

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Аутомобилско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Предмет: Основе динамике моторних возила

Број индекса: 808/2014

Урош К. Ђурђевић

**Вертикална динамика возила – модели
са једном масом**

завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. др Данијела Милорадовић, ванр. проф. - ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да:

- прикаже преглед осцилаторних модела возила и укаже на могућности примене линијских модела са једном масом у моделирању вертикалне динамике возила,
- прикаже основе динамике линијског модела возила са једном масом (сопствене осцилације, принудне осцилације, решавање диференцијалне једначине кретања, функције појачања),
- користећи модел са једном масом, илуструје утицај масе, крутости и пригушења на вертикалне осцилације возила по избору.

Препоручена литература:

- [1] Јанковић, А.: „Динамика возила“; Машински факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац, 2008.
- [2] Демич, М., Лукић, Ј.: „Теорија кретања моторних возила“, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2011.
- [3] Симић, Д.: „Динамика моторних возила“, Научна књига, Београд, 1988.
- [4] Кнор, П.: „Динамика моторних возила – скрипта“, Машински факултет Сарајево, Сарајево, 2005.
- [5] Jacobson, B. et al.: “Vehicle dynamics - Compendium”, Chalmers University of Technology, 2016.
- [6] Rill, G.: “Vehicle Dynamics – Lecture Notes”, University of Applied Sciences - Hochschule Regensburg, Regensburg, 2009.

Ментор:

Крагујевац, март, 2019. год.

др Данијела Милорадовић, ванр. проф.

РЕЗИМЕ

Приликом кретања возила по путу увек долази до осцилација самог возила услед неравнина које постоје на путу. Ова појава осцилација доводи до тога да настане замор возача као и путника у возилу. Проучавање осцилација сложених механизма са много степени слободе кретања у правилу се врши на упрошћеним моделима. У раду је извршена анализа вертикалне динамике возила користећи модел система са једном масом. Осцилације система са једном масом указују на основни принцип решавања једначина кретања осцилаторних система и дају најважније карактеристике ових система. Изведене су диференцијалне једначине осциловања, приказани су типови осциловања модела и дефинисана преносна функција модела. На крају је извршена анализа утицаја параметара на карактер осциловања и преносну функцију одабраног модела возила.

Кључне речи: *вертикална динамика возила, модел, осцилације*

ABSTRACT

When driving a vehicle along the road, the vehicle itself is always oscillating due to road roughness. This phenomenon of oscillation leads to the driver's fatigue as well as the passengers in the vehicle. The study of the oscillations of complex mechanisms with many degrees of freedom of movement is usually done on simplified models. In this final paper, analysis of vehicle vertical dynamics was performed using a one mass model for vertical oscillations. Oscillations of a system with one mass indicate the basic principle of solving the equations of motion of oscillatory systems and give the most important characteristics of these systems. Differential equations of motion were developed, types of oscillations were presented and model transfer function was defined. Finally, analysis of impact of parameters on character of oscillations and on transfer function of the selected model was performed.

Keywords: *vertical vehicle dynamics, model, oscillations*

Садржај

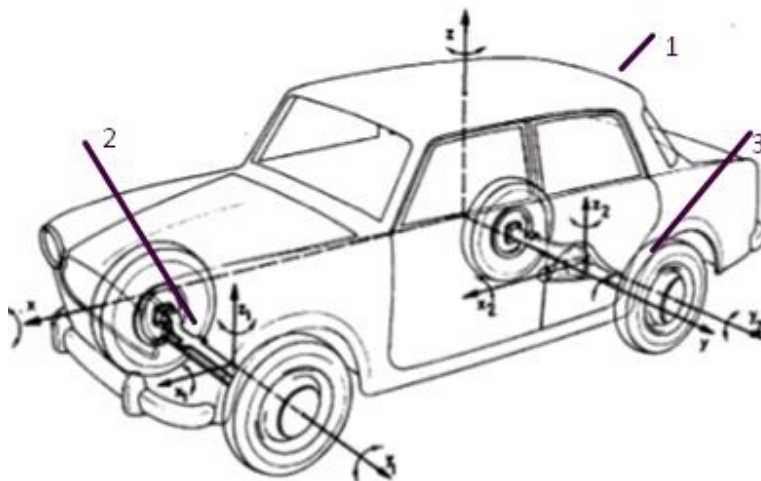
1. Увод	1
2. Преглед осцилаторних модела вертикалне динамике возила са дискретним масама ...	3
3. Основе динамике линијског модела са једном масом	8
3.1 Диференцијална једначина кретања	8
3.2 Сопствене осцилације без пригушења	9
3.3 Сопствене осцилације са пригушењем	12
3.3.1 Корени карактеристичне једначине су реални и различити	13
3.3.2 Корени карактеристичне једначине су једнаки	16
3.3.3 Корени карактеристичне једначине су имагинарни	16
3.4 Принудне осцилације без пригушења	19
3.5 Принудне осцилације са пригушењем	22
3.6 Преносне функције линијског модела са једном масом	25
4. Анализа утицаја параметара на вертикалне осцилације возила на примеру линијског модела са једном масом	28
4.1 Утицај параметара на слободне пригушене осцилације модела са једном масом .	30
4.2 Утицај параметара на преносну функцију хода ослоњене масе	32
5. Закључак	34
6. Литература	35

1. УВОД

Приликом кретања возила по путу увек долази до осцилација самог возила услед неравнина које постоје на путу. Ова појава осцилација доводи до тога да настане замор возача као и путника у возилу. Такође, негативна појава осцилација је то што приликом осциловања возила долази до умањења динамичких реакција, смањују се вучне силе и кочне силе и угрожава се сама стабилност возила [1].

Приликом осциловања возила може се разликовати ослоњена маса возила, која се налази изнад система еластичног ослањања, и неослоњена маса, која се налази испод система еластичног ослањања.

Само возило је сложен осцилаторни систем. Путнички аутомобил се може посматрати као механички систем који је међусобно везан еластичним елементима. На слици 1 представљен је аутомобил са три главне осцилаторне масе: 1 - ослоњеном масом, 2 - масом предње осовине и 3 - масом задње осовине.



Слика 1. Аутомобил као осцилаторни систем [1]

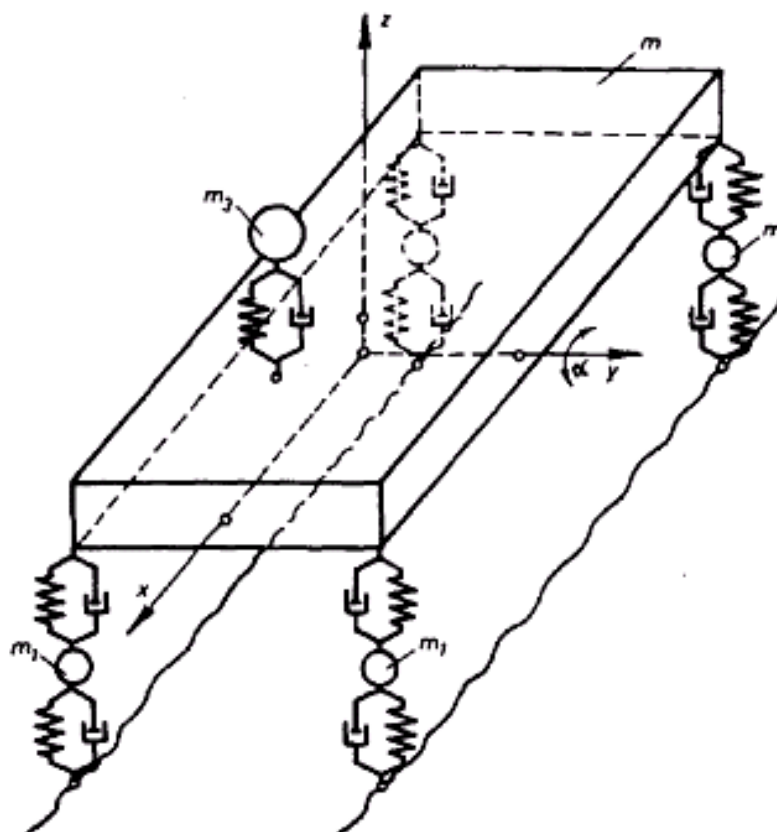
Модел аутомобила на слици 1 има укупно 18 могућих степени слободе кретања. У зависности од броја точкова и осовина возила број степени слободе може бити и већи. Елементи који повезују предњу осовину возила са каросеријом или рамом називају се предње ослањање, а елементи задње осовине називају се задње ослањање. Систем ослањања сачињен је од следећих елемената:

- еластичних елемената којима се остварује еластично ослањање (повезују ослоњену масу са неослоњеном масом и ублажавају динамичка оптерећења),
- елемената вођења или елемената везе (повезују еластичне елементе са ослоњеним и неослоњеним масама),
- елемената пригушивања (пригушују осцилације ослоњене и неослоњене масе) и
- елемената стабилизације (обезбеђују потребну крутост ослањања).

2. ПРЕГЛЕД ОСЦИЛАТОРНИХ МОДЕЛА ВЕРТИКАЛНЕ ДИНАМИКЕ ВОЗИЛА СА ДИСКРЕТНИМ МАСАМА

Проучавање осцилација сложених механизма са много степени слободе кретања у правилу се врши на упрошћеним моделима. Изабрани модел треба да обухвати само најважније параметре, док параметре који су од мање важности треба занемарити. На овај начин, убрзава се аналитичка обрада проблема, поједностављује се практична провера добијених резултата, снижавају се трошкови и штеди се на времену. У великом броју случајева резултати добијени упрошћеним моделом су довољни за даљи рад пројектаната и конструктора. Уколико резултати аналитичких израчунавања одступају од појава уочених у пракси потребно је извршити модифицирање предложеног осцилаторног модела и приближити га стварном моделу [2-7].

На слици 2 дат је врло поједностављен, али још увек релативно компликован просторни модел двоосовинског возила са независним ослањањем.



Слика 2. Просторни осцилаторни модел двоосовинског возила са независним ослањањем [2,7]

Систем чини 6 маса:

- ослоњена маса возила, m ,
- део ослоњене масе, m_3 , који одговара маси возача и његовом еластично ослоњеном седишту,
- неослоњене масе предњих точкова, m_1 , и
- неослоњене масе задњих точкова, m_2 .

