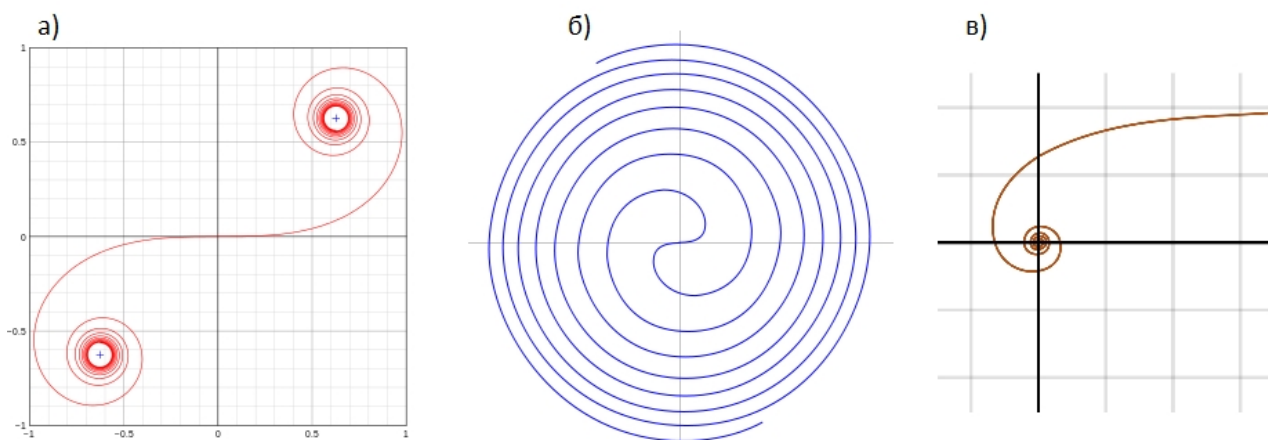
Слика 4.2 а) Конструисање правилне, б) приближне Архимедове спирале

Архимедова спирала се користи код стезне главе струга (слика 4.3 а). Стезна глава служи за стезање неког дела како би се лакше извршило обликовање тог дела неким од поступака обраде материјала резањем. Поред тога пример практичне примене Архимедове спирале имамо код модулног глодала (слика 4.3 б, ц). Модулно глодало служи за израду зубаца зупчаника.



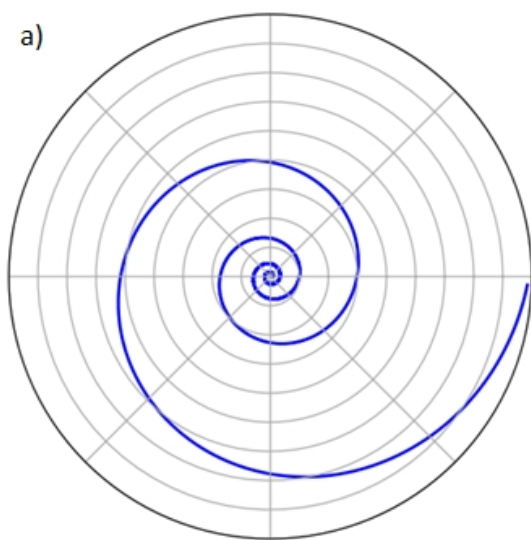
Слика 4.3 а) Стезна глава б) Цртеж модулног глодала в) Модулно глодало

Поред Архимедове спирале постоји више врста спирала које имају широку примену. Euler-ова спирала (слика 4.3 а) је крива чија се закривљеност мења линеарно са дужином криве. Оне имају распрострањену примену за прелазне криве у железничком и саобраћајном инжењерству за повезивање и транзицију геометрије између тангенти и кружних кривих. Fermat-ова спирала (слика 4.3 б) је једна врста Архимедове спирале, односно Архимедова спирала са две или више грана. Хиперболична спирала (слика 4.3 в) је етерична раванска крива која настаје у бесконачности и како се приближава свом средишту постаје све гушћа. [12]



Слика 4.4 а) Euler-ова спирала, б) Fermat-ова спирала, в) Хиперболична спирала

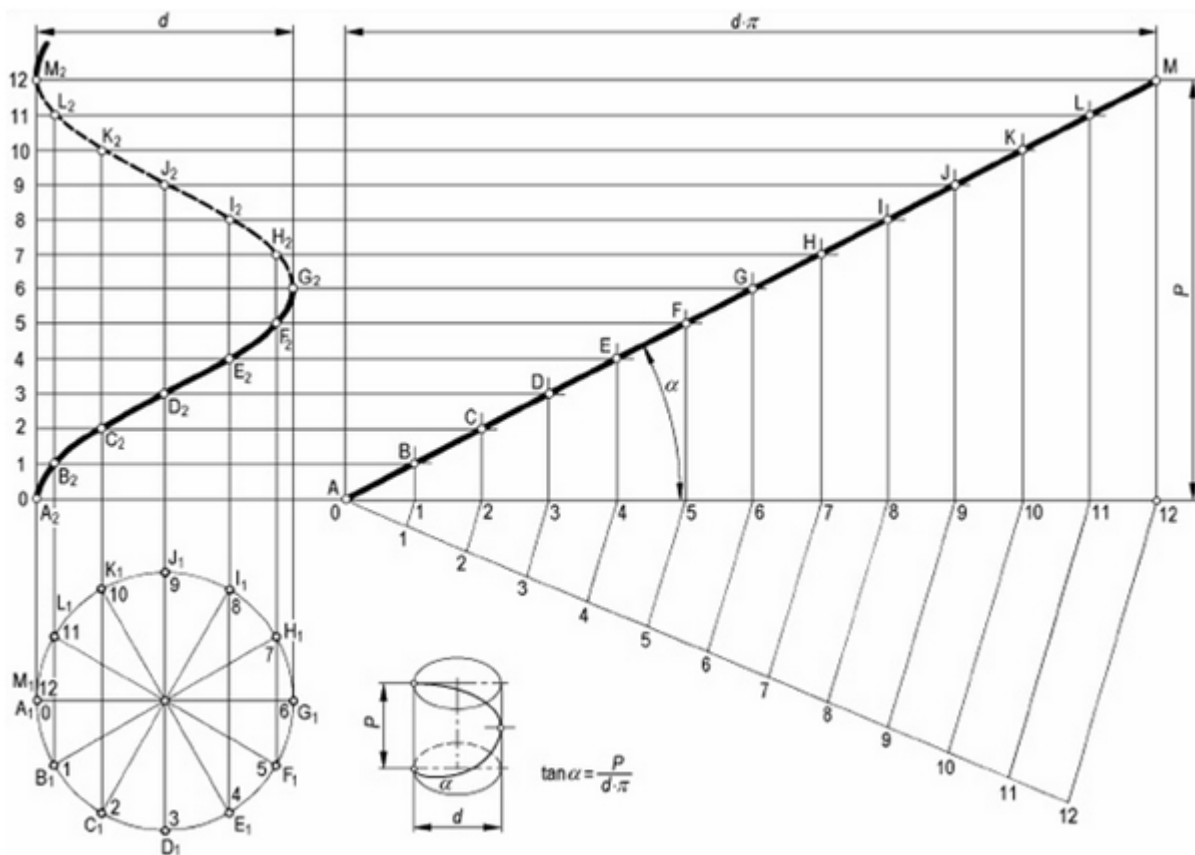
Логаритамска спирала (слика 4.5 а) је једноугаона спирала или растућа спирала. Логаритамска спирала може се разликовати од Архимедове спирале чињеницом да су растојања између закривљења код логаритамске спирале настала повећање геометријске прогресије, док су код Архимедове спирале ове дистанце константне. Ова спирала се често среће у природи (слика 4.5 б,в). [12]



Слика 4.4 а) Логаритамска спирала, б) Спирале у галаксији, г) шкољка

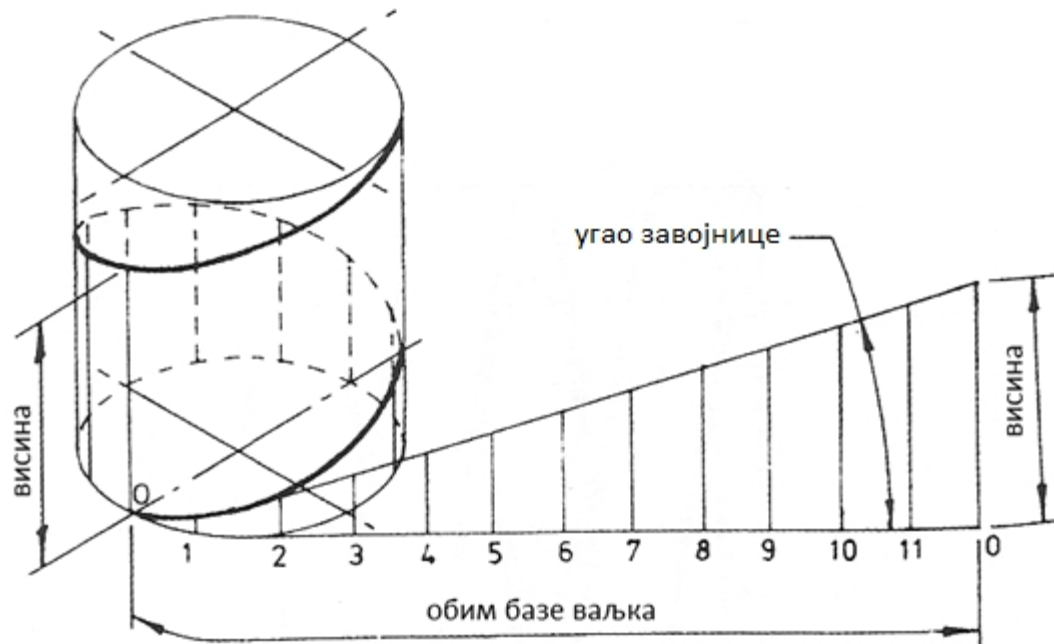
5. ЗАВОЈНИЦЕ

Завојница спада у групу просторних криви и она представља путању једне тачке која се креће дуж и око површине цилиндра, константном угаоном брзином и за сваки обим пређе једнаку дужину, паралелну оси цилиндра. Конструисање завојнице вршимо помоћу кружнице пречника d , чији обим поделимо на једнак број делова (нпр. 12) и висину завојнице P такође поделимо на једнак број делова (нпр. 12). Пресеци хоризонталних линија повучених из тачака 1, 2, ..., 12 и вертикалних линија повучених из тачака $A_1, B_1, \dots, M_1$ дају нам тачке завојнице $A_2, B_2, \dots, M_2$. [5]



