

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Аутомобилско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: /

Предмет: Основе динамике моторних возила

Број индекса: 823/2013

Марко Г. Радовић

Геометрија заокретања аутомобила – модел са једним трагом завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Данијела Милорадовић, ванр. проф. - ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да:

- истакне основне геометријске захтеве при заокретању аутомобила:
 - са две осовине,
 - са више осовина,
 - возила са приколицом,
 - возила са две осовине и свим управљивим точковима,
- укратко прикаже расположиве моделе за проучавање геометрије заокретања аутомобила,
- детаљно прикаже и објасни моделе са једним трагом који се користе за проучавање геометрије заокретања аутомобила.

Препоручена литература:

- [1] Јанковић, А. *Динамика аутомобила*. Крагујевац: Машински факултет у Крагујевцу, 2008.
- [2] Симић, Д. *Моторна возила*. Београд: Научна књига, 1988.
- [3] Демић, М., Лукић, Ј. *Теорија кретања моторних возила*. Крагујевац: Машински факултет у Крагујевцу, 2011.
- [4] Wong, J. Y. *Theory of ground vehicles*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001
- [5] Jazar, R. N. *Vehicle Dynamics*. Cham: Springer International Publishing, 2017

Крагујевац, март 2018. год.

Ментор:

др Данијела Милорадовић, ванр. проф.

РЕЗИМЕ

У оквиру завршног рада приказани су основни геометријски захтеви при заокретању аутомобила са две осовине, са више осовина, возила са приколицом, возила са две осовине и свим управљивим точковима. Такође су приказани и расположиви модели за проучавање геометрије заокретања аутомобила, детаљно су приказани и објашњени модели са једним трагом који се користе за проучавање геометрије заокретања аутомобила.

Кључне речи: *управљање, заокретање, геометрија заокретања возила*

ABSTRACT

This final paper presents the geometrical demands for turning the vehicles: with two axes, with multiple axes, with trailers and with all wheel steering. Available models for research of the vehicle steering geometry were also presented with detailed review and explanation of the one-track vehicle models used for research of vehicle steering geometry.

Keywords: steering, turning, vehicle steering geometry

САДРЖАЈ

1. УВОД	1
2. ОСНОВНИ ГЕОМЕТРИЈСКИ ЗАХТЕВИ ПРИ ЗАОКРЕТАЊУ АУТОМОБИЛА.....	7
2.1 ЗАОКРЕТАЊЕ АУТОМОБИЛА СА ДВЕ И ТРИ ОСОВИНЕ	7
2.2 ЗАОКРЕТАЊЕ АУТОМОБИЛА СА ВИШЕ ОСОВИНА	9
2.3 ЗАОКРЕТАЊЕ АУТОМОБИЛА СА ДВЕ ОСОВИНЕ И СВИМ УПРАВЉИВИМ ТОЧКОВИМА.....	10
2.4 ЗАОКРЕТАЊЕ АУТОМОБИЛА СА ПРИКОЛИЦОМ	12
3. РАСПОЛОЖИВИ МОДЕЛИ ЗА ПРОУЧАВАЊЕ ГЕОМЕТРИЈЕ ЗАОКРЕТАЊА АУТОМОБИЛА.....	14
4. МОДЕЛИ ВОЗИЛА СА ЈЕДНИМ ТРАГОМ КОЈИ СЕ КОРИСТЕ ЗА ПРОУЧАВАЊЕ ГЕОМЕТРИЈЕ ЗАОКРЕТАЊА АУТОМОБИЛА.....	19
4.1 БОЧНО КРУТИ ТОЧКОВИ.....	19
4.1.1 <i>Управљиви точкови само предње осовине.....</i>	<i>20</i>
4.1.2 <i>Управљиви точкови обе осовине.....</i>	<i>21</i>
4.2 БОЧНО ЕЛАСТИЧНИ ТОЧКОВИ	24
4.2.1 <i>Управљиви точкови предње осовине</i>	<i>24</i>
4.2.2 <i>Управљиви точкови обе осовине.....</i>	<i>27</i>
4.3 ПРИМЕР ПРОРАЧУНА ГЕОМЕТРИЈЕ ЗАОКРЕТАЊА ВОЗИЛА КОРИШЋЕЊЕМ МОДЕЛА ВОЗИЛА СА ЈЕДНИМ ТРАГОМ.....	29
5. ЗАКЉУЧАК	32
ЛИТЕРАТУРА	33

1. УВОД

У току кретања моторних возила на њих делују спољне силе које такође утичу на облик путање возила, а на које возач не може да утиче (пертурбационе или поремећајне силе, нпр. бочни ветар). Једна од дефиниција управљивости аутомобила је да је то његово својство да се креће праволинијски ако нема дејства возача на точак управљача, или поремећајних сила, односно, да се трајекторија стварног правца кретања подудари са жељеним правцем који се задаје точком управљача. Ова једноставна дефиниција не открива ни доминантне факторе нити феномене који утичу на правац осе возила и правац брзине возила, који нису колинеарни вектори. У ствари, точкови возила, због еласто-пригушних и еласто-кинематских веза на возилу, имају различите обимне брзине у контакту пнеуматика и тла.

Одступање жељене путање од стварне настаје због еласто-кинематских особина система за управљање и ослањање, као и њихове међусобне интеракције. Осим тога, стање пнеуматика и коловоза, тј. њихова међусобна интеракција, динамичка прерасподела реактивних сила при кочењу или убрзавању су од великог утицаја. Најзад, фактор човек његова интеракција и са возилом и са окружењем, представља посебну област истраживања. Између човека, возила и окружења постоји веома сложена функција повратне спреге. Ова повратна спрега је предмет регулације вожње и изискује темељније проучавање процеса аутоматског управљања.

У току вожње, возач моторног возила има у виду целокупно окружење (пут, саобраћај, утицај ветра, вибрације и сл.) и делује на команде настојећи да исту обави на најпогоднији начин. Целокупна ангажованост возача и моторног возила у току вожње у односу на окружење, дефинише се појмом *понашање моторног возила на путу*. Дефиниција за поменути појам гласи: *"Понашање моторног возила на путу обухвата скуп својстава система: Возач - Возило – Окружење, који карактерише могућност промене параметара у равни кретања моторног возила, изазваних жељом возача"* [1].

Добра управљивост аутомобила, као и стабилност управљачких точкова, повећавају безбедност вожње, што је посебно важно с обзиром на тренд пораста брзине кретања и број аутомобила на путевима. Код друмских возила уобичајено је да предњи точкови буду управљачки. Код грађевинских машина су задњи точкови управљачки, као

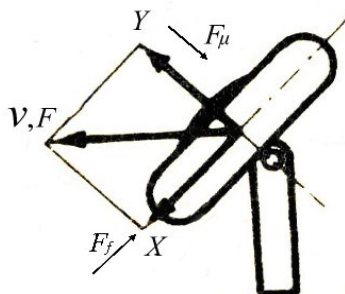
и код неких возила унутрашњег транспорта. Код теренских возила, која развијају релативно мале брзине, могу да буду сви точкови управљачки. Код вишесовинских возила може да буде више пари управљачких точкова.

За бочно крут точак, брзина има правац осе точка. За бочно еластичан точак, правац геометријске осе точка и правац обимне брзине точка у контакту пнеуматика и тла затварају угао који се зове **угао бочног скретања**, δ . Угао који правац брзине у тежишту затвара са осом возила зове се угао **пливања возила**, θ .

Начин закретања аутомобила при кретању на равном и тврдом коловозу може да се објасни анализом сила које дејствују на управљачки точак, који при томе није и погонски. Приликом закретања (слика 1) на точак дејствује погонска сила F , која може да се разложи на две компоненте

- силу X , која дејствује у равни точка,
- сила Y , која дејствује у правцу осе точка (јасно је да ће точак кренути оним смером у коме је мањи отпор кретању).

Да би точак кренуо у смеру дејства силе Y , потребно је да савлада силу отпора у том правцу, а то је сила бочног трења $F_{\mu} = G_t \cdot \mu$.



Слика 1. Шема сила које дејствују на точак приликом закретања [1]

При кретању точка у правцу силе X , потребно је да савлада силу отпора котрљању точка, која је једнака $F_f = G_t \cdot f$ при чему су:

G_t - део тежине аутомобила која оптерећује тај точак,

μ - коефицијент трења точка по коловозу,

f - коефицијент котрљања точка по коловозу.

Како је на тврдом и равном коловозу коефицијент котрљања точка, f , за око 40 до 50 пута мањи од коефицијента клизања (трења) точка, μ , односно, $f \mu$, јасно је да ће

се точак котрљати вучен силом X у том смеру. Тиме се објашњава због чега је при кретању возила по леду или блату, често кретање возила у смеру пређашњег кретања - по инерцији, а не у жељеном, које возач задаје закретањем точка [2].

Основни кинематски захтев који се поставља пред управљачки механизам друмских возила је остварење потпуног котрљања точкова у кривини, без проклизавања точкова. Овакав захтев се остварује само уколико се центри заокретања свих точкова налазе у једној тачки – „центру закретања“.

Основни захтеви које систем за управљање треба да задовољи су:

- лака и прецизна промена правца кретања возила,
- поузданост и издржљивост - механичка веза између управљача и точкова,
- стабилност при праволинијском кретању великим брзинама,
- тежња да се возило врати у праволинијску вожњу,
- правилно вођење точкова при скретању,
- мале силе управљања,
- пружање осећаја контакта точкова са подлогом,
- мала осетљивост на дејство спољашњих сила на точковима,
- задовољење регулативе ECE R79 [3].

Неки од услова које мора да задовољи систем за управљање, а који су обухваћени регулативом ECE R79 су следећи [4]:

- возило мора да напусти круг радијуса 50 m у правцу тангенте, без необичних осцилација у систему за управљање при следећим брзинама:
 - 50 km/h – возила категорије M1,
 - 40 km/h – возила категорија M2, M3, N1, N2 и N3,
- када се возило креће по кругу константном брзином већом од 10 km/h са заокренутим управљачем (отприлике на пола пуног заокрета), радијус заокретања мора остати исти или се повећати, када се точак управљача отпусти,

Максимално дозвољено време заокретања и максимално дозвољена сила на точку управљача за исправан систем за управљање и при појави отказа у систему за управљање дати су у Табели 1, за све категорије возила [4]

Табела 1. Регулатива ECE R79 - неки од услова [4]

Категорија возила	Исправни систем за управљање			Неисправни систем за управљање		
	Сила на управљачу (daN)	Време (s)	Радијус заокретања (m)	Сила на управљачу (daN)	Време (s)	Радијус заокретања (m)
M1	15	4	12	30	4	20
M2	15	4	12	30	4	20
M3	20	4	12	45	6	20
N1	20	4	12	30	4	20
N2	25	4	12	40	4	20
N3	20	4	12	45	6	20

Систем за управљање има задатак да мења и одржава правац кретања возила и осигурава неопходан маневар возила. У општем случају савремени механизми за управљање морају испунити следеће захтеве [4]:

- обезбедити стабилно кретање возила приликом вожње у правцу. Точак управљача у положају праволинијског кретања треба да има минималан слободан ход;
- обезбедити малу силу на точку управљача (F_v): код путничких возила 4-7 daN, а код теретних возила и аутобуса 15-20 daN, а код теретних возила већих носивости и до 30-40 daN;
- кинематика механизма за управљање мора бити таква да приликом кретања у кривини осигура котрљање свих управљачких точкова возила без клизања како би се спречило брзо трошење пнеуматика;
- спонтано враћање управљачких точкова по изласку из криволинијског у положај праволинијског кретања;
- механизам мора ублажити ударе изазване неравнинама пута, тако да се на точак управљача пренесу само силе које неће замарати возача и тиме смањити сигурност кретања возила.

Подела система за управљање може се извршити на следеће начине:

а) карактеру управљања

- управљање точковима,
- управљање осовинама,
- комбиновано управљање,
- бочно заношење.

б) положају возачког места

- управљање са леве стране возила,
- управљање са десне стране возила.

в) према карактеру функционисања:

- механички механизми,
- серво-механички.

Ако се пође од упрошћења да се управљање моторног возила врши са крутим точковима, онда се може рећи да ће бити задовољен основни кинематски критеријум, да се осе обртања точкова секу у истој тачки. При овом услову неће доћи до проклизавања ниједног точка.

У склопу система за управљање су: управљачки точак (волан), управљачки стуб (летва волана) и управљачки механизам.

Димензије управљачког точка се бирају тако да возач са уобичајеном силом (F_v), без великог замарања, може да управља возилом. Максимална сила коју возач преноси на управљачки точак не би смела бити већа од 200 N [4]. На основу тога се дефинише полупречник точка. Наравно, ако постоје појачивачи код преноса силе од возача до точкова возила, онда је овај избор далеко једноставнији и основну улогу при одређивању димензија точка управљања играју функционалност и естетски изглед. У новије време, на точку управљача се монтирају и неки други елементи (ваздушни јастук, команде за радио, итд.), што директно утиче на димензије управљачког точка.

Управљачки точак се налази на вратилу које се израђује од цеви, а вратило је обложено кућиштем. Ту су и остале уобичајене команде (светла, брисачи, итд.). Код неких возила израђује се тзв. сигурносна конструкција вратила. Решење је да се део вратила управљача изradi од перфориране цеви. Та перфорација се, због налета возача

на волан при судару сабија и тако штити возача од већих повреда грудног коша, телескопска конструкција стуба управљача има цев која је уздужним жлебовима спојена с другом цеви и при аксијалном оптерећењу у њу улази. Та конструкција је најједноставнија, преноси само торзију, а при деловању аксијалне силе телескопски се склопи.

2. ОСНОВНИ ГЕОМЕТРИЈСКИ ЗАХТЕВИ ПРИ ЗАОКРЕТАЊУ АУТОМОБИЛА

При постављању основног кинематског захтева који систем за управљање мора да задовољи, полази се од минималног, односно максималног полупречника заокретања возила који дефинише стандард SRPS M.N0.012.

На сликама 2,3 и 4 дат је шематски приказ кинематских захтева при заокретању двоосовинског, троосовинског и четвороосовинског возила.

2.1 ЗАОКРЕТАЊЕ АУТОМОБИЛА СА ДВЕ И ТРИ ОСОВИНЕ

Кинематски захтев заокретања двоосовинског, слика 2, и троосовинског возила, слика 3, одређен је изразом [1, 5]:

$$ctg\alpha - ctg\beta = \frac{e}{L} \quad (2.1)$$

где су:

- α – угао заокретања десног точка
- β – угао заокретања левог точка
- e – растојање између точкава исте осовине,
- L – међуосовинско растојање

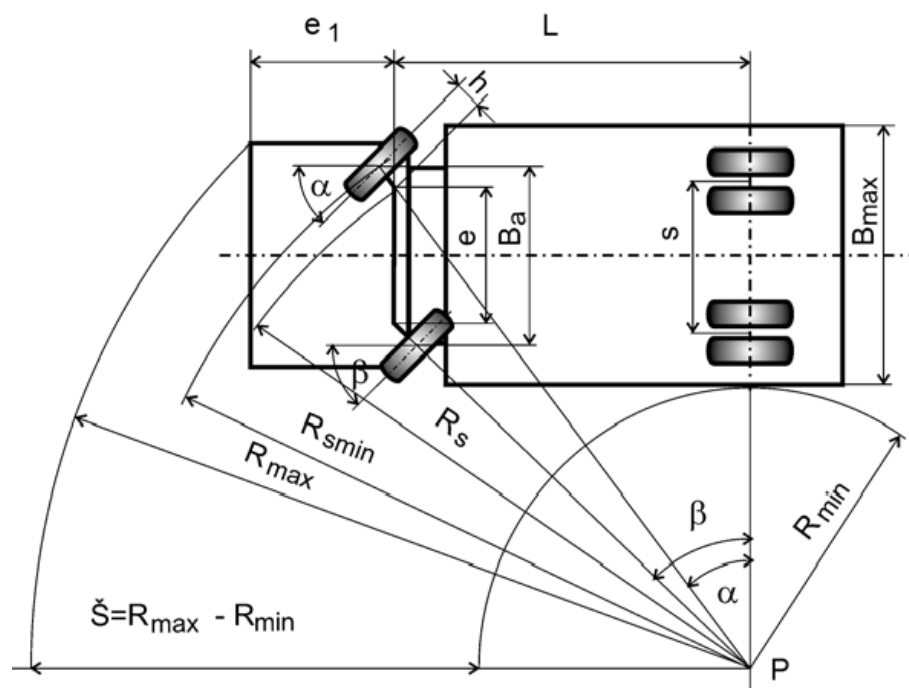
Имајући у виду кинематику заокретања возила, уз претпоставку да су точкови бочно крути, могу се израчунати минимални ($R_{\min}$) и максимални ($R_{\max}$) полупречници заокретања, као и ширина коридора.

Ширина коридора одређује се према изразу:

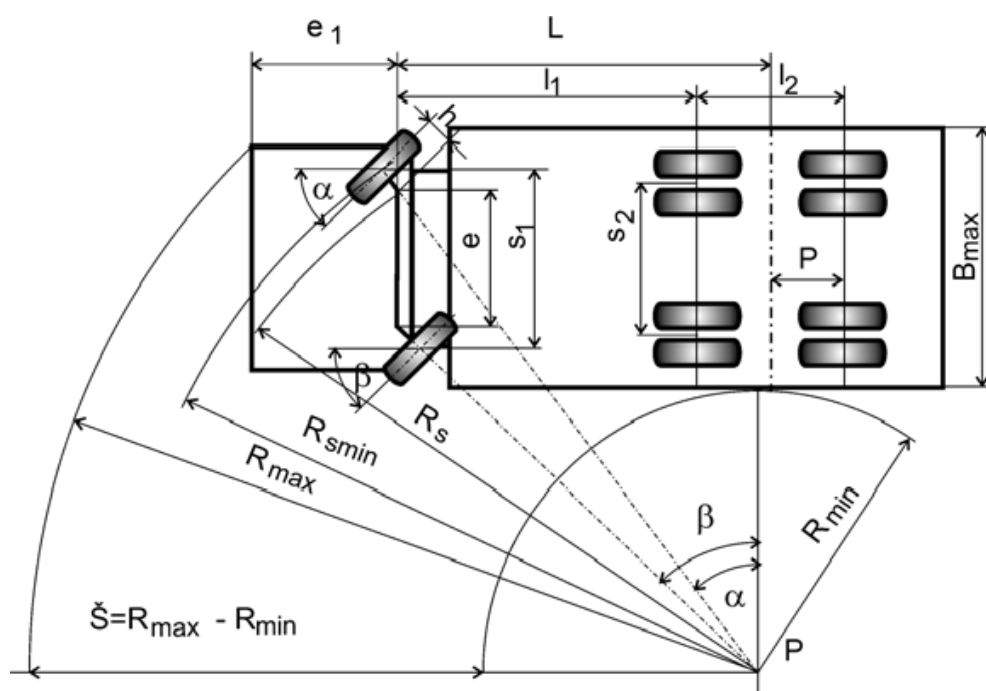
$$S_{\min} = R_{\max} - R_{\min},$$

где су:

- $R_{\max}$ – максимални полупречник заокретања
- $R_{\min}$ – минимални полупречник заокретања



Слика 2. Заокретање двоосовинског возила [1]



Слика 3. Заокретање троосовинског теретног возила [1]

2.2 ЗАОКРЕТАЊЕ АУТОМОБИЛА СА ВИШЕ ОСОВИНА

Потребни услови заокретања четвороосовинског возила одређени су изразом:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{ctg} \beta_1 &= \frac{e}{L_{II}} \\ \operatorname{ctg} \alpha_2 - \operatorname{ctg} \beta_2 &= \frac{e}{L_{II}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

При дефинисању осног растојања величина P се обично усваја као $P=(0,30-0,35)L_{II}$.

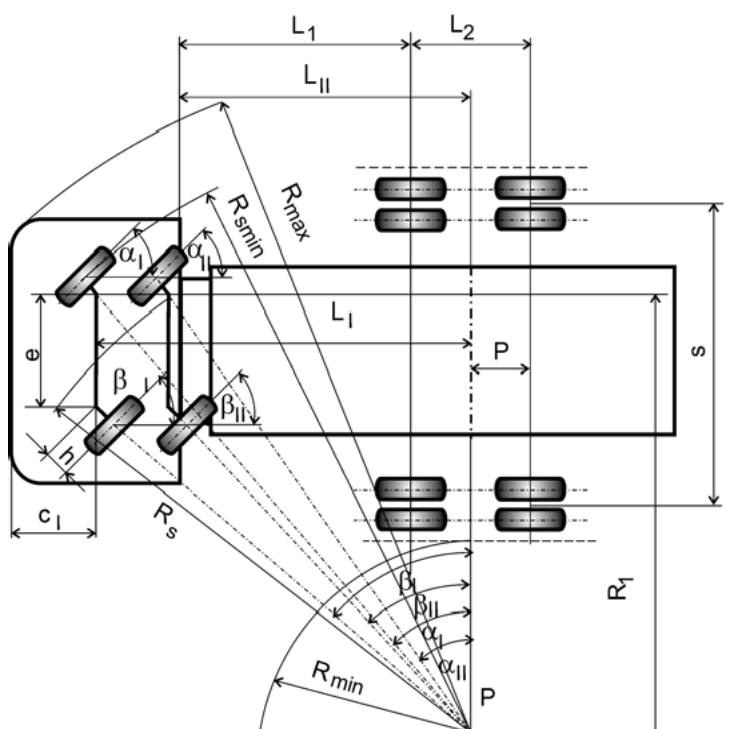
Према слици 4, минимални и максимални полупречници заокретања за четвороосовинско возило су:

$$R_{min} = \frac{L_{II}}{\tan \alpha_{II}} - \frac{e}{2} - \frac{B_{max}}{2}, \quad (2.3)$$

$$R_{max} = \sqrt{(L_I + c_1)^2 + \left[\frac{B_{max} - e}{2} + \frac{L_{II}}{\operatorname{tg} \alpha_{II}} \right]^2}. \quad (2.4)$$

Ширина коридора одређује се према:

$$S_{min} = R_{max} - R_{min}. \quad (2.5)$$



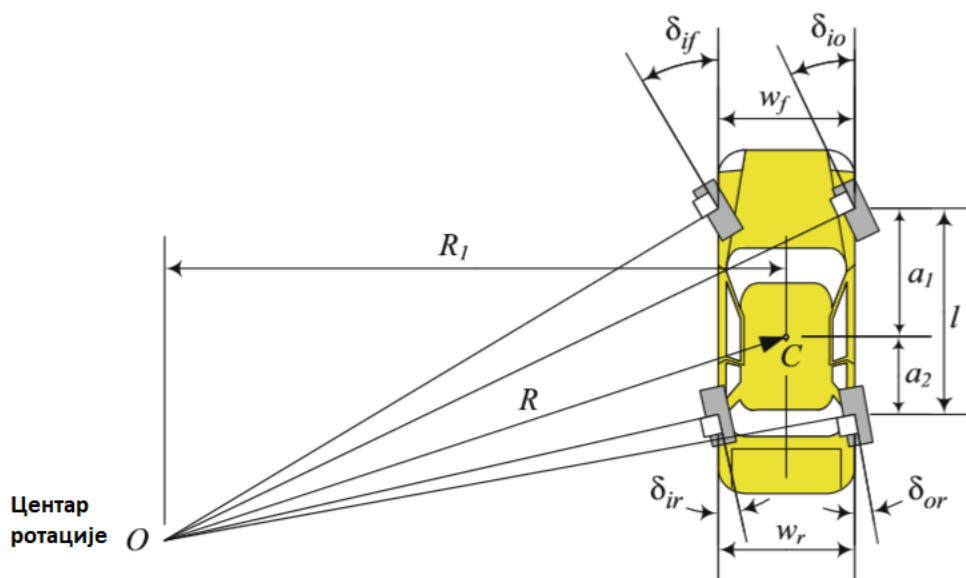
Слика 4. Заокретање четвороосовинског возила [1]

Параметри управљања су у тесној вези са проходношћу и безбедношћу и зависе од законских прописа и намене возила. Ако се претпостави да је задата величина максималног полупречника заокретања четвороосовинског возила, при кретању по кругу пречника 25 m, итеративним или графичким поступцима могу се израчунати углови заокретања спољашњих управљачких точкова, чије су вредности из конструктивних разлога ограничене на 45° , због потребе да унутрашњи углови имају вредности и до 50° [1].

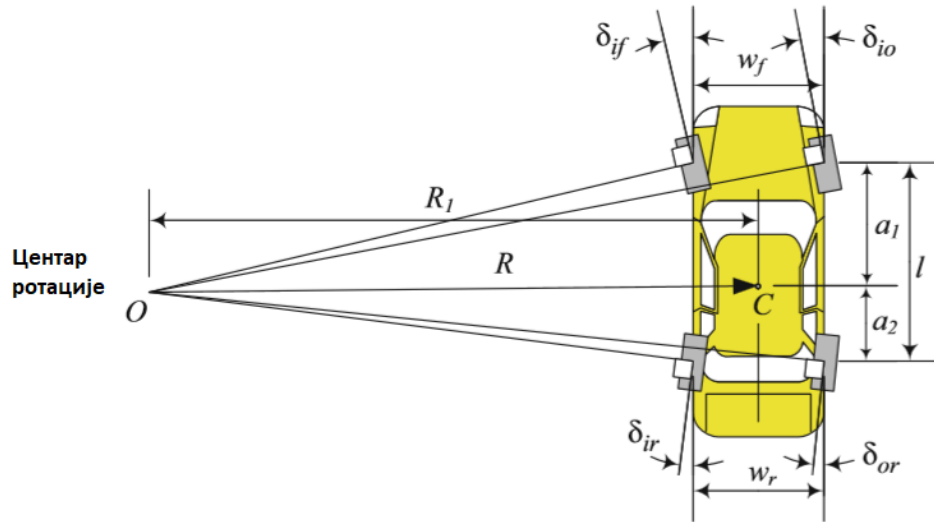
2.3 ЗАОКРЕТАЊЕ АУТОМОБИЛА СА ДВЕ ОСОВИНЕ И СВИМ УПРАВЉИВИМ ТОЧКОВИМА

Код веома малих брзина, мора да се примени кинематски услов да се праве управне на све точкове пресецају у једној тачки. Тачка пресека се назива центар заокретања возила, O .

На сликама 5 и 6 су приказане кинематске релације система за управљање код двоосовинских аутомобила који имају управљачке точкове обе осовине (тзв. *4WS*). Слика 5 илуструје истосмерно заокретање точкова возила обе осовине, а слика 6 илуструје супротосмерно заокретање точкова возила обе осовине.



Слика 5. Заокретање точкова у истом смеру *4WS* возила [6]



Слика 6. Супротосмерно заокретање точкова 4WS возила [6]

Кинематски услов између управљачких углова код возила са свим управљачким точковима је[6]:

$$ctg\delta_{of} - ctg\delta_{if} = \frac{\omega_f}{l} - \frac{\omega_r}{l} \frac{ctg\delta_{of} - ctg\delta_{if}}{ctg\delta_{ir} - ctg\delta_{or}} \quad (2.6)$$

где су:

- ω_f , ω_r – трагови предњих и задњих точкова, респективно,
- δ_{of} , δ_{if} – углови заокретања предњих спољашњих и унутрашњих точкова, респективно,
- l – осовинско растојање возила.

Такође, може да се користи и следећа, општија једначина кинематског услова између углова заокретања возила са свим управљачким точковима:

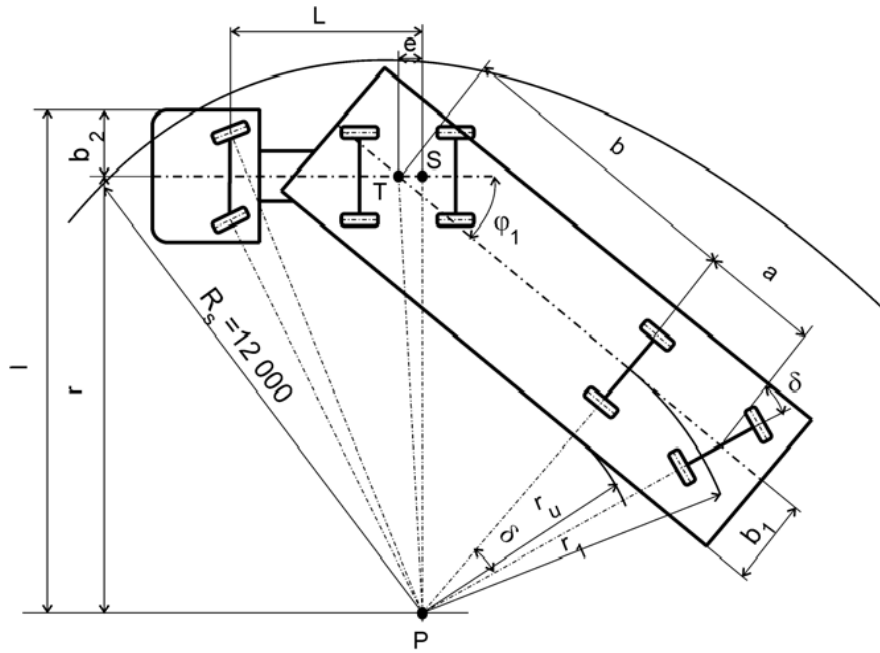
$$ctg\delta_{fr} - ctg\delta_{fl} = \frac{\omega_f}{l} - \frac{\omega_r}{l} \frac{ctg\delta_{fr} - ctg\delta_{fl}}{ctg\delta_{rr} - ctg\delta_{rl}} \quad (2.7)$$

где су:

- δ_{fl} , δ_{fr} – углови заокретања предњег левог и предњег десног точка, респективно,
- δ_{rl} , δ_{rr} – углови заокретања задњег левог и задњег десног точка, респективно.