Занемарујући сва осцилаторна кретања која су од мањег утицаја, овај систем се може редуковати на систем са 7 степени слободe кретања и то:

- вертикалне осцилације свих шест маса и
- галопирање ослоњене масе, α (заокретање око попречне тежишне осе возила).

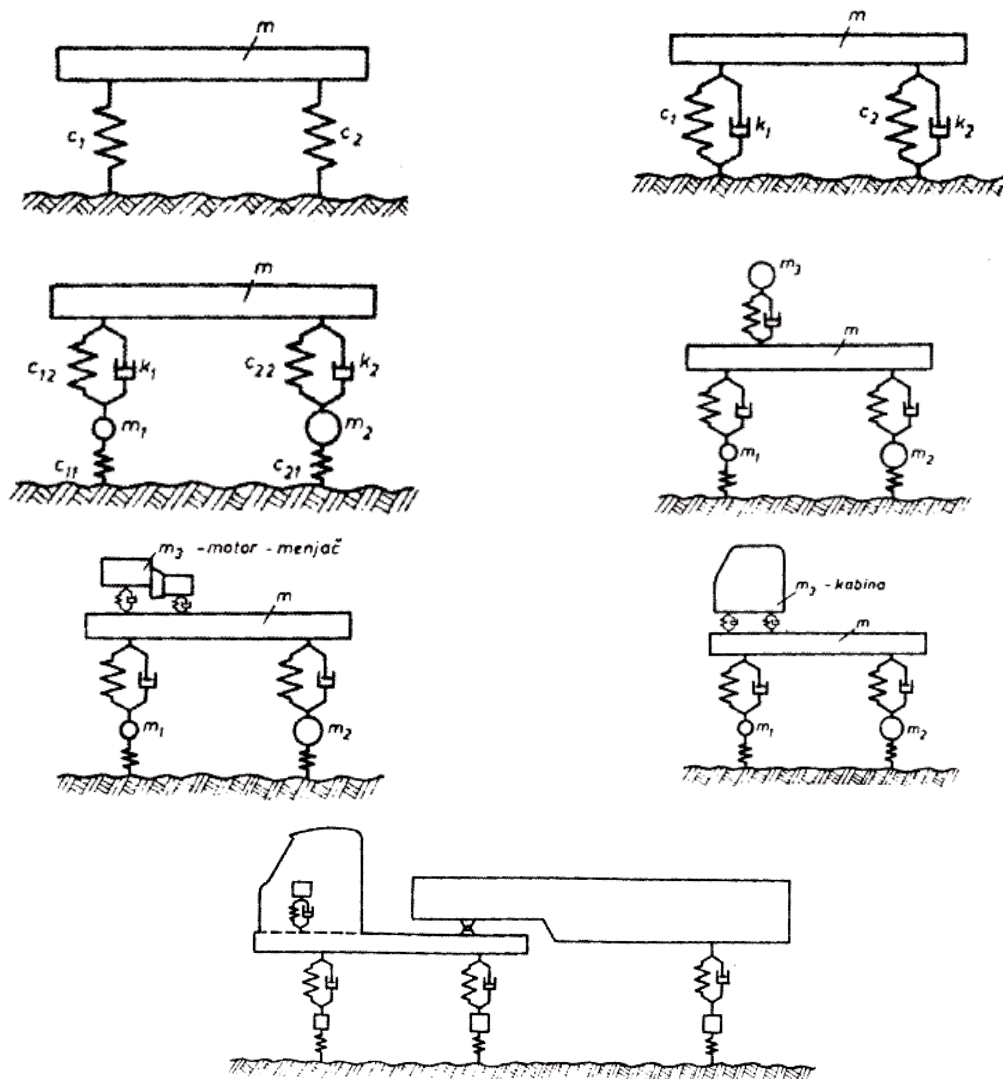
Уколико би се у аутомобилу налазили путници, сваки путник би повећао број степени слободe према усвојеном критеријуму за једног.

Највећи значај у проучавању осцилација имају, као што се види из усвојеног критеријума, вертикалне осцилације и угаоне осцилације ослоњене масе око попречне тежишне осе (галопирање).

На основу просторног модела врши се даље упрошћавање свођењем на осцилаторне моделе у вертикалној равни при чему се претпоставља следеће:

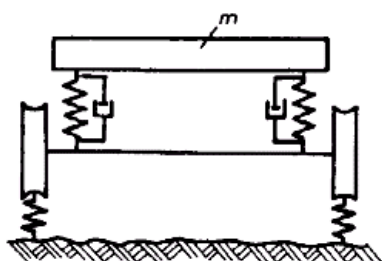
- неравнине пута су једнаке на левом и десном точку једне осовине,
- возило је симетрично у односу на вертикалну осу,
- тежишне осе су истовремено и главне осе инерције,
- возило се креће праволинијски и равномерно,
- точкови су непрестано у контакту са тлом,
- осцилације ослоњене и неослоњене масе су мале и проузроковане су поремећајним силама услед неравнина пута.

На слици 3 дате су неке могућности формирања еквивалентних дводимензионалних модела у вертикалној равни.

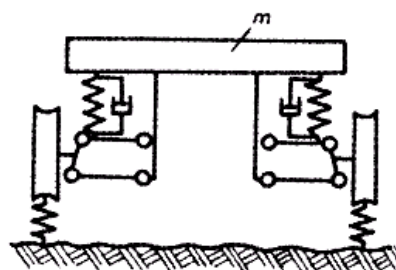


Слика 3. Еквивалентни модели возила у вертикалној равни [2,7]

Ако се разматра осциловање тачкова једне осовине, може се формирати еквивалентни дводимензионални осцилаторни модел у попречној равни. На сликама 4 и 5 дати су ови модели за возило са крутом осовином и за возило са независним ослањањем, респективно.

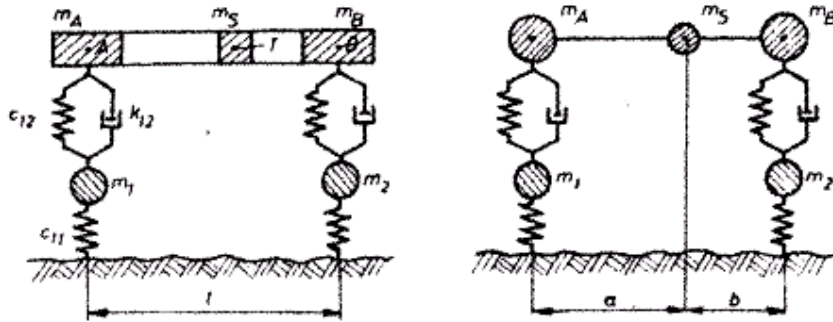


Слика 4. Дводимензионални осцилаторни модел возила са зависним ослањањем [2,7]



Слика 5. Дводимензионални осцилаторни модел возила са независним ослањањем [2,7]

Даља поједностављења осцилаторног система возила на једнодимензионалне моделе оправдано је ако су осцилације предњег и задњег дела возила међусобно независне. Претпоставља се да је ослоњена маса, m , концентрисана у три материјалне тачке A , T и B како је дато на слици 6 десно.



Слика 6. Разлагање ослоњене масе у три материјалне тачке [2,7]

Ознаке са слике 6 су:

- m_A - део ослоњене масе у тачки A изнад предње осовине возила,
- m_B - део ослоњене масе у тачки B изнад задње осовине возила,
- m_S - спрегнута маса у тежишту T ослоњене масе,
- J_y - момент инерције ослоњене масе у односу на попречну тежишну осу.

Претпоставља се даље да су све три масе међусобно повезане штапом без тежине. Нови модел мора да има исте статичке и динамичке особине као и осцилаторни систем који замењује. Услови за овај идентитет су следећи:

- укупна маса је непромењена:

$$m = m_A + m_S + m_B, \quad (1)$$

- положај тежишта у тачки T остаје непромењен:

$$m_A \cdot a = m_B \cdot b, \quad (2)$$

- момент инерције задржава своју вредност:

$$J_y = m \cdot \rho_y^2 = m_A \cdot a^2 + m_B \cdot b^2, \quad (3)$$

где је:

- a - удаљеност тежишта од предње осе,
- b - удаљеност тежишта од задње осе,

- l - осовинско растојање,
- ρ_y - полупречник инерције у односу на попречну тежишну осу ослоњене масе.

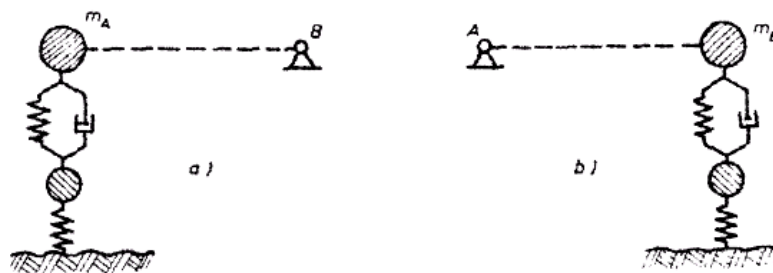
Решавањем једначина (1) до (3) добијају се следеће зависности појединачних маса:

$$m_A = m \frac{\rho_y^2}{a \cdot l}, \quad (4)$$

$$m_B = m \frac{\rho_y^2}{b \cdot l}, \quad (5)$$

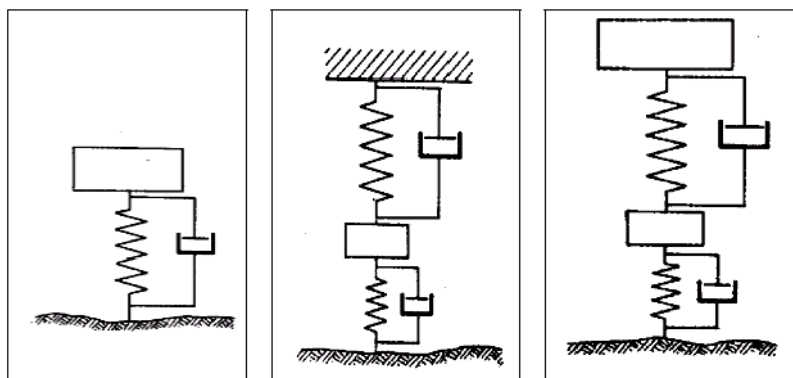
$$m_s = m \left(1 - m \frac{\rho_y^2}{a \cdot b}\right) \quad (6)$$

За случај да је $m_s=0$, што је остварено ако је $\rho_y^2 = ab$, осциловање предњег и задњег краја возила се распреже, а еквивалентни модели су приказани на слици 7.



Слика 7. Независност осциловања маса за случај када је $m_s=0$ [2,7]

Код путничких аутомобила, услов $m_s \approx 0$ је често испуњен услов. Из тог разлога, за моделирање вертикалне динамике возила, могу се користити различити једнодимензионални модели, слика 8, чија сложеност зависи од конкретног задатка при моделирању [3].



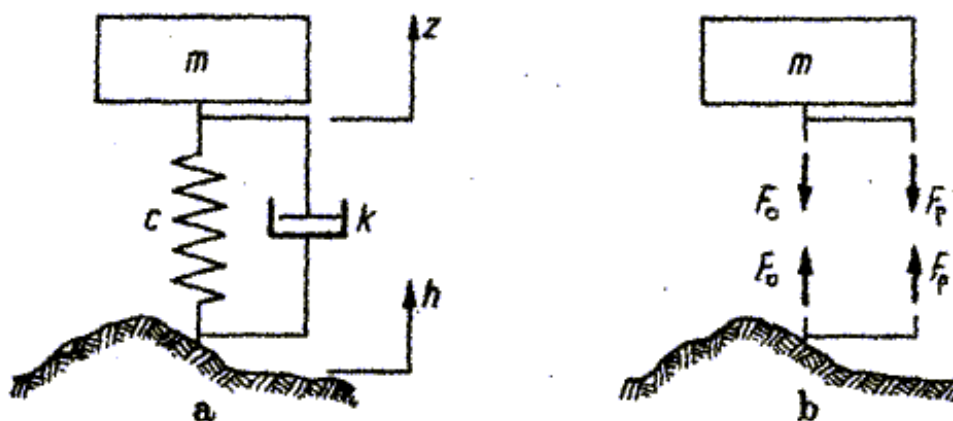
Слика 8. Примери једнодимензионалних модела [3]

3. ОСНОВЕ ДИНАМИКЕ ЛИНИЈСКОГ МОДЕЛА СА ЈЕДНОМ МАСОМ

Осцилације система са једном масом указују на основни принцип решавања једначина кретања осцилаторних система и дају најважније карактеристике ових система [2].

3.1 Диференцијална једначина кретања

На слици 9 приказан је линијски осцилаторни модел са једном масом, m , која осцилује дуж z -осе и која је ослоњена о подлогу преко опруге крутости c и амортизера пригушења k . Подлога је неравна, при чему је функција висина неравнина означена са h [2].



Слика 9. Осцилаторни систем са једном масом:

а) графички приказ система, б) дијаграм дејства сила [2]

Једначина кретања система са једном масом је:

$$m\ddot{z} = -F_0 - F_p, \quad (7)$$

где је:

- F_0 - сила у опрузи, пропорционална релативном померању $z_{rel} = z - h$ и карактеристици опруге, c :

$$F_0 = c(z - h), \quad (8)$$

- F_p - сила пригушења, пропорционална релативној брзини $\dot{z}_{rel} = \dot{z} - \dot{h}$ и карактеристици амортизера, k :

$$F_p = k(\dot{z} - \dot{h}) . \quad (9)$$

Заменом израза за силе (8) и (9) у једначину кретања (7) добија се линеарна диференцијална једначина кретања, која гласи:

$$m\ddot{z} + k\dot{z} + cz = k\dot{h} + ch . \quad (10)$$

Нехомогена једначина кретања (10) представља једначину принудног осциловања, које може бити пригушено или непригушено. Функција са десне стране једначине (10) је функција времена која побуђује систем и означава се као функција побуде. Решење нехомогене диференцијалне једначине другог реда састоји се од хомогеног дела, z_h , и партикуларног дела, z_p :

$$z = z_h + z_p . \quad (11)$$

Једначина сопственог осциловања система са једном масом је хомогена диференцијална једначина другог реда:

$$m\ddot{z} + k\dot{z} + cz = 0 \quad (12)$$

и она обухвата сопствене (слободне) осцилације масе m . Сопствене осцилације, такође, могу непригушене или пригушене.

3.2 Сопствене осцилације без пригушења

Сопствене осцилације врши тело изведено из равнотеже под утицајем рестаурационих сила које теже да осцилаторни систем врате у почетно стање. Одговарајућу диференцијалну једначину добијамо из једначине (12) која се, уколико је коефицијент пригушења једнак $k = 0$, редукује на облик [2]:

$$m\ddot{z} + cz = 0 . \quad (13)$$

Делећи целу једначину са m и уводећи смену:

$$\omega_o^2 = \frac{c}{m} , \quad (14)$$

где је ω_0 - сопствена кружна фреквенција осциловања масе m једнака:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} , \quad (15)$$

добиа се диференцијална једначина у облику:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 . \quad (16)$$

Увођењем смене:

$$z = Be^{\alpha t} \quad (17)$$

и после диференцирања, добија се:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= B\alpha e^{\alpha t} , \\ \ddot{z} &= B\alpha^2 e^{\alpha t} , \end{aligned} \quad (18)$$

односно:

$$\begin{aligned} \alpha^2 Be^{\alpha t} + \omega_0^2 Be^{\alpha t} &= 0, \\ (\alpha^2 + \omega_0^2) Be^{\alpha t} &= 0 . \end{aligned} \quad (19)$$

У изразу (19), вредност $z = Be^{\alpha t}$ не може бити једнак нули, јер то значи да нема никаквог кретања у правцу z -осе, што је супротно усвојеним претпоставкама. Из тога следи да мора бити задовољено да је:

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0 . \quad (20)$$

Из ове, тзв. карактеристичне једначине (20) добијају се два конјуговано комплексна решења:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= i\omega_0 \\ \alpha_2 &= -i\omega_0 . \end{aligned} \quad (21)$$

Сада је решење хомогене линеарне диференцијалне једначине (13) једнако:

$$z_h = B_1 e^{\alpha_1 t} + B_2 e^{\alpha_2 t} . \quad (22)$$

Амплитуде B_1 и B_2 добијају се из почетних услова. Користећи Ојлеров образац:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t , \quad (23)$$

израз (22) се своди на облик:

$$z_h = (B_1 + B_2) \cos \omega_0 t + i(B_1 - B_2) \sin \omega_0 t , \quad (24)$$

чија се десна страна може трансформисати у облик:

$$(B_1 + B_2) \cos \omega_0 t + i(B_1 - B_2) \sin \omega_0 t = A \sin \omega_0 t \cos \phi + A \cos \omega_0 t \sin \phi . \quad (25)$$

Нове константе A и ϕ одређују се на основу једнакости одговарајућих коефицијената са леве и десне стране израза (25). Из овога следи да је [2]:

$$\begin{aligned} A \sin \phi &= B_1 + B_2 , \\ A \cos \phi &= i(B_1 - B_2) , \end{aligned} \quad (26)$$

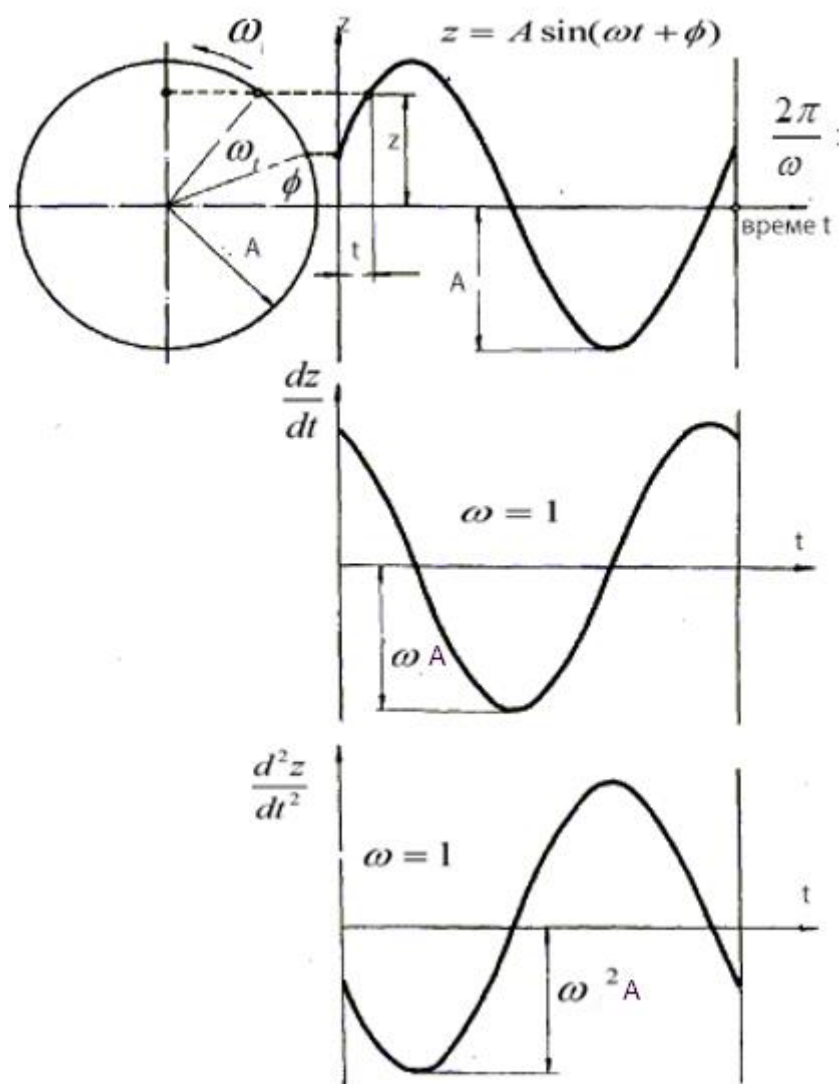
односно:

$$\begin{aligned} A &= \frac{B_1 + B_2}{\sin \phi} = i \frac{B_1 - B_2}{\cos \phi} , \\ \operatorname{tg} \phi &= \frac{B_1 + B_2}{i(B_1 - B_2)} . \end{aligned} \quad (27)$$

Добијено решење показује да је кретање циклично и да га карактеришу:

- кружна фреквенција, ω_0 ,
- амплитуда, A ,
- фазни помак, ϕ ,
- период осциловања $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ и
- техничка фреквенција, $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

На слици 10 приказани су: пут, брзина и убрзање тежишта осцилаторне масе m , која осцилује без пригушења.



Слика 10. Графички приказ пута, брзине и убрзања тежишта масе m при осциловању без пригушења [2]

3.3 Сопствене осцилације са пригушењем

На основу диференцијалне једначине (12), дељењем једначине са m и увођењем величине δ која се назива константа пригушења [2]:

$$\frac{k}{2m} = \delta, \quad (28)$$

добиа се диференцијална једначина сопственог пригушеног осциловања:

$$\ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \omega_0^2 z = 0. \quad (29)$$

Претпостављајући да је решење једначине (29) у облику:

$$z = Be^{\alpha t} , \quad (30)$$

после диференцирања:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= B\alpha e^{\alpha t} , \\ \ddot{z} &= B\alpha^2 e^{\alpha t} , \end{aligned} \quad (31)$$

слиди:

$$(\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2)Be^{\alpha t} = 0 . \quad (32)$$

У изразу (32), вредност $z = Be^{\alpha t}$ не може бити једнака нули, јер то значи да кретање у правцу z -осе не постоји, што је супротно почетним претпоставкама. Из тога слиди да мора бити:

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0 . \quad (33)$$

Карактеристична једначина (33) има два решења:

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} . \quad (34)$$

Ако се означи да је $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = p$, онда су решења карактеристичне једначине:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\delta + p , \\ \alpha_2 &= -\delta - p . \end{aligned} \quad (35)$$

Одавде слиди коначан облик решења хомогене линеарне диференцијалне једначине пригушеног осциловања:

$$z_h = B_1 e^{\alpha_1 t} + B_2 e^{\alpha_2 t} , \quad (36)$$

односно:

$$z_h = e^{-\delta t} (B_1 e^{pt} + B_2 e^{-pt}) . \quad (37)$$

3.3.1 Корени карактеристичне једначине су реални и различити

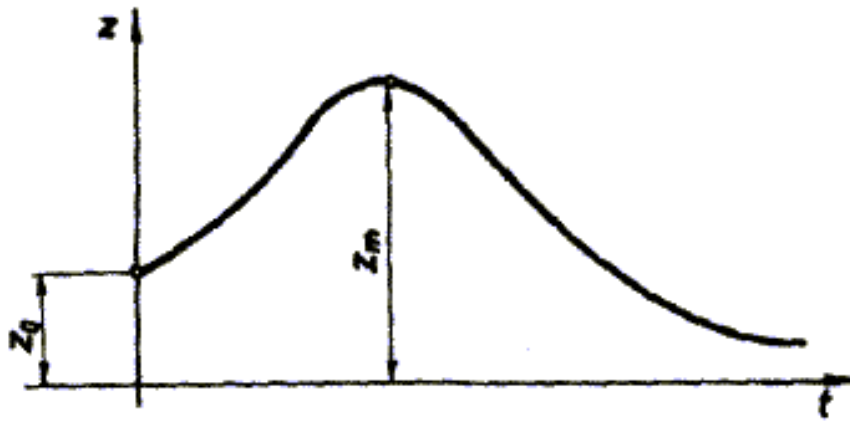
Када су корени карактеристичне једначине (33) реални и различити постоје две врсте математичких решења – физички реално решење и математички могућа решења.

Физички реално решење

Корени карактеристичне једначине су реални када су испуњени следећи услови [2]:

$$\begin{aligned}
 \delta &> 0, \\
 \omega_0^2 &> 0, \\
 \delta_0^2 &> \omega_0^2, \\
 \left| \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right| &< |\delta|, \\
 \alpha_1 &< 0, \\
 \alpha_2 &< 0.
 \end{aligned} \tag{38}$$

У овом случају, обе функције времена из израза (37) теже нули, када време тежи бесконачности. Систем је стабилан, враћа се у претходно стање, а кретање је по својој физичкој суштини – апериодично, слика 11.



Слика 11. Графички приказ апериодичног кретања масе када је $\delta^2 > \omega_0^2$ [2]

Математички могућа решења

Корени карактеристичне једначине су реални и у следећим случајевима [2]:

- *Случај 1*

$$\begin{aligned}
 \delta &< 0, \\
 \omega_0^2 &> 0, \\
 \delta_0^2 &> \omega_0^2, \\
 \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} &= p \\
 \left| \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right| &< |\delta|, \\
 \alpha_1 &> 0, \\
 \alpha_2 &> 0.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Оба члана једначине (37) теже бесконачности са протоком времена. Кретање је, дакле, монотono и систем је нестабилан.

- *Случај 2*

$$\begin{aligned}
 \delta &> 0, \\
 \omega_0^2 &< 0, \\
 \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} &= p \\
 \left| \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right| &> |\delta|, \\
 \alpha_1 &> 0, \\
 \alpha_2 &< 0.
 \end{aligned} \tag{40}$$

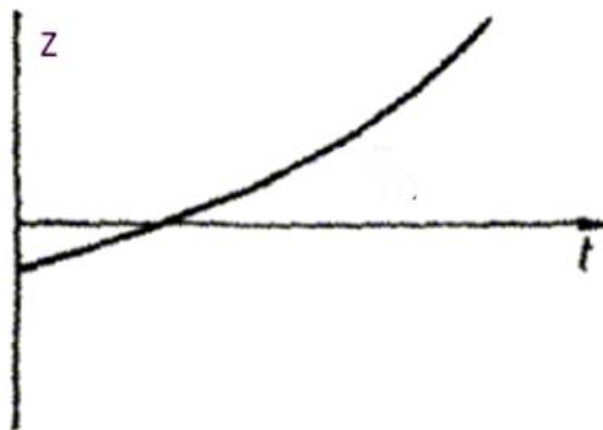
Први члан једначине (37) расте са временом у бесконачност, док други члан тежи нули. Кретање је монотono и систем је нестабилан.

- *Случај 3*

$$\begin{aligned}
 \delta &< 0, \\
 \omega_0^2 &< 0, \\
 \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} &= p \\
 \left| \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right| &> |\delta|, \\
 \alpha_1 &> 0, \\
 \alpha_2 &< 0.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Као и у претходном случају, први члан једначине (37) расте са временом у бесконачност, док други члан тежи нули, па је кретање монотono, а систем је нестабилан.

На слици 12, графички је приказано монотono кретање масе у осцилаторном систему.



Слика 12. *Графички приказан монотонног кретања масе у осцилаторном систему [2]*

3.3.2 Корени карактеристичне једначине су једнаки

Да би корени карактеристичне једначине (33) били једнаки, параметри осцилаторног система морају бити [2]:

$$\begin{aligned}\delta &> 0, \\ \delta^2 &= \omega_0^2, \\ \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} &= p = 0, \\ \alpha_1 &= \alpha_2 = -\delta.\end{aligned}\tag{42}$$

У овом специјалном случају, опште решење има облик:

$$z = (B + Ct)e^{-\delta t}\tag{43}$$

Кретање масе је апериодично и одговара карактеру кретања датом на слици 11.

3.3.3 Корени карактеристичне једначине су имагинарни

И овде постоје две групе решења математичког проблема: решења која одговарају физички реалном систему и математички могућа решења [2].

Физички реалан систем

Овај случај описан је следећим претпоставкама [2]:

$$\begin{aligned}\delta &> 0, \\ \delta^2 &< \omega_0^2, \\ \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} &= i \cdot p, \\ \alpha_1 &= -\delta + ip, \\ \alpha_2 &= -\delta - ip.\end{aligned}\tag{44}$$

Корени карактеристичне једначине су конјуговано-комплексни бројеви којима одговарају конјуговано-комплексне амплитуде:

$$B_{1,2} = \frac{1}{2}(C \pm iD).\tag{45}$$

Кретање је у складу са једначином (38) и одређено је изразом:

$$z = \frac{1}{2}(C + iD)e^{-(\delta+ip)t} + \frac{1}{2}(C - iD)e^{-(\delta-ip)t} , \quad (46)$$

што се може записати као:

$$z = \frac{1}{2}Ce^{-\delta t}(e^{ipt} + e^{-ipt}) + \frac{1}{2}iDe^{-\delta t}(e^{ipt} - e^{-ipt}) . \quad (47)$$

Коришћењем Ојлеровог обрасца, добија се да је:

$$z = e^{-\delta t}(C \cos pt - D \sin pt) , \quad (48)$$

што се може трансформисати у облик:

$$z = Ae^{-\delta t} \sin(pt + \varphi) . \quad (49)$$

Нове константе A и φ одређују се из једнакости израза (48) и (49):

$$z = e^{-\delta t}(C \cos pt - D \sin pt) = Ae^{-\delta t} \sin(pt + \varphi) , \quad (50)$$

одакле следи:

$$\begin{aligned} C &= A \sin \varphi , \\ -D &= A \cos \varphi , \\ A &= \sqrt{C^2 + D^2} , \\ \operatorname{tg} \varphi &= -\frac{C}{D} . \end{aligned} \quad (51)$$

Добијено решење указује да је кретање циклично са следећим карактеристикама:

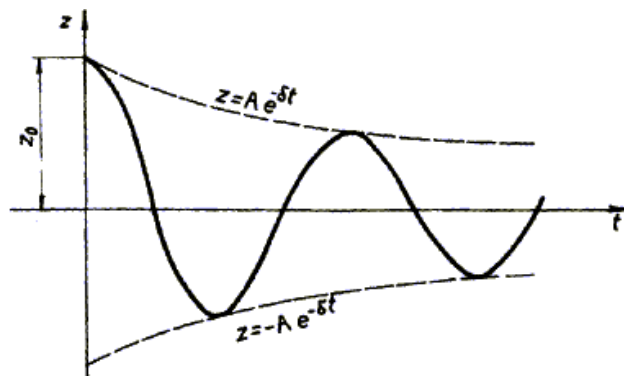
- кружна фреквенција, p , је пригушена сопствена фреквенција ω_p и износи

$$\omega_p = p = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} ,$$

- амплитуда, A , која опада по кривој $e^{-\delta t}$
- фазни помак , φ ,
- период осциловања, $T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\omega_p}$ и

- фреквенција, $f = \frac{1}{T} = \frac{p}{2\pi} = \frac{\omega_p}{2\pi}$.

На слици 13 графички је приказано кретање масе у осцилаторном систему.



Слика 13. Графички приказ кретања масе у осцилаторном систему са пригушењем [2]

Математички могући случајеви

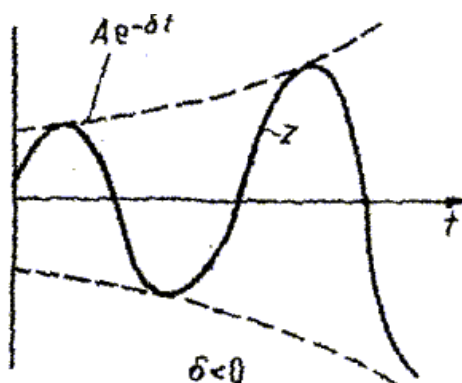
Корени карактеристичне једначине су имагинарни и у следећем случају [2]:

$$\begin{aligned} \delta &< 0, \\ \omega^2 &> 0, \\ \delta^2 &< \omega^2, \\ \sqrt{\delta^2 - \omega^2} &= ip. \end{aligned} \tag{52}$$

Идентичним поступком решавања добија се решење:

$$z = A e^{-\delta t} \sin(pt + \varphi). \tag{53}$$

Експоненцијални члан $e^{-\delta t}$ у изразу (53) одређује стални пораст амплитуде са растом времена и ово је приказано на слици 14.



Слика 14. Графички приказ осцилаторног система кретања масе у нестабилном осцилаторном систему [2]

3.4 Принудне осцилације без пригушења

Нека је поремећајна сила, Q , циклична сила одређена изразом [2]:

$$Q = H \cos(\lambda t + \theta) \quad (54)$$

где су:

- H - амплитуда поремећајне силе,
- λ - кружна фреквенција поремећајне силе,
- θ - почетни фазни угао поремећајне силе.

Диференцијална једначина осцилаторног кретања у случају принудних пригушених осцилација гласи [2]:

$$m\ddot{z} + cz = H \cos(\lambda t + \theta) \quad (55)$$

Делећи једначину (55) са m и уводећи смене:

$$\begin{aligned} \frac{c}{m} &= \omega_0^2, \\ h &= \frac{H}{m}, \end{aligned} \quad (56)$$

добива се диференцијална једначина у облику:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = h \cos(\lambda t + \theta) \quad (57)$$

Опште решење једначине (57) састоји се од хомогеног решења, z_h (решења хомогеног дела једначине код које је десна страна једначине једнака нули) и партикуларног решења, z_p (решења нехомогене једначине код које десна страна није једнака нули). Укупно решење линеарне диференцијалне једначине гласи:

$$z = z_h + z_p. \quad (58)$$

Опште решење, z_h , хомогене једначине је:

$$z_h = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad (59)$$

односно:

$$z_h = A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (60)$$

Партикуларно решење, z_p , нехомогене једначине је у облику:

$$z_p = B \cos(\lambda t + \theta) . \quad (61)$$

Из једначине (61), диференцирањем по времену, добијају се изрази:

$$\begin{aligned} \dot{z}_p &= -B\lambda \cos(\lambda t + \theta) , \\ \ddot{z}_p &= -B\lambda^2 \cos(\lambda t + \theta) . \end{aligned} \quad (62)$$

Увођењем израза (62) у једначину (57) добија се зависност:

$$-B\lambda^2 \cos(\lambda t + \theta) + \omega_0^2 B \cos(\lambda t + \theta) = h \cos(\lambda t + \theta) , \quad (63)$$

одакле следи:

$$\begin{aligned} B &= \frac{h}{\omega_0^2 - \lambda^2} , \\ z_p &= \frac{h}{\omega_0^2 - \lambda^2} \cos(\lambda t + \theta) , \end{aligned} \quad (64)$$

па је опште решење:

$$z = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{h}{\omega_0^2 - \lambda^2} \cos(\lambda t + \theta) \quad (65)$$

или:

$$z = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{h}{\omega_0^2 - \lambda^2} \cos(\lambda t + \theta) . \quad (66)$$

Да би се размотрила величина амплитуде принудних осцилација, уводи се и појам статичког угиба (амплитуде) услед деловања поремећајне силе Q , који се израчунава из амплитуде поремећајне силе и карактеристике опруге:

$$B_0 = \frac{H}{c} = \frac{\frac{H}{m}}{\frac{c}{m}} = \frac{h}{\omega_0^2} . \quad (67)$$

Однос амплитуда принудних осцилација, B , и статичке амплитуде представља динамички фактор појачавања или коефицијент динамичности, β , који је одређен изразом:

$$\beta = \frac{B}{B_0} = \frac{\frac{h}{\omega_0^2 - \lambda^2}}{\frac{h}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (68)$$

Уводећи ознаку η за однос фреквенција принудних и сопствених осцилација [2]:

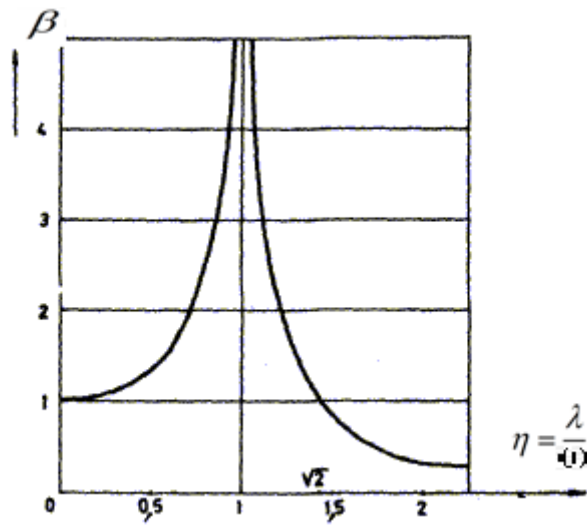
$$\eta = \frac{\lambda}{\omega_0} , \quad (69)$$

коефицијент динамичности постаје:

$$\beta = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \lambda^2} = \frac{1}{1 - \eta^2} \quad (70)$$

и увек је већи од нуле.

Зависност динамичког фактора појачавања од односа кружних фреквенција је приказана на слици 15.



Слика 15. Зависност динамичког фактора појачавања од односа кружних фреквенција [2]

Константе C_1 и C_2 из решења (63) могу се израчунати за познате почетне услове ($t = 0$): $z = z_0$ и $\dot{z} = \dot{z}_0$:

$$\begin{aligned} C_1 &= z_0 - \frac{h}{\omega_0^2 - \lambda^2} \cos \theta , \\ C_2 &= \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} + \frac{h}{\omega_0^2 - \lambda^2} \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \theta . \end{aligned} \quad (71)$$

Сада се решење (65), после замене константи добија у облику:

$$z = z_1 + z_2 + z_3 , \quad (72)$$

где су:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t , \\ z_2 &= -\frac{h}{\omega_0^2 - \lambda^2} \left(\cos \theta \cos \omega_0 t - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \theta \sin \omega_0 t \right) , \\ z_3 &= \frac{h}{\omega_0^2 - \lambda^2} \cos(\lambda t + \theta) . \end{aligned} \quad (73)$$

Дакле, осцилације масе m у овом случају су сложене и састављене од:

- слободних осцилација са кружном фреквенцијом ω_0 (део решења z_1),
- осцилација са кружном фреквенцијом ω_0 које су изазване поремећајном силом (део решења z_2) и
- принудних осцилација са кружном фреквенцијом λ (део решења z_3).

3.5 Принудне осцилације са пригушењем

Нека је поремећајна сила циклична и одређена изразом [2]:

$$Q = H \sin \lambda t . \quad (74)$$

Тада диференцијална једначина осцилаторног кретања масе m гласи:

$$m\ddot{z} + k\dot{z} + cz = H \sin \lambda t , \quad (75)$$

која се након трансформација доводи на облик:

$$\ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \omega_0^2 z = h \sin \lambda t . \quad (76)$$

Опште решење нехомогене диференцијалне једначине другог реда (76) састоји се од хомогеног и партикуларног решења:

$$z = z_h + z_p . \quad (77)$$

Решења хомогеног дела су одређена у претходним разматрањима, за разне величине параметара δ и ω_0 :

$$\begin{aligned}
\delta^2 > \omega_0^2 &\Rightarrow z_h = e^{-\delta t} (B_1 e^{pt} + B_2 e^{-pt}) , \\
\delta^2 = \omega^2 &\Rightarrow z_h = (B + Ct) e^{-\delta t} , \\
\delta^2 < \omega^2 &\Rightarrow z_h = A e^{-\delta t} \sin(pt + \varphi) .
\end{aligned}
\tag{78}$$

Партикуларни интеграл нехомогене диференцијалне једначине представљен је у облику:

$$z_p = B \sin(\lambda t + \theta) . \tag{79}$$

После двоструког интеграљења добијају се изводи партикуларног решења у облику:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_p &= B\lambda \cos(\lambda t + \theta) , \\
\ddot{z}_p &= -B\lambda^2 \sin(\lambda t + \theta) .
\end{aligned}
\tag{80}$$

Заменом израза (79) и (80) у израз (76) добија се следећа зависност:

$$\sin \lambda t [B(\delta^2 + \omega_0^2) \cos \theta - 2\delta B\lambda \sin \theta - h] + \cos \lambda t [B(\delta^2 - \omega_0^2) \sin \theta - 2\delta B\lambda \cos \theta] = 0
\tag{81}$$

Једнакост (81) је могућа само ако су изрази у средњим заградама једнаки нули, јер вредности $\sin \lambda$ и $\cos \lambda$ не могу истовремено бити нула. Израз уз $\cos \lambda t$ сада постаје:

$$\begin{aligned}
B(\delta^2 - \omega_0^2) \sin \theta - 2\delta B\lambda \cos \theta &= 0 , \\
\operatorname{tg} \theta &= \frac{2\delta\lambda}{\delta^2 - \omega_0^2} = -\frac{2\delta\lambda}{\omega_0^2 - \delta^2} .
\end{aligned}
\tag{82}$$

На основу тригонометријских релација добија се:

$$\begin{aligned}
\sin \theta &= \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{-2\delta\lambda}{\sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \lambda^2}} , \\
\cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{\omega_0^2 - \delta^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \lambda^2}} .
\end{aligned}
\tag{83}$$

Израз уз $\sin \lambda t$ сада постаје:

$$B(\omega_0^2 - \delta^2) \cos \theta - 2\delta B\lambda \sin \theta - h = 0 . \tag{84}$$

Заменом израза за $\sin \theta$ и $\cos \theta$ из (83) у једнакост (84) добија се да је:

$$B(\omega_0^2 - \delta^2) \frac{\omega_0^2 - \delta^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \lambda^2}} - 2\delta B\lambda \frac{-2\delta\lambda}{\sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \lambda^2}} - h = 0 , \tag{85}$$

одакле следе изрази за B и z_p :

$$\begin{aligned} B &= \frac{h}{(\omega_0^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \lambda^2}, \\ z_p &= \frac{h}{(\omega_0^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \lambda^2} \sin(\lambda t + \theta). \end{aligned} \quad (86)$$

Општа решења једначине (76) за различите вредности параметара сада гласе:

$$\begin{aligned} \delta^2 > \omega_0^2 &\Rightarrow z = e^{-\delta t} (B_1 e^{pt} + B_2 e^{-pt}) + \frac{h}{(\omega_0^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \lambda^2} \sin(\lambda t + \theta), \\ \delta^2 = \omega_0^2 &\Rightarrow z = (B + Ct) e^{-\delta t} + \frac{h}{(\omega_0^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \lambda^2} \sin(\lambda t + \theta), \\ \delta^2 < \omega_0^2 &\Rightarrow z = A e^{-\delta t} \sin(pt + \varphi) + \frac{h}{(\omega_0^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \lambda^2} \sin(\lambda t + \theta). \end{aligned} \quad (87)$$

Уз мање трансформације, израз за величину амплитуде B принудних осцилација омогућава доношење више интересантних закључака. Ако се овај израз напише у функцији односа кружних фреквенција ($\eta = \frac{\lambda}{\omega}$), увођењем фактора пригушење који је дефинисан као $D = \frac{\delta}{\omega}$, добија се [2]:

$$B = \frac{h}{\omega_0^2 \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}} \quad (88)$$

Када је кружна фреквенција λ мала, тада η тежи нули и израз за амплитуду тежи вредности B која одговара раније дефинисаној вредности статичке амплитуде $B = \frac{h}{\omega_0^2}$.

Када је кружна фреквенција λ врло велика, η има такође врло велике вредности, а амплитуда B тежи нули. То је последица чињенице да осцилаторни систем због своје инертности не може да прати врло брзе промене поремећаја силе.

Вредност кружне фреквенције поремећајне силе, λ , за коју амплитуда B има максималну вредност може да се одреди тражењем минималне вредности имениоца:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} [(\omega_0^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \lambda^2] &= 0, \\ -4\lambda(\omega_0^2 - \delta^2) + 8\delta^2 \lambda &= 0, \end{aligned} \quad (89)$$

одакле следи да је:

$$\lambda_{B\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} , \quad (90)$$

односно, одговарајућа величина максималне амплитуде, B :

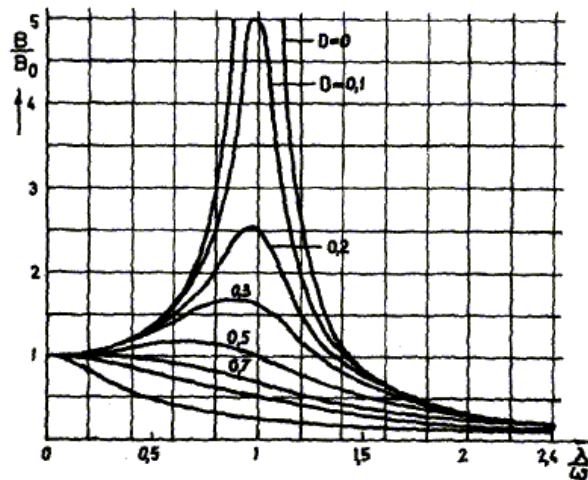
$$B_{\max} = \frac{h}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} . \quad (91)$$

За вредност $\delta = 0$, амплитуда B тежи бесконачности.

Динамички фактор појачавања $\beta = \frac{B}{B_0}$, имајући у виду да је $B_0 = \frac{h}{\omega_0^2}$, има вредност [2]:

$$\beta = \frac{B}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} . \quad (92)$$

На слици 16 дата је зависност динамичког фактора појачавања од односа фреквенција за различите вредности фактора пригушења D .



Слика 16. Зависност динамичког фактора појачавања од односа фреквенција за различите вредности фактора пригушења D [2]

3.6 Преносне функције линијског модела са једном масом

Комплексна анализа утицаја осцилаторних параметара на осцилације возила се може извршити применом осцилаторног модела са слике 9. Овај модел може да представи следеће:

- ослоњену масу,
- кабину возила или
- погонску групу или неки други систем моторног возила.

Диференцијална једначина која описује линеарне осцилације концентрисане масе са слике је [2]:

$$m\ddot{z} + k\dot{z} + cz = k\dot{h} + ch. \quad (93)$$

Применом Фуријеове или Лапласове трансформације на диференцијалну једначину (93), добија се преносна функција система:

$$H(j\omega) = \frac{z}{h} = \frac{c + jk\omega}{(c - m\omega^2)^2 + jk\omega}, \quad (94)$$

чији је модуло - амплитудно-фреквентна функција (АФК), $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{c^2 + k^2\omega^2}{(c - m\omega^2)^2 + k^2\omega^2}}. \quad (95)$$

Израз за модул омогућава да се утврди како крутост, c , и пригушење, k , утичу на осцилаторну удобност моторних возила. Резонантна учестаност (учестаност при којој преносна функција система тежи бесконачности) може се израчунати на основу израза:

$$(c - m\omega^2)^2 + k^2\omega^2 = 0, \quad (96)$$

што након сређивања доводи до израза:

$$m^2\omega^4 + (k^2 - 2cm)\omega^2 + c^2 = 0. \quad (97)$$

Решавањем једначине (97), а имајући у виду везу између техничке учестаности, f , и кружне учестаности, ω , као и чињенице да је резонантна учестаност реална позитивна величина добија се израз за резонантну техничку учестаност:

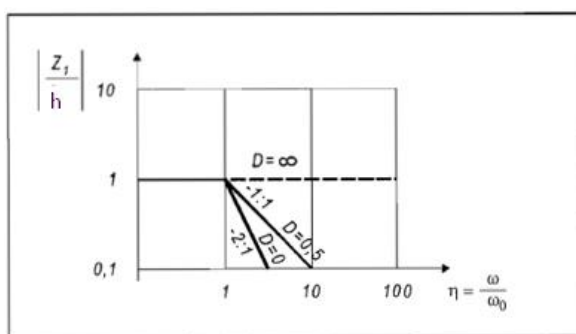
$$f_r = \frac{1}{2m\pi\sqrt{2}} \sqrt{2mc - k^2 + \sqrt{(k^2 - 2cm)^2 - 4mc^2}} \quad (98)$$

Ако се утицај пригушења, k , занемари, добија се израз за резонантну учестаности у облику:

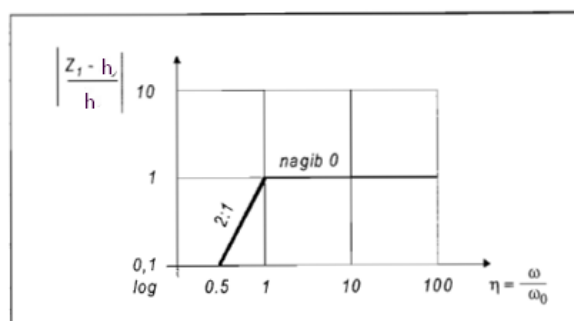
$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (99)$$

Код посматраног осцилаторног модела, са порастом масе, резонантна учестаност опада. Пораст крутости опруга доводи до пораста резонантне учестаности, док пораст пригушења амортизера доводи до незнатног смањења резонантне учестаности, па је оправдано занемаривање пригушења при анализама резонантних учестаности.

Преносна функција може се приказати графички путем, преко Бодеових дијаграма. На сликама 17 и 18 дати су примери Бодеових дијаграма осцилаторних система.



Слика 17. Боде дијаграм преносне функције хода ослоњене масе [2]



Слика 18. Боде дијаграм преносне функције релативног хода [2]

4. АНАЛИЗА УТИЦАЈА ПАРАМЕТАРА НА ВЕРТИКАЛНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ВОЗИЛА НА ПРИМЕРУ ЛИНИЈСКОГ МОДЕЛА СА ЈЕДНОМ МАСОМ

На осцилације моторних возила утичу: концепција возила, као и његови конструктивни параметри, моменти инерције и маса [3]. Анализа утицаја осцилаторних параметара на осцилаторну удобност моторних возила може се извршити применом осцилаторног модела возила са једном масом, чија је једначина принудних осцилација под утицајем неравнина пута дата изразом (75), а једначина слободних пригушених осцилација дата изразом (29).

За решавање диференцијалне једначине слободног пригушеног осциловања (29) и израчунавање преносне функције (94) коришћени су програми развијени у програмском пакету Matlab у оквиру Лабораторије за моторна возила.

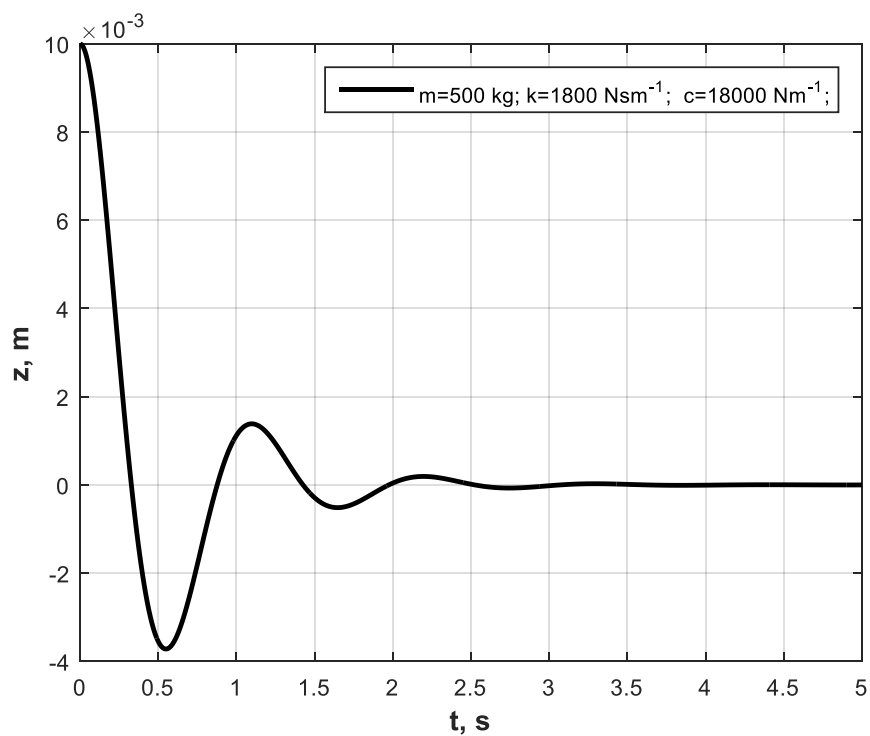
Посматран је „четвртински“ модел возила – модел који обухвата део ослоњене масе који преко система еластичног ослањања оптерећује један точак возила. Усвојени су следећи основни параметри модела: $m = 500 \text{ kg}$, $k = 1800 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$, $c = 18000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Усвојено је да су почетне вредности вертикалног померања и брзине ослоњене масе (потребне за решавање диференцијалне једначине осциловања) једнаке $z_0 = 0,01 \text{ m}$, $\dot{z}_0 = 0$.

На слици 19 приказано је решење диференцијалне једначине слободног пригушеног осциловања (29) за одабране параметре система. Види се да ослоњена маса осцилује хармонијски са опадајућим амплитудама, па је кретање система стабилно.

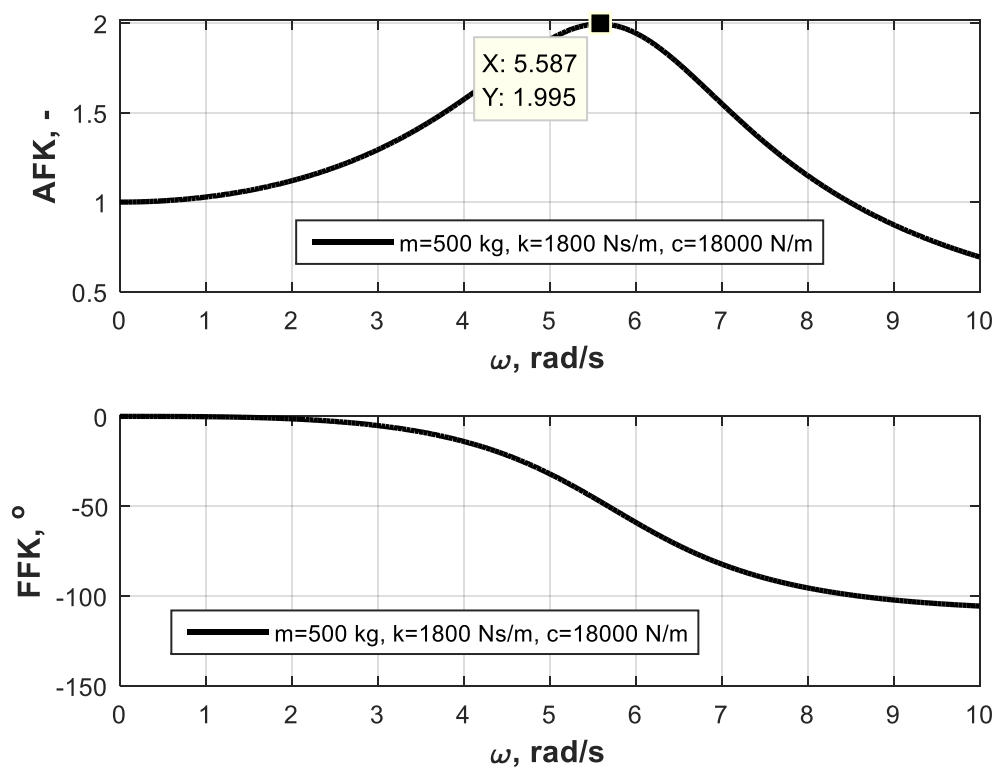
Амплитудно-фреквентна (AFK) и фазно-фреквентна (FFK) функција вертикалног осциловања ослоњене масе приказане су на слици 20, у функцији кружне фреквенције осциловања, ω . Види се да амплитудно-фреквентна карактеристика има максималну

вредност $\left| \frac{z}{h} \right|_{\max} = 1,995$ за вредност сопствене кружне фреквенције осциловања

$$\omega = 5,587 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$



Слика 19. Слободне пригушене осцилације модела са једном масом



Слика 20. Дијаграмски приказ амплитудно-фреквентне (AFK) и фазно-фреквентне (FFK) карактеристике осциловања модела возила са једном масом

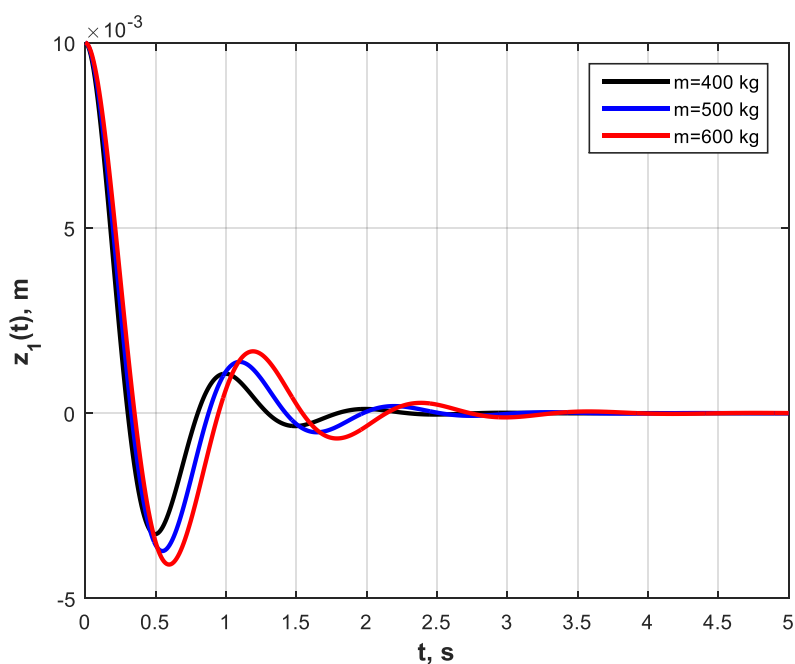
4.1 Утицај параметара на слободне пригушене осцилације модела са једном масом

На сликама 21 до 23 приказан је утицај масе, m , коефицијента пригушења, k , и коефицијента крутости, c , респективно, на слободне пригушене осцилације модела са једном масом.

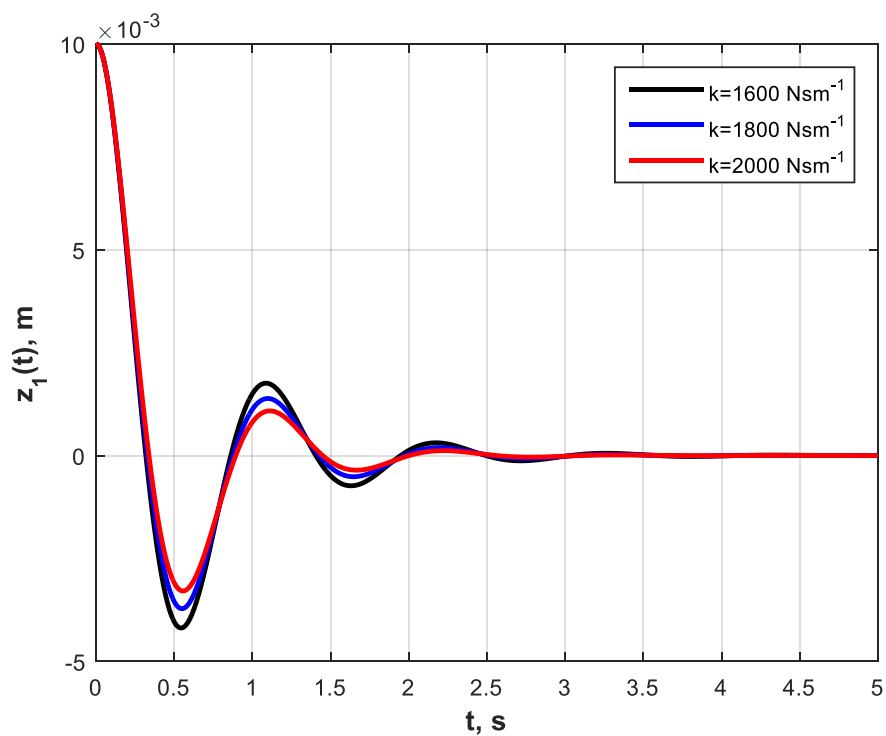
Дијаграмске зависности са слике 21 показују утицај масе на карактер осциловања модела са једном масом. Са повећањем ослоњене масе смањују се вредности сопствених фреквенција осциловања, али повећава се укупно време осциловања до потпуног смирења осцилација. Веће масе изазивају веће вредности амплитуда сопственог осциловања.

Промена пригушења не утиче на вредности сопствених фреквенција осциловања, слика 22. Међутим, са повећањем пригушења смањују се амплитуде сопственог осциловања модела.

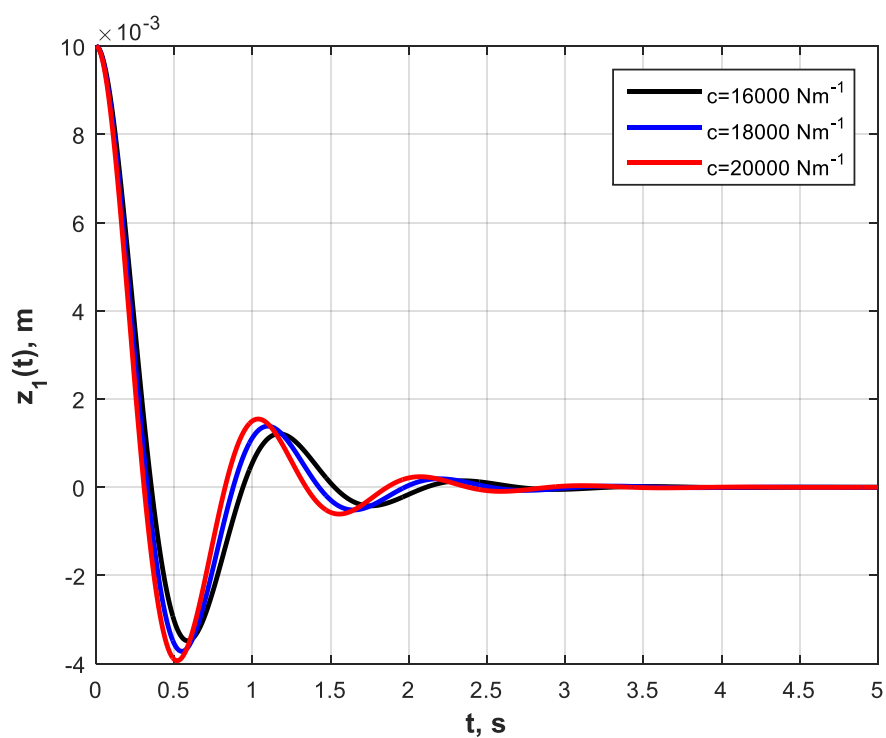
Утицај крутости на слободне пригушене осцилације модела са једном масом приказан је на слици 23. Повећање коефицијента крутости утиче на повећање вредности сопствених фреквенција пригушених осцилација, али и на повећање амплитуда осциловања ослоњене масе.



