

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Мастер академске студије

Модул: Примењена механика и аутоматско управљање

Предмет: Прорачунска механика лома и оштећења

Број индекса: 310/2011

Јелена М. Живковић

**Развој нумеричког модела Ј-интеграла у еласто-
пластичној механици лома применом методе
еквивалентног домена интеграције**

мастер рад

Комисија за преглед и одбрану:

- 1. Др Гордана Јовичић, ванр. проф. - ментор**
- 2. Др Радован Славковић, ред. Проф.**
- 3. Др Весна Марјановић, доцент**

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог мастер рада кандидат треба да се упозна са: основним параметрима еласто-пластичне механике лома; J -интегралом; J -EDI нумеричком методом за решавање J -интеграла у еласто-пластичној механици лома; имплементацијом развијеног нумеричког модела у софтверски пакет PAK; верификацијом добијене вредности J -интеграла са доступним резултатима у литератури на тест примеру централне прслине; применом критеријума отказа у сложеним структурама.

Препоручена литература:

- [1] Jovičić G., Živković M., Vulović S., (2011), Proračunska mehanika loma i zamora, Monografija, Mašinski fakultet Kragujevac, ISBN 987-86-86663-65-8
- [2] Nikishkov G. P., Atluri S. N., (1987), Calculation of Fracture Mechanics Parameters for an Arbitrary Three-dimensional Crack, by the Equivalent Domain Integral Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 1801-1821
- [3] Araujo T. D., Bittencourt T. N., Roehl D., Martha L. F., (2000), Numerical Estimation of Fracture Parameters in Elastic and Elastic-plastic Analysis, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000, Barcelona, 11-14 September
- [4] Živković J., Jovičić G., Vulović S., Stepanović Ž., Živković M., (2013), The Numerical Assessment of the Structural Integrity of the Tibia-implant Using Failure Criteria, Fourth Serbian Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Vrnjačka Banja, Serbia, 4-7 June

Крагујевац, 23.10.2013.

ментор:

др Гордана Јовичић, ванр. проф.

РЕЗИМЕ

У оквиру мастер рада дат је приказ теоријских основа механике лома. За случај еласто-пластичног материјалног модела, посебна пажња је посвећена анализи параметара механике лома међу којима су: отварање врха прслине, полупречник пластичне зоне, J -интеграл, брзина ослобађања енергије. Као фундаментални параметар еласто-пластичне механике лома разматран је J -интеграл. У раду је дат приказ трансформације J -интеграла са контурног на површински и запремински. Приказан је нумерички развој J -интеграла за методу коначних елемената, који је заснован на приступу Еквивалентног домена интеграције. Тако развијен J -интеграл имплементиран је у софтверски пакет ПАК. Нумерички имплементиран J -интеграл је верификован на примеру плоче са централном прслином са задатим еласто-пластичним материјалним моделом. Добијени резултати су упоређени са резултатима доступним у литератури. На крају, у последњем поглављу, приказани су критеријуми отказа који су имплементирани у софтверски пакет ПАК, а служе за нумеричко одређивање индекса отказа, тј., као мера за идентификацију зона сложених структура у којима може доћи до појаве иницијалних прслина и развоја лома.

SUMMARY

This thesis provides an overview of the theoretical basics of fracture mechanics. For the case of elastic-plastic material model, special attention is given to the fracture mechanics parameters such as: Crack tip opening displacement, radius of the plastic zone/area, J -integral, energy release rate. J -integral is considered as a fundamental parameter of elastic-plastic fracture mechanics. This paper presents the transformation of contour J -integral to the surface/area integration for 2D problems and volume integration for 3D problems. A numerical development of J -integral for the Finite Element Method is presented, which is based on the approach of the Equivalent Domain Integration Method. J -integral is implemented in that form in a software package PAK. Numerically implemented J -integral is verified on the example of a tensile plate with a central crack with elastic-plastic material model. The obtained results were compared with the results available in the literature. At the end of this paper, the last chapter presents the failure criteria that have been implemented in a software package PAK. Failure criteria are used for numerical calculation of the failure indexes/indices, ie., as a measure of identifying areas of complex structures in which initial cracking and fracture development could occur.

САДРЖАЈ

УВОД.....	1
1. ОСНОВНИ ПАРАМЕТРИ МЕХАНИКЕ ЛОМА	3
1.1 Irwin-ов концепт фактора интензитета напона.....	3
1.1.1 Веза између фактора интензитета напона и брзине ослобађања енергије	5
1.2 Основни параметри еласто-пластичне механике лома.....	6
1.2.1 Полупречник пластичне зоне.....	6
1.2.2 Отварање врха прслине.....	7
1.2.3 J -интеграл.....	10
2. НУМЕРИЧКО ОДРЕЂИВАЊЕ ФАКТОРА ИНТЕНЗИТЕТА НАПОНА	18
2.1 Нумерички развој контурног J интеграла	18
2.2 J -EDI метода	20
2.3 Нумеричка процедура у J -EDI методи	25
2.3.1 Први члан J_k	31
2.3.2 Други члан J_k	31
3. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕР ЗА ВЕРИФИКАЦИЈУ	35
3.1 Анализа нумеричких резултата на примеру централне прслине.....	35
4. НУМЕРИЧКА ПРИМЕНА КРИТЕРИЈУМА ОТКАЗА.....	42
4.1 Структура Тибија-Т плоча.....	42
4.2 Механичке карактеристике коштаног ткива	43
4.3 Дефинисање индекса отказа структуре коштаног ткиво-имплант.....	46
4.4 Анализа нумеричких резултата.....	48
5. ЗАКЉУЧАК.....	54
ЛИТЕРАТУРА.....	56

УВОД

Механика лома има важну примену у пројектовању нових конструкција, провери поузданости постојећих и у процени преосталог века трајања конструкција у којима су се појавиле иницијалне прслине. Истраживачи који су поставили темеље механике лома су Griffith (1921) и Irwin (1952,1954). Најзначајнији радови шездесетих година двадесетог века су радови Rice-а (1968) који су засновани на дефинисању J интеграла и анализи његових особина.

Нагле промене карактеристика у физичким пољима су честа појава при решавању инжењерских проблема. Феномен дисконтинуитета се јавља у структурама у облику прслина, смичућих група и инклузија. У општем случају дисконтинуалност се може класификовати као јака и слаба. Јака дисконтинуалност укључује дисконтинуалне промене на зависно променљивим физичким величинама, док се слаба дисконтинуалност јавља и описује као дисконтинуална промена градијента функција. У структурним моделима типичан пример јаке дисконтинуалности је прслина, док је пример слабе дисконтинуалности интерфејс између два материјала. Под прихватљивом нумеричком апроксимацијом дисконтинуалног поља се сматра она апроксимација која даје добру конвергенцију решења.

Углавном, линеарни или нелинеарни проблеми граничних вредности за структуре са прслинама могу бити решени само помоћу неких нумеричких метода, нпр. Методе коначних елемената. Користећи тако добијена решења за поља померања и напона, могуће је дефинисати параметре механике лома (као што су фактори интензитета напона K_I , K_{II} и K_{III} за линеаран случај, и вектор J -интеграла за еласто-пластични случај), (Nikishkov and Atluri, 1987).

Данас је најраспросрањенији начин да се предвиди понашање структуре с прслином помоћу прорачунавања вредности J -интеграла. Основне дефиниције и процедуре за израчунавање J -интеграла, у неким веома општим случајевима, су разматране у референцама (Kishimoto et al., 1980; Aoki et al., 1984; Murakami and Sato, 1983; Delorenzi, 1985; Shih and Needleman, 1985; Nishioka and Atluri, 1984). Генерално је уочено да енергетске методе прорачуна параметара лома имају вишу стопу конвергенције ка теоријском тј., аналитички тачном решењу. Из тог разлога, метода

виртуалног ширења прслине (Virtual Crack Eextenstion-VCE), (Delorenzi, 1985; Shih and Needleman, 1985), је веома атрактивна и распрострањена у комерцијалним софтверима.

Метода еквивалентног домена интегралења (Equivalent Domain Integral Method-EDI) представља даљи развој VCE-методе за израчунавање J -интеграла. У овом раду је представљена за општи статички случај, узимајући у обзир еласто-пластичне деформације. EDI метода упрошћава нумеричку процедуру прорачуна J -интеграла превodeћи, применом Green-ове теореме контурни интеграл у површински и запремински интеграл. У раду је приказан нумерички развој J -интеграла који је заснован на примени EDI методе. Тако развијен J -интеграл имплементиран је у софтверски пакет PAK. Нумерички имплементиран J -интеграл је верификован на примеру плоче са централном прслином са задатим еласто-пластичним материјалним моделом. Добијени резултати су упоређени са резултатима доступним у литератури. На крају, у последњем поглављу, приказани су критеријуми отказа који су имплементирани у софтверски пакет PAK, а служе за нумеричко одређивање индекса отказа, тј., као мера за идентификацију зона сложених структура у којима може доћи до појаве иницијалних прслина и развоја лома.

1. ОСНОВНИ ПАРАМЕТРИ МЕХАНИКЕ ЛОМА

На основу материјалних својстава структура које се анализирају, механика лома се може поделити на (Jovićić et al., 2011):

- 1) Линеарно еластичну механику лома и
- 2) Еласто-пластичну механику лома.

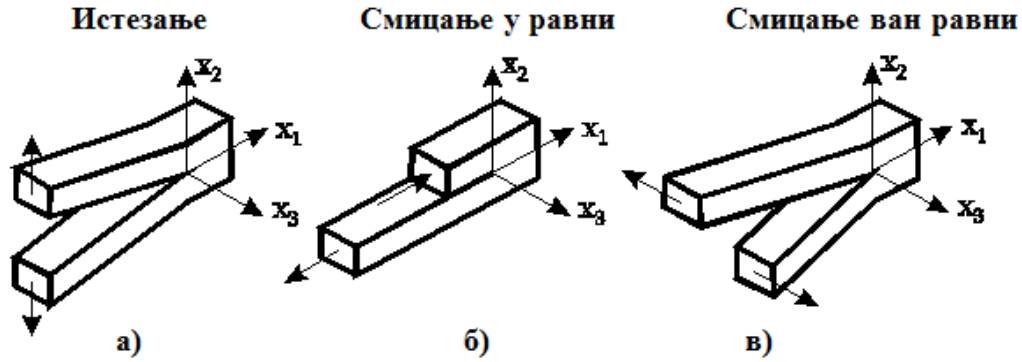
Линеарно еластична теорија механике лома се може применити уколико је течење ограничено на мали регион К-зоне, тј. Ако је Р-зона много мања од К-зоне. Област у околини врха прслине у којој је доминантна концентрација напона назива се К-зона. Р-зона је процесна зона, тј., зона у околини врха прслине где се појављују велике (пластичне) деформације.

Параметри механике лома који се најчешће примењују приликом нумеричког решавања проблема су фактори интензитета напона K_I , K_{II} , K_{III} , J -интеграл, параметри отварања врха прслине и полупречник пластичне зоне r_p .

1.1 Irwin-ов концепт фактора интензитета напона

Фактор интензитета напона спада у основне параметре линеарно еластичне теорије механике лома. Решавање проблема теорије еластичности у околини врха прслине, користећи Irwin-ов приступ, заснива се на дефинисању нивоа концентрације напона око врха прслине. Помоћу фактора интензитета напона (параметара концентрације напона) дефинишу се напонско поље и поље померања у околини врха прслине.

Тип фактора интензитета напона зависи од врсте оптерећења прслине. Постоје три основна типа оптерећења врха прслине: отварајући облик, клизајући-смичући облик у равни и клизајући-смичући облик ван равни, слика 1.



Слика 1 Типови оптерећења врха прслине, (Jovićić et al., 2011)

а) I тип; б) II тип; в) III тип

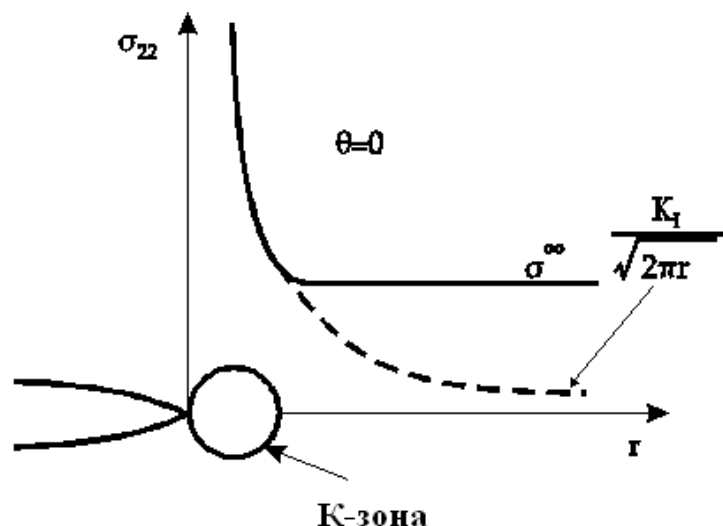
На основу зависности компоненти напона од фактора интензитета напона за појединачне врсте оптерећења прслине:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) \quad (1.1)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta)$$

Примећује се да у области где сингуларитет облика $1/\sqrt{r}$ доминира, напон зависи од фактора интензитета напона. Ван те области се напони одређују граничним условима, па се зато К-зоном назива област у којој се јавља сингуларно напонско поље (слика 2).



Слика 2 Расподела нормалног напона у околини врха прслине при I облику оптерећења (Sedmak, 2003)

1.1.1 Веза између фактора интензитета напона и брзине ослобађања енергије

Брзина ослобађања енергије G зове се још и сила раста прслине, док се њена критична вредност G_c може тумачити као отпорност материјала на раст прслине (Sedmak, 2003). Стање дефинисано релацијом

$$G = 2\gamma = G_c \quad (1.2)$$

Представља услов стабилности у Griffith-овом смислу, а може се назвати и критичним стањем. 2γ је густина површинске енергије, односно отпорност на лом или реактивна сила која се супроставља даљем ширењу прслине. До започињања раста прслине долази када брзина ослобађања енергије превазиђе критичну вредност. С обзиром да материјали нису идеални, почетак ширења прслине углавном настаје пре достизања теоретски израчунате вредности G_c , (Jovićić et al., 2011).

Веза између брзине ослобађања енергије и фактора интензитета напона представља Griffith-ов критеријум изражен преко К-фактора и за изотропан материјал има облик:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E^*}, G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E^*} \quad (1.3)$$

где је:

$$E^* = \begin{cases} E & \text{за РСД} \\ \frac{E}{(1-\nu^2)} & \text{за РСН.} \end{cases} \quad (1.4)$$

У случају мешовитог облика оптерећења прслине, често се користи следећа релација (Hussain et al., 1974):

$$G = G_I + G_{II} = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} . \quad (1.5)$$

Укупна брзина ослобађања енергије при деформисању прслине добија се сабирањем утицаја изазваних I и II обликом оптерећења, (Jovićić et al., 2011).

1.2 Основни параметри еласто-пластичне механике лома

У линеарно еластичној механици лома се добијају бесконачне вредности напона у околини врха прслине због претпоставки које се уводе. Целокупна анализа сингуларног поља код линеарно еластичних материјала заснована је на идеализованој претпоставци да је радијус заобљења врха прслине једнак нули, тј., да је врх прслине атомски оштар, (Jovićić et al., 2011). Због овога се може доћи до погрешног закључка да ће доћи до појаве лома и при малим оптерећењима. У реалним конструкцијама напони у околини врха прслине морају имати коначну вредност јер прслина има коначну оштрину.

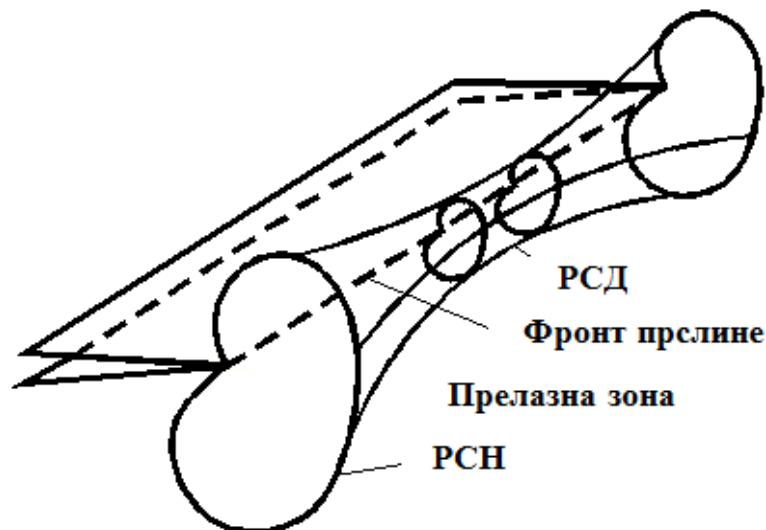
1.2.1 Полупречник пластичне зоне

Уколико величина зоне пластификације није мала у поређењу са дужином прслине неопходно је користити еласто-пластичан модел. Еласто-пластична механика лома се користи за одређивање величине пластичне зоне и критеријума за раст прслине. Величина пластичне зоне може бити одређена на основу различитих нивоа апроксимације, (Jovićić et al., 2011):

- Применом критеријума једноосног напрезања:

- Апроксимација првог реда
 - Irwin-ова апроксимација другог реда
 - Dugdale-ов модел
- Применом критеријума вишеосног течења.

На слици 3 је приказана промена величине пластичне зоне која се мења у правцу дебљине плоче. У средини фронта прслине имамо малу пластичну зону која одговара раванском стању деформације, а ка крајевима фронта се величина пластичне зоне повећава и она одговара раванском стању напона. Величина пластичне зоне расте са повећањем оптерећења, а самим тим долази до повећања области раванског стања напона.



Слика 3 Промена величине пластичне зоне кроз дебљину плоче, (Jovićić et al., 2011)

1.2.2 Отварање врха прслине

Код линеарно еластичних материјала постоји идеализована претпоставка да је радијус заобљења врха прслине једнак нули, али затупљивање врха прслине се јавља код еласто-пластичних материјала, слика 4. Одређивање параметра отварања врха прслине CTOD (Crack Tip Opening Displacement) је један од начина да се пластичност материјала узме у обзир.



Слика 4 Затупљени врх прслине, (Jovićić et al., 2011)

Отварање врха прслине, добијено апроксимацијом првог реда је засновано на анализи понашања прслине при оптерећењу I обликом ($K_{II} = K_{III} = 0$), слика 5. У табели 1 су дати добијени резултати.

Табела 1 Irwin-ово решење за отварање врха прслине добијено на основу апроксимације првог реда, (Jovićić et al., 2011)

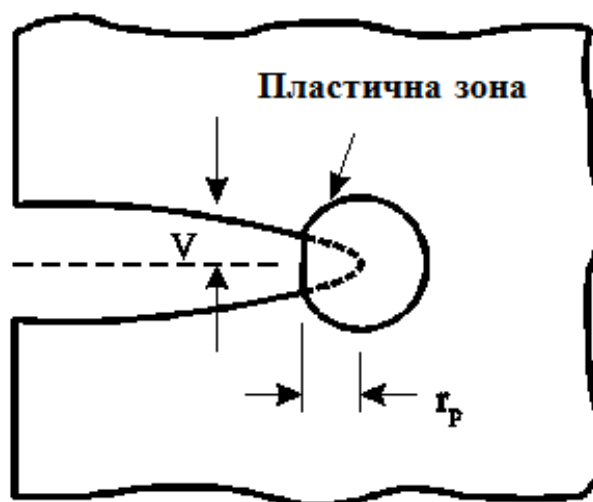
Померање страна прслине изазвано I обликом оптерећења	$v = \frac{K_I}{2\mu} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$
Полупречник пластичне зоне на основу Irwin-ове корекције	$r_p = \frac{1}{2\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_Y^2}$
Отварање врха прслине (CTOD)	$CTOD = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{E \sigma_Y^2}$

где су:

σ_Y - Напон течења

κ - Колосова константа

K_I - Фактор интензитета напона који одговара I облику оптерећења прслине



Слика 5 Процена отварајућег померања врха прслине, (Jovićić et al., 2011)

Коришћењем апроксимације другог реда Kanninen (1984) је дао формулацију отварања прслине коришћењем Dugdale-овог решења за величину пластичне зоне. У табели 2 су дати CTOD и компонента померања нормално на стране прслине.

Табела 2 Решење за CTOD добијено на основу апроксимације другог реда, (Jovićić et al., 2011)

Померање нормално на стране прслине	$v(a) = \frac{4}{\pi} \frac{a \sigma_Y}{E} \log \frac{c}{a}$
Отварање врха прслине	$CTOD = \frac{K_I^2}{E \sigma_Y} \left[1 + \frac{\pi^2}{24} \frac{\sigma^2}{\sigma_Y^2} + \dots \right]$

У табели 2 однос c/a је дефинисан релацијом:

$$\frac{a}{c} = \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_Y} \right) \quad (1.6)$$

У случају малих вредности односа σ/σ_Y , CTOD се апроксимативно може написати преко првог члана реда:

$$CTOD \approx \frac{K_I^2}{E\sigma_Y} \quad (1.7)$$

Позивајући се такође на брзину ослобођене енергије G , која је дата као $G = K_I^2 / E^*$, добија се следећи израз за CTOD у облику:

$$CTOD = \frac{G}{\sigma_Y} \quad (1.8)$$

где је E^* дато релацијом (1.4).

1.2.3 J -интеграл

J -интеграл као параметар механике лома представили су Cherepanov (1967) и Rice (1968). То је енергетски параметар који се подједнако користи и у линеарно еластичној и у еласто-пластичној механици лома. Rice (1968) је доказао независност контурног J -интеграла од путање интеграљења и показао је да је његова вредност једнака брзини ослобађања енергије:

$$J = G \quad (1.9)$$

чиме је довео J -интеграл у директну везу са фактором интензитета напона (1.5).

При извођењу независности контурног J -интеграла уведене су следеће претпоставке:

- Тело је хомогено
- Тело је изложено 2D напонском стању
- Површи прслине су слободне од напрезања
- Запреминске силе су занемарљиве

Општи облик контурног интеграла је, (Jovićić et al., 2011):

$$J_1 = \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})n_j d\Gamma, \quad i, j = (1, 2), \quad (1.10)$$

где је

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}, \quad i, j, k, l = (\overline{1, 3}), \quad (1.11)$$

W - Специфична енергија деформације

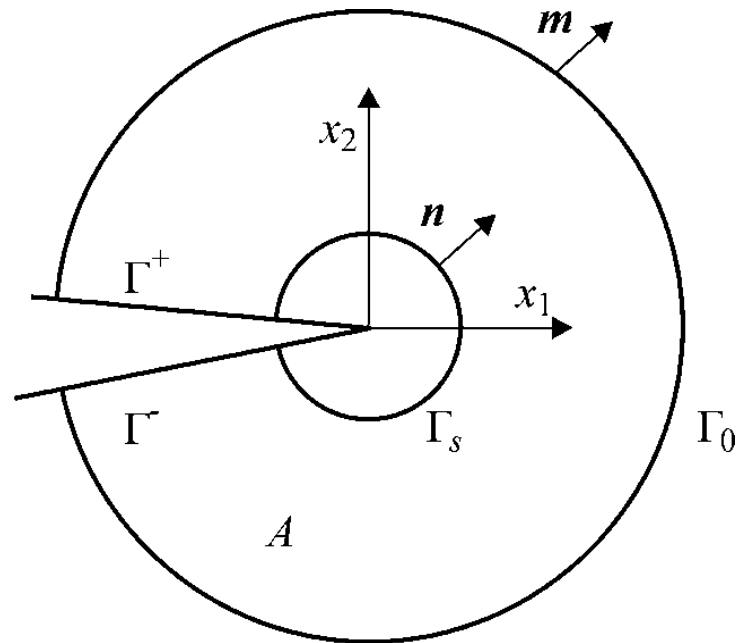
n_j - Јединични вектор спољашње нормале на контуру Γ око врха прслине (слика 6)

σ_{ij} - Компоненте тензора напона

ε_{ij} - Компоненте тензора деформације

C_{ijkl} - Компоненте конститутивног тензора

u_i - Компоненте вектора померања



Слика 6 Путања интеграције око врха прслине, (Jovićić et al., 2011)

Knowles (1972) је уочио да интеграл дефинисан релацијом (1.10) може бити третиран као прва компонента следеће релације:

$$J_k = \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (W \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k}) n_j d\Gamma, \quad i, j, k = (1, 2), \quad (1.12)$$

који су такође независни од облика путање.

У раду (Helen et al., 1975) приказана је формулација J -интеграла у комплексном облику:

$$J = J_1 - iJ_2 = \frac{1}{E^*} (K_I^2 + K_{II}^2 + 2iK_I K_{II}), \quad (1.13)$$

где су K_I и K_{II} компоненте фактора интензитета напона за I и II облик оптерећења, респективно.

Компоненте J_1 и J_2 , које дефинишу меру ширења прслине нормално и паралелно на стране прслине могу се изразити у облику (Hellen et al., 1975):

$$J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E^*}, \quad (1.14)$$

$$J_2 = \frac{-2K_I K_{II}}{E^*},$$

где је E^* дато релацијом 1.4.

Cherepanov (1967) је предложио да се E^* дефинише као

$$E^* = E \left[\frac{1}{1-\nu^2} + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right) \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}} \right] \quad (1.15)$$

где су E и ν Young-ов модул и Poisson-ов коефицијент, респективно.

Овај израз води до 1.4 за случај равног стања деформације или равног стања напона, и представља неки вид интерполације за било коју средњу вредност напона. Деформације ε_{11} , ε_{22} и ε_{33} морају бити дефинисане у близини фронта прслине.

Решење једначина (1.14) представља пресек круга и хиперболе, па је евидентно да је немогуће дефинисати K_I , K_{II} и K_{III} само помоћу њих. Постоје два могућа начина за решавање једначина 1.14 да би се добили фактори интензитета напона.

Први начин је да се додају изрази који садрже брзине ослобођене енергије G_I , G_{II} и G_{III} :

$$J_1 = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (1.16)$$

$$G_{III} = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (1.17)$$

$$G_{III} \Delta = \lim_{\varepsilon/\Delta \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0} \int_{A_\varepsilon} \left(W^{III} n_1 - \sigma_{3j} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} n_j \right) dA \quad (1.18)$$

где W^{III} треба да се израчуна користећи компоненте деформације ε_{3j} и напона σ_{3j} у локалном координатном систему фронта прслине.

Тада је релација између фактора интензитета напона и J_1 , J_2 и G_{III} , (Nikishkov and Vainshtok, 1980):

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{1}{2} \sqrt{E^*} \left(\sqrt{J_1 - J_2 - G_{III}} + \sqrt{J_1 + J_2 - G_{III}} \right) \\ K_{II} &= \frac{1}{2} \sqrt{E^*} \left(\sqrt{J_1 - J_2 - G_{III}} - \sqrt{J_1 + J_2 - G_{III}} \right) \\ K_{III} &= \sqrt{2\mu G_{III}} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Други начин је кроз декомпозицију поља померања и напона у симетричне и антисиметричне делове, (Nishioka and Atluri, 1984; Delorenzi, 1985; Sha and Yang, 1985):

$$\{u\} = \{u^I\} + \{u^{II}\} + \{u^{III}\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 + u_1' \\ u_2 - u_2' \\ u_3 + u_3' \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 - u_1' \\ u_2 + u_2' \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 - u_3' \end{Bmatrix} \quad (1.20)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma^I\} + \{\sigma^{II}\} + \{\sigma^{III}\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} + \sigma_{22}' \\ \sigma_{33} + \sigma_{33}' \\ \sigma_{12} - \sigma_{12}' \\ \sigma_{23} - \sigma_{23}' \\ \sigma_{31} + \sigma_{31}' \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} - \sigma_{22}' \\ 0 \\ \sigma_{12} + \sigma_{12}' \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{33} - \sigma_{33}' \\ 0 \\ \sigma_{23} + \sigma_{23}' \\ \sigma_{31} - \sigma_{31}' \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

$$u_i'(x_1, x_2, x_3) = u_i(x_1, -x_2, x_3) \quad (1.22)$$

$$\sigma_{ij}'(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{ij}(x_1, -x_2, x_3) \quad (1.23)$$

Користећи (1.20)-(1.21) и (1.12) могуће је израчунати G_I и G_{II} :

$$G_I \Delta = \lim_{\varepsilon/\Delta \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0} \int_{A_0} \left(W^I n_1 - \sigma_{ij}^I \frac{\partial u_i^I}{\partial x_1} n_j \right) dA \quad (1.24)$$

$$G_{II} \Delta = \lim_{\varepsilon/\Delta \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0} \int_{A_0} \left(W^{II} n_1 - \sigma_{ij}^{II} \frac{\partial u_i^{II}}{\partial x_1} n_j \right) dA \quad (1.25)$$

G_{III} се може израчунати из (1.18). Изрази за факторе интензитета напона постају:

$$\begin{aligned} K_I &= \sqrt{E^* G_I} \\ K_{II} &= \sqrt{E^* G_{II}} \\ K_{III} &= \sqrt{E^* G_{III}} \end{aligned} \quad (1.26)$$

На основу конститутивних релација које важе између напонско-деформационих поља, постоје разлике у примени J -интеграла. Материјално понашање се описује Ramberg-Osgood-овом релацијом за случај еласто-пластичних изотропних материјала:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} = \frac{\sigma}{\sigma_Y} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_Y} \right)^n, \quad (1.27)$$

где је

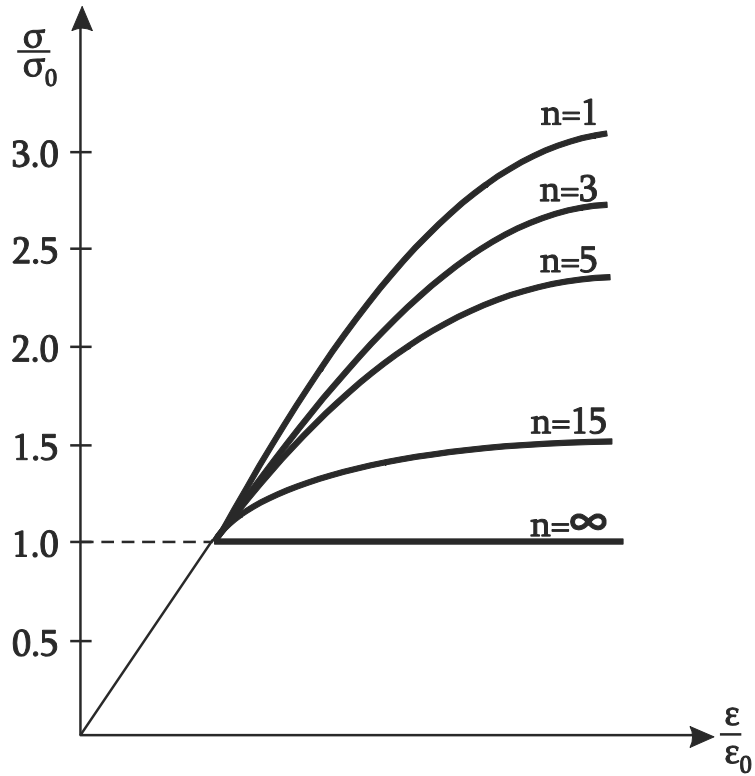
σ_Y - Напон течења

ε_Y - Деформација која одговара напону σ_Y

α - Бездимензиона константа

n - Деформационо ојачање

На слици 7 је дат приказ утицаја деформационог ојачања у Ramberg-Osgood-овој напонско деформационој зависности, (Jovićić et al., 2011).



Слика 7 Ramberg-Osgood -ова напонско деформациона зависност, (Jovićić et al., 2011)

Код еласто-пластичних материјала за дефинисање напонског и деформационог поља у околини врха прслине користи се HRR формулација (Hutchinson, 1967; Rice и Rosengren, 1968):

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \alpha \varepsilon_Y r \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_Y \sigma_Y I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} u_i(n, \theta), \\
 \sigma_{ij} &= \sigma_Y \left(\frac{EJ}{\alpha \sigma_Y^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(n, \theta), \\
 \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_Y \left(\frac{EJ}{\alpha \sigma_Y^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(n, \theta),
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

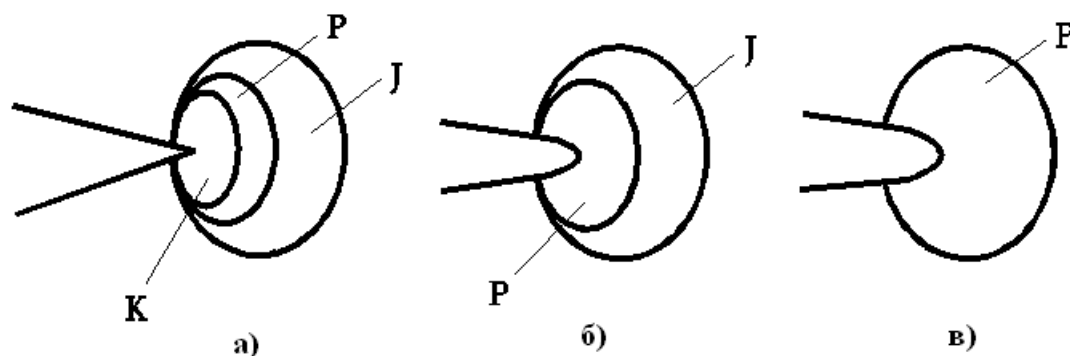
где је

J - J -интеграл

n - Ramberg-Osgood-ов експонент

Други је случај еласто-пластичних материјалних услова, где се формира мања зона око врха прслине и то је зона процесног лома, тј. зона у којој не важи K - и HRR-сингуларитет. Иза ње следи J –доминантна зона, тј. зона у којој важи HRR сингуларитет, па у другом случају не постоји област око прслине у којој може да се примени K -концепт.

Код случаја када постоји велико течење постоји само зона процесног лома, тако да сингуларитет HRR типа не важи и не може да се примењује концепт J -доминантне зоне.



Слика 9 Утицај пластичности на напонско поље око врха прслине (Anderson, 1994) а) мала зона процесног лома; б) прелазна фаза; в) доминантна зона процесног лома

J -интеграл, који у суштини може да се тумачи као закон одржања енергије, може се израчунати применом методе коначних елемената коришћењем следећих приступа, (Jovićić et al., 2011):

- Директном методом
- Помоћу контурног интеграла
- Применом методе виртуалне екстензије прслине, тј. методе еквивалентног домена интегралчења (Equivalent Domain Integral Method) или скраћено EDI методом.

2. НУМЕРИЧКО ОДРЕЂИВАЊЕ ФАКТОРА ИНТЕНЗИТЕТА НАПОНА

Фактори интензитета напона су неопходне физичке величине при процени преосталог века трајања конструкција са уоченим прслинама и они се за једноставне случајеве могу одредити аналитичким методама механике лома. При сложеним напонским стањима и сложеној геометрији прслине може доћи до погрешне процене вредности, па је примена методе коначних елемената у механици лома неопходна.

Метода коначних елемената се већ дуги низ година успешно користи за решавање проблема механике лома. Основни циљ примене је дефинисање напонског поља у близини врха прслине, тј., одређивање нивоа концентрације напона израженог преко фактора интензитета напона. У методи коначних елемената се користе три приступа за нумеричко одређивање фактора интензитета напона и то су:

- директни метод,
- индиректни метод и
- метод J -интеграла.

Директна метода се заснива на коришћењу специјалних коначних елемената који у својој формулацији као директне непознате садрже факторе интензитета напона K_I и K_{II} . У индиректној методи се фактори интензитета напона одређују на основу добијених померања у сингуларним коначним елементима (Quarter Point – QP елементи).

Метод J -интеграла се тренутно највише користи за нумеричко одређивање фактора интензитета напона. Сам поступак одређивања фактора интензитета напона припада фази пост-процесирања (Živković et al., 2010).

2.1 Нумерички развој контурног J интеграла

Процедура примене контурног интеграла је заснована на сумирању доприноса из свих елемената који су пресечени путањом, (Jovićić et al., 2011). Путања по елементима је у суштини слободна, али поједини истраживачи (Li et al., 1985) су предложили да се путања ограничава на прелаз преко интеграционих тачака. Такође, сугерисано је да се

путања бира тако да буде паралелна са локалним координатама елемената, као што је приказано на слици 10.

Уколико се координата ξ , тј. координата затворене контуре интеграљења, која сече дати елемент, поклопи са једном од његових локалних координата η_1 или η_2 , онда се вредност J -интеграла своди на сумирање његових вредности у Gauss-овим тачкама:

$$J = \sum_e \sum_{n=1}^{N_0} I^{ce}(\xi) w_p, \quad (2.1)$$

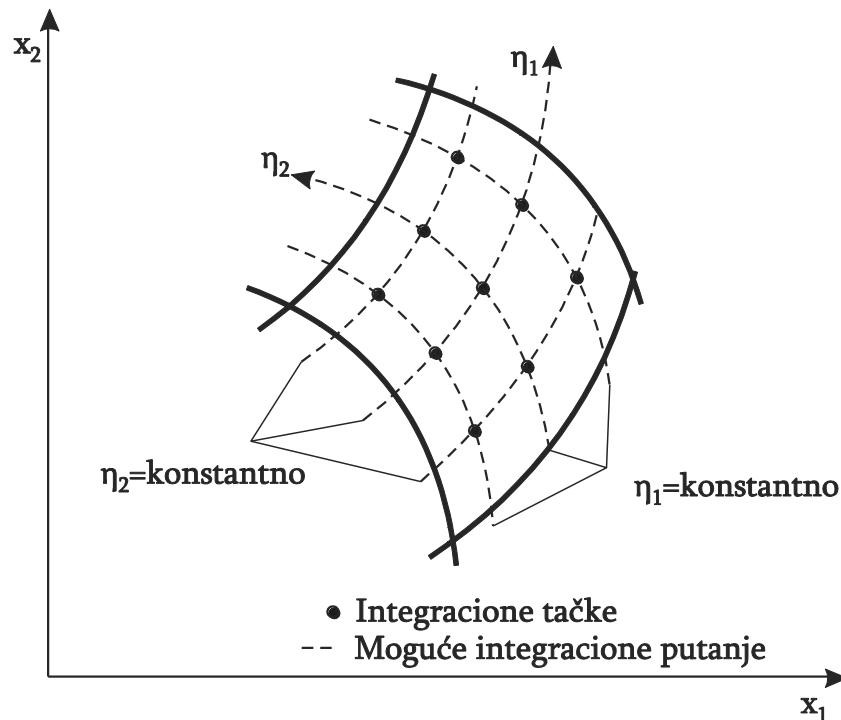
где је

e - Број елемената пресечених контуром Γ

N_0 - Ред интеграљења

w_p - Тежински фактор на локацији ξ

$I^{ce}(\xi)$ - Вредност подинтегралне функције (1.10) у Gauss-овој тачки.



Слика 10 Интеграционе путање при нумеричком решавању контурног J -интеграла,
(Jovićić et al., 2011)

Интеграција релације (1.10) се врши у локалном координатном систему и дата је у облику:

$$I^{ce}(\xi) = (Wn_k - \sigma_{ij}u_{i,k}n_j) \frac{ds}{d\xi} \quad k = 1, 2, \quad (2.2)$$

где је s дужина путање у глобалном координатном систему. Компоненте вектора нормале, помножене изводом дужине путање по локалној координати елемента, могу се написати у облику:

$$\begin{aligned} n_1 \frac{ds}{d\xi} &= \frac{dx_2}{d\xi} = \sum_{p=1}^P \frac{\partial N^p}{\partial \xi} x_2^p \\ n_2 \frac{ds}{d\xi} &= \frac{dx_1}{d\xi} = \sum_{p=1}^P \frac{\partial N^p}{\partial \xi} x_1^p \end{aligned} \quad (2.3)$$

где је

P - Број чворова по елементу

$N^p(\eta_1, \eta_2)$ - Вредности интерполационе функције у тачки (η_1, η_2)

(x_1^p, x_2^p) - Координате чвора p датог елемента.

У примени контурног J -интеграла за 3D проблеме јавља се проблем при избору интеграционе путање Gauss-ових тачака, а и процес избора такве путање није могуће аутоматизовати (Lin, 2000.). Због тога је развијена метода еквивалентног домена интегралена за прорачун фактора интензитета напона применом J -интеграла.

2.2 J-EDI метода

Контурни интеграл се преводи у интеграл са еквивалентним доменом интеграције из разлога што контурни J -интеграл није најбоља форма за нумеричке прорачуне методом коначних елемената. Метод еквивалентног домена интеграљења има широку примену, што сведочи читав низ истраживача који су нумерички развијали J -интеграл EDI методом (Dolbow et al., 1999; Lin, 2000; Gosz et al., 2001; Kim et al., 2002; Endrelein et al., 2003; Jovićić, 2005, 2007, 2009; Živković et al., 2010). EDI метода омогућава лако укључивање запреминских сила у J -интеграл, тако да је и то једна од предности у односу на контурну интеграцију.

Стандардни контурни интеграл дат релацијом (1.10) може бити преформулисан увођењем тежинске функције $q(\mathbf{x}) = q(x_1, x_2)$, тако да важи:

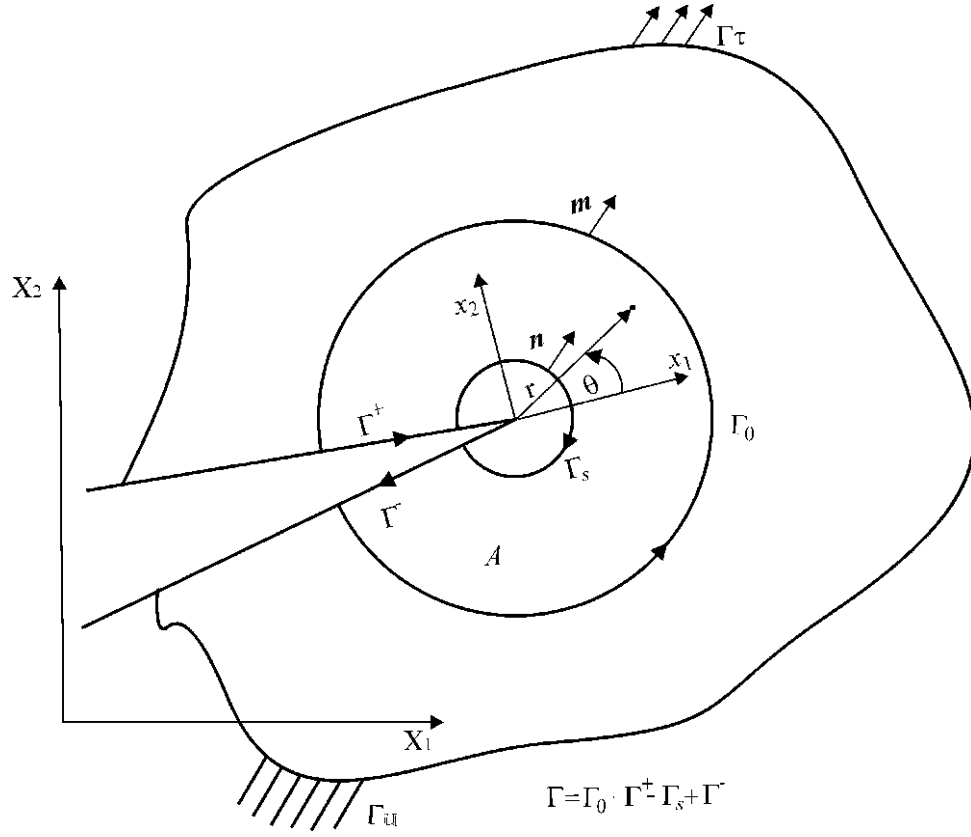
$$\Psi = \int_{\Gamma} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1}) m_j q d\Gamma, \quad (2.4)$$

где је $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma^+ - \Gamma_s + \Gamma^-$ контура приказана на слици 11

m_j - Вектор јединичне спољашње нормале на контуру ($m_j = n_j$ на Γ_0 и $m_j = -n_j$ на Γ_s)

$q(\mathbf{x})$ - Тежинска функција која се дефинише тако да има вредност $q = 1$ на спољашњој граници контуре Γ и $q = 0$ на контури Γ_0 (видети слику 10)

Чворови на и изван контуре Γ_0 остају фиксирани, док чворови коначних елемената који се налазе унутар региона Γ поседују круту translацију. Овај израз је интерпретација виртуалне екстензије врха прслине и представља једну од техника за конверзију J -интеграла. Оваква интерпретација може да се прошири тако да обухвати ефекте термичких деформација, запреминских сила и напрезања на странама прслине (Souma, 2000). Скуп чворова који се померају круто, означава се као крути регион, док се функција $q(\mathbf{x})$ назива функција премештања или вектор премештања у 3D простору (Lin, 2000).



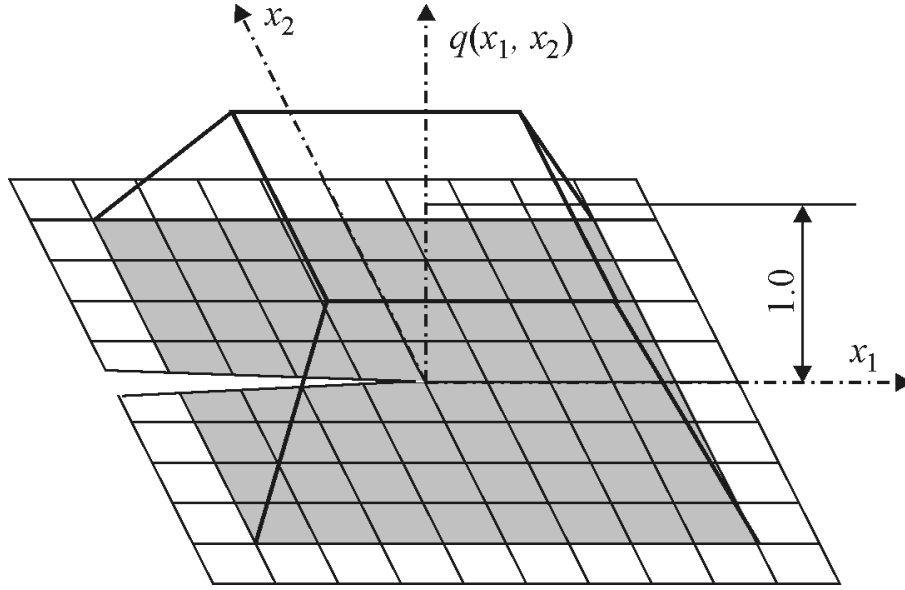
Слика 11 Превођење контурног у интеграл еквивалентног домена интеграције, (Jovićić et al., 2011)

У граничном случају када $\Gamma_s \rightarrow 0$ добија се:

$$\begin{aligned} \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \Psi &= \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (W \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k}) m_j q d\Gamma = \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0 + \Gamma^+ + \Gamma^- - \Gamma_s} (W \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k}) m_j q d\Gamma = \\ &= \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0 + \Gamma^+ + \Gamma^-} (W \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k}) m_j q d\Gamma - \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (W \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k}) m_j q d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Пошто је $q = 0$ на Γ_0 и под претпоставком да су стране прслине ненапрегнуте, горња једначина добија облик:

$$J_k = - \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \Psi = \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (W \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k}) m_j q d\Gamma \quad (2.6)$$



Слика 12 Расподела тежинске функције по правоугаоном домену интеграције, (Jovičić et al., 2011)

Уколико се на релацију (2.6) примени дивергентна теорема, добија се следећи израз:

$$J_k = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj}) q_{,j} dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj})_{,j} q dA \quad (2.7)$$

где је површ ограничена контуром Γ_0 означена са A (слика 11). Код линеарно еластичних материјала се други члан горње релације губи (Lin, 2000; Kim et al., 2002; Jovičić et al., 2003; Enderlein et al., 2003; Jovičić, 2005), и тада се добија коначна форма еквивалентног домена интегралнења за J -интеграл:

$$J_k = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj}) q_{,j} dA \quad (2.8)$$

У 3D случају, J -EDI се конвертује у запремински интеграл (Lin, 2000; Gosz et al., 2001; Jovičić et al., 2003) као:

$$J_k = \frac{1}{f} \int_V (\sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj}) q_{,j} dV \quad (2.9)$$

где је $f = (2/3)\Delta$, а са Δ је означена дебљина 3D елемента у правцу фронта прслине (оса цилиндра се поклопа са фронтом прслине, слика 13).

За случај пластичног материјала, коначна форма еквивалентног домена интегрална за J -интеграл има облик:

$$J_k = \frac{1}{f} \int_V (\sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj}) q_{,j} dV + \frac{1}{f} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k} - W_{,k}) q dV, \quad k=1,2 \quad (2.10)$$

У случају нееластичних деформација можемо дефинисати W као:

$$W = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{ep} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^t \quad (2.12)$$

где су ε_{ij}^e , ε_{ij}^p и ε_{ij}^t еластични, пластични и топлотни делови деформација.

Претпостављајући да напони имају еластични потенцијал, тј.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W^e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad (2.13)$$

други члан из (2.10) има облик

$$(J_k f)_2 = - \int_{V-V_e} \left(\frac{\partial W}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right) s dV = - \int_{V-V_e} \left(\frac{\partial W^p}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{pt}}{\partial x_k} \right) s dV \quad (2.14)$$

Овде су коришћене еквилибријумске једначине (у одсуству сила на телу), а уведене су дефиниције:

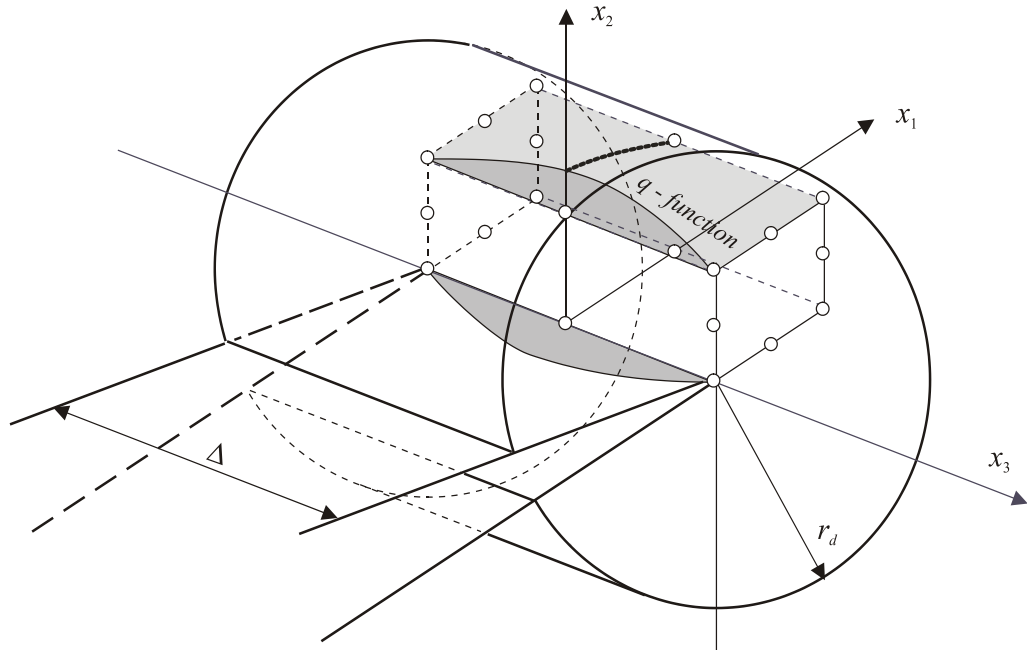
$$W^p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{ij}^{pt} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^t \quad (2.16)$$

Евидентно је да је, у присуству нееластичних деформација, други део једначине (2.10) једнак нули.

У 3D проблемима, контурни интеграл би постао површински при чему површина окружује неки део фронта прслине (нпр. површина цилиндра на слици 13). У том случају селекција површина би била много тежа него селекција контура у 2D

простору. Из тог разлога, конверзија површинског у запремински интеграл (релација (2.9)) је од посебног значаја за решавање 3D проблема. Конвертовани интеграл тј. запремински интеграл (2.9) се развија преко скупа елемената око фронта прслине обухваћених цилиндром чији је полупречник основе r_d , док крути регион (слика 14) обавезно мора да садржи фронт прслине, (Jovićić et al., 2011).

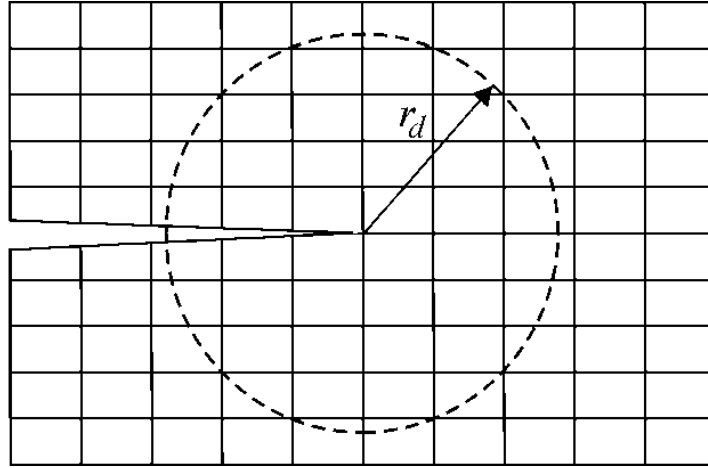


Слика 13 Еквивалентни домен интеграције у 3D случају и расподела тежинске функције по 3D елементу, (Jovićić et al., 2011)

2.3 Нумеричка процедура у J-EDI методи

J -EDI метода је заснована на теорији VCE методе, а вредност тежинске функције $q(\mathbf{x})$ дефинише виртуално померање чворова, а назива се још и функција премештања. Уколико је чвор унутар домена интеграције A код 2D проблема (релација 2.8), односно уколико је унутар домена V код 3D проблема (релација 2.9), тежинској функцији $q(\mathbf{x})$ се додељује вредност 1. Тежинска функција $q(\mathbf{x})$ има вредност 0 изван домена интеграције.

Уколико је материјал структуре хомоген и уколико су запреминске силе занемарљиве, имплементација релације (2.9) применом методе коначних елемената је релативно једноставна. Једина суштинска разлика у односу на класичне начине интеграције J -интеграла је коришћење тежинске функције $q(\mathbf{x})$, (Jovićić et al., 2011).



Слика 14 Дефинисање домена интеграције око врха прслине, (Jovičić et al., 2011)

Код изопараметарске формулације коначних елемената, применом стандардне интерполационе функције може бити одређена дистрибуција тежинске функције $q(\mathbf{x})$ унутар елемента:

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^P N_i Q_i \quad (2.17)$$

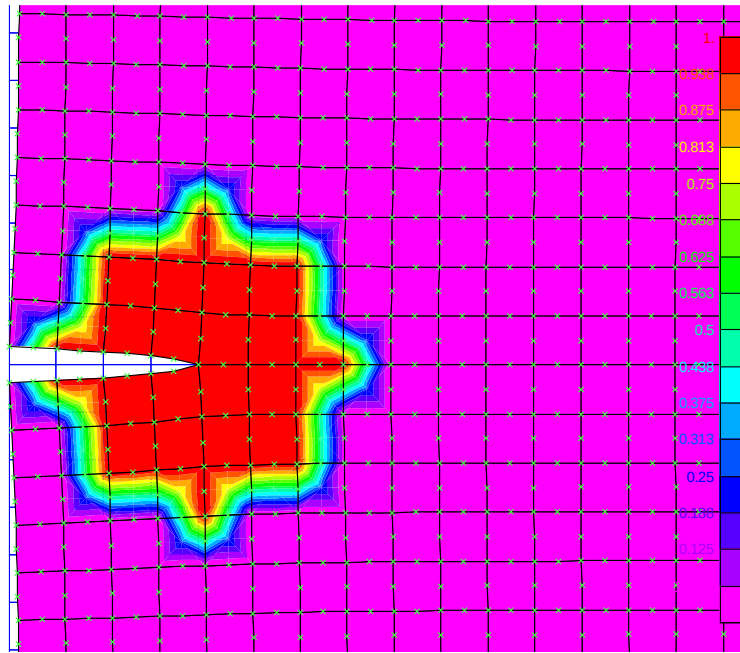
где је

N_i - Интерполациона функција i -тог чвора

Q_i - Вредност тежинске функције у i -том чвору елемента

P - Број чворова по елементу.

На слици 14 се види да је кружницом произвољног полупречника r_d дефинисан типичан скуп елемената у домену. На слици 15 приказана је расподела тежинске функције $q(\mathbf{x})$ у елементима око врха прслине код осмочворних 2D коначних елемената. Вредност функције $q(\mathbf{x})$ једнака јединици у свим чворовима унутар кружнице полупречника r_d , а нула изван и на контури кружнице полупречника r_d . Функција се интерполира унутар елемента коришћењем интерполационих функција, односно применом релације (2.17), (Jovičić et al., 2011).



Слика 15 Интерполација тежинске функције у домену интеграције код осмочворних 2D елемената, (Jovičić et al., 2011)

Парцијални изводи тежинске функције $q(\mathbf{x})$ могу бити нађени коришћењем стандардне процедуре за изопараметарске елементе. Нека је са $\mathbf{q}'(\mathbf{x})$ означен вектор који садржи изводе тежинске функције $q(\mathbf{x})$ по локалном Декартовом координатном систему која има облик:

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial x_2}, \frac{\partial q}{\partial x_3} \end{bmatrix}^T \quad \text{за 3D анализу} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T \quad \text{за 2D анализу.}$$

Уколико се примени релација (2.17), јасно је да је тежинска функција $q(\mathbf{x})$ функција природних координата елемента (ξ, η, ζ) , тако да извод тежинске функције $q(\mathbf{x})$ по локалној координати x_i везаној за прслину се своди на облик:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{P_3} \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right) Q_j, \quad i = \overline{1,3}, \\ \frac{\partial q}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{P_2} \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) Q_j, \quad i = \overline{1,2},\end{aligned}\tag{2.19}$$

где су са P_3 и P_2 означени бројеви чворова елемента у 3D и 2D анализи, респективно.

На основу релације (2.19) следи за 3D и 2D анализу респективно:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}' &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial q}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial q}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial q}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} & \frac{\partial q}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} & \frac{\partial q}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} & \frac{\partial q}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_3} & \frac{\partial q}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_3} & \frac{\partial q}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial q}{\partial \xi} \\ \frac{\partial q}{\partial \eta} \\ \frac{\partial q}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{q}' &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial q}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial q}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial q}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} & \frac{\partial q}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial q}{\partial \xi} \\ \frac{\partial q}{\partial \eta} \end{Bmatrix},\end{aligned}\tag{2.20}$$

где је са $\mathbf{J}^{-1}$ означена инверзна Јакобијан матрица која садржи следеће компоненте код 3D и 2D анализе:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^{-1} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_1} & \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_3} & \frac{\partial \eta}{\partial x_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{J}^{-1} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{Bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Дискретизовани облик J -EDI интеграла у 2D простору може се написати у облику (Kim et al., 2002, Jovićić, 2005):

$$J_k = \sum_{\substack{\text{елементи} \\ \text{у } A}} \sum_{p=1}^P \left[\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} - W \delta_{kj} \right) \frac{\partial q}{\partial X_j} \det \left(\frac{\partial X_m}{\partial \eta_n} \right) \right]_p w_p, \quad i, j, k, m, n = 1, 2, \quad (2.22)$$

Док се за 3D проблеме дискретизована форма једначине (2.9) може написати у облику (Lin, 2000; Jovičić, 2005; Jovičić et al., 2009):

$$J_k = \frac{1}{f} \sum_{\substack{\text{елементи} \\ \text{у } V}} \sum_{p=1}^{IP} \left[\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} - W \delta_{kj} \right) \frac{\partial q}{\partial X_j} \det \left(\frac{\partial X_m}{\partial \eta_n} \right) \right]_p w_p, \quad i, j, k, m, n = 1, 3, \quad (2.23)$$

где је са IP означен број интеграционих тачака по елементу а са w_p тежински фактор. Изрази унутар заграда $[\cdot]_p$ у релацијама (2.22) и (2.23) се дефинишу за Gauss-ове интеграционе тачке. Релације (2.22) и (2.23) су дате за структуре од хомогених материјала без постојања запреминских сила.

При прорачуну поља померања, деформација и напона методом коначних елемената резултати се добијају у глобалном координатном систему (X_i , $i=1,3$). Имајући у виду претходно, прво се добијају нумеричке вредности J -интеграла у глобалном координатном систему, тј., $(J_k)_{global}$, па се оне трансформишу у локалне компоненте $(J_k)_{local}$ које одговарају координатном систему x_i , $i=1,3$ везаном за врх прслине у 2D простору (слика 11), односно за међучвор на фронту прслине у 3D простору (слика 13).

Нека је угао између локалног и глобалног координатног система у 2D простору θ , тада се компоненте локалних координата (x_k , $k=1,2$) могу изразити преко компоненти глобалних координата (X_i , $i=1,2$) коришћењем следеће координатне трансформације:

$$x_i = \alpha_{ij}(\theta) X_j, \quad \alpha_{ij}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Иста трансформација се може применити и на компоненте J -интеграла (J_k , $k=1,2$) (Kim et al., 2002; Jovičić et al., 2004; Jovičić, 2005), тј.:

$$\begin{Bmatrix} (J_1)_{local} \\ (J_2)_{local} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} (J_1)_{global} \\ (J_2)_{global} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

За развој J -интеграла применом методе коначних елемената, неопходно је испунити услов да се чворови налазе на фронту прслине. Такође, потребно је дефинисати крути регион и функцију (вектора) премештања. Под крутим регионом се подразумева област у којој ће бити вршена EDI-интеграција. У оквиру софтверског пакета PAK-FM&F (Živković et al., 2010) развијена је процедура за аутоматско претраживање простора дискретизованог коначним елементима и дефинисање крутог региона као и за додељивање одговарајућих вредности тежинске функције чворовима који припадају том региону. За аутоматизацију процеса претраживања дискретизованог простора примењене су LS (Level Set) функције за идентификацију фронта прслине (Osher et al., 1998; Stolarska et al., 2001; Sukumar et al., 2001; Jovićić et al., 2003, 2009).

У 2D случају за крути регион изабрана је област која се налази унутар кружнице полупречника r_d (слика 15) са центром у врху прслине. С обзиром да је у оквиру PAK-FM&F-a (Živković et al., 2010) дозвољен прорачун J -интеграла за различите димензије крутог региона, неопходно је задати следеће податке: координате положаја прслине и полупречник крутог региона r_d као процентуалну зависност од дужине прслине (при чему се дужина прслине аутоматски прорачунава у програму на основу координата положаја). На овај начин омогућено је формирање више региона са растућим бројем елемената.

У 3D простору, у општем случају, фронт прслине се дефинише преко неке несортиране и за корисника непознате листе чворова која се дефинише применом LS функција положаја фронта прслине (Jovićić et al., 2003; Jovićić, 2005). У циљу добијања варијације J -интеграла дуж фронта прслине мора бити дефинисан цилиндар са осом која се поклапа са тангентом фронта прслине. Сви чворови унутар цилиндра припадају крутом региону и додељује им се вредност $q = 1$.

У 3D анализи препоручено је да се мрежа око фронта прслине формира екструдирањем планарне мреже дуж фронта прслине. Оваква процедура омогућава креирање крутог региона на правилан начин што даје и већу тачност решења, (Jovićić et al., 2011).

2.3.1 Први члан J_k

Користећи параметарско представљање померања:

$$u_i = N^J u_i^J \quad (2.26)$$

где је i правац померања координатног система фронта прслине, а J број чвора, могуће је имати израз за израчунавање првог члана J интеграла из једначине (2.10):

$$(J_k)_1 = \frac{1}{f} - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (w N_{,k}^L q^L - \sigma_{ij} N_{,k}^M N_{,j}^L u_i^M q^L) \det(j) d\xi d\eta d\zeta \quad (2.27)$$

где је $\det(j)$ детерминанта матрице Јакобијана, а горњи десни индекси L и M се односе на бројеве чворова.

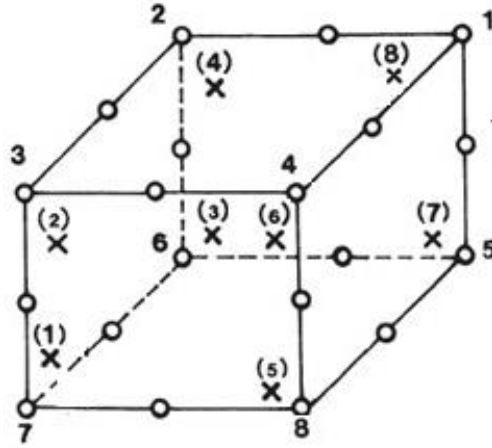
2.3.2 Други члан J_k

Главна потешкоћа у интегрисању релације (2.14) поризилази из чињенице да ми знамо довољно прецизне вредности специфичне енергије деформације и напона само у Гаусовим интеграционим тачкама, (Barlow, 1976). Могући начин интегрисања извода таквих функција је да се добије извод у тежишту елемента и да се изврши интеграција у тој тачки.

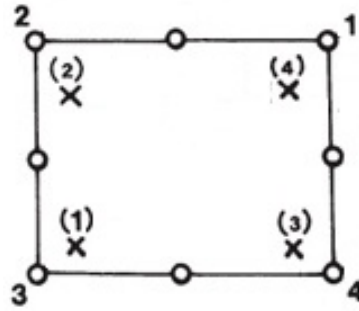
Посматрају се двадесеточворни и осмочворни елементи (слика 16 и 17) у локалном координатном систему ξ, η, ζ , односно ξ, η . Претпостављамо да знамо вредности функције F само у интеграционим тачкама као $F^{(J)}$. Користећи параметарско представљање, могуће је написати:

$$F^{(J)} = L^{I(J)} F^I \quad (2.28)$$

где су F^I непознате вредности функције у угаоним чворовима 1...8, односно 1...4, L^I су линеарне интерполационе функције за угаоне чворове, $L^{I(J)}$ су вредности интерполационих функција у интеграционим тачкама (J) .



Слика 16 Номенклатура за 20-чворни коначни елемент са 2x2x2 интеграционим тачкама



Слика 17 Номенклатура за 8-чворни коначни елемент са 2x2 интеграционим тачкама

У случају 3D коначног елемента интерполационе функције су, (Којић et al., 1998):

$$\begin{aligned}
 L^1 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\varsigma) & L^5 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\varsigma) \\
 L^2 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\varsigma) & L^6 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\varsigma) \\
 L^3 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\varsigma) & L^7 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\varsigma) \\
 L^4 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\varsigma) & L^8 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\varsigma)
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Интерполационе функције за 2D коначни елемент имају облик, (Којић et al., 1998):

$$\begin{aligned}
L^1 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
L^2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\
L^3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
L^4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Инверзијом израза (2.28) добија се

$$F^I = \left(L^{I(J)}\right)^{-1} F^{(J)} \tag{2.31}$$

Коефицијенти екстраполационе матрице $\left(L^{I(J)}\right)$ за 3D елементе (слика 16) су:

$$\left(L^{I(J)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} D & C & C & B & C & B & B & A \\ C & B & B & A & D & C & C & B \\ B & A & C & B & C & B & D & C \\ C & B & D & C & B & A & C & B \\ C & D & B & C & B & C & A & B \\ B & C & A & B & C & D & B & C \\ A & B & B & C & B & C & C & D \\ B & C & C & D & A & B & B & C \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

где су

$$A = \frac{5+3\sqrt{3}}{4}, \quad B = -\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \quad C = -\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \quad D = \frac{5-3\sqrt{3}}{4} \tag{2.33}$$

Коефицијенти екстраполационе матрице $\left(L^{I(J)}\right)$ за 2D елементе (слика 17) су:

$$\left(L^{I(J)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} A & C & C & B \\ C & B & A & C \\ B & C & C & A \\ C & A & B & C \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

где су

$$A = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \quad B = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}, \quad C = -\frac{1}{2} \quad (2.35)$$

Сада се из (2.31) може израчунати извод у тежишту елемента:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{\partial L^I}{\partial x_k} \left(L^{I(J)}\right)^{-1} F^{(J)} \quad (2.36)$$

где изводи $\partial L^I / \partial x_k$ треба да буду израчунати за $\xi = \eta = \varsigma = 0$.

3. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕР ЗА ВЕРИФИКАЦИЈУ

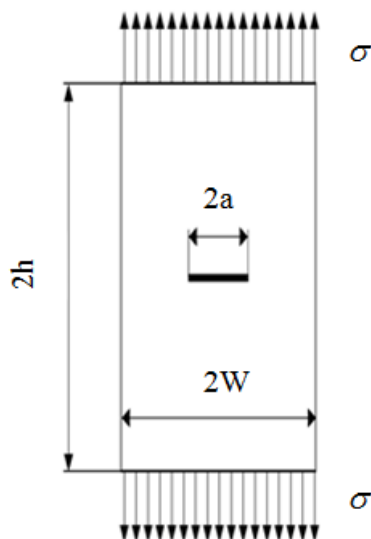
У оквиру овог поглавља извршени су нумерички експерименти чији је циљ био да се верификује представљена формулација решавањем тест примера. За тест пример је изабран 2D модел са јаким отвореним дисконтинуитетом, односно пример прслине. Овај пример је погодан зато што за њега у литератури већ постоје израчунате вредности J -интеграла за еласто-пластични модел, помоћу којих је могуће извршити верификацију нумеричких резултата.

3.1 Анализа нумеричких резултата на примеру централне прслине

У овом примеру анализирана је плоча коначне ширине са централном прслином и добијене су вредности J -интеграла, као једног од параметара лома, узимајући у обзир еласто-пластично понашање материјала. Проблем је анализиран за еласто-перфектно пластичан материјал и усвојено је равно стање деформације. На странама плоче које су паралелне са прслином делује затежуће континуално оптерећење σ . Подаци о геометрији, материјалу и оптерећењу су дати на слици 18.

Задате величине:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= E / 100 \\ a / W &= 0.4 \\ h / W &= 2.5 \\ L / a &= 0.25 \\ E &= 2. \times 10^5 \text{ MPa} \\ \nu &= 0.3\end{aligned}$$



Слика 18 Централна прслина у плочи коначне ширине и њене карактеристике

Величине са слике су:

W - Половина ширине плоче

h - Половина висине плоче

a - Половина дужине прслине

L - Дужина ивице елемента.

Користећи услове симетрије моделирана је десна горња четвртина плоче методом коначних елемената. Дискретизација модела је извршена осмочворним 2D елементима, док је прслина задата преко граничних услова.

За референтне вредности су узете оне које су добили (Araújo et al., 2000; Bittencourt and Sousa, 1995), као и оне добијене контурним интегралима (Owen and Fawkes, 1983). У радовима (Araújo et al., 2000; Bittencourt and Sousa, 1995) је анализиран овај проблем употребом T6 и Q8C елементе који окружују врх прслине. У тим радовима је J интеграл израчунат EDI методом коришћењем неколико интегралних домена, али је за поређење узет само домен интеграције розете. Добијени резултати, заједно са референтним вредностима, дати су у табели 3.

Табела 3 Поређење између израчунатих вредности J интеграла и референтних вредности

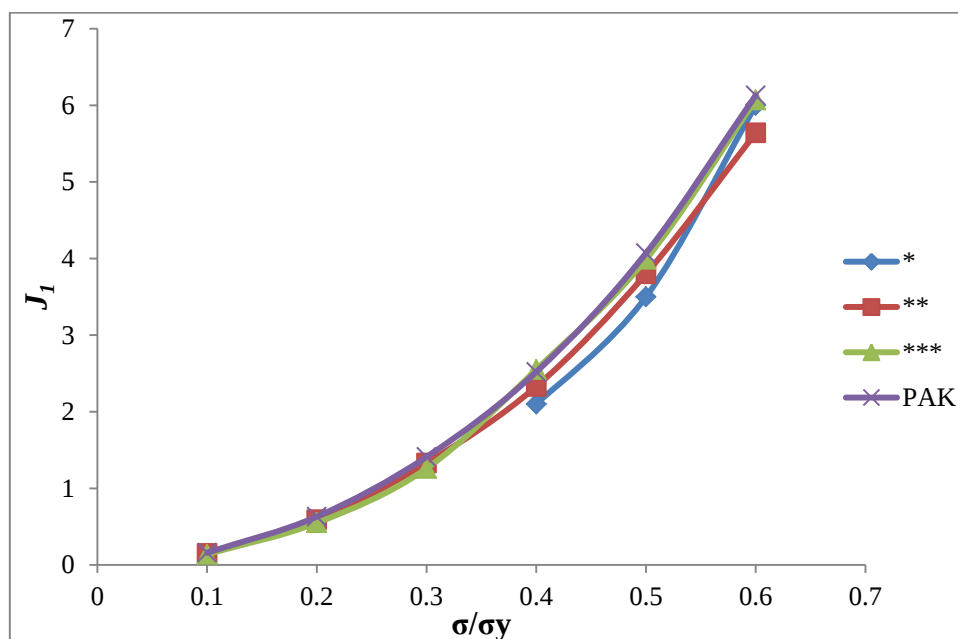
σ / σ_Y	J_1^*	J_1^{**}	J_1^{***}	J_1^{PAK}
0.1	-	0.15	0.14	0.16
0.2	-	0.59	0.55	0.63
0.3	-	1.33	1.26	1.41
0.4	2.1	2.33	2.55	2.52
0.5	3.5	3.8	3.99	4.07
0.6	6	5.64	6.07	6.13

* вредности за J_1 дате у раду Owen et al., (1983)

** вредности за J_1 дате у раду Bittencourt et al., (1995)

*** вредности за J_1 дате у раду Araújo et al., (2000)

На слици 19 су приказане упоредне вредности израчунатих вредности J интеграла и референтних вредности за Q8C елементе, као и вредности добијених рачунањем контурних интеграла.



Слика 19 Израчунате вредности J интеграла и референтне вредности за Q8C елементе и вредности добијених рачунањем контурних интеграла

За свако од примењених оптерећења су израчунате вредности фактора интензитета напона а добијени резултати су приказани у табели 4. Нумерички резултати за фактор интензитета напона су упоређени са теоријском вредношћу. Теоријска вредност се добија на основу релације:

$$K_I^{teor} = \sigma F\left(\frac{a}{W}, \frac{h}{W}\right) \sqrt{\pi a}$$

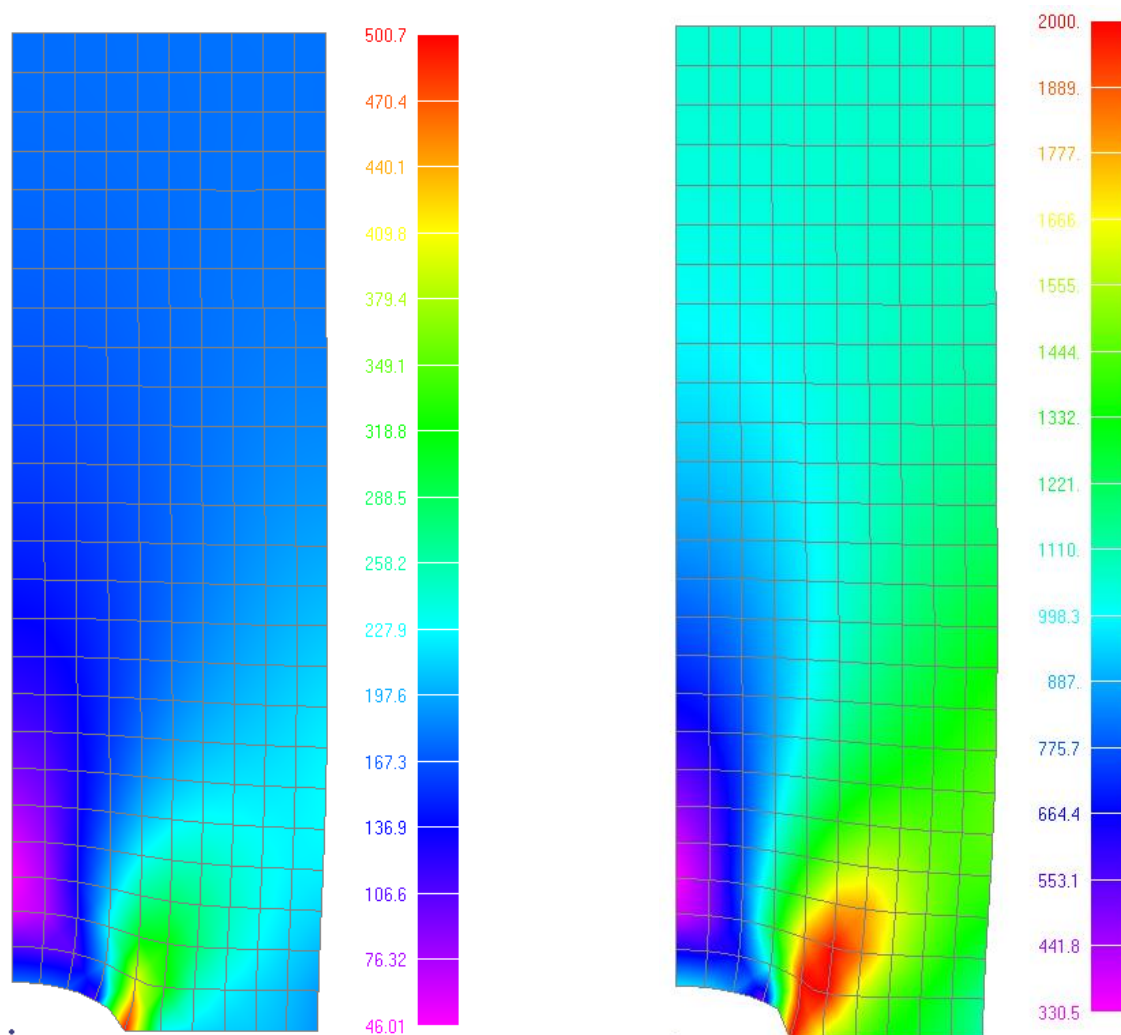
где се корекциони фактор $F\left(\frac{a}{W}, \frac{h}{W}\right)$ за дате геометријске податке $F(0.4, 2.5)$ одређује према дијаграму приказаном на слици 3.11 у књизи (Ћулафић, 1999) и износи $F(0.4, 2.5) = 1.1$.

На основу примењених оптерећења и изабране вредности корекционог фактора, израчуната је теоријска вредност фактора интензитета напона и те вредности су такође приказане у табели 4.

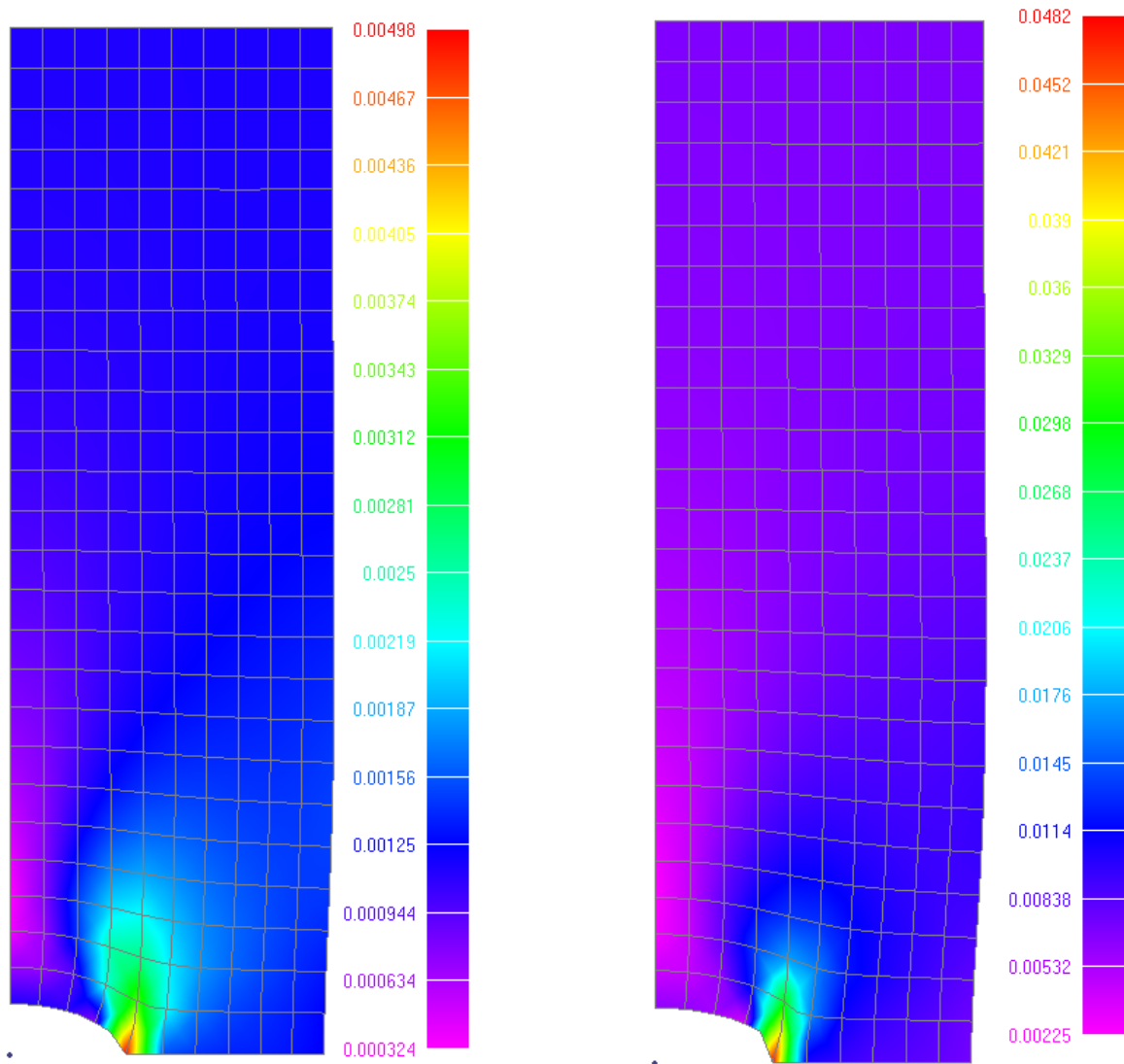
Табела 4 Фактор интензитета напона K_I за централну прслину

σ / σ_Y	K_I^{teor}	K_I^{num}	Грешка (%)
0.1	246.62	262.41	6.4
0.2	493.24	524.8	6.39
0.3	739.86	787.2	6.4
0.4	986.48	1050.8	6.5
0.5	1233.1	1331.87	8.01
0.6	1479.72	1629.8	10.14

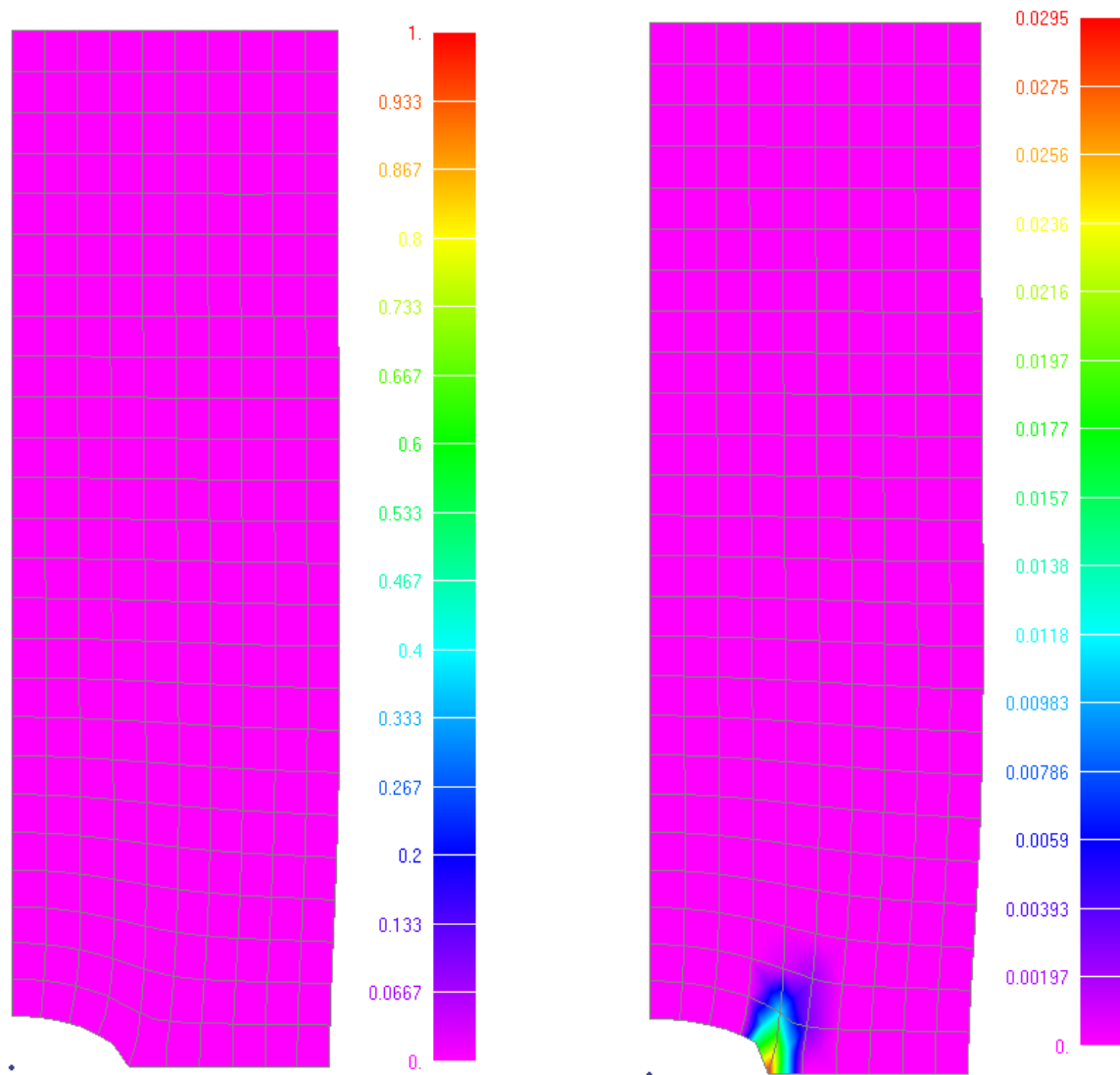
На сликама 20-23 приказани су резултати поља: ефективног напона, ефективне деформације, ефективне пластичне деформације и померања у Y правцу респективно, за минимално и максимално оптерећење.



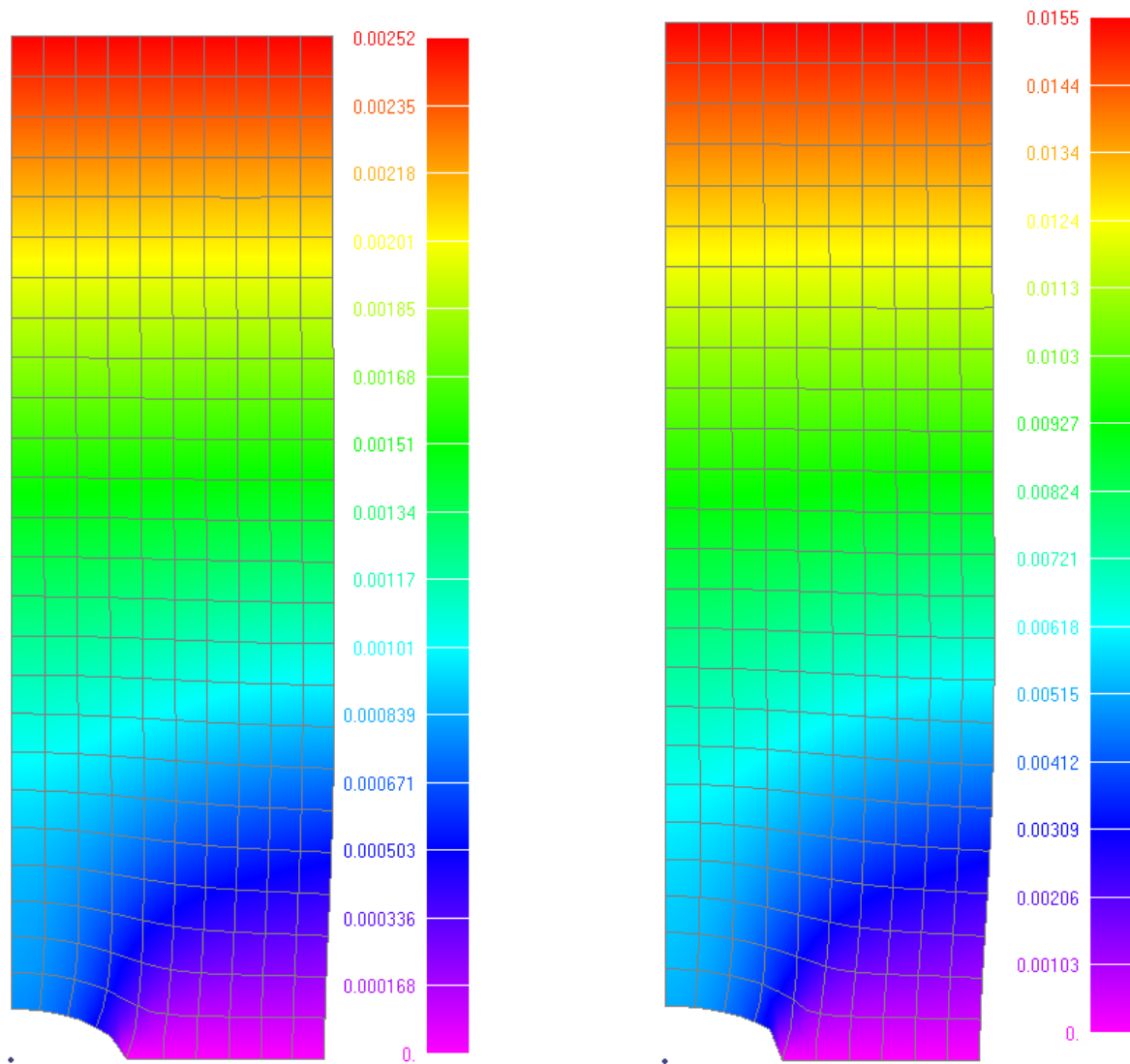
Слика 20 Поља ефективног напона за $\sigma / \sigma_Y = 0.1$ и $\sigma / \sigma_Y = 0.6$



Слика 21 Поља ефективне деформације за $\sigma / \sigma_Y = 0.1$ и $\sigma / \sigma_Y = 0.6$



Слика 22 Поља ефективне пластичне деформације за $\sigma / \sigma_Y = 0.1$ и $\sigma / \sigma_Y = 0.6$



Слика 23 Поља померања у Y правцу за $\sigma / \sigma_Y = 0.1$ и $\sigma / \sigma_Y = 0.6$

4. НУМЕРИЧКА ПРИМЕНА КРИТЕРИЈУМА ОТКАЗА

4.1 Структура Тибија-Т плоча

Процена поузданости структуре тибија-Т плоча је заснована на примени механизма отказа на нивоу механике континуума у нумеричке сврхе тј., у методи коначних елемената. Метода коначних елемената је нашла широку примену у предвиђању и превенцији појаве лома код коштаног ткива. Метода коначних елемената омогућава да се идентификују зоне могућег лома, тј., зоне у којима ће лом иницијално да се појави као и силе оптерећења која ће проузроковати њихову појаву. Тачност процене поузданости у великој мери зависи од материјалних својстава и начина формулисања механизма отказа. На нивоу механике континуума тј., на макро нивоу материјал кости се може третирати као хетерогена структура са строго анизотропним својствима. Упркос интензивним истраживањима, поузданост феноменолошког оквира при опису услова при којима долази до отказа у коштаног (кортикалној и спонгиозној) структури још увек се експериментално испитује.

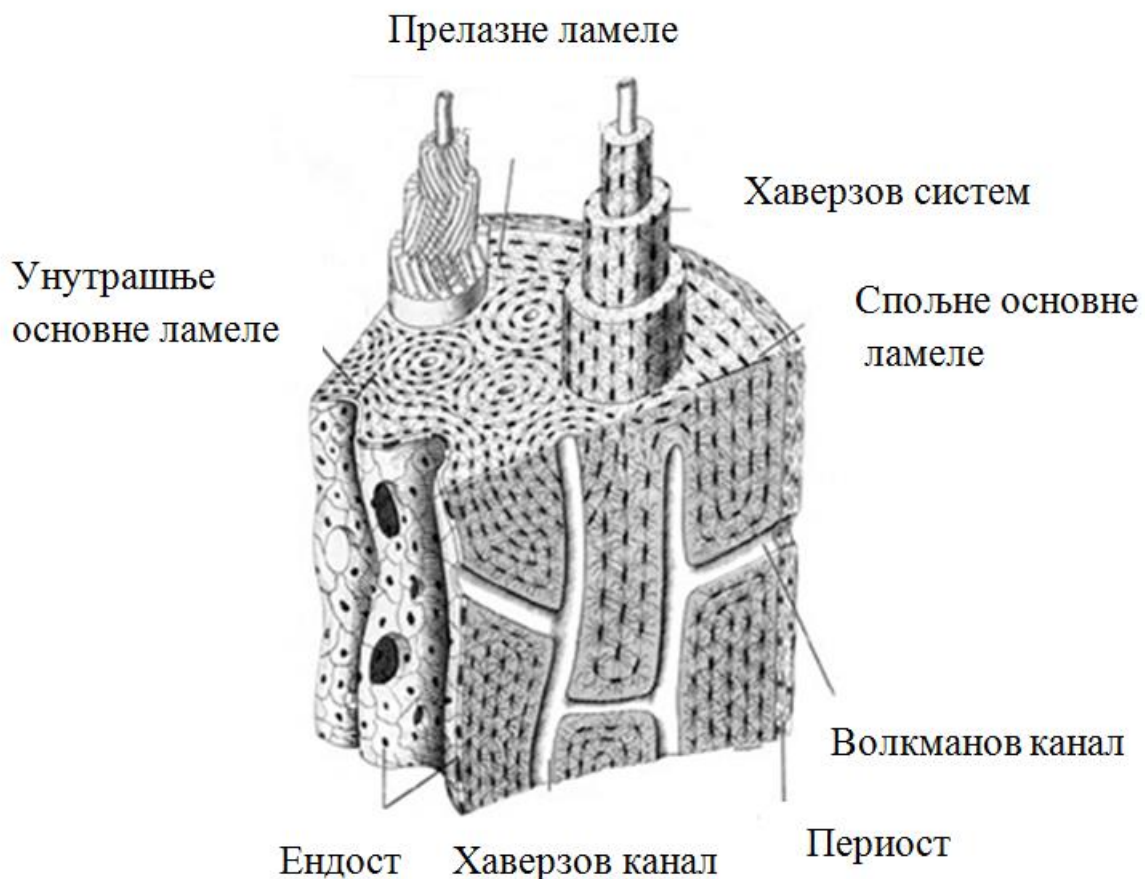
Појава отказа у коштаног структури квантификује се почетком настанка прслина. Као мера почетка настанка и акумулације прслина тј., појаве кртог лома сматра се губитак еластичних својстава тј., превазилажење напона на граници еластичности. Стога се у процени поузданости коштаног ткива на отказ оно разматра као крајње крт еластичан материјал, (Ritchie et al., 2006; Pietruszczak et al., 2006; Doblare et al., 2004). Док у случају примене малих цикличних оптерећења може се примењивати теорија замора као и механизми оштећења у зони еласто-пластичног понашања, (Yan et al., 2007). Дакле, крајње крто понашање коштаног ткива се јавља код примене фрактурних оптерећења, тада долази до брзог формирања и ширења прслине кроз кортикални регион, док је кроз спонгиозни регион брзина ширења прслине још већа, (Pietruszczak et al., 2006).

Оквир нумеричког истраживања је базиран на приступу дефинисања функције отказа у сваком коначном елементу, (Jovićić, 1996). С обзиром да је функција отказа бездимензионална величина која се пореди са 1 уједно се може сматрати индексом отказа.

Нумерички је процењена поузданост на отказ у критичним зонама тибије након уградње импланта у облику Т-плоче применом клинасте остеотомије. При нумеричкој анализи на структури тибија-Т плоча примењена је екстремна вредност аксијалног притиска од 2100N што одговара трострукој тежини човека од 70kg. Ово оптерећење настаје при пењању уз степенице (Stepanović, 2011).

4.2 Механичке карактеристике коштаног ткива

Под механичким својствима коштаног ткива најчешће се сматрају затезна, притисна чврстоћа као и модули еластичности у лонгитудиналном и трансверзалном правцу. Механичка својства коштаног ткива зависе од њеног састава и структуре. Коштано ткиво дугих кости се састоји из спонгиозне и кортикалне структуре. Око 80-90% кортикалне кости је минерализовано, док је свега 15-25% спонгиозне кости минерализовано. Као резултат тога долази се до чињенице да се највећи део метаболизма кости одвија кроз спонгиозни део, док кортикална кост има првенствено механичку и заштитну функцију. Однос запреминског удела спонгиозног и кортикалног дела у коштаној структури варира. Највећи запремински удео кортикална структура има код дугих кости (слика 24), тако нпр. код дисталног радијуса удео кортикалног дела је 80%. Спонгиозна кост је веома порозне структуре, док је кортикална кост анизотропна тј., ојачана влакнима. У овом раду коришћене су макромеханичке карактеристике спонгиозне и кортикалне кости. У структурној анализи која је извршена применом методе коначних елемената кост је третирана као ламинатна структура са 20% запреминског удела спонгиозног и 80% запреминског удела кортикалног дела, при чему су дефинисани еквивалентни макромеханички модули еластичности ламинатне структуре (Jovićić, 1996).



Слика 24 Макро ниво коштаног ткива дуге кости, ()

Више истраживача је покушавало да нађе везу између механичких својстава и састава кости на пример садржаја минерала, (Doblare et al., 2004). Један од најцитиранијих радова у којем је дата корелација између механичких карактеристика кости и њеног састава је рад Carter-а и Hayes-а, (Carter et al., 1977). Они су установили квадратну и кубну корелацију између затезне чврстоће, модула еластичности са густином трабекуларне и кортикалне кости респективно. У литератури (Ritchie et al., 2006) се може наћи корелација модула еластичности и густине у облику:

$$E = 33900\rho_{ash}^{2.20}, \rho_{ash} < 0.27 \text{ за трабекуларну кост} \quad (4.1)$$

$$E = 10500\rho_{ash}^{2.57 \pm 0.04}, \rho_{ash} > 0.6 \text{ за кортикалну кост}$$

Док израз за модул еластичности у прелазној зони $0.27 < \rho_{ash} < 0.6$ има облик:

$$E = 5307\rho_{ash} + 469 \quad (4.2)$$

Са ρ_{ash} је означена калибрисана густина calcium hydroxapatite (CHA) са СТ снимка, (Ziourpos et al., 1998):

$$\rho_{ash} = 0.0633 + 0.887 \rho_{CHA} \quad (4.3)$$

С обзиром да је кортикална кост анизотропне структуре њена чврстоћа у значајној мери зависи од оријентације остеона у односу на правац оптерећења. Затезна чврстоћа у лонгитудиналном правцу се креће у границама од 100-150МПа, (Pietruszczak et al., 2006; Taylor D, 2006). У литератури (Stepanović, 2011) могу се наћи подаци да се чврстоћа на притисак, затезање и торзиона чврстоћа коштаног ткива крећу у границама: $S_c = 133-295\text{МПа}$, $S_t = 92-188\text{МПа}$, $S_r = 53-76\text{МПа}$ респективно. Модули еластичности у лонгитудиналном трансверзалном правцу као и модул клизања за коштаног ткиво крећу се у границама: $E_3 = 14.7-34.3\text{ГПа}$, $E_1 = E_2 = 7.1-28.2\text{ГПа}$, $G = 3.1-3.7\text{ГПа}$ респективно, где је са 3 означен материјални правац који се поклапа са правцем влакана остеона.

С обзиром да је распон материјалних карактеристика за кортикалну кост који је доступан у литератури врло велики и разнолик, у оквиру рада усвојене су вредности дате у литератури (Kokubo et al., 2003; Kim et al., 2010, Kim et al., 2011). Због малих разлика у материјалним својствима у трансверзалном и радијалном правцу, (Kim et al., 2011) усвојено је да у равни нормалној на влакна остеона важе изотропна својства, односно да је кортикални део тибије трансверзално изотропан. Усвојена вредност модула еластичности у равни нормалној на влакна остеона је средња вредност модула за трансверзални и радијални правац дат у литератури (Kim et al., 2011). Анализа заснована на критеријумима отказа је спроведена са усвојеним минималним вредностима чврстоће датог опсега у литератури (Stepanović, 2011) за трансверзални и радијални правац. Усвојене су минималне вредности у циљу добијања најконзервативнијег резултата при процени интегритета применом критеријума отказа на кортикалну кост. Вредности за лонгитудинални правац израчунате су на основу усвојене вредности стопе механичке анизотропије (MAR), (Nafey et al., 2000) од $MAR=1.5$. У литератури (Kokubo et al., 2003) дат је распон за притисну чврстоћу спонгиозне кости 2-12 МПа, па смо за нумерички прорачун усвојили средњу вредност.

Табела 5 Усвојена материјална својства коштаног ткива Тибије

Материјалне карактеристике	Кортикална кост	Спонгиозна кост	Имплант
Јангов модул (GPa)	$E_1 = E_2 = 7.75$ (трансверзално/радијално) $E_3 = 18.4$ (подужно)	$E = 1.061$	$E = 191$
Поасонов коэффицијент	$\nu_{12} = \nu_{21} = 0.37$ $\nu_{13} = \nu_{32} = 0.13$	$\nu = 0.225$	$\nu = 0.3$
Напон разарања (MPa)	$S_{t1} = S_{t2} = 92$, $S_{c1} = S_{c2} = 133$ $S_{t3} = 138$, $S_{c3} = 199.5$ $S_{12} = 53$, $S_{23} = S_{13} = 79.5$	$S = 6$	$S = 170$

4.3 Дефинисање индекса отказа структуре коштаног ткива-имплант

Критеријум максималних напона почетно је коришћен за предвиђање лома код кртих материјала. Тако је Keyak, (Keyak J.H., 2001) је међу првима користио критеријум максималног напона за процену поузданости коштаног ткива. На основу овог критеријума усваја се да отказ наступа када највећа вредност главног напона превазиђе чврстоћу материјала при истезању или притиску. Овај критеријум не узима у обзир анизотропна материјална својства ткива кости, као ни феноменолошки утицај вишеосног напрезања на чврстоћу.