2.4 ЗАОКРЕТАЊЕ АУТОМОБИЛА СА ПРИКОЛИЦОМ

Сличним поступком могу се дефинисати и величине параметра заокретања вучног воза (слике 7 и 8) [1]. Овде ће се приказати могућност дефинисања параметара заокретања вучног спрега тегљач - полуприколица, код кога се управља задњом осовином полуприколице. Пажња ће бити посвећена одређивању зависности углова φ_1 и δ (слика 7). Претпоставља се да се тренутни пол заокретања вучног спрега налази у тачки P .



Слика 7. Заокретање вучног спрега: тегљач – полуприколица [1]

На основу геометријских релација може се написати:

$$f = l - b_2, \quad l_2 = \sqrt{f^2 + e^2}, \quad \gamma = \sqrt{l^2 - b^2} \quad (2.8)$$

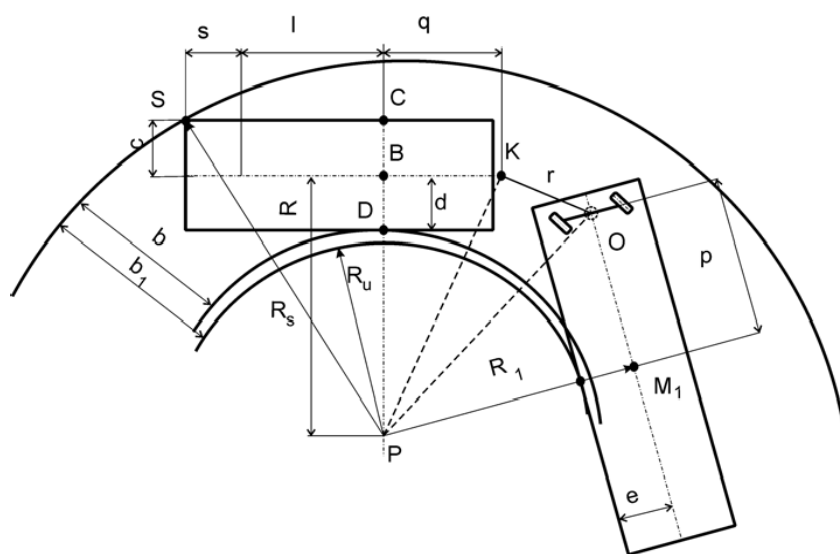
$$r = \gamma - b_1, \quad s = R - r \quad (2.9)$$

После одговарајућих трансформација, може се написати израз који дефинише кинематски захтев управљања полуприколицом [1]:

$$\delta = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) \operatorname{ctg}\left[\varphi_1 + \arctg\left\{\frac{\sin\varphi_1}{\frac{b}{e} - \cos\varphi_1}\right\}\right] \quad (2.10)$$

Искоришћење максималне дозвољене дужине вучног воза од 16,5 m, према нашим прописима [1] и задовољење услова да возило не изађе из круга $R_s=12,5$ m, $R_u=5,3$ m, захтевају примену специјалних конструкција двоструких осовина полуприколице, код којих једна или обе осовине могу делимично да се заокрећу, слика 8. Задњи препуст приколице не утиче на проходност вучног воза, јер се променом величине препуста не мења потребна ширина заокретања.

На сличан начин може се доћи и до параметара заокретања спрега возило - приколица, слика 8.



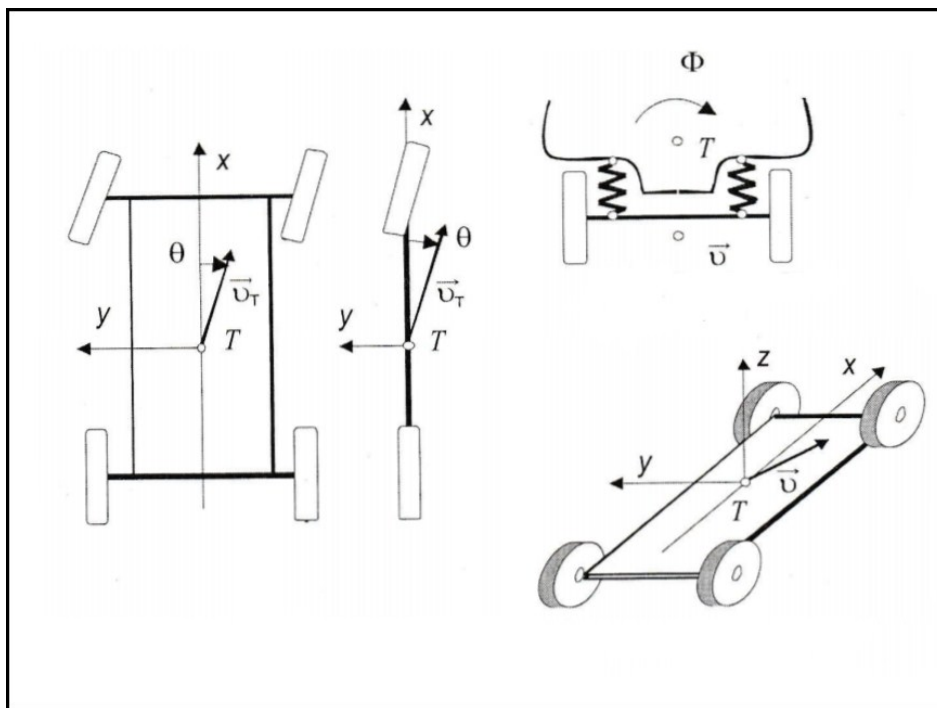
Слика 8. Заокретање вучног спрега: камион – приколица [1]

3. РАСПОЛОЖИВИ МОДЕЛИ ЗА ПРОУЧАВАЊЕ ГЕОМЕТРИЈЕ ЗАОКРЕТАЊА АУТОМОБИЛА

Уобичајени динамички модели за анализу стабилности управљања и држања возила на путу, слика 9, су:

- двоосовински модел са два трага, равански. модел,
- двоосовински модел са једним трагом (енг. *bicycle model*)
- једноосовински модел са два трага и
- просторни модел.

Прва два модела се користе у анализи стабилности управљања, нарочито модел са једним трагом. Овај модел је предмет и стандарда DIN 70000. Једноосовински модел се користи за анализу понашања возила на путу, тј. анализу ваљања возила.



Слика 9. Модели за анализу управљања [7]

Шема заокретања аутомобила и геометријске релације које постоје између осе возила и осе тачкова, проучавају се на раванским двоосовинским моделима:

- 1) са једним и
- 2) са два трага.

За сваки од модела, геометрија заокретања посматра се за случај стационарног кретања по кругу и то:

а) када нема бочног клизања, у литератури познат као квазистатички случај или понашање возила са бочно крутим точковима и

б) када има бочног клизања, у литератури познат као динамички случај или понашање возила са бочно еластичним точковима.

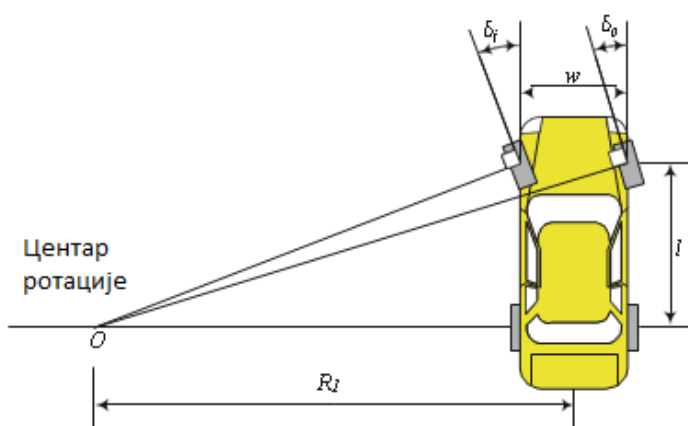
На слици 10 је приказано двоосовинско возило са предњим управљачким точковима које скреће улево. Када се возило креће веома споро, постоји услов између унутрашњег и спољашњег тока који дозвољава да се скреће без клизања. Тај услов се назива *Ackerman-ов* услов и изражава се једначином:

$$\operatorname{ctg} \delta_o - \operatorname{ctg} \delta_i = \frac{w}{l}, \quad (3.1)$$

где су:

- δ_i -угао заокретања унутрашњег точка,
- δ_o - угао заокретања спољашњег точка,
- w - траг точкова,
- l - међуосовинско растојање.

Траг точкова, w , и међуосовинско растојање, l , се сматрају кинематичком ширином и дужином возила. Унутрашњи и спољашњи точкови су дефинисани преко положаја у односу на центар заокретања, O .



Слика 10. Предњи управљачки точкови и *Ackerman-ов* услов [6]

Може се користити и следећа општа једначина између углова заокретања предњих управљачких точкова возила:

$$ctg\delta_{fr} - ctg\delta_{fl} = \frac{w}{l} , \quad (3.2)$$

где су δ_{fl} и δ_{fr} углови кретања предњег левог и предњег десног угла точка. У овој једначини, угао заокретања се мери од x-осе и позитиван је ако је око позитивне z-осе [6].

Тежиште возила кретаће се по кругу чији је радијус означен са R и израчунава се на основу једначине:

$$R = \sqrt{a_2^2 + l^2 ctg^2 \delta} , \quad (3.3)$$

где је $ctg\delta$ – средња вредност котангенса унутрашњег и спољашњег угла заокретања точка:

$$ctg\delta = \frac{ctg\delta_o + ctg\delta_i}{2} . \quad (3.4)$$

Угао δ је еквивалентни угао заокретања бицикла који има исто међуосовинско растојање l и радијус заокретања R .

Да би се сви точкови слободно заокретали у кривини, све осе морају се пресецати у заједничкој тачки. Овај критеријум је, у ствари, Ackerman-ов услов, који се може проучити користећи слику 11 која приказује возило које скреће улево око центра заокретања O . Дакле, унутрашњи точкови су леви точкови који су ближи центру ротације. Унутрашњи и спољашњи углови закретања, δ_i и δ_o , се могу израчунати из троуглова OAD и OBC као:

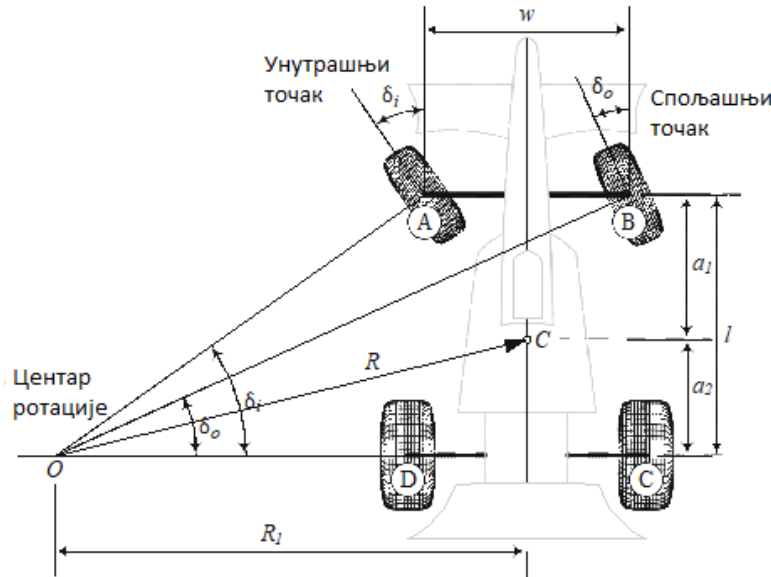
$$\begin{aligned} tg\delta_i &= \frac{l}{R_1 - \frac{w}{2}} , \\ tg\delta_o &= \frac{l}{R_1 + \frac{w}{2}} . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Елиминацијом R_1 :

$$R_1 = \frac{1}{2}w + \frac{l}{tg\delta_i} = -\frac{1}{2}w + \frac{l}{tg\delta_o} , \quad (3.6)$$

обезбеђује се Ackerman-ов услов, који је директна веза између δ_i и δ_o :

$$\operatorname{ctg} \delta_o - \operatorname{ctg} \delta_i = \frac{w}{l}. \quad (3.7)$$



Слика 11. Возило са предњим управљачким точковима и угловима заокретања спољашњег и унутрашњег точка [6]

Да би се одредио радијус заокретања возила, R , дефинише се еквивалентни модел бицикла, као што је приказано на слици 12. Радијус заокретања R је нормалан на вектор брзине, v , возила у тежишту C .

За геометрију приказану на моделу бицикла, следи:

$$R^2 = a_2^2 + R_1^2, \quad (3.8)$$

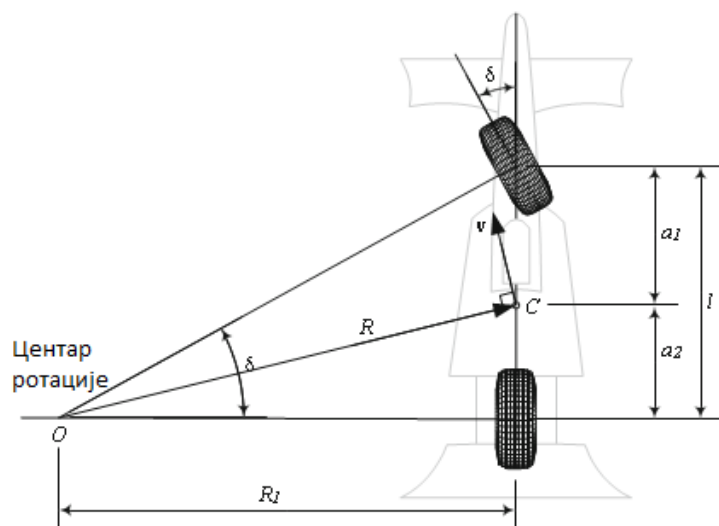
$$\operatorname{ctg} \delta = \frac{R_1}{l} = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} \delta_o + \operatorname{ctg} \delta_i). \quad (3.9)$$

Из тога следи:

$$R = \sqrt{a_2^2 + l^2 \operatorname{ctg}^2 \delta}. \quad (3.10)$$

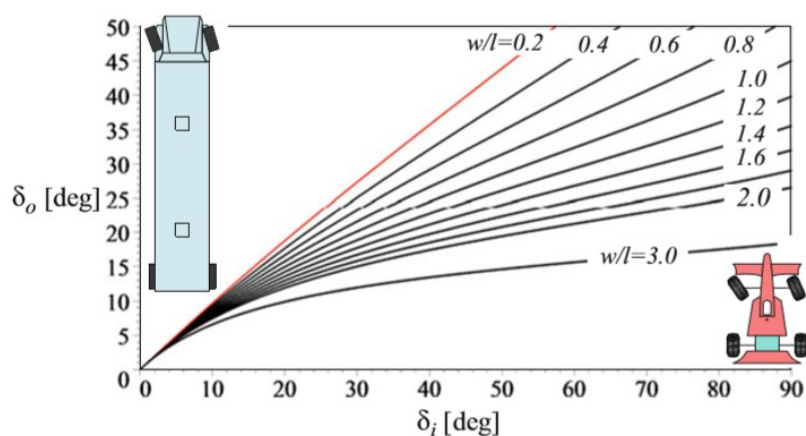
Ackerman-ов услов је потребан када је брзина возила врло мала и вредности углова клизања су приближни нули. У овим условима, не постоје бочне и центрифугалне силе да уравнотеже једна другу. Уређај који обезбеђује управљање према *Ackerman*-вом услову назива се и *Ackerman*-ов систем за управљање, *Ackerman*-ов механизам, или *Ackerman*-ова геометрија.

Не постоји практично изведен преносни механизам управљања са четири полуге, који може да савршено обезбеди *Ackerman*-ов услов.



Слика 12. Модел бицикла за возило са предњим управљачким точковима [6]

Слика 13 приказује *Ackerman*-ов услов за различите вредности односа w/l . Разлика између унутрашњег и спољашњег угла заокретања се смањује смањењем вредности w/l .



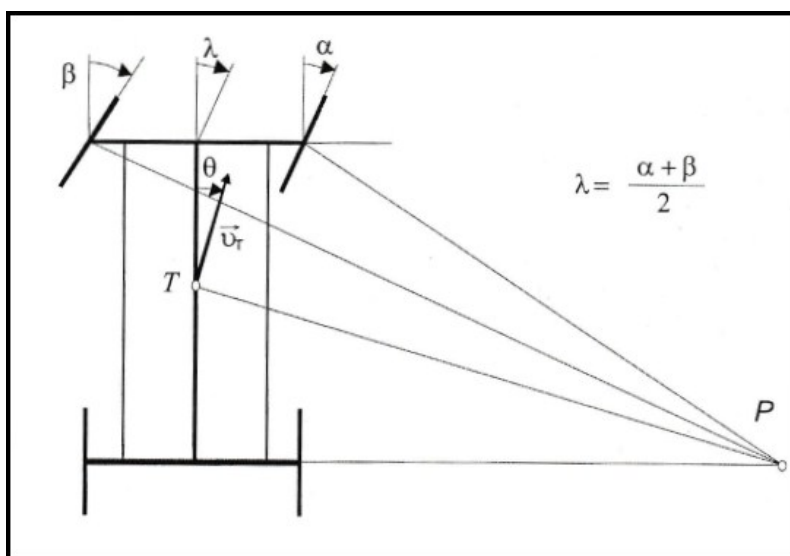
Слика 13. Утицај односа w/l на *Ackerman*-ов услов за возила са предњим управљачким точковима [6]

4. МОДЕЛИ ВОЗИЛА СА ЈЕДНИМ ТРАГОМ КОЈИ СЕ КОРИСТЕ ЗА ПРОУЧАВАЊЕ ГЕОМЕТРИЈЕ ЗАОКРЕТАЊА АУТОМОБИЛА

4.1 БОЧНО КРУТИ ТОЧКОВИ

На моделу са једним трагом, угао заокретања управљачких точкова је тзв. средњи угао, λ , слика 14. Овај угао је аритметичка средина углова заокретања левог и десног точака управљачке осовине.

Када се каже бочно крути точак, подразумева се да се котрља без клизања. Обимна брзина у тачки контакта пнеуматика и тла има правац геометријске осе точака. Угао који у овом случају оса управљачког точака затвара са осом возила представља идеални угао заокретања – *Акерманов* угао. На слици 14 је са λ означен угао заокретања предњег точака који се добија када се угао заокретања точака управљача, Λ , подели са преносним односом управљача i_u , $\lambda = \Lambda / i_u$. Овај угао треба да буде једнак идеалном – Акермановом углу.



Слика 14. Средњи угао заокретања управљачких точкова [7]

Размотриће се случајеви када су управљиви:

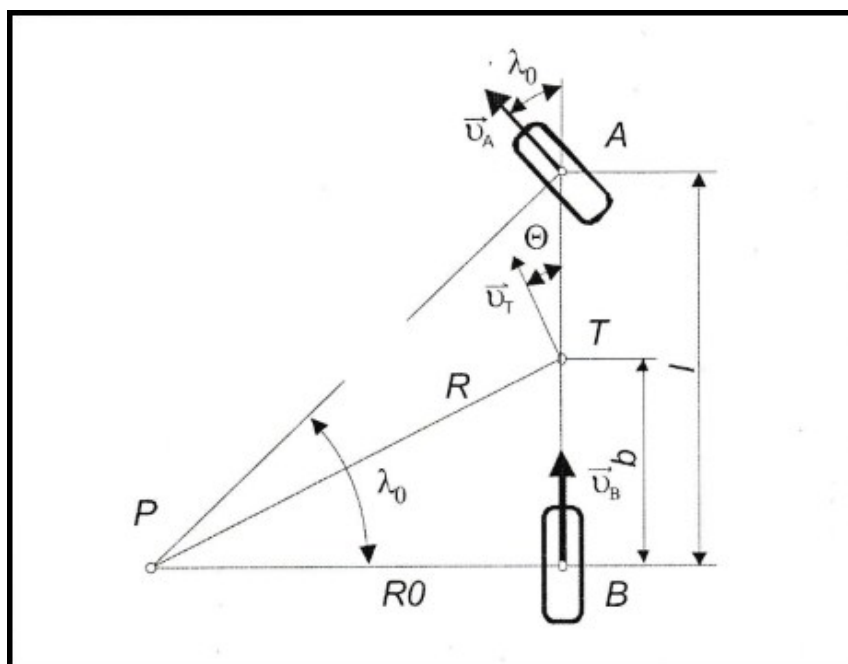
- точкови предње осовине и
- точкови обе осовине.

4.1.1 Управљиви точкови само предње осовине

На слици 15 приказан је модел возила са једним трагом и две осовине са крутим точковима. Са слике се може представити:

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = \frac{l}{R_0} = \frac{l}{\sqrt{R^2 - b^2}} \quad (4.1)$$

За мале углове је $R \approx R_0$, $b \ll R_0$, па је $\lambda_0 \approx \frac{l}{R}$ - Акерманов угао.



Слика 15. Модел са једним трагом и бочно крутим точковима – предња осовина управљања [7]

Ознаке на слици 15 су следеће:

R – радијус заокретања тежишта,

R_0 - радијус заокретања задње осовине (минимални радијус),

θ – угао пливања,

λ – средњи угао заокретања точкова,

T - тежиште возила,

A, B – средиште предње, задње осовине, респективно.

Веза између угла пливања возила и идеалног угла заокретања управљачких точкова се добија са слике 15, одакле је:

$$\operatorname{tg} \theta \approx \theta = \frac{b}{\sqrt{R^2 - b^2}} \rightarrow \theta \approx \frac{b}{R}. \quad (4.2)$$

Проширивањем разломка са l , добија се да је угао пливања у тежишту возила:

$$\theta = \lambda_0 \cdot \frac{b}{l}. \quad (4.3)$$

4.1.2 Управљиви точкови обе осовине

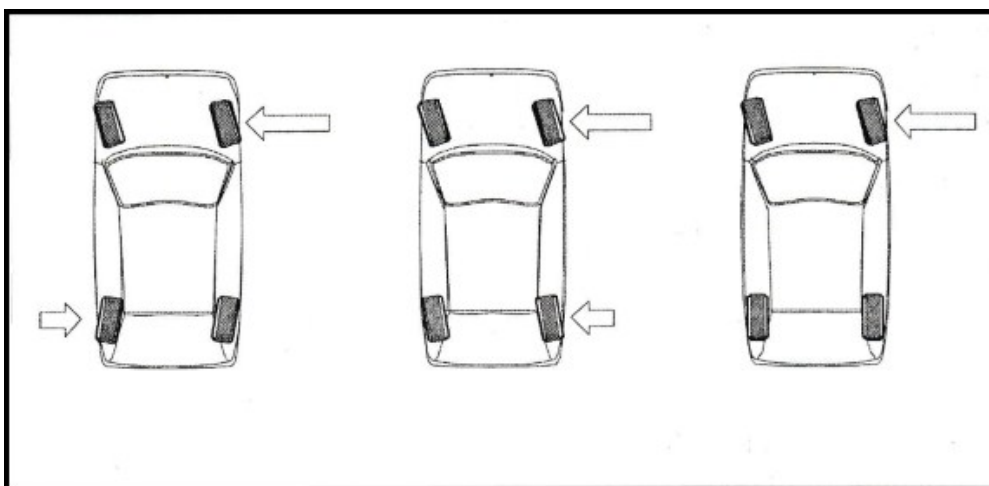
Већина возила је изведена само са предњим управљачким точковима, али је све више возила где и задњи точкови остварују мале углове заокретања точкова јер:

- управљањем на сва четири точка омогућава се боље маневрисање возилом при мањим брзинама и при паркирању (ова опција се не користи при кретању возила већим брзинама),
- контролом заокретања задњих точкова постиже се боља стабилност при заокретању возила; користи се при већим брзинама возила да би се избегло бочно клизање задње осовине [7].

У случају контроле заокретања задњих точкова, обично између углова заокретања предњих и задњих точкова постоји пропорција. Угао заокретања задњих точкова је много мањи од угла заокретања предњих.

Постоје две могућности заокретања управљачких точкова, слика 16:

- супротосмерно и
- истосмерно.



Слика 16. Могући начин заокретања задњих точкова [7]

На слици 17 горе приказано је супротосмерно заокретање точкова предње и задње осовине које производи такво дејство да се момент ротације око вертикалне осе увећава, али се резултујућа бочна сила смањује. На тај начин се увећава ротација возила, а смањује бочно клизање тј. бочно скретање возила. **Дакле, заокретање точкова у супротном смеру изазива мање транслаторно бочно померање возила, али већи угао пливања, а тиме и смањење полупречника кривине чиме се појачава ефекат надуправљивости.**

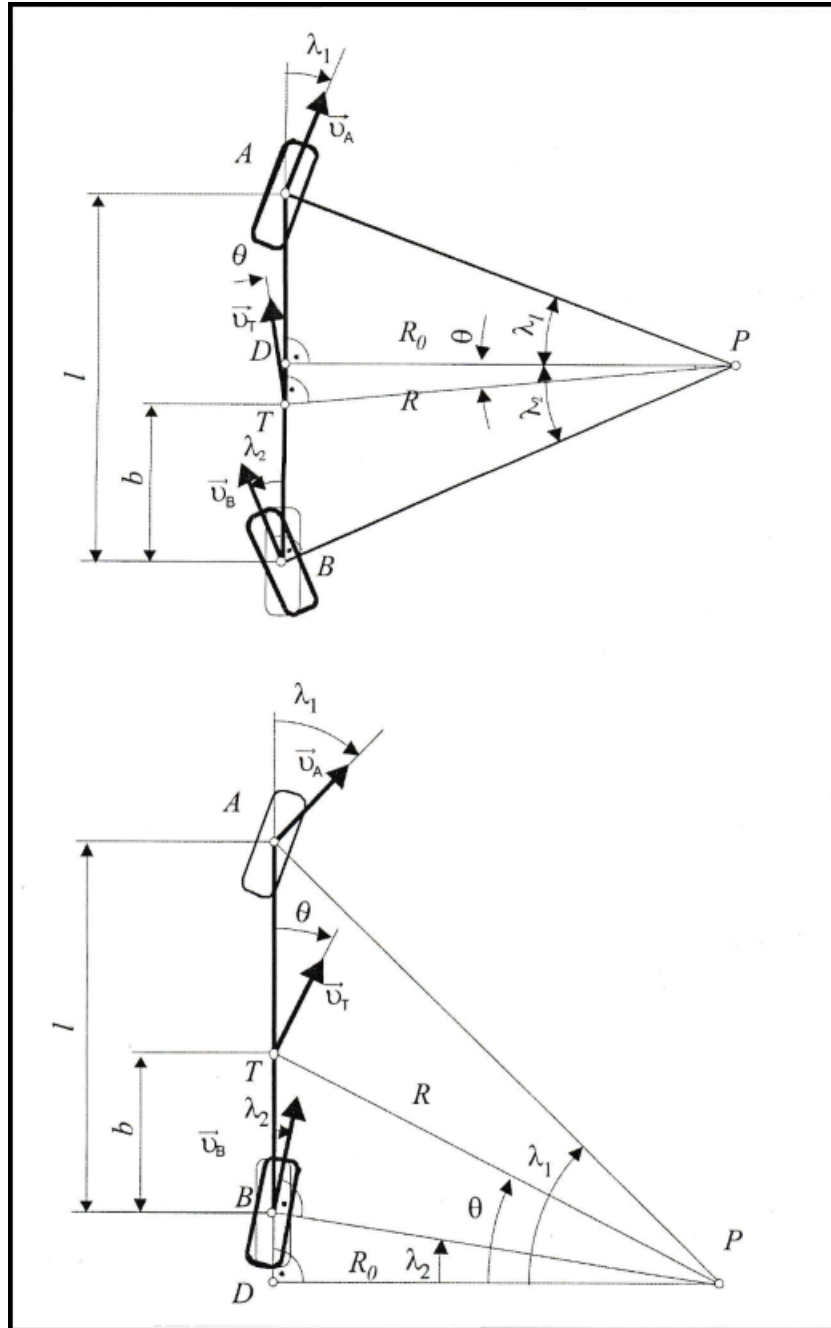
На слици 17 доле приказано је истосмерно заокретање точкова предње и задње осовине. У овом случају долази до већег бочног померања возила јер бочне реакције имају истосмерно дејство, а момент око вертикалне осе у тежишту возила се смањује. **Дакле, истосмерно заокретање точкова обе осовине повећава транслаторно померање возила, а смањује угао пливања, па на тај начин повећава полупречник кривине, а тиме и ефекат подуправљивости.**

Геометријска интерпретација приказаних начина корекције заокретања, са основним релацијама, дата је на слици 17. И за заокретање точкова обе осовине важе релације:

$$\lambda_2 = p\lambda_1, \quad p \approx (0,05 \div 0,1), \quad (4.4)$$

$$\operatorname{tg}\lambda_1 = \frac{AD}{R_0} \approx \lambda_1, \quad \operatorname{tg}\lambda_2 = \frac{BD}{R_0} \approx \lambda_2, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{TD}{R_0} \approx \theta. \quad (4.5)$$

Према слици 17, следи да је $AD+BD=l$, па је $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{l}{R_o}$, док са слике 17 следи да је $AD-BD=l$, па је $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{l}{R_o}$. Такође, са слике је јасно да је дужина TD већа у случају истосмерно заокретљивих тачкова, из чега јасно следи да је угао пливања у овом случају већи.