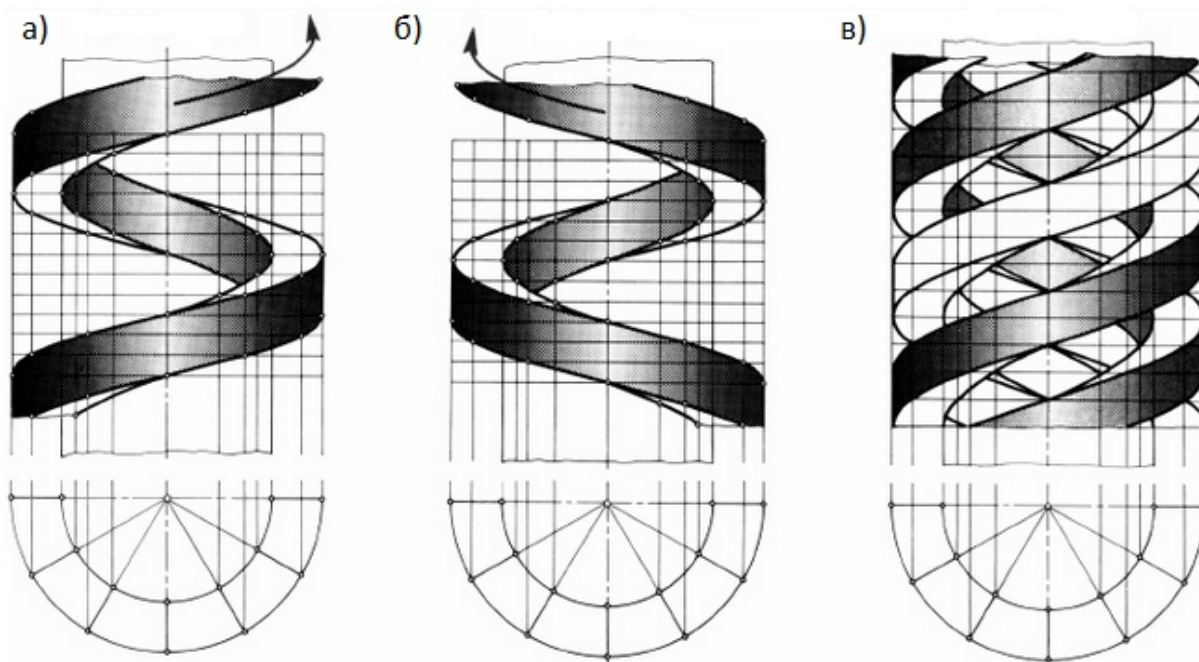
Слика 5.1 Конструисање завојнице

Одвијањем завојнице добије се правоугли троугао тако да онда угао завојнице (слика 5.2) можемо одредити помоћу правоуглог троугла који чине права тангентна бази цилиндра, дужине обима цилиндра и, висине коју тачка пређе за један окрет око цилиндра (360°). [4]



Слика 5.2 Угао завојнице

Ако је α угао завојнице, хипотенуза троугла представља дужину завојнице. Профилне завојнице настају ако се неки жељени профил завојно ротира око ваљка. Разликујемо леве завојнице (слика 5.3 б), код њих профил настаје када се материјална тачка креће у супротном смеру од казаљке на часовнику и при томе се удаљава од посматрача, посматрано у правцу осе завојнице, десне завојнице (слика 5.3 а) настаје када се материјална тачка креће у смеру казаљке на часовнику и при томе се удаљава од посматрача, посматрано у правцу осе завојнице и такође постоје и вишезавојне завојнице које чине неколико левих или десних завојница (слика 5.3 в).



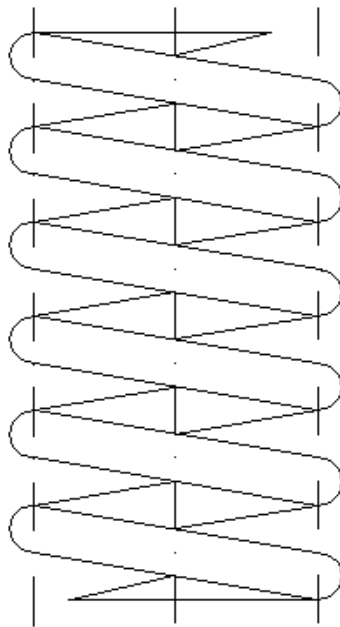
Слика 5.3 а) Десна завојница, б) Лева завојница, в) Трозавојна десна завојница

Са завојницом се често срећемо у свакодневници, на опругама, завртњима, пужним преносницима итд. [5]

Опруга (слика 5.4) је машински елемент који се користи за остваривање еластичних спојева. При томе, под дејством оптерећења, омогућавају велика међусобна померања у споју, акумулацију енергије и ублажавање удара. Уопштено функционисање еластичних елемената засновано је на великом деформационом раду који извршава сила или спрег на одеђеном путу. Под деловањем силе долази до деформације опруге, а по престанку деловања силе враћају се у првобитни положај. Рад се опрузи акумулира у виду потенцијалне енергије која се користи за различите сврхе:

- Као акумулатори енергије (код часовника, играчака, оружја),
- За пригушење ударних и осцилаторних оптерећења (код возила и транспортних средстава),
- За повратно кретање (код вентила, кочница, спојница и мерних инструмената),
- За мерење силе (код мерних уређаја),
- За расподелу оптерећења.

Способност опруга може да се повећа применом високоеластичних материјала и одговарајућим конструкционим извођењем. [3]



Слика 5.4 Цртеж опруге

Намена опруга је врло разнолика. Неки од најчешће коришћених опруга у машинству су цилиндричне завојне опруге (слика 5.5). Завојне опруге се по правилу израђују са десном завојницом.

а)



б)



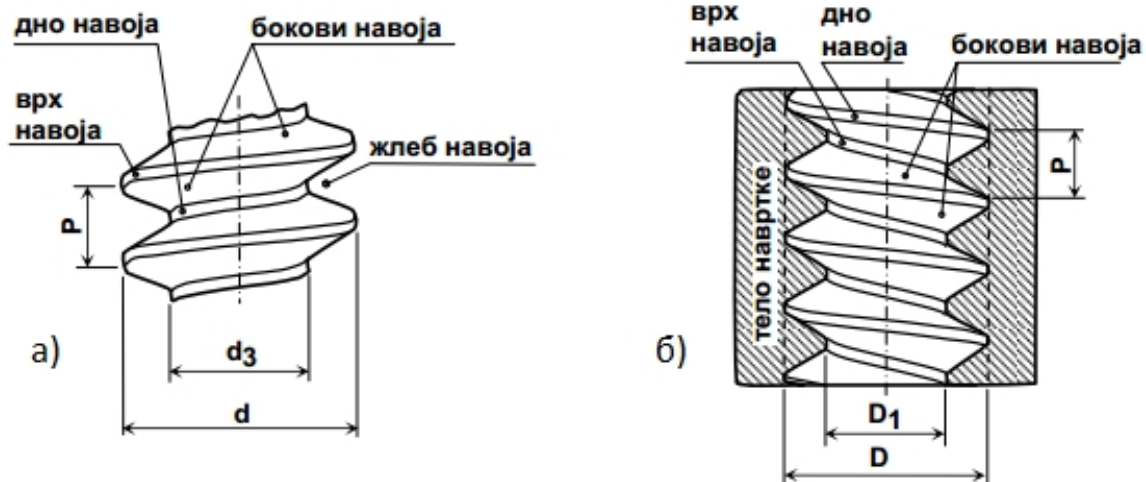
Слика 5.5 Цилиндричне завојне опруге а) вучне б) притисна (амортизер)

Конусне завојне опруге (слика 5.6) примењују се при високим оптерећењима у циљу постизања прогресивне карактеристике. Пречник ове опруге се постепено смањује идући од једне ка другој површи ослањања. При дејству силе више се деформишу завојци већег пречника. Карактеристика опруге је линеарна све до тренутка када завојак највећег пречника додирне ослону површ, па се крутост опруге прогресивно повећава. [3]



Слика 5.6 Конусне опруге

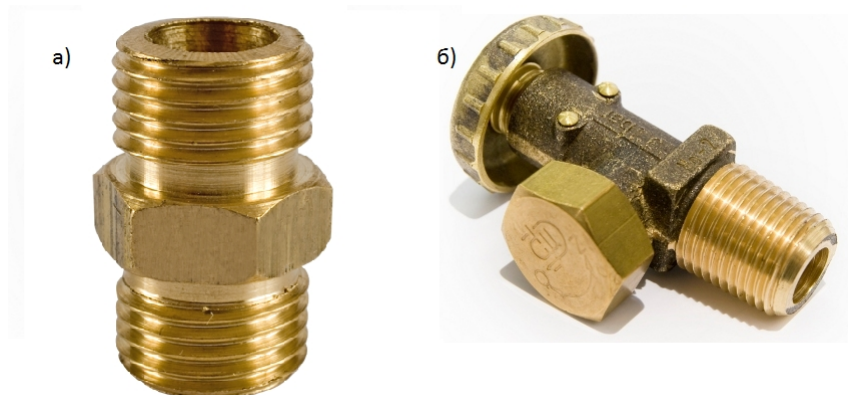
Навој је геометријско тело дефинисано завојним кретањем геометријске слике у облику трапеза око непокретне осе. Постоје две врсте навоја спољашњи и унутрашњи. Спољашњи навој представља навој завртња који је формиран на спољашњој цилиндричној површини (слика 5.7 а). Унутрашњи навој је навој навртке који је формиран на унутрашњој цилиндричној површини (слика 5.7 б). [10]