Слика 21. Утицај масе на слободне пригушене осцилације модела са једном масом



Слика 22. Утицај пригушења на слободне пригушене осцилације модела са једном масом



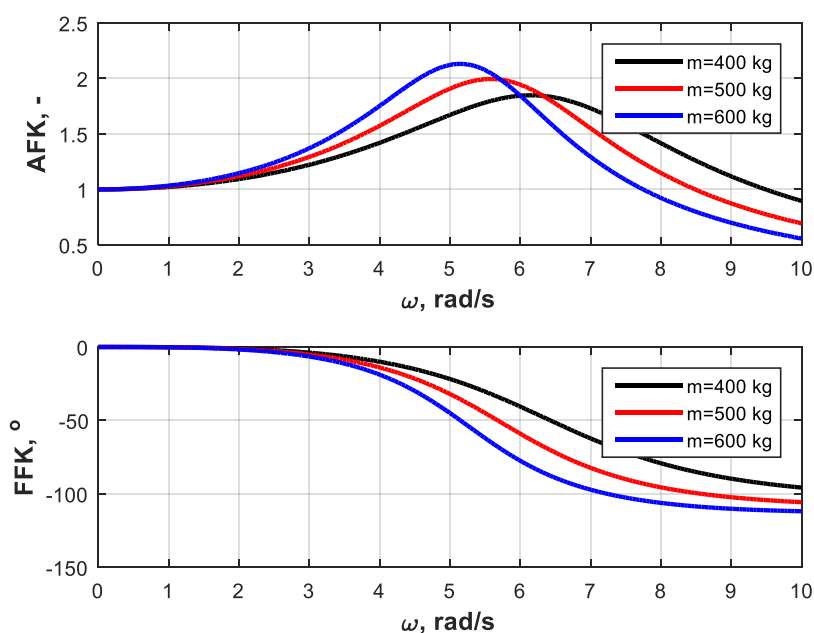
Слика 23. Утицај крутости на слободне пригушене осцилације модела са једном масом

4.2 Утицај параметара на преносну функцију хода ослоњене масе

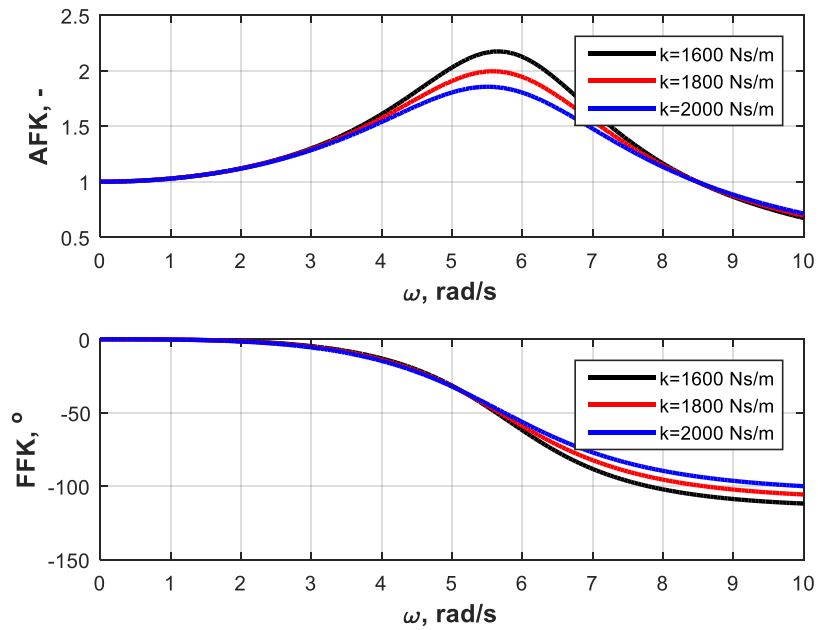
Утицај параметара m, k, c на преносну функцију хода ослоњене масе при сопственим пригушеним осцилацијама модела возила са једном масом приказан је на сликама 24 до 26. Анализом дијаграма могу се извести идентични закључци као у случају анализе утицаја параметара на карактер осциловања ослоњене масе.

Дијаграми на слици 24 показују утицај масе на облик амплитудно-фреквентне (AFK) и фазно-фреквентне карактеристике (FFK) преносне функције вертикалног хода ослоњене масе. Са дијаграма се може закључити да повећање масе смањује вредност сопствене фреквенције осциловања система и повећава максималну вредност амплитуда осциловања и фазно кашњење у систему.

Утицај величине коефицијента пригушења на карактер кривих амплитудно-фреквентне (AFK) и фазно-фреквентне карактеристике (FFK) преносне функције вертикалног хода ослоњене масе приказан је на дијаграмима са слике 25. Повећање пригушења утиче на смањење амплитуда преносне функције и фазног кашњења.

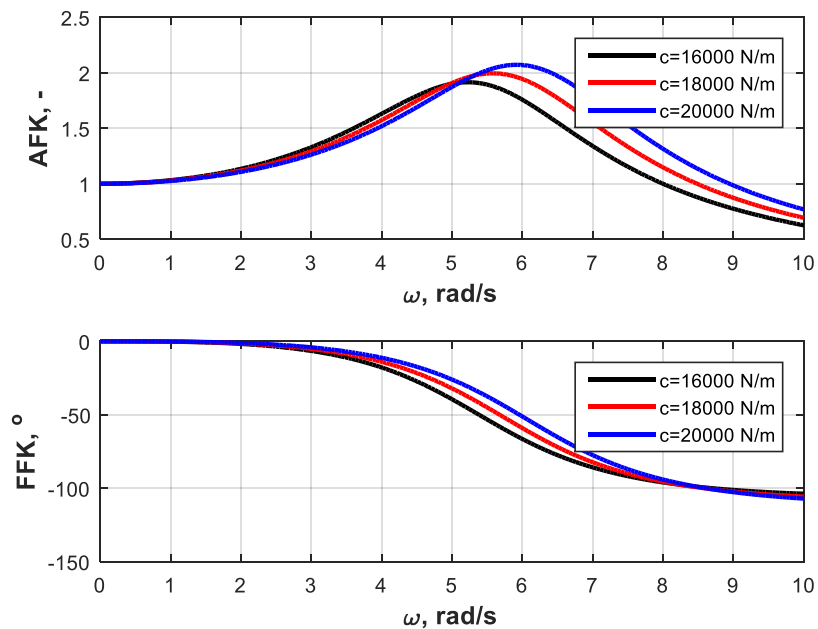


Слика 24. Утицај масе на преносну функцију $H(j\omega) = \frac{z}{h}$



Слика 25. Утицај пригушења на преносну функцију $H(j\omega) = \frac{z}{h}$

Слика 26 показује да повећање коефицијента крутости утиче на повећање вредности сопствене фреквенције осциловања и амплитуда преносне функције, али се фазно кашњење смањује у околини сопствене фреквенције осциловања.



Слика 26. Утицај крутости на преносну функцију $H(j\omega) = \frac{z}{h}$

5. ЗАКЉУЧАК

Приликом кретања возила по путу, долази до осцилација возила услед неравнина пута. Ова појава осцилација доводи до настанка замора возача као и путника у возилу. Такође, негативна појава осцилација је што приликом осциловања возила долази до умањења вертикалних динамичких реакција тла, због чега се смањују потенцијално могуће вредности вучне силе и кочних сила и угрожава се стабилност возила.

Систем еластичног ослањања возила, чији је један од основних задатака да амортизује и пригуши утицај неравнина пута на осциловање возила чине следећи елементи:

- еластични елементи, којима се остварује еластично ослањање (повезују ослоњену масу са неослоњеном масом и ублажавају динамичка оптерећења),
- елементи вођења или елементи везе (повезују еластичне елементе са ослоњеним и неослоњеним масама),
- елементи пригушивања (пригушују осцилације ослоњене и неослоњене масе) и
- елементи стабилизације (обезбеђују потребну крутост ослањања).

У раду је извршена анализа вертикалне динамике возила користећи модел система са једном масом. Изведене су диференцијалне једначине осциловања, приказани су типови осциловања модела и преносна функција модела.

Анализа утицајних параметара на карактер осциловања возила показала је да повећање коефицијента крутости еластичних елемената система еластичног ослањања утиче на повећање вредности сопствених фреквенција пригушених осцилација система, али и на повећање амплитуда осциловања ослоњене масе. Такође, може се закључити да повећање масе возила смањује вредност сопствене фреквенције осциловања система и повећава максималну вредност амплитуда осциловања и фазно кашњење у систему. Повећање пригушења утиче на смањење амплитуда преносне функције и фазног кашњења.

6. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Јанковић А. *Динамика возила*. Крагујевац: Машински факултет у Крагујевцу, 2008.
- [2] Кнор П. *Динамика моторних возила – Скрипта*. Сарајево: Машински факултет Сарајево, 2006.
- [3] Демић М, Лукић Ј. *Теорија кретања моторних возила*. Крагујевац: Машински факултет у Крагујевцу, 2011.
- [4] Jazar RN. *Vehicle Dynamics – Theory and Application*. Heidelberg: Springer International Publishing, 2017.
- [5] Jacobson B. et al. *Vehicle dynamics – Compendium*. Chalmers: Chalmers University of Technology, 2016.
- [6] Rill, G. *Vehicle Dynamics – Lecture Notes*. Regensburg: University of Applied Sciences - Hochschule Regensburg, 2009.
- [7] Симић Д. *Динамика моторних возила*. Београд: Научна књига, 1988.