Слика 17. Геометрија супротосмерног (горе) и истосмерног (доле) заокретања [7]

4.2 БОЧНО ЕЛАСТИЧНИ ТОЧКОВИ

Центрифугална сила која делује у тежишту возила, F_c , делује на предњу и задњу осовину, приближно у односу:

$$Y_1 \approx F_c \cdot \frac{b}{l}, \quad Y_2 = F_c \cdot \frac{a}{l}, \quad (4.6)$$

где је:

$$F_c = \frac{m \cdot v^2}{R}, \quad v = v_T, \quad R = \overline{OT}. \quad (4.7)$$

Углови бочног скретања точкова су:

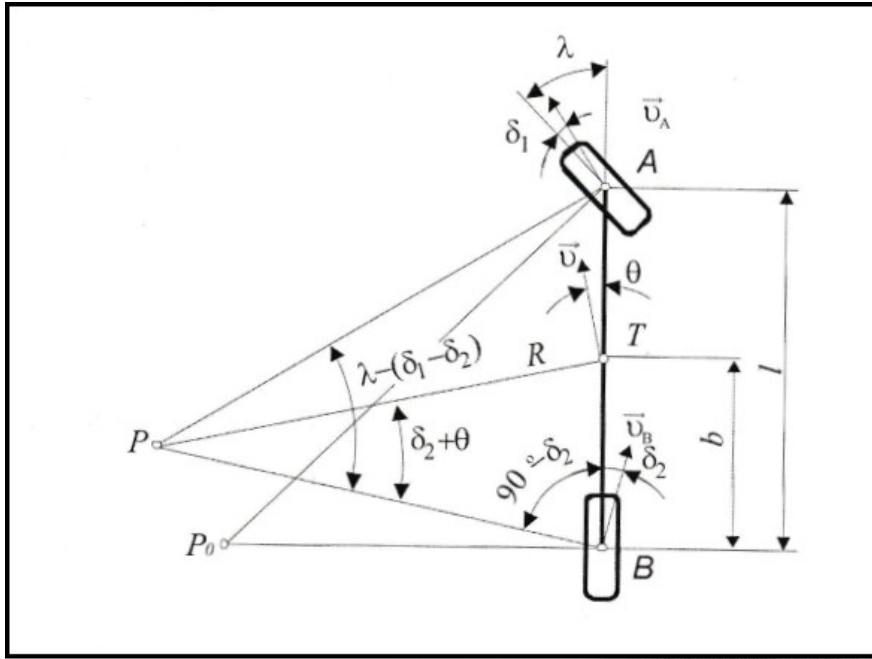
$$\delta_1 = \frac{Y_1}{k_1} = F_c \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{1}{k_1} = \frac{m \cdot v^2}{R} \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{1}{k_1}, \quad (4.8)$$

$$\delta_2 = \frac{Y_2}{k_2} = F_c \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{1}{k_2} = \frac{m \cdot v^2}{R} \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{1}{k_2}, \quad (4.9)$$

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{m \cdot v^2}{R} \cdot \frac{b \cdot k_2 - a \cdot k_1}{l \cdot k_1 \cdot k_2}. \quad (4.10)$$

4.2.1 Управљиви точкови предње осовине

На слици 18 је представљен тзв. динамички модел заокретања двоосовинског возила, како се често назива случај када се узима у обзир еластично понашање пнеуматика. Положај центра заокретања P и величина полупречника R у овом случају, осим од средњег угла заокретања управљачких точкова, λ , зависе од углова бочног скретања предње и задње осовине, δ_1 и δ_2 , респективно.



Слика 18. Модел са једном трагом и бочно еластичним точковима [7]

Услед дејства центрифугалне силе, при заокретању аутомобила доћи ће до бочног скретања предњег точка за угао δ_1 , односно задњег за угао δ_2 . Брзина тачке А, v_A , затвараће са подужном осом аутомобила угао $\lambda - \delta_1$, а брзина тачке В, v_B , угао δ_2 . Са слике 18 је очигледно да је тренутни пол заокретања Р померен у односу на P_0 , који одговара случају бочно крутих точкова.

На основу геометријских односа са слике 18 одредиће се динамички полупречник заокретања. У тачки D брзина има правац осе возила (нема пливања). Са слике 18 важе следеће једначине [7]:

$$\operatorname{tg}(\lambda - \delta_1) = \frac{AD}{R \cos \theta} = \frac{a + DT}{R \cos \theta}, \quad (4.11)$$

$$\delta_2 = \frac{BD}{R \cos \theta} = \frac{b - DT}{R \cos \theta}, \quad (4.12)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{DT}{R \cos \theta}. \quad (4.13)$$

Сабирањем релација (4.11) и (4.12) следи:

$$\operatorname{tg}(\lambda - \delta_1) + \delta_2 = \frac{a + b}{R \cos \theta} = \frac{l}{R \cos \theta}. \quad (4.14)$$

За мале углове, из релације (4.14) следи:

$$\lambda - \delta_1 + \delta_2 \approx \frac{l}{R}, \quad (4.15)$$

одакле је:

$$\delta_1 - \delta_2 \approx \lambda - \lambda_0, \quad (4.16)$$

односно,

$$l \approx R(\lambda - \delta_1 + \delta_2). \quad (4.17)$$

Сабирањем једначина (4.12) и (4.13), уз исту апроксимацију за мале углове, следи:

$$\theta + \delta_2 \approx \frac{b}{R}, \quad (4.18)$$

одакле је:

$$\theta = \frac{b}{R} - \delta_2. \quad (4.19)$$

Заменом (4.9) у (4.19) следи:

$$\theta = \frac{b}{R} - \frac{m \cdot v^2}{R} \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{1}{k_2}. \quad (4.19)$$

Релација (4.19) показује да угао пливања може и да промени смер ($\theta < 0$) ако је центрифугална сила велика, као и то да овај угао зависи од положаја тежишта, $\frac{a}{l}$, и коефицијента бочног скретања задње осовине k_2 .

Ако се у анализирају уобичајени случајеви у којима су углови скретања δ_1 и δ_2 **позитивни**, разликоваће се 3 карактеристичне ситуације [7]:

1) $\delta_1 < \delta_2$; $R > R_0$ - аутомобил је недовољно заокретљив (подуправљив)

У овом случају возач мора да заокрене управљачке точкове за угао већи од геометријски потребног угла да би се кретао по жељеном кругу полупречника R_0 . Дакле, **када је разлика $(\delta_1 - \delta_2)$ позитивна, стварни угао заокретања точкова је већи од Акермановог.**

2) $\delta_1 = \delta_2$; $R = R_0$ - аутомобил је неутрално заокретљив

Полупречник заокретања аутомобила једнак је полупречнику заокретања аутомобила са бочно крутим точковима, али положај тренутног пола P одступа од положаја пола P_0 .

3) $\delta_1 > \delta_2$; $R < R_0$ - аутомобил је сувишно заокретљив. надуправљив.

У овом случају возач мора да заокрене управљачке точкове на мањи угао λ од геометријски потребног угла да би се аутомобил кретао по жељеном кругу полупречника R_0 . Дакле, **када је разлика $(\delta_1 - \delta_2)$ негативна, угао заокретања управљајућих точкова треба да буде мањи од Акермановог**, што је и теже возачу за контролу вожње.

Према анализама вршеним код *Daimler-Benz*-а [7], за стабилно понашање путничких возила, под претпоставком да коефицијент приањања није мањи од просечних вредности, неопходно је при малим убрзањима у вожњи у кривини обезбедити недовољну заокретљивост која би била веома блиска неутралној заокретљивости. На тај начин се постиже стабилно враћање управљачких точкова на тангентни правац кретања. Са порастом убрзања возило треба постепено да добија понашање неутралне заокретљивости, да би за убрзања која су блиска граничним убрзањима (с обзиром на бочни коефицијент приањања) возило прешло у стање сувишне заокретљивости. На тај начин се предњим управљачким точковима обезбеђује сигурно држање на путу и на почетку бочног клизања задњих точкова, чиме се оставља могућност возачу да у најкритичнијој ситуацији интервенише коригујући угао заокретања, λ .

4.2.2 Управљиви точкови обе осовине

Перформансе заокретања при малим брзинама побољшавају се супротним смером заокретања задњих точкова у односу на предње, како би се смањио радијус заокретања. Према слици 19, укупни угао заокретања возила је збир углова заокретања предњих и задњих точкова, а угао заокретања задњих је пропорционалан углу заокретања предњих точкова преко позитивног коефицијента $A > 0$:

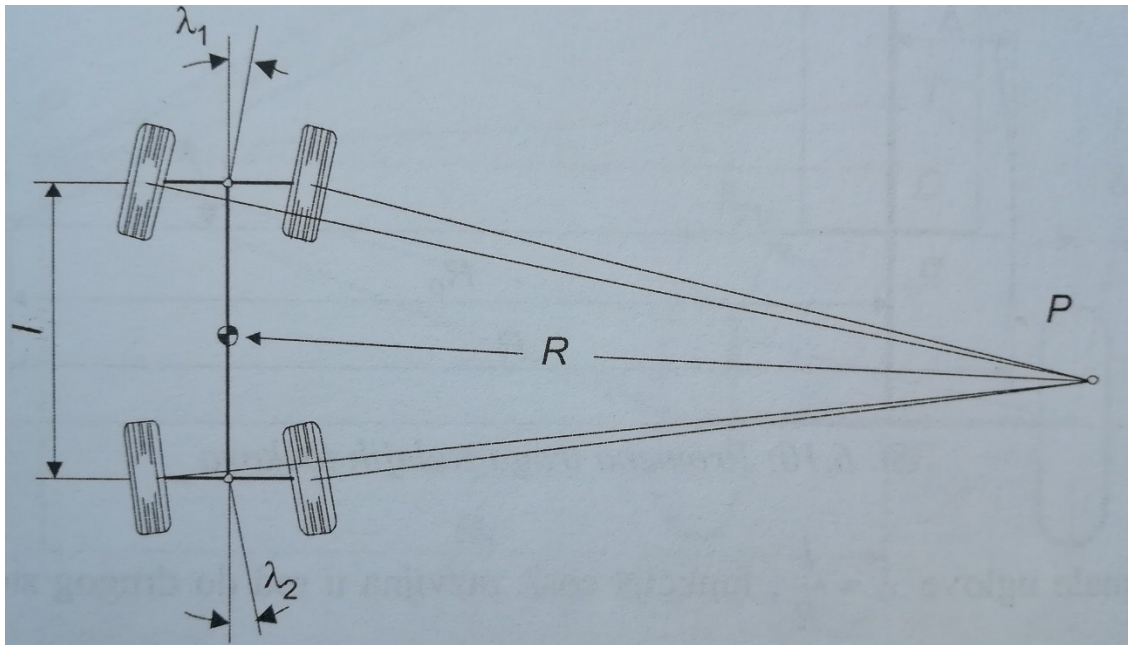
$$\lambda_2 = A\lambda_1,$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$\frac{l}{R} = \lambda_1(1 + A),$$

одакле је:

$$R = \frac{l}{\lambda_1(1 + A)}$$



Слика 19. Геометрија заокретања возила код кога је остварено управљање задњих точкова [7]

Једначина јасно показује смањење полупречника заокретања супротосмерним заокретањем задњих точкова. При једнаким угловима заокретања предњих и задњих точкова, остварује се двоструко мањи полупречник заокретања.

Заокретање предњих и задњих точкова неповољно је у случају заокретања при великим брзинама, због изазивања надуправљивости. Зато се у овом случају примењује истосмерно заокретање задњих точкова. Основна предност заокретања са сва четири точка огледа се у бољој контроли краткотрајног понашања приликом заокретања. Систем заокретања сва четири точка има бржи одзив са бољим пригушивањем осцилација пливања које су последица заокретања.

4.3 ПРИМЕР ПРОРАЧУНА ГЕОМЕТРИЈЕ ЗАОКРЕТАЊА ВОЗИЛА КОРИШЋЕЊЕМ МОДЕЛА ВОЗИЛА СА ЈЕДНИМ ТРАГОМ

Нека се геометрија заокретања путничког возила са предњим управљачким точковима проучава коришћењем модела возила са једним трагом (слике 15, 17 и 18) и нека су познати следећи подаци о возилу:

- маса возила, $m = 1400 \text{ kg}$,
- међуосовинско растојање, $l = 2,619 \text{ m}$,
- растојање тежишта до задње осовине, $b = 1,524 \text{ m}$,
- полупречник заокретања возила, $R = 200 \text{ m}$,
- углови бочног скретања точкова предње и задње осовине, $k_1 = k_2 = 700 \frac{N}{o}$,
- брзина кретања возила, $v = 30 \frac{m}{s}$.

Основни геометријски параметри при заокретању возила се рачунају на следећи начин:

1) *релативна грешка одређивања Акермановог угла*

Акерманов угао заокретања предњих управљачких точкова, λ_0 , може се одредити посматрањем модела возила са једним трагом и бочно крутим точковима приказаног на слици 15.

Тачна вредност Акермановог угла се добија из следеће геометријске зависности:

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = \frac{l}{R_0} = \frac{l}{\sqrt{R^2 - b^2}}, \quad (4.20)$$

одакле је:

$$\lambda_0 = \operatorname{arctg} \frac{l}{\sqrt{R^2 - b^2}} = \operatorname{arctg} \frac{2,619}{\sqrt{200^2 - 1,524^2}} = 0,013095 \text{ rad} = 0,75^\circ, \quad (4.21)$$

Приближна вредност Акермановог угла се добија под претпоставком да се ради о малим угловима заокретања, када важи да је $b \ll R_0$, па је:

$$\operatorname{tg} \lambda'_0 = \lambda'_0 = \frac{l}{R} = \frac{2,619}{200} = 0,013 \text{ rad} = 0,74485^\circ. \quad (4.22)$$

Релативна грешка одређивања Акермановог угла је сада:

$$\Delta = \left| \frac{\lambda_0 - \lambda'_0}{\lambda_0} \right| 100\% = \left| \frac{0,75^\circ - 0,74485^\circ}{0,75^\circ} \right| 100\% = 0,687\%. \quad (4.23)$$

Дакле, релативна грешка израчунавања Акермановог угла је практично занемарљива.

2) угао пливања возила, θ , у случају када су точкови возила бочно крути

Угао пливања возила, θ , у случају када су точкови возила бочно крути израчунава се на основу следеће геометријске релације:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{R_0} = \frac{b}{\sqrt{R^2 - b^2}}, \quad (4.24)$$

односно,

$$\theta = \arctg \frac{b}{\sqrt{R^2 - b^2}} = \arctg \frac{1,524}{\sqrt{200^2 - 1,524^2}} = 0,436^\circ. \quad (4.25)$$

3) угао пливања возила, θ , у случају када су точкови возила бочно еластични

Угао пливања, θ , при заокретању возила са бочно еластичним точковима може се израчунати из геометријске релације са слике 17:

$$\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\overline{TD}}{\overline{DP}} + \frac{\overline{BD}}{\overline{DP}} = \frac{b}{\overline{DP}} \quad (4.26)$$

Уз претпоставку да се ради о малим угловима, једначина (4.26) постаје:

$$\theta + \delta_2 = \frac{b}{R}. \quad (4.27)$$

Имајући у виду да се угао бочног скретања точкова задње осовине рачуна на основу:

$$\delta_2 = \frac{m}{2k_2} \frac{v^2 l - b}{R} = \frac{1400}{2 * 700} \frac{30^2}{200} \frac{2,619 - 1,524}{2,619} = 1,88^\circ = 0,0328 \text{ rad}, \quad (4.28)$$

добива се вредност угла пливања возила са бочно еластичним точковима:

$$\theta = \frac{b}{R} - \delta_2 = \frac{1,524}{200} - 0,0328 = -0,2518 \text{ rad} = -1,44^\circ \quad (4.29)$$

3) *вредност потребног средњег угла заокретања управљачких точкова*

Вредност средњег угла заокретања предњих управљачких токова који је потребан да се возило креће датом брзином по кругу задатог полупречника у случају бочно еластичних точкова рачуна се на основу зависности:

$$\lambda = \frac{l}{R} + \delta_1 - \delta_2 . \quad (4.30)$$

С обзиром да је:

$$\delta_1 = \frac{m}{2k_1} \frac{v^2}{R} \frac{b}{l} = \frac{1400}{2 * 700} \frac{30^2}{200} \frac{1,524}{2,619} = 2,619^\circ = 0,0457 \text{ rad} \quad (4.31)$$

коначна вредност угла заокретања предњих управљачких точкова је:

$$\lambda = \frac{2,619}{200} + 0,0457 - 0,0328 = 0,025995 \text{ rad} = 1,489^\circ . \quad (4.32)$$

5. ЗАКЉУЧАК

Систем за управљање има задатак да мења и одржава правац кретања возила и осигурава неопходан маневар возила. Систем за управљање на свим точковима побољшава заокретљивост возила (камиона, приколица, аутомобила). Код стандардних возила померање се врши заокретањем предњих точкова док задњи точкови не играју активну улогу.

Када се возило заокреће, точкови ближи центру ротације називају се унутрашњи точкови, а точкови даље од центра ротације називају се спољни точкови. Ако је брзина возила веома мала, постоји веза између унутрашњег и спољашњег точка, која се назива *Ackerman*-ов услов, *Ackerman*-ов услов је потребан када је брзина возила врло мала и вредности углова клизања су приближни нули. У овим условима, не постоје бочне и центрифугалне силе да уравнотеже једна другу. Уређај који обезбеђује управљање према *Ackerman*-вом услову назива се *Ackerman*-ов систем за управљање, *Ackerman*-ов механизам или *Ackerman*-ова геометрија.

Код возила са управљањем на сва четири точка (4WS), супротосмерно заокретање точкова обе осовине изазива мање транслаторно бочно померање возила, али већи угао пливања, а тиме и смањење полупречника кривине, чиме се појачава ефекат надуправљивости. Са друге стране, истосмерно заокретање точкова обе осовине повећава транслаторно померање возила и смањује угао пливања, па на тај начин повећава полупречник кривине, а тиме и ефекат подуправљивости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Демић, М., Лукић, Ј. *Теорија кретања моторних возила*. Крагујевац: Машински факултет у Крагујевцу, 2011.
- [2] Стефановић, А. *Скрипта из предмета Теорија кретања возила*, Машински факултет, Универзитет у Нишу, 2008, доступно на Интернет адреси:
http://ttl.masfak.ni.ac.rs/TKV/VIII_UPRAVLJANJE_VOZILOM_I_UPRAVLJACKI_MEHANIZAM.pdf, приступљено 12.04.2018.
- [3] Познановић, Н., Ружић, Д. *Скрипта из предмета Основи моторних возила*, Факултет техничких наука, Нови сад, 2014., доступно на Интернет адреси:
<http://mehanizacija.ftn.uns.ac.rs/wp-content/uploads/2015/12/10-OMV-upravljanje.pdf>, приступљено 18.05.2018.
- [4] UN/ECE: Regulation No 79 of the Economic Commission for Europe of the United Nations (UN/ECE) — Uniform provisions concerning the approval of vehicles with regard to steering equipment, 2008
- [5] Wong, J. Y. *Theory of ground vehicles*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001
- [6] Jazar, R. N. *Vehicle Dynamics*. Cham: Springer International Publishing, 2017
- [7] Јанковић, А. *Динамика аутомобила*. Крагујевац: Машински факултет у Крагујевцу, 2008.