Слика 5.7 а) Спољашњи навој, б) Унутрашњи навој

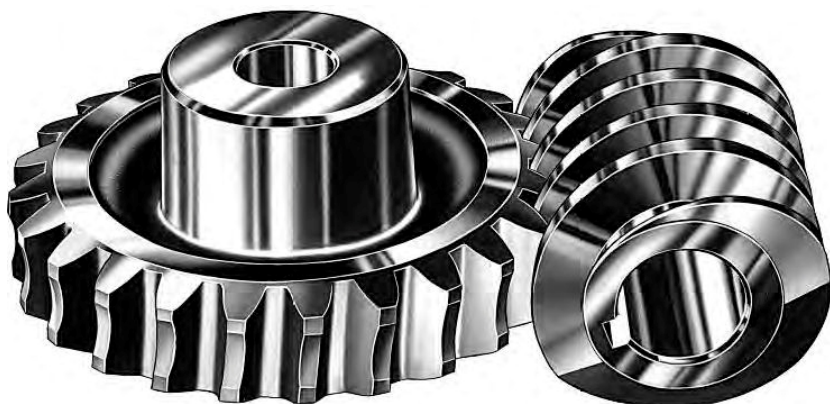
Бокови навоја су завојне површине навоја, врх навоја је површина која ограничава навој по висини и спаја два суседна бока навоја. Дно навоја (подножје) је површина која ограничава навој по дубини и спаја два суседна бока навоја. Пречник језгра спољашњег навоја d_3 је пречник малог цилиндра који пролази кроз дно спољашњег навоја. Називни пречник спољашњег навоја d је пречник великог цилиндра који пролази кроз врх спољашњег навоја. Пречник унутрашњег навоја D_1 је пречник малог цилиндра који пролази кроз врх унутрашњег навоја. Називни пречник унутрашњег навоја D је пречник великог цилиндра који пролази кроз дно унутрашњег навоја. [3] [10]

Десни навој је навој чије су завојне површине формиране од десних завојница (слика 5.8 а), а леви навој је навој чије су завојне површине формиране од левих завојница (слика 5.8 б).



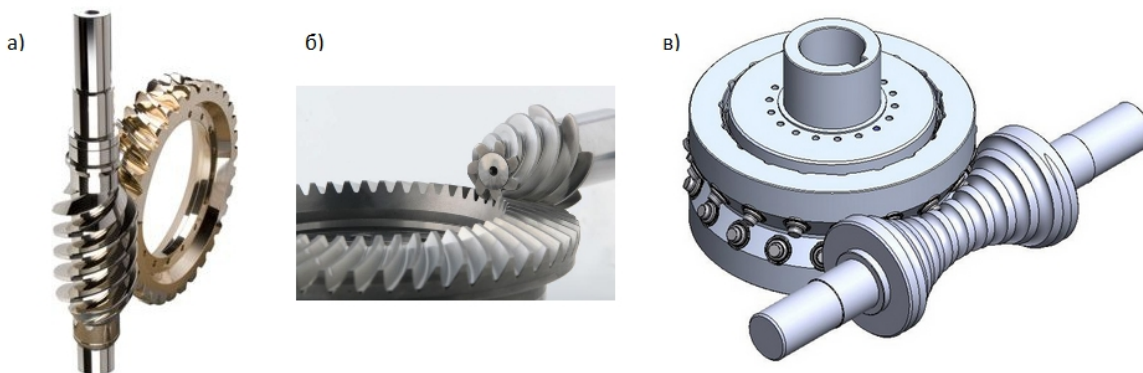
Слика 5.8 а) Десни спољашњи, б) Леви спољашњи навој

Пример вишезавојне опруге срећемо код пужног преносника. Пужни преносник или пужни пар састоји се од пужа и пужног кола односно пужног зупчаника (слика 5.9). Представљају врсту зупчастих преносника чије се осе мимоилазе најчешће под углом од 90° . Међутим овај угао може бити већи или мањи од 90° . Пуж је најчешће погонски део преносника и тада, при преносу кретања врши се редукција броја обртаја. Погонски део може бити и пужно коло ако је потребна мултипликација броја обртаја. Пужни преносници се ретко користе као мултипликатори јер је степен искоришћења низак (мањи од 0,5). [3]



Слика 5.9 Пужни преносник

Пуж је мањег пречника од пужног зупчаника и има једну (слика 5.10 а) или више завојница (слика 5.10 б) обавијених око цилиндричног (слика 5.10 а) или глобоидног језгра (слика 5.10 в). Тако пуж личи на завртањ или навојно вретено. Пуж са једним почетком навоја је једноходни, са два почетка двоходни итд., троходни и вишеходни. У зависности од смера завојнице пуж може да буде десни (најчешћи случај) и леви.



илика 5.10 а) Пуж са једном, б) Пуж са више завојница в) глобоидни пуж

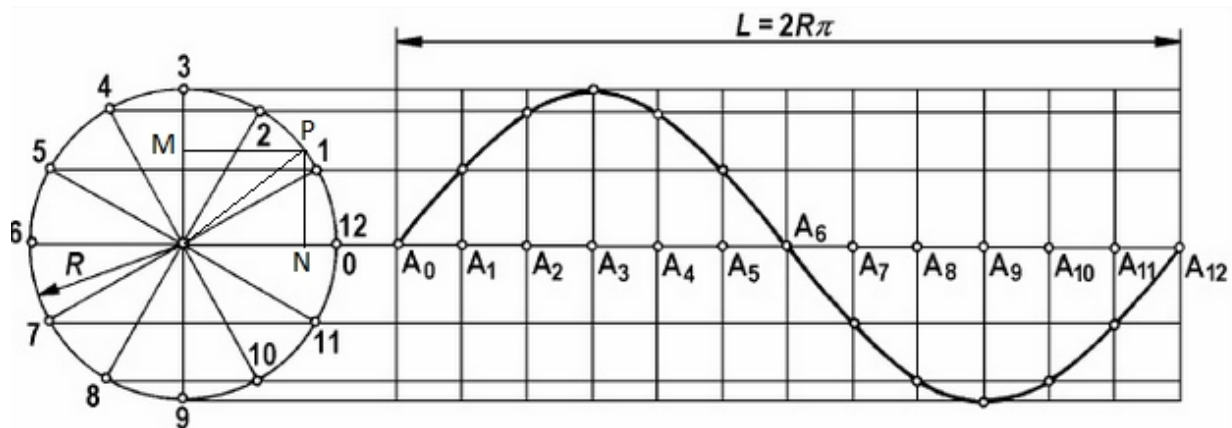
Сл

6. СИНУСОИДА И КОСИНУСОИДА

Синусоида је крива која настаје променом тригонометријске функције синнус при сталној промени угла. Претпоставимо да радијус вектор OP ротира око тачке O за угао θ у у супротном смеру од свог почетног положаја OO . Пројекција OP на y -осу (OM) представља синус угла θ .

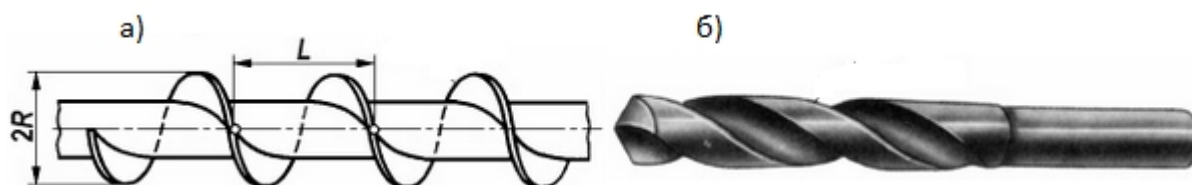
$$\sin \theta = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{1} = OM$$

Знак $\sin \theta$ је позитиван када се OM налази изнад x -осе, а негативан када је OM испод x -осе. Синусоида (слика 6.1) се може нацртати ако се узме да је дужина AB представљена као 360° или 2π радијана ротације вектора OP , а пројекције дужине OM су респективно пренесене на одговарајућу (y) координату. Нека AB представља период једне ротације радијуса вектора. Поделитемо круг и AB у дванаест једнаких делова, нумерисаних од 0 до 11, као што је приказано. Постављамо усправне координате на тачкама поделе и на тачкама A и B . Пројектујемо хоризонталне линије од тачака 1, 2, 3,..., 11 на круг, тако да секу вертикалне координате 1, 2, 3,..., 11, респективно. Када нацртамо глатку криву кроз тачке пресека добијамо синусоиду. [5]



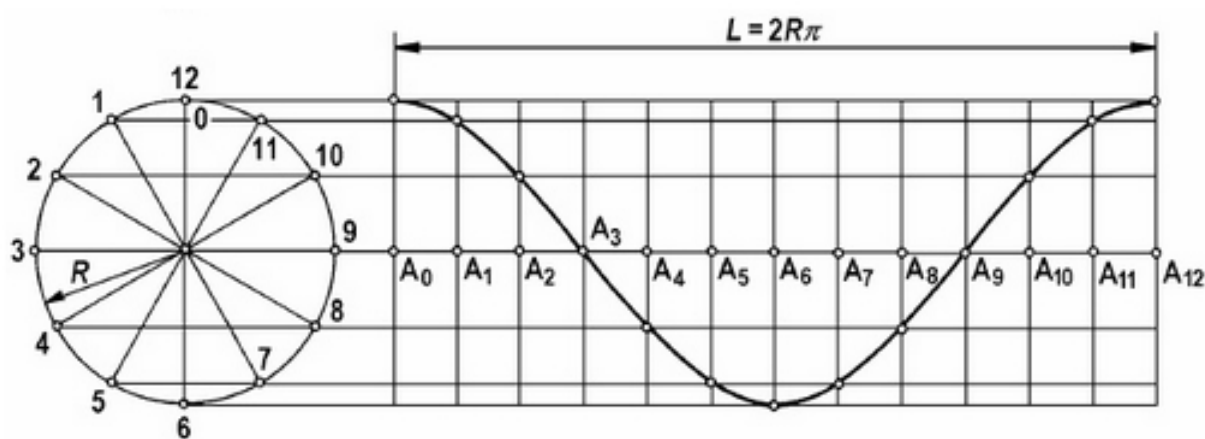
Слика 6.1

Синусоиду као криву најчешће срећемо на дијаграмима кретања, али и на бургији. Бургија (слика 6.2) је алат за обраду материјала резањем.



Слика 6.2 Практичан пример синусоиде

Конструисање косинусоиде је идентично конструисању синусоиде, само је редослед обележавања тачака на кружници другачији (слика 6.3).



Слика 6.3 Конструисање косинусоиде

7. ЗАКЉУЧАК

У савременом добу људи имају све веће потребе, самим тим и спектар, већ постојећих и свакодневно нових производа постаје све већи. Да би се задовољило тржиште и потребе сваког становника планете примењују се разне криве у поступку конструисања и израде добара. На првом месту криве сложеног облика при примени на машинске и друге не машинске делове имају улогу да задовоље техничке услове, односно услове експлоатације. Поред тога у све већем броју случајева посвећује пуно пажње и естетском изгледу готових производа. Управо из тих разлога на свим пољима производње и конструисања се користе криве сложеног облика .

Захваљујући генерацијама пре нас многе криве су детаљно испитане и објашњене што омогућава несметани напредак и развој индустрије, самим тим и цивилизације.

У овом раду споменуте су само неке од примена кривих сложеног облика са којим се срећемо свакодневно, што само говори о томе колико олакшавају свакодневницу сваког човека, а да човек уопште није свестан њиховог значаја.

Криве су свуда око нас и чине свет лепшим и лакшим за употребу.

8. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивановић Л.: Анализа геометријских параметара нееволвентног облика профила зупца цилиндричних зупчаника, Магистарска теза, Крагујевац, 1995.
- [2] B. Bhattacharyya, S.C. Bera: Engineering graphics, I.K. International Publishing House Pvt. Ltd., New Delhi (India), 2009.
- [3] Николић В.: Машински елементи – теорија прорачун примери, Крагујевац, 2004.
- [4] Koludrović Ђ., Koludrović-Hrabić I., Koludrović R.: Tehničko crtanje u slici s kompjuterskim aplikacijama (5. Prerađeno i dopunjeno izdanje), Rijeka, 1994.
- [5] Opalić M., Kljajin M., Sebastjanović S.: Tehničko crtanje – sveučilašni udžbenik, Zagreb / Slavonski Brod, 2002.
- [6] Коцић Љ.: Математика и естетика, Ниш, 2003.
- [7] Bećirović H.: Nacrtna geometrija sa tehničkim crtanjem i zbirkom zadataka, Tuzla, 2000.
- [8] www.du.edu/~etuttle/tech/cycloid.htm
- [9] http://en.wikipedia.org/wiki/Parabolic_reflector
- [10] <http://onlineeducations.net/screw-threads-and-threaded-fasteners/>
- [11] <http://www.navworld.com/navcerebrations/millennium/millennium.htm>
- [12] <http://en.wikipedia.org/wiki/Spiral>