У групу феноменолошких критеријума отказа најчешће коришћених у инжењерској пракси за ортотропна материјална својства, (Jovićić, 1996) спада Tsai-Wu-ов полиномни критеријум отказа. Овај критеријум узима у обзир вишеосно напрезање материјала, такође узима у обзир различитост у затезној и притисној чврстоћи као и анизотропију у материјалним својствима. Применом Tsai-Wu-овог критеријума формира се површ отказа у облику елипсоида. Полиномна функција за Tsai-Wu-ов критеријум има облик:

$$\begin{aligned}
f_1(\sigma_i) = & \frac{\sigma_x^2}{S_{1T}S_{1C}} + \frac{\sigma_y^2}{S_{2T}S_{2C}} + \frac{\sigma_z^2}{S_{3T}S_{3C}} + \left(\frac{\tau_{xy}}{S_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xz}}{S_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{yz}}{S_{23}}\right)^2 + \\
& + \left(\frac{1}{S_{1T}} - \frac{1}{S_{1C}}\right)\sigma_x + \left(\frac{1}{S_{2T}} - \frac{1}{S_{2C}}\right)\sigma_y + \left(\frac{1}{S_{3T}} - \frac{1}{S_{3C}}\right)\sigma_z - \\
& - \frac{\sigma_x\sigma_y}{(S_{1T}S_{1C}S_{2T}S_{2C})^{1/2}} - \frac{\sigma_y\sigma_z}{(S_{2T}S_{2C}S_{3T}S_{3C})^{1/2}} - \frac{\sigma_z\sigma_x}{(S_{3T}S_{3C}S_{1T}S_{1C})^{1/2}}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

где су

S_{1T} , S_{2T} , S_{3T} - лонгитудинални затежући напони који одговарају граничном напону дуж праваца X, Y, Z респективно

S_{1C} , S_{2C} , S_{3C} - лонгитудинални притисни напони који одговарају граничном притисном напону дуж праваца X, Y, Z респективно

S_{12} - гранични напон смицаа у XY равни који одговара граничном напону смицања у XY равни

S_{23} - гранични напон смицања у YZ равни који одговара граничном напону смицања у YZ равни

S_{13} - гранични напон смицања у XZ равни који одговара граничном напону смицања у XZ равни.

Tsai-Hill-ов критеријум спада у групу критеријума отказа за анализу ортотропних материјала. Полиномна функција за овај критеријум има облик:

$$f_2(\sigma_i) = \left(\frac{\sigma_x}{S_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{S_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{S_3}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{S_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xz}}{S_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{yz}}{S_{23}}\right)^2 - \frac{\sigma_x\sigma_y}{S_1^2} - \frac{\sigma_y\sigma_z}{S_2^2} - \frac{\sigma_z\sigma_x}{S_3^2} \tag{4.5}$$

где је

$$S_1 = S_{1C} \text{ ако је } \sigma_x \leq 0$$

$$S_1 = S_{1T} \text{ ако је } \sigma_x > 0$$
(4.6)

За чланове S_2 и S_3 важи аналогија са релацијом (4.6). За члан $\sigma_x \sigma_y / S_1^2$ важи следећа зависност: ако је $\sigma_x \sigma_y \geq 0$, онда $S_1 = S_{1T}$, у супротном $S_1 = S_{1C}$.

Вредности полиномних функција (4.4) и (4.5) су бездимензионалне и дају квантитативну меру отказа у материјалу, тако да се могу сматрати индексом отказа FI . Услов да не дође до отказа применом Tsai-Wu-овог или Tsai-Hill-овог критеријума је:

$$FI_{TW} < 1, \text{ односно } FI_{TH} < 1.$$
(4.7)

Имплант у облику Т-плоче је направљен од изотропног материјала па је индекс отказа при монотонном оптерећењу дефинисан као количник ефективног напона и границе линеарне еластичности:

$$FI = \frac{\sigma_{eff}}{\sigma_y} \leq 1$$
(4.8)

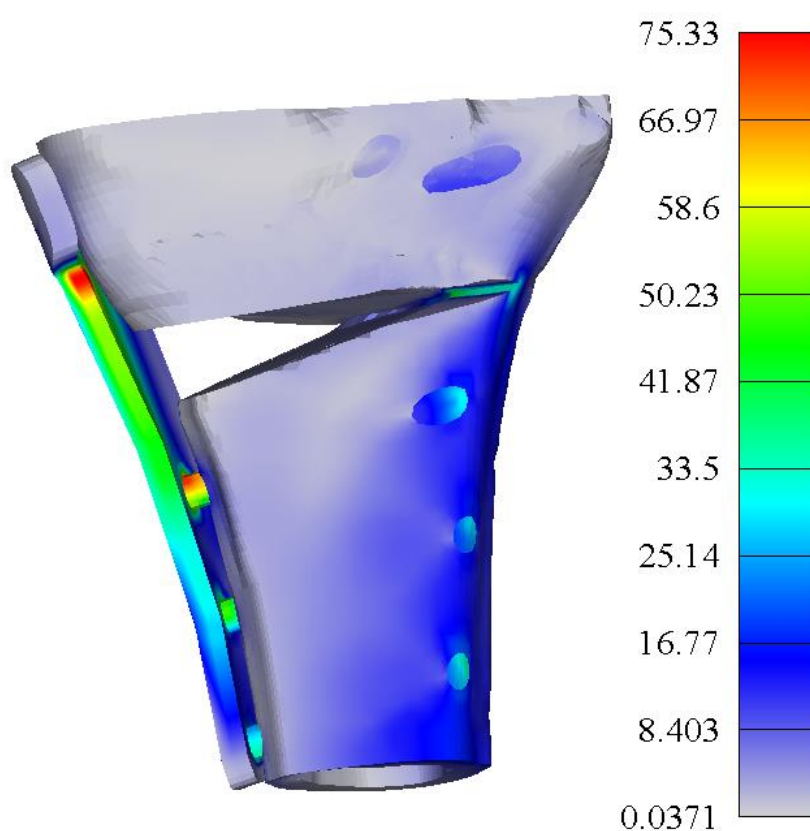
Процена сигурности на отказ тибије услед примењеног монотонног оптерећења се врши на основу вредности полиномне функције $f(\sigma_i)$ (релације 4.4 и 4.5), односно индекса отказа FI . Уколико је у целокупном прорачунском домену полиномна функција $FI < 1$ неће доћи до отказа. Иницијализација прслине која се типично тумачи као формирање макропрслине одговара вредности $FI = 1$.

4.4 Анализа нумеричких резултата

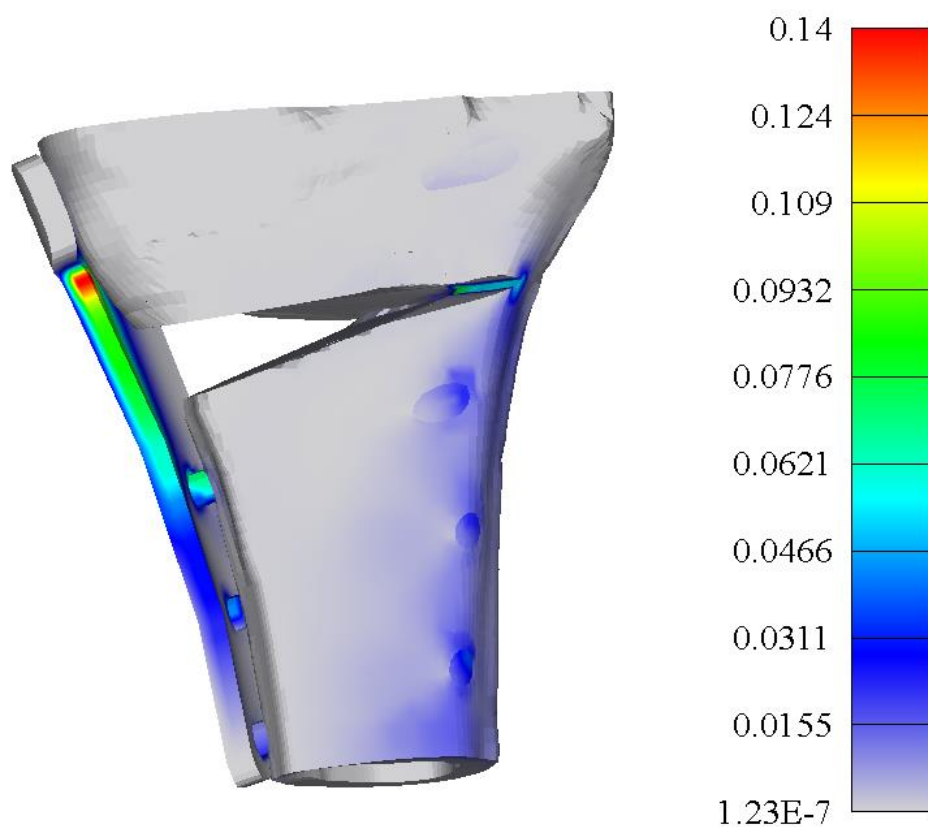
Реална геометрија тибије и импланта је добијена помоћу ATOS 3D скенера. Тибија је моделирана хексаедарним 3D елементима. На местима где је било неопходно због комплексности геометрије коришћени су тетраедарски 3D елементи. Плоча и завртњеви су моделирани као хексаедарни елементи. Дистални крај тибије је фиксиран да би се спечила померања композита у току анализе. Интерфејс између плоче и слободних завртњева је моделирана помоћу контактних елемената са трењем. Коефицијент трења је 0.4. Анализа прерасподеле напона је извршена помоћу PAK софтвера, (Živković et al., 2005).

При нумеричкој анализи на структури тибија-Т плоча примењена је екстремна вредност аксијалног притиска од 2100N што одговара трострукој тежини човека од 70kg. Ово оптерећење настаје при пењању уз степенице, (Stepanović, 2011).

Поље еквивалентног напона је приказано на слици 25, (Stepanović, 2011). Анализа отказа је извршена у сваком коначном елементу прорачунског домена, (Živković et al., 2013). Под отказом се сматра губитак еластичних особина коштаног ткива, тј., иницијација лома која се јавља у виду формирања прелазне величине прслине. Поље вредности Tsai-Wu и Tsai-Hill индекса отказа је приказано на сликама 26 и 29.

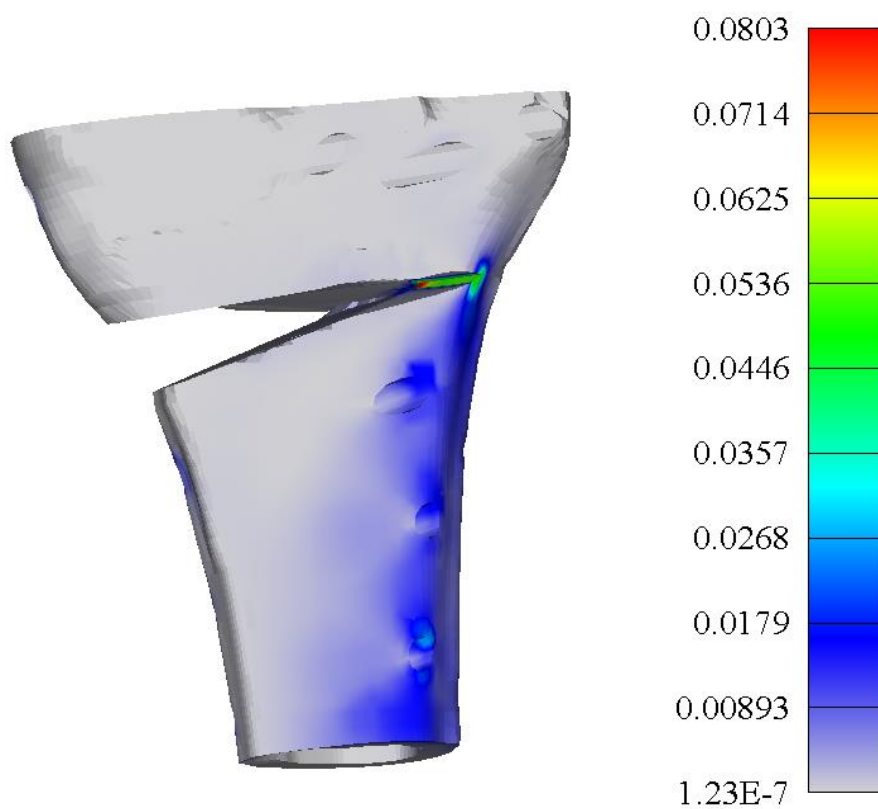


Слика 25 Поље еквивалентног напона, (Stepanović, 2011)

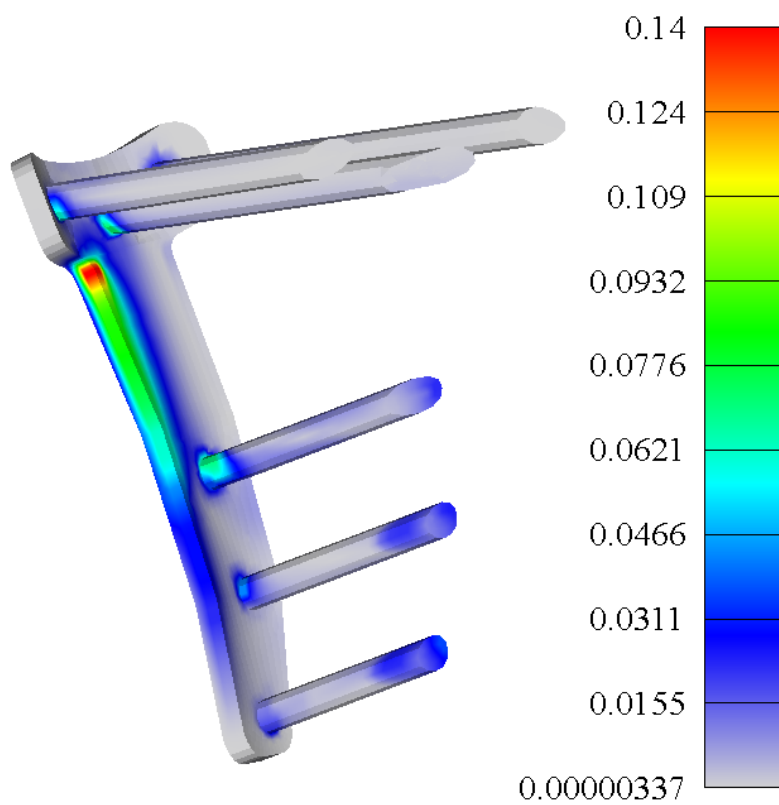


Слика 26 Поље вредности Tsai-Wu индекса отказа

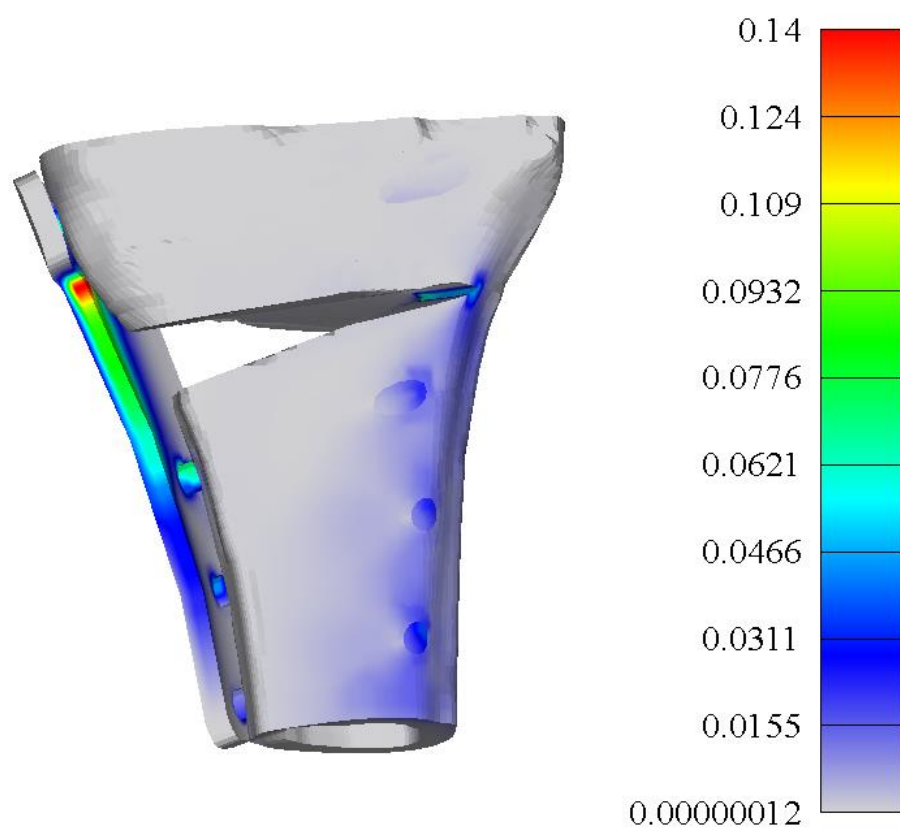
Може се видети да максимална вредност не прелази 1, тако да се отказ неће појавити за примењено оптерећење. Максималне вредности индекса отказа су у зонама око рупа у тибији и око врха прелине (слике 27 и 30), као и у зонама око радијуса плоче и у контакту између завртњева и плоче (слике 28 и 31).



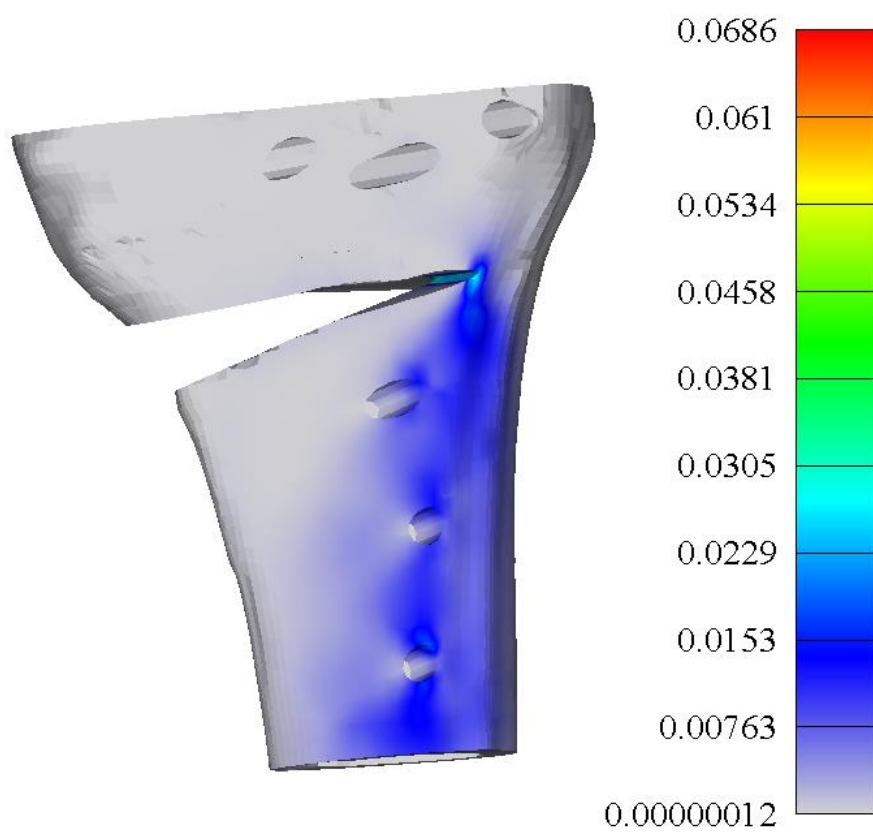
Слика 27 Tsai-Wu индекси отказа за тибију



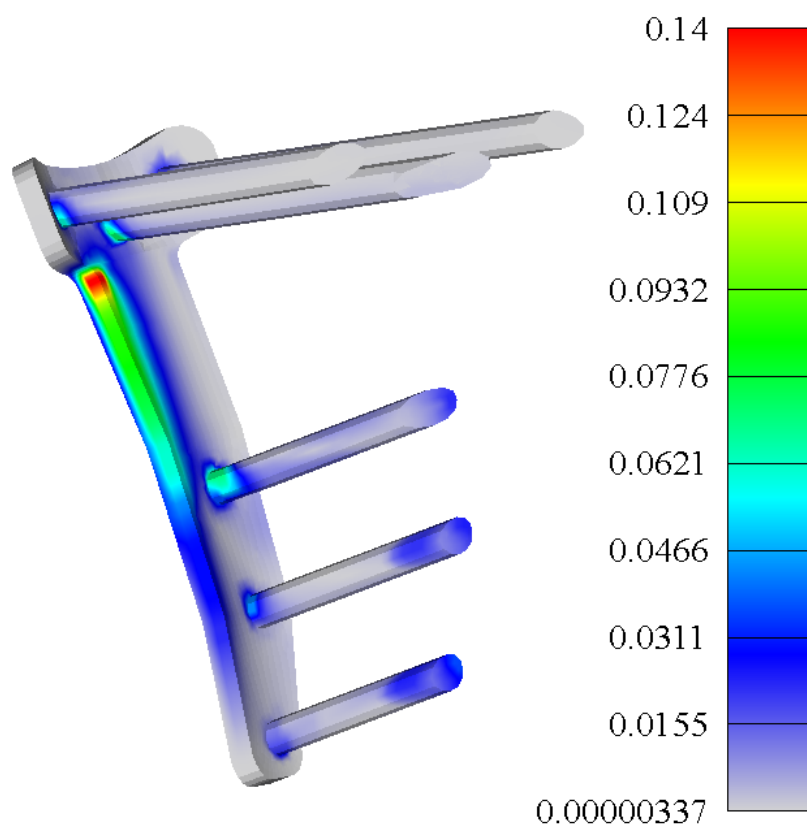
Слика 28 Tsai-Wu индекси отказа за плочу



Слика 29 Поље вредности Tsai-Hill индекса отказа



Слика 30 Tsai-Hill индекси отказа за тибију



Слика 31 Tsai-Hill индекси отказа за плочу

Поље вредности индекса отказа даје увид у критичне зоне могућег лома за случај даљег повећања оптерећења.

Ова анализа је корисна јер помаже у детектовању критичних зона у структури коришћењем Tsai-Wu и Tsai-Hill критеријума отказа. Она може бити погодна за одабир најбољег типа фиксације, и такође веома корисна у клиничкој пракси за нумеричке симулације медицинских интервенција.

5. ЗАКЉУЧАК

Прорачунска механика лома има важну примену како у пројектовању нових конструкција, провери поузданости постојећих конструкција тако и у провери конструкција са уоченом иницијалном прслином. Прорачунска механика лома је заснована на примени нумеричких метода пре свега методе коначних елемената. Метода коначних елемената је нашла широку примену у предвиђању и превенцији појаве лома код сложених структура. Метода коначних елемената омогућава да се идентификују зоне могућег лома, тј., зоне у којима ће лом иницијално да се појави као и силе оптерећења која ће проузроковати њихову појаву.

За процену поузданости структура у инжењерској пракси, користе се критеријуми чврстоће, отказа и лома. Критеријуми чврстоће, попут критеријума максималних напона, углавном се користе у фази пројектовања и димензионисања нових конструкција. У процесу структурне анализе постојеће конструкције критеријуми отказа (*failure criterion*) се користе за дефинисање критичних зона, у којима може доћи до иницијализације прслина. Даља нумеричка анализа се може вршити убацивањем иницијалних прслина у критичне зоне структуре, које су идентификоване применом критеријума отказа, и даљом применом критеријума лома у процени преосталог века трајања.

Механизам настанка жилавог лома обухвата појаву шупљина, њихов раст и спајање уз појаву пластичне деформације на месту оштећења. Као фундаментални параметар еласто-пластичне механике лома разматран је J -интеграл. У раду је приказан нумерички развој J -интеграла, који је заснован на приступу Еквивалентног домена интеграције. Тако развијен J -интеграл имплементиран је у софтверски пакет РАК. Нумерички имплементиран J -интеграл је верификован на примеру плоче са централном прслином са задатим еласто-пластичним материјалним моделом. Добијени нумерички резултати су показали добро слагање са резултатима за J -интеграл који су доступни у литератури.

Спрега у примени критеријума лома и критеријума отказа је неопходна у свеобухватној структурној анализи конструкција са и без прслина. Дакле, уколико је структура са уоченим оштећењем у облику прслине, довољно је примењивати

критеријуме механике лома. У супротном случају, неопходно је у процесу структурне анализе прво користити критеријуме отказа.

Појава отказа у сложеној структури квантификује се почетком настанка прслина. Као мера почетка настанка и акумулације прслина тј., појаве кртог лома сматра се губитак еластичних својстава. Дакле, уколико су структуре сложене геометрије и анизотропних материјалних својстава попут структуре (кост-имплант) која је у овом раду анализирана, неопходно је применити одговарајуће критеријуме отказа. Оквир нумеричког истраживања, применом критеријума отказа, у овом раду је базиран на приступу дефинисања функције отказа у сваком коначном елементу. С обзиром да је функција отказа бездимензионална величина која се пореди са 1 уједно је третирана индексом отказа.

Дакле, тачност у нумеричкој процени поузданости сложене структуре, као што је случај тибија-имплант, у великој мери зависи од изабраних материјалних својстава и начина формулисања механизма отказа.

У овом раду комплетна нумеричка анализа, било да је заснована на методологији механике лома или феноменолошкој формулацији отказа дата је за случај статичких оптерећења. Даљи рад би пре свега био усмерен на развоју нумеричког модела акумулације оштећења при цикличном оптерећењу структуре и предвиђању појаве и развоја иницијалних прслина.

ЛИТЕРАТУРА

- Anderson T. L., (1994), *Fracture Mechanics – Fundamentals and Applications*, CRC Press
- Aoki S., Kishimoto K., Sakata M., (1984), Energy Flux Into Process Region in Elastic-plastic Fracture Problems, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 19, pp. 827-836
- Araujo T. D., Bittencourt T. N., Roehl D., Martha L. F., (2000), Numerical Estimation of Fracture Parameters in Elastic and Elastic-plastic Analysis, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000*, Barcelona, 11-14 September 2000
- Barlow J., (1976), Optimal Stress Locations in Finite Element Models, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, pp. 243-251
- Bittencourt T. N., Sousa J. L. A. O., (1995), A Numerical Implementation of J-integral for Elasto-plastic Fracture Mechanics, *XVI CILAMCE*, Vol. 1, pp. 263-272
- Carter D. R., Hayes W. C., (1977), The Compressive Behavior of Bone as a Two Phase Porous Structure, *Journal of Bone and Joint Surgery*, Vol. 59A, pp. 954-967
- Cherepanov G. P., (1979), The Propagation of Cracks in a Continuous Medium, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, No. 3, pp. 503-512
- Ćulafić V., (1999), *Uvod u mehaniku loma*, Stalni univerzitetski udžbenik, Mašinski fakultet Podgorica, ISBN 86-81039-36-9
- Delorenzi H. G., (1985) Energy Release Rate Calculations by the Finite Element Methods, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 21, pp. 129-143
- Doblare M., Barcia J. M., Gomez M. J., (2004), Modelling Bone Tissue Fracture and Healing: a Review, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 71, pp. 1809-1840
- Dolbow J. E., (1999), *An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics*, PhD Thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois
- Enderlein M., Kuna M., (2003), Comparison of Finite Element Techniques for 2D and 3D Crack Analysis Under Impact Loading, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40

- Gosz M., Moran B., (2001), An Interaction Energy Integral Method for Computation of Mixed-mode Stress Intensity Factors Along Non-planar Crack Fronts in Three Dimensions, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, pp. 299-319
- Griffith A., (1921), The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, London, A221, pp. 163-197
- Hellen T., Blackburn W., (1975), The Calculation of Stress Intensity Factor for Combined Tensile and Shear Loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 11, pp. 605-617
- Hussain M., Pu S., Underwood J., (1974), Strain Energy Release Rate for a Crack Under Combined Mode I and Mode II, *ASTM*, STP 560, pp. 2-28
- Hutchinson J. W., (1967), Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 16, pp. 13-31
- Irwin G. R., Kies J. A., (1952), Fracturing and Fracture Dynamics, *Welding Journal Research Supplement*, Vol. 31, No. 2, pp. 95-100
- Irwin G. R., Kies J. A., (1954), Critical Energy Release Rate Analysis of Fracture Strength, *Welding Journal Research Supplement*, Vol. 33, No. 4, pp. 193-198
- Jovičić G., (1996), Analiza kompozitnih laminata na osnovu kriterijuma otkaza, *Magistarska teza*, 1996, Mašinski fakultet Kragujevac, Univerzitet u Kragujevcu
- Jovicic G., Zivkovic M., Kojic M., Vulovic S., (2003), A Numerical Procedure for Calculation of the Stress Intesity Factors and Its Use for Life Assessment of the Steam Turbine Housing of the Thermal Power Plant, *Eight International Fracture Mechanics Summer School held in Belgrade- IFMASS 8*, 23-27 Jun
- Jovičić G., (2005), Rešavanje problema mehanike loma i zamora materijala proširenom metodom konačnih elemenata, *Doktorska disertacija*, Mašinski fakultet Kragujevac
- Jovičić G., Živković M., Jovičić N., (2007), Numerical Evaluation of the J-Equivalent Domain Integral, *Journal of Mechanical Engineering Design*, Vol. 10, No. 1, pp. 349-354
- Jovičić G., Živković M., Djordjević N., Jovičić N., Maksimović K., (2009), Numerical Methods for Determination of the Crack Extension, *2nd International Congress of Serbian Society of Mechanics-IConSSM*, Palić, Serbia
- Jovičić G., Živković M., Vulović S., (2011), *Proračunska mehanika loma i zamora*, Monografija, Mašinski fakultet Kragujevac, ISBN 987-86-86663-65-8

Kanninen M., (1984), Application of Fracture Mechanics to Fiber Composite Materials and Adhesive Joint, Third International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics, Swansea

Keyak J. H., (2001), Improved Prediction of Proximal Femoral Fracture Load Using Nonlinear Finite Element Models, Medical Engineering and Physics, Vol. 23, pp. 165-173

Kim J. –H., Paulino G. H., (2002), T-stress, Mixed-mode Stress Intensity Factors, and Crack Initiation Angles in Functionally Graded Materials; a Unified Approach Using the Interaction Integral Method, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 192, pp. 1463-1494

Kim J. –H., Paulino G. H., (2002), Mixed-mode J-integral Formulation and Implementation Using Graded Elements for Fracture Analysis of Nonhomogeneous Orthotropic Materials, Mechanics of Materials, Vol. 35, pp. 107-128

Kim S. H., Chang S. H., Jung H. J., (2010), The Finite Element Analysis of a Fractured Tibia Applied by Composite Bone Plates Considering Contact Conditions and Time-varying Properties of Curing Tissues, Composite Structures, Vol. 92, pp. 2109-2118

Kim H. J., Kim S. H., Chang S. H., (2011), Finite Element Analysis Using Interfragmentary Strain Theory for Fracture Healing Process to Which Composite Bone Plate are Applied, Composite Structures, Vol. 93, pp. 2953-2962

Kishimoto K., Aoki S., Sakata M., (1980), On the Path-independent Integral, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 13, pp. 841-850

Knowles J., Sternberg E., (1972), On a Class of Conservation Laws in Linearised and Finite Elastostatics, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 44, pp. 187-211

Kojić M., Slavković R., Živković M., Grujović N., (1998), Metod konačnih elemenata I, Linearna analiza, Monografija, Mašinski fakultet Kragujevac, ISBN 86-80581-27-5

Kokubo T., Kim H. M., Kawashita M., (2003), Novel Bioactive Materials with Different Mechanical Properties, Biomaterials, Vol. 24, pp. 2161–2175;

Li F. Z., Shih C. F., Needleman A., (1985), A Comparison of Methods for Calculating Energy Release Rates, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 21, pp. 405-421

Lin C. Y., (2000), Determination of the Fracture Parameters in a Stiffened Composite Panel, PhD Thesis, North Carolina State University

Murakami T., Sato T., (1983), Three-dimensional J-integral Calculations of Part-through Surface Crack Problems, *Computers and Structures*, Vol. 17, pp. 731-736

Nafey A., Danielsen C. C., Linde F., Hvid I., (2000), Properties of Growing Trabecular Ovine Bone, Part I: Mechanical and Physical Properties, *The Journal of Bone and Joint Surgery*, Vol. 82, pp. 910-920

Nikishkov G. P., Vainshtok V. A., (1980), Method of Virtual Crack Growth for Determining Stress Intensity Factors K_I and K_{II} , *Strength of Materials*, Vol. 12, pp. 696-701

Nikishkov G. P., Atluri S. N., (1987), Calculation of Fracture Mechanics Parameters for an Arbitrary Three-dimensional Crack, by the Equivalent Domain Integral Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 1801-1821

Nishioka T., Atluri S. N., (1984), On the Computation of Mixed-mode K-factors for a Dynamically Propagating Crack Using Path-independent Integrals J_k , *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 20, pp. 193-208

Osher S., Sethian J.A., (1988), Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations, *Journal of Computational*, Vol. 79, pp. 12-49

Owen D. R. J., Fawkes A. J., (1983), *Fracture Mechanics*, Pineridge Press Ltd., Swansea, U.K.

Pietruszczak S., Gdela K., Webber C. E., Inglis D., (2007), On the Assessment of Brittle-elastic Cortical Bone Fracture in the Distal Radius, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 74, pp. 1917-1927

Rice J. R., Rosengren G. F., (1968), Plain Strain Deformation near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 16., p. 1

Rice J. R., (1968), A Path Independent Integral and Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, pp. 379-386

Ritchie R. O. , Kinney J. H., Kruzic J. J., Nalla R. K., (2006) *Cortical Bone Fracture*, Wiley Encyclopedia of Biomedical Engineering, Copyright, John Wiley & Sons, Inc

Saouma V. E., (2000), Lecture Notes in: *Fracture Mechanics*, CVEN-6831, Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado

Sedmak A., (2003), *Primena mehanike loma na integritet konstrukcija*, Mašinski fakultet Beograd, ISBN 86-7083-473-1

Sha G. T., Yang C. T., (1985), *Weight Function Calculations for Mixed-mode Fracture Problems With the Virtual Crack Extension Technique*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 21, pp. 1119-11150

Stepanovic Z., (2011), *Biplanar Open Wedge Osteotomy of Proximal Tibia: Biomechanical Study of Primary Stability of Two Types of Fixation*, PhD Thesis, Faculty of Medical Sciences, University of Kragujevac, Serbia

Stolarska M., Chopp D.L., Moës N., Belytschko T., (2001) *Modelling Crack Growth by Level Sets in the Extended Finite Element Method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 51, No. 8, pp. 943-960

Sukumar N., Chopp D.L., Moës N., Belytschko T., (2001), *Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite Element Method*, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, pp. 6183-6200

Taylor D., (2006), *The Fracture Mechanics of Bone*, Anales de Mecanica de la Fractura, Vol. 1, pp. 7-11

Yan J., Mecholsky J. J., Clifton K. B., (2007), *How Tough is Bone? Application of Elastic-plastic Fracture Mechanics to Bone*, Bone 40, pp. 479-484

Zioupou P., Currey J. D., (1998), *Changes in the Stiffness, Strength and Toughness of Human Cortical Bone With Age*, Bone, Vol. 22, pp. 57-66

Živković J., Jovičić G., Vulović S., Stepanović Ž., Živković M., (2013), *The Numerical Assessment of the Structural Integrity of the Tibia-implant Using Failure Criteria*, 4th Serbian Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Vrnjačka Banja, Serbia, 4-7 June

Živković M., Jovičić G., Kojić M., Slavković R., Grujović N., Vulović S., (2010), *Softver za računsku mehaniku loma PAK-FM&F*, Tehničko rešenje, TR – 22/2010, Mašinski fakultet Kragujevac