

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу
Војна академија Универзитета одбране у Београду



Назив студијског програма: Војноиндустријско инжењерство

Ниво студија: Мастер академске студије

Предмет: Експеримент у машинству

Број индекса: 316/2016

Петар Д. Вранић

Развој и експериментална истраживања
могућности физичког клатна
мастер рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Проф. др Бранко Тадић, ред.проф
2. _____
3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

Садржај:

1. Увод	4
2. Осцилације	5
2.1. Појам осцилација	5
2.2. Просто хармонијско кретање	6
2.3. Енергија простог хармонијског осцилатора	12
3. Историјат развоја клатна	14
4. Проблеми покретног клатна	20
5. Теоријска анализа клатна	22
5.1. Врсте клатна	22
5.1.1. Физичко клатно	22
5.1.2. Торзионо клатно	24
5.1.3. Математичко клатно	25
5.2. Теоријска анализа експерименталног система	27
6. Физичко клатно са „Ардуино физичко-рачунарском платформом“	32
6.1. Рачунарска компонента	32
6.2. Клатно са физичко-рачунарском опремом	33
6.3. Принцип рада клатна	35
7. Експериментално добијени резултати периода осциловања	36
7.1. Резултати добијени на основу читавања угаоног енкодера и броја фрејмова на основу видео снимка	36
7.1.1. Период осциловања за положај клатна на растојању 50 mm од тачке вешања	38
7.1.2. Период осциловања за положај клатна на растојању 100 mm од тачке вешања	41
7.1.3. Период осциловања за положај клатна на растојању 150 mm од тачке вешања	44
7.1.4. Период осциловања за положај клатна на растојању 200 mm од тачке вешања	47
7.1.5. Период осциловања за положај клатна на растојању 250 mm од тачке вешања	50
7.1.6. Период осциловања за положај клатна на растојању 300 mm од тачке вешања	53
7.1.7. Период осциловања за положај клатна на растојању 350 mm од тачке вешања	56
7.2. Одређивање вредности g (убрзање силе земљине теже) на основу експериментално добијених вредности T (периода осциловања)	59
7.3. Дискусија добијених резултата	61

Закључак.....	63
Литература	64

Резиме

У оквиру овог рада приказан је историјски развој клатна, начин и место примене као и његова улога кроз историју. Такође је приказано одређивање периода осциловања клатна различитим методама. Детаљно је приказан начин добијања вредности периода применом поменутих метода за све висине клатна у односу на тачку вешања. Анализиран је и проценат грешке у односу на теоријску вредност периода осциловања. Такође је описан проблем покретног клатна где је главни циљ био извођење једначина кретања целог система уз помоћ методе коначних елемената и Лагранжових једначина, као и уређај на ком се врши испитивање и експериментално добијене вредности периода осциловања.

Кључне речи: физичко клатно, осцилације, тело, осцилатор

Summary

In this paper, the historical development of the pendulum, its method and place of application is shown, as well as its role throughout history. The determination of the oscillation period of the pendulum by different methods is also shown. The method of obtaining the period values by the previously mentioned methods for all pendulum heights in relation to the suspension point is shown in detail. The percentage of error with respect to the theoretical value of the oscillation period is also analyzed. The problem of a moving pendulum is also described, where the main goal was to derive the equations of motion of the whole system using the finite element method and Lagrangian equations, as well as the device under test and the experimentally obtained values of the oscillation period.

Key words: physical pendulum, oscillations, body, oscillator

1. Увод

Физичко клатно је осцилаторни систем који образује чврсто тело које може да осцилује под утицајем Земљине теже око хоризонталне осе која не пролази кроз центар масе тог тела (52).

Свако круто тело које под утицајем гравитационе силе може да осцилује око хоризонталне осе (која не пролази кроз тежиште тела) представља физичко клатно. Када је клатно које мирује померено из равнотежног положаја на њега делује гравитациона сила која настоји да у смеру равнотежног положаја убрза тело. Услед тога долази до осциловања тела клатна око равнотежног положаја. Приликом осциловања, тело периодично претвара своју кинетичку енергију у потенцијалну и обрнуто. Како би се целокупна механичка енергија одржавала неопходно је да осцилатор поседује одређене карактеристике. Реч је о идеализованом математичком моделу клатна, где клатно осцилује без трења и поседује увек идентичну амплитуду.

Физичко клатно функционише под одређеним претпоставкама:

- куглица и канап поседују одређену масу, канап је нерастегљив и увек је затегнут;
- кретање се обавља у једној равни;
- приликом кретања долази до губљења енергије на трење;
- отпор трења ваздуха се занемарује.

У оквиру савремене механике врши се анализа кретања клатна под претпоставком да су у питању веома мале осцилације (мање од 5°), док је кретање клатна приликом већих амплитуда у недовољној мери истражено, како у теоријском, тако и у практичном погледу. Приликом осциловања физичког клатна долази до смењивања кинетичке и потенцијалне енергије као и вектора сила који мењају смер, правац и интензитет. Услед центрифугалне силе у доњој позицији, долази до кулминирања силе која делује на клатно (због највеће брзине кретања), и дејства гравитационе силе, због тога што се клатно помера надоле, самим тим померајући се и нагоре у правцу вертикалне равни. Суфицит енергије, услед гравитационог потенцијала и инерцијалних сила, може бити објашњен додатним убрзањем услед гравитационог потенцијала (32).

2. Осцилације

2.1. Појам осцилација

Изузетно специфична врста кретања догађа се када на тело делује сила која је пропорционална отклону тела од равнотежног положаја. У случају да је та сила усмерена према равнотежном положају, долази до успостављања "напред-назад" кретања положаја. Овакав вид кретања назива се периодичним кретањем, хармонијским кретањем, осциловањем или вибрирањем. Као примери овакве врсте кретања могу бити наведени: вибрирање жичаних музичких инструмената, љуљање на љуљашци, кретање клатна сата, итд.

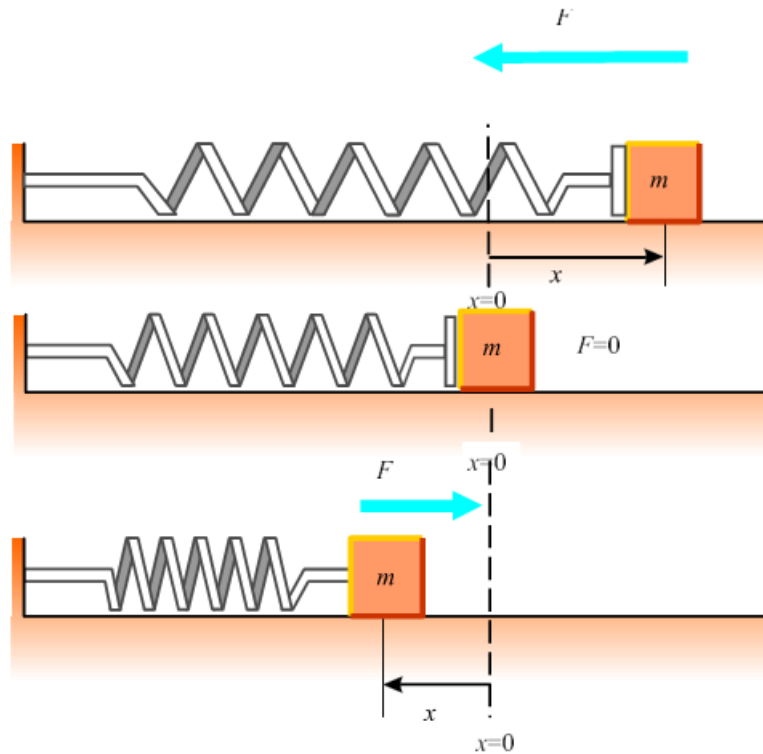
Поред наведених примера из свакодневног живота, постоји и велики број примера система који имају периодично кретање. На пример, осциловањем ваздушних честица настаје тон. Осциловање електричног набоја производи цели спектар електромагнетних таласа, од гама-зрачења до радио таласа итд. Такође, молекули у телу које је у чврстом стању осцилују око чвора кристалне решетке, електромагнетни таласи (радио таласи, светлост... у свима су присутне осцилације магнетног и електричног поља), коло наизменичне струје (јачина струје и напон на периодичан начин варирају са временом) (15).

Посебни облици осциловања су периодично осциловање и хармонијско осциловање која се могу математички приказати анализирати.

У даљем делу овог поглавља биће представљено просто хармонијско кретање, односно кретање у коме је положај тела синусна функција времена. Међутим, у оквиру реалних механичких система увек је присутан губитак енергије, који се манифестује пригушењем осцилаторног кретања (18).

2.2. Просто хармонијско кретање

Размотриће се физички ситем сачињен од тела које поседује масу m , и које је окачено на крај опруге која може по хоризонтали да се креће без трења (слика 2.2.1.)



Слика 2.2.1. Просто хармонијско кретање (15)

У случају да опруга није сабијена нити истегнута, тело је у тачки која је одређена са $x = 0$, и ова тачка названа је положајем равнотеже система. Познато је да када се тело изведе из овог положаја, почиње да осцилује око њега. Уколико се отклон тела из равнотежног положаја, који иначе носи назив елонгација, означи са x , сила која делује на тело, у тежњи да га врати у положај означава се са:

$$\vec{F} = -kx\vec{e}_x \quad (2.2.1)$$

Наведена сила назива се реституционом силом, обзиром да је увек усмерена према равнотежном положају, тј. њен смер је увек супротан од смера кретања. Одговарајућа једначина кретања, пројектована на x осу

$$m\ddot{x} = -kx \quad (2.2.2)$$

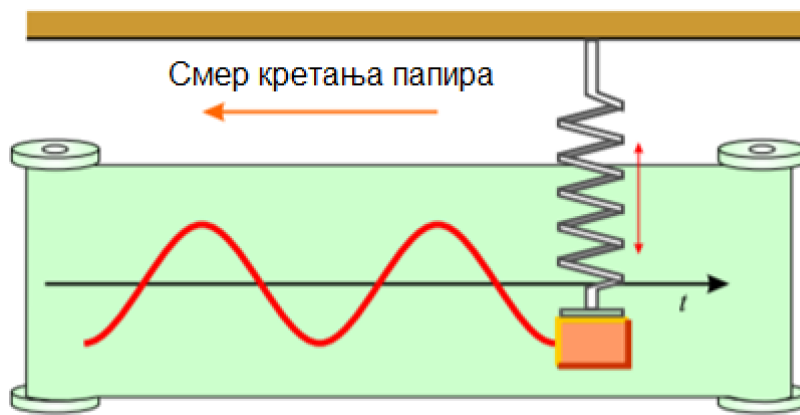
уз увођење $\omega^2 = \frac{k}{m}$ постаје

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2.2.3),$$

а за опште решење има функцију:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.2.4)$$

у којој су A и φ константе. Помоћу уређаја који је приказан на слици 2.2.2. могуће је добити илустрације овакве зависности елонгације тела од времена.



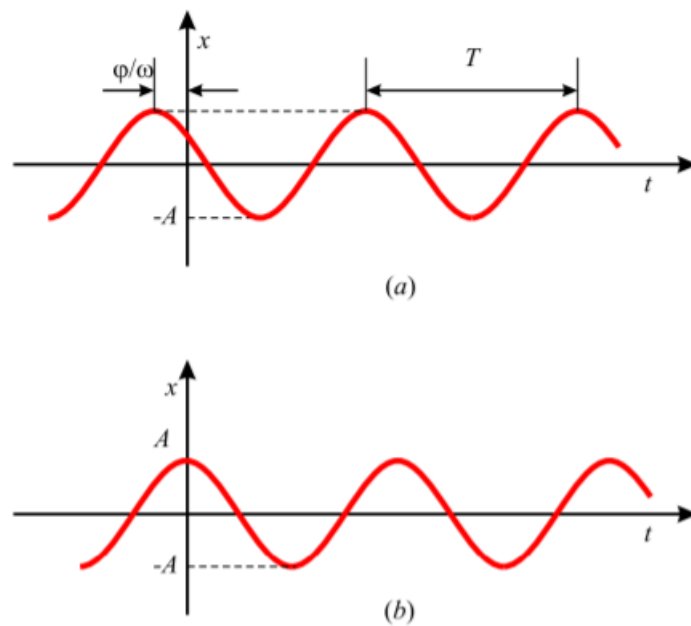
Слика 2.2.2. Уређај за демонстрацију простог хармонијског кретања. Оловка прикачена за тело које осцилује оставља на покретном папиру таласасту траг (22)

Тело одређене масе закачено је на опругу и осцилује у вертикалној равни. Истовремено, док се тело осцилујући креће, папир се креће под правим углом у односу на правац осциловања и током тог времена оловка која је прикачена на тело описује таласасту линију по папиру. Како бисмо видели који је физички смисао константи A , ω и φ , врши се графичко представљање временске зависности елонгације x од времена t (2.2.4) (слика 2.2.3.).

Слика 2.2.3. представља део трага оловке који је представљен на слици 2.2.2. Амплитуда кретања представља максималан отклон (елонгацију) честице. Константа ω назива се угаоном фреквенцом кретања и поседује јединицу рад/с. Константан угао φ назива се почетном фазом кретања и дефинисан је са почетном вредношћу елонгације и брзином честице. У наведеном погледу, аргумент тригонометријске функције (2.2.4) $\omega t + \varphi$, назива се фазом осциловања. Примећује се да је елонгација x , која је изражена преко тригонометријске функције (2.2.4), у ствари периодична функција времена која поседује период 2π , тј. вредности јој се понављају након одређеног периода (22).

Период осциловања T представља време које је телу потребно како би прошло један пун циклус кретања. У том случају могуће је рећи како је тело направило једну пуну осцилацију. Овом дефиницијом периода уствари је представљено да су вредности елонгације x у тренутку t и $t + T$ једнаке. У складу са тим да је елонгација задата косинусном функцијом, следи да постоји разлика за 2π фаза t и $t + T$ разликују за 2π , тј. да важи:

$$\omega t + \varphi + 2\pi = \omega(t + T) + \varphi \quad (2.2.5.)$$



Слика 2.2.3. (а) Зависност елонгације тела које врши просто хармонијско кретање од времена (б) $x - t$ крива за специјални случај $x = A$ за $t = 0$ и $\varphi = 0$

Одавде се добија да је $\omega T = 2\pi$ или да је:

$$T = 2\frac{\pi}{\omega} \quad (2.2.6.)$$

Фреквенца кретања представља реципрочну вредност периода. Реч је о броју осцилација које тело направи током јединице времена:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.2.7.)$$

Јединица за фреквенцију представља s^{-1} , односно херц (Hz). Добијање линеарне брзине честице која врши просто хармонијско кретање врши се уз помоћ диференцирања једначине 2.3.4. по времену:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.2.8.)$$

док је убрзање:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.2.9)$$

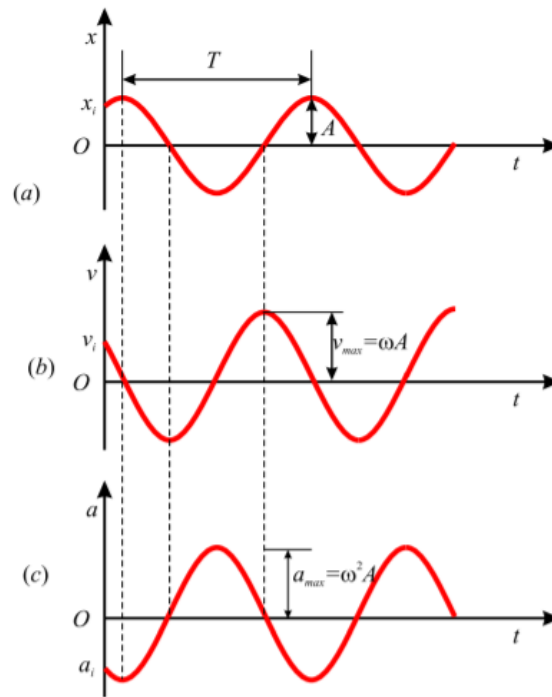
Како је $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, последња релација може бити записана у следећем облику:

$$a = -\omega^2 x \quad (2.2.10)$$

На основу једначине 2.2.8 могуће је видети да, у складу са тим да синусна функција осцилује између ± 1 , брзина за екстремалне вредности поседује $\pm \omega A$. У складу са тим да за косинусну функцију важи такође да поседује екстремалне вредности ± 1 , из једначине 2.2.9 се види да су екстремалне вредности убрзања $\pm \omega^2 A$. У складу са наведеним разматрањима амплитуде вредности брзине и убрзања представљене су следећим формулама:

$$v_{max} = \omega A \quad (2.2.11.)$$

$$a_{max} = \omega^2 A \quad (2.2.12.)$$



Слика 2.2.4. Упоредни графички приказ елонгације, брзине и убрзања код простог хармонијског осциловања (10)

Слика 2.2.4 (a), (b), (c), приказује зависности елонгације, брзине и убрзања, респективно. На основу слике могуће је видети да се фаза убрзања разликује у односу на фазу елонгације за $\pi/2$ рад, односно тамо где x поседује максимум или минимум, брзина износи нула. Истовремено, тамо где је елонгација једнака нули, брзина је максимална. Уз наведено, види се да је фаза убрзања померења за π радијана у односу на фазу елонгације, што значи да тамо где x поседује максимум, и убрзање поседује максималну вредност која има супротан предзнак у односу на знак елонгације (6).

Уколико се претпостави да у $t = 0$ почетна тачка елонгација била x_i а брзина v_i , једначине 2.2.8 и 2.2.12 дају да је:

$$x_i = A \cos \varphi \quad (2.2.13.)$$

$$v_i = -\omega A \sin \varphi \quad (2.2.14.)$$

Дељење ових двеју једначина елиминише амплитуду и даје следећу формулу:

$$\frac{v_i}{x_i} = -\omega \tan \varphi, \text{ тј.:}$$

$$\tan \varphi = \frac{v_i}{\omega x_i} \quad (2.2.15.)$$

Уколико се ипак квадрирају, па се подели друга са ω^2 и након тога се саберу, добиће се:

$$x_i^2 + \left(\frac{v_i}{\omega^2}\right)^2 = A^2 \cos^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi \quad (2.2.16.)$$

Уколико искористимо идентитет $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, а за амплитуду се добија:

$$A = \sqrt{x_i^2 + \left(\frac{v_i}{\omega^2}\right)^2} \quad (2.2.17.)$$

У складу са чињеницом да је веза фреквенције и периода важи формула $T = \frac{2\pi}{\omega}$, док за кретање тела са масом m окаченог о опругу крутости k , важи формула $\omega^2 = \frac{k}{m}$, његов период и фреквенција приказују се са следеће две формуле:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.2.18.)$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.2.19.)$$

Из наведених формула види се да су период и фреквенција условљени само његовом масом m и крутошћу опруге k . Другачије речено, фреквенција и период независни су од амлитуде кретања (18).

2.3. Енергија простог хармонијског осцилатора

У складу са чињеницом да се сматра да на тело које се креће по закону простог хармонијског осцилатора, сила трења не делује, може се очекивати да оно има константну укупну механичку енергију (15).

Кинетичка енергија оваквог осцилатора је:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2 (\omega t + \varphi) \quad (2.3.1.)$$

Са друге стране, потенцијална енергија оваквог осцилатора представљена је формулом:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2 (\omega t + \varphi) \quad (2.3.2.)$$

Посматрањем формула можемо приметити како и кинетичка и потенцијална енергија поседују величине које су позитивне. У складу са тим да је $\omega^2 = \frac{k}{m}$, укупна механичка енергија за осцилатор износи:

$$E = E_k + U = \frac{1}{2} k A^2 [\sin^2 ((\omega t + \varphi) + \cos^2 ((\omega t + \varphi))] \quad (2.3.3.)$$

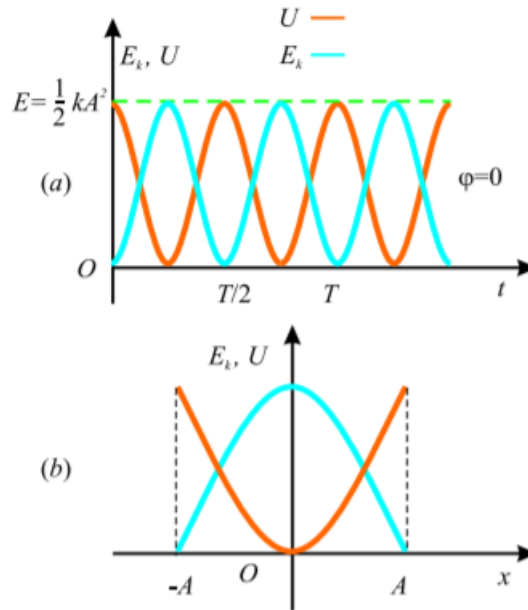
Уколико се има у виду да је израз у угластој загради у складу са основним тригонометријским идентитетом једнак јединици, добија се следећа формула за укупну енергију:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \quad (2.3.4.)$$

Према томе могуће је извести закључак да укупна механичка енергија простог хармонијског осцилатора представља константу кретања и да је пропорционална квадрату амплитуде. У складу са чињеницом да укупна енергија представља збир кинетичке и потенцијалне енергије, долазимо до тога да постоји однос да онда када је кинетичка енергија велика, потенцијална енергија је пропорционално мала. Према ономе што је већ познато када је у питању кретање хармонијског осцилатора, евидентно је да је у амплитудним тачкама, када је $x = \pm A$, укупна енергија једнака максималној потенцијалној енергији, односно $E = U_{max} = \frac{1}{2} k A^2$, обзиром да у тим тачкама важи да је $v = 0$. Са друге стране, у равнотежном положају, потенцијална енергија износи нула, јер је $x = 0$, а укупна механичка енергија једнака је максималној кинетичкој енергији:

$$E = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} A^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad (2.3.5.)$$

Зависност потенцијалне и кинетичке енергије од времена представљена је на слици 2.3.1 (а) за случај када почетна фаза $\varphi = 0$. Као што је већ напоменуто E_k и U представљају позитивне величине, чији је збир константно једнак $\frac{1}{2}kA^2$, односно укупној механичкој енергији система. У другом делу слике представљена је промена E_k и U са елонгацијом. Енергија се непрестано трансформише између потенцијалне енергије која се акумулира у оквиру деформисане опруге и кинетичке енергије тела које она покреће (18).



Слика 2.3.1. а) Зависност E_k и U од времена за случај када је почетна фаза једнака нули, (b) Зависност E_k и U од елонгације (18)

Закон одржања енергије може бити искоришћен како би се одређивала брзина за произвољну елонгацију система који осцилује на овај начин, полазећи од израза за укупну енергију:

$$E = E_k + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad (2.3.6.)$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} (A^2 - x^2) = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad (2.3.7.)$$

3. Историјат развоја клатна

Један од најзначајнијих примена клатна била је апарат за сеизмометре из I века кинеског научника Хан Династије, Зханг Хенга (Zhang Heng). Његова функција је била да се помери и активира један од низова полуга након што је узнемирен потресом земљотреса. Отпуштена помоћу полуге, мала лоптица би се искотрљала из уређаја у облику урне у једну од осам металних жабица испод, на осам тачака компаса, означавајући правац из кога је долазио земљотрес (5).



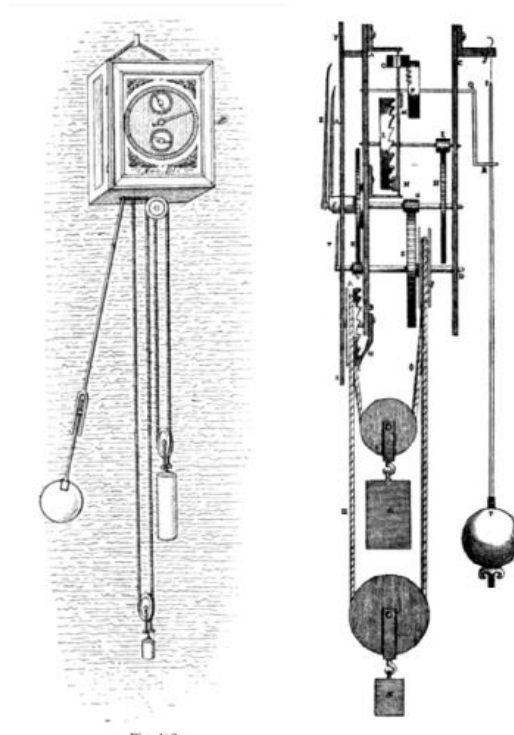
Слика 3.1. Реплика Зханг Хенговог клатна (5)

Многи извори (Good, 1998; Baker, 1961; Newton, 2004) тврде да је египатски астроном Ибн Иунус (Ibn Yunus) из петог века користио клатно за мерење времена, али је британски историчар Едвард Бернард (Edward Bernard) открио грешку код овог начина мерења и записао то у својим записима 1684 године (43).

Током ренесансе, велика ручна клатна су коришћена као извор енергије за ручне машине са наизменичним окретањем, као што су тестере, мехови и пумпе. Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci) је направио многе цртеже кретања клатна, мада није схватио њихову вредност у том времену .

Од стране италијанског научника Галилеа Галилеа (Galileo Galilei), проучаване су особине клатна током 1602. године (Morton, Charlton, 2005). Реч је о истраживачу који је први вршио проучавање особина клатна, и који је том приликом дошао до открића кључне особине која је клатно чинила корисним за време. Истовремено, он је одредио да је период кретања клатна независан од ширине замаха или масе куглице. Након што је дефинисао да је период независан од масе куглице, израчунао је да је период пропорционалан квадратном корену дужине клатна. Према његовим записима и скицама израђен је дизајн за први сат са клатном (11).

Године 1656. од стране холандског научника Кристијана Хигенса (Christiaan Huygens) направљен је први клатни сат. Реч је о великом побољшању у односу на механичке сатове који су били постојећи, обзиром да је њихова најбоља тачност била побољшана са око петнаест минута одступања у току дана, на око петнаест секунди (Drake, 2003). Примена клатна се проширила на територији Европе, јер су она накнадно уграђивана у постојеће сатове (1).



Слика 3.2. Први клатни сат (1)

Енглески научник Роберт Хук (Robert Hooke) је проучавао конусно клатно око 1666. године, које се састојало од клатна које се може слободно кретати у две димензије, док се куглица ротира у кругу или елипси (O' Connor, Robertson, 2002). Корак овог уређаја користио је као модел приликом анализирања орбиталних покрета планета (Nauenberg, 2006). Хук је предложио Исаку Њутну (Isaac Newton) 1679. године да се компоненте орбиталног покрета састоје од инерцијалног кретања дуж тангентног правца уз атрактивно кретање у радијалном правцу. Наведено је имало учешће у Њутновој формулацији закона универзалне гравитације (Nauenberg, 2004). Истовремено, Роберт Хук је имао тврдњу још од 1666. године да се клатно може користити како би се мерила сила гравитације (41).

Жан Ричер (Jean Richer) је приликом своје експедиције до Кајене, 1671. године, пронашао да клатно мери време два и по минута спорије дневно у Кајени, у односу на Париз. На основу тога је дошао до закључка како је сила гравитације у Паризу мања у односу на силу гравитације у Кајени. Исаак Њутн је 1687. године, у свом делу „Принципи Математике“ показао да је наведено последица тога што Земља не

представља праву сферу, већ је благо оборена (утрнута на половима) од дејства центрифугалне силе због ротације, чиме долази до повећавања гравитације са ширином. Преносна клатна су почела да се примењују на путовањима у удаљеним државама, у виду прецизних гравитатора намењених мерењу силе гравитације у различитим тачкама на Земљи, што је за резултат дало тачан модел облика Земље (26).

Кристијан Хигенс је седамнаест година након патентирања првог клатног сата, 1673. године објавио своју теорију клатна, под називом „Хронологија осцилаторијума“. Марин Мерсене (Marin Mersenne) и Рене Декарт (René Descartes) открили су око 1636. године да клатно није сасвим изохроно; односно да његов период расте са порастом његове амплитуде (Matthews, 1994). Хигенс је анализирао овај проблем тако што је дефинисао коју кривину мора да следи гравитација до исте тачке у истом временском интервалу, без обзира на полазну тачку; тзв. таутохрону криву. Компликована метода која је била рана употреба рачунара показала је да је ова крива циклоидна, а не кружни лук клатна), што потврђује да клатно није изохроно, а Галилеово посматрање изохронизма било је тачно само за мала осциловања (Mahoney, 2007). Кристијан Хигенс је такође решио проблем како израчунати период независног клатна (названог сводно клатно), откривајући центар осцилације и његову замењивост са тачком окретања (4).

Постојећи покрет сата фомирао је клатне кругове у веома широким луковима од око 100° (Headrick, 2002). Хигенс је показао да је то представљало извор непрецизности, узроковајући да се период мења у зависности од амплитудних промена узрокованих ситним неизбежним варијацијама у погонској сили сата (Huygens, 1958). Да би свој период био изохрон, Хигенс је поставио металне цеви у облику циклоидних одрезака поред центра у његовим сатовима, што је ограничило конопац и одвело клатно да прати циклоидни лук (Andrewes, 1994). Ово решење није било практично колико и ограничавање осциловања малим угловима од неколико степени. Реализација да су само мала осциловања била изохрона мотивисала је развој сидреног окова око 1670. године, што је смањило осциловање клатна до 4° до 6° (58).

У периоду XIX и XX века спровођена су истраживања ради побољшања клатна. Дефинисан је главни извор грешке, која није била последица термичког ширења материјала услед промене температуре околине, већ последица промене структуре материјала шипке, о коју је било окачено клатно и тиме смањено грешку у прецизним клатним сатовима (1).

Британски капетан Хенри Катер (Henry Kater) је 1818. године изумео реверзибилно клатно које је као гравиметријски инструмент служило за мерење локалног убрзања гравитације. Предност овог клатна, у односу на претходна, огледала се у чињеници да тежински центар клатна и центар осцилације не морају бити одређени, што пружа могућност веће тачности. До тридесетих година XX века, стандардан метод за мерење силе Земљине гравитације током геодетских истраживања било је Катерово клатно. Овај вид клатна данас се примењује искључиво како би се демонстрирали принципи клатна (20).



Слика 3.1.3. Фукоово клатно (50)

Жан Бернард Леон Фук (Jean Bernard Leon Foucault) је 1851. године показао да осцилација клатна, попут жироскопа, тежи да остане константна без обзира на кретање, и да се то може користити за демонстрацију ротације Земље. Он је обесио клатно слободно да се окреће у две димензије (касније названо Фукоово клатно) из куполе Пантеона у Паризу. Дужина кабла била је 67 m. Када је клатно покренуло покрет, посматрано је равно кретање или окретање 360° у смеру казаљке на сату за око 32 сата (Rubin, 2007). Ово је била прва демонстрација ротације Земље која није зависила од небеских опсервација (Aczel, 2003), и избила је "клатноманија", јер су Фукоова клатна била приказана у многим градовима (50).

Са почетком 1900. године дошло је до коришћења материјала за шипке клатна који имају већи отпор на топлоту. Првенствено су биле у питању легуре никла и челика, након тога кондензованог кварца, уз помоћ којих се смањивала температура што је доводило до повећања прецизности сата (Jones, 2000). Тачност најбољих клатних сатова има кашњење од секунду годишње (51).

До повећања тачности времена дошло је осцилатором кварцног кристала који је патентиран 1921. године, док су кварцни сатови патентирани 1927. године (Marrison, 1948). Кварцним сатовима замењени су клатни сатови. После овог изума, све мање се примењују клатна и клатни сатови (51).

На рад клатна утицај имају атмосферски притисак и гравитација.

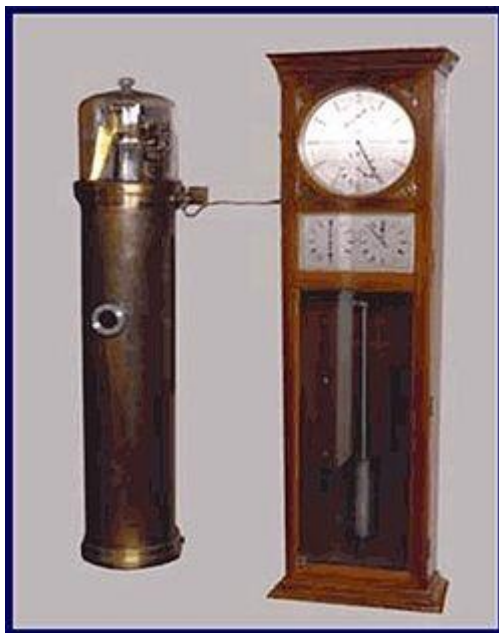
Атмосферски притисак – ефекат околног ваздуха на покретно клатно је сложен и захтева прецизно прорачунавање, али у већини сврха његов утицај на период може се објаснити помоћу три ефекта:

- Према принципу Архимеда (Archimedes of Syracuse) ефективна тежина клатна је смањена за плутање ваздуха који се помера, док маса (инерција) остаје иста, смањујући убрзање клатна током нихања и повећање периода. То зависи од притиска ваздуха и густине клатна, али не и његовог облика.
- Клатно носи количину ваздуха са њом док се врти, а маса овог ваздуха повећава инерцију клатна, поново смањује убрзање и повећава период. То зависи и од његове густине и облика.
- Вискозни отпор ваздуха успорава брзину клатна. Ово има занемарљив ефекат на период, али расипање енергије смањује амплитуде. Ово смањује К-фактор (фактор који представља отпорност кретања клатна прилоком осциловања) клатна, захтева јачу погонску силу од механизма сата како би се одржао, што доводи до повећаног поремећаја у периоду.

Гравитација – Клатна су погођена променама у гравитационом убрзању, која се разликују за чак 0,5% на различитим локацијама на Земљи, тако да се прецизни клатни сатови морају поново калибрисати након померања (навијања). Чак и померање клатног сата на врх високе зграде може проузроковати губитак мерљивог времена од смањења гравитације (56).

Тачност клатна као мерача времена – тимски елементи у свим сатовима, који укључују клатне, балансне точкове, кварцне кристале који се користе у кварцним сатовима, па чак и вибрирајући атоми у атомским сатовима, у физици се називају хармонијски осцилатори. Разлог је у томе што се хармонијски осцилатори користе у сатовима је то што они вибрирају или осцилују на одређеној резонантној фреквенцији или времену и отпорно осцилују на друге брзине. Међутим, резонантна фреквенција није бесконачно "оштра". Око резонантне фреквенције постоји уски природни појас фреквенција (или периода), који се назива ширина резонанца или пропусни опсег, где ће осцилатор хармоније осцилирати (Jespersen, Firtz-Randolph, Robb, 1999). У сату, стварна фреквенција клатна може се насумично разликовати у оквиру ове ширине резолуције као одговор на поремећај, али на фреквенцијама изван овог опсега, сат неће функционисати уопште.

Кратки сат синхронизованог клатна, најтачнији клатни сат икада направљен налази се у музеју у *NIST* у Сједињеним Америчким Државама. Овај сат чувао је време са два синхронизована клатна. Главно клатно у резервоару за вакуум (лево) није имало практично било какве поремећаје и контролисало је клатно клизача у торбици (десно) које је вршило импулсне и временске задатке. Његова тачност је била око секунде годишње.



Слика 3.1.4. Кратки сат синхронизованог клатна (56)

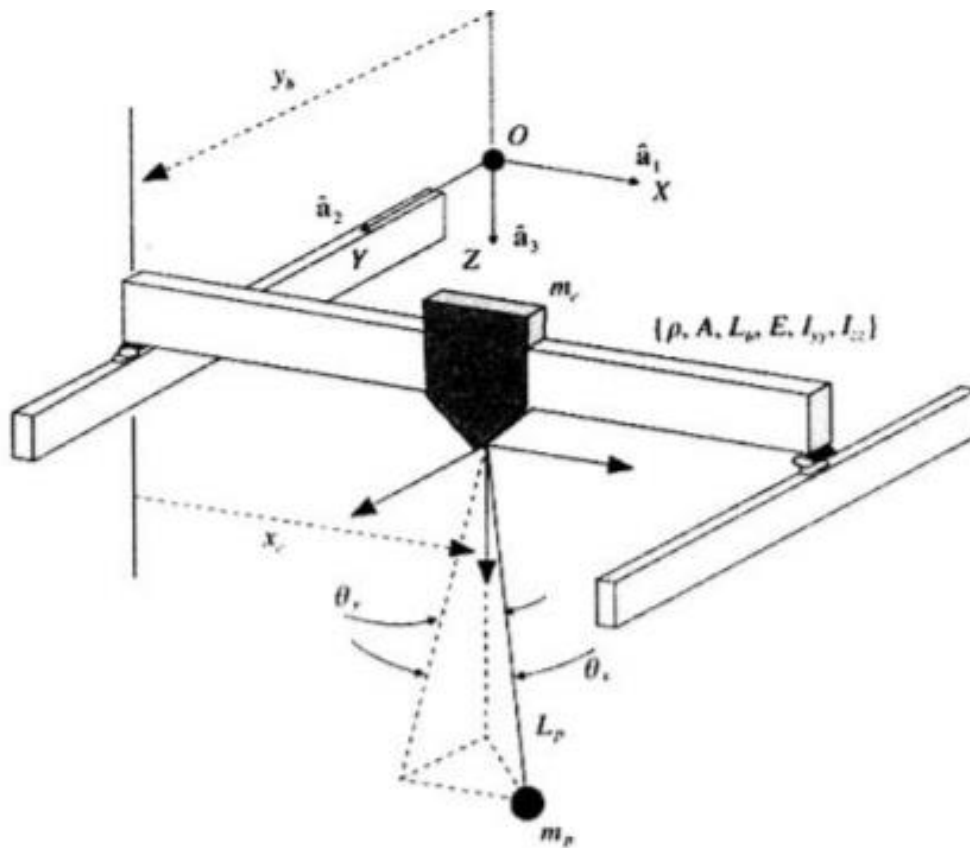
Мерење отпорности хармоничног осцилатора на поремећајима у периоду његовог осциловања је безразмерни параметар који се назива K фактор, и једнак је резонантној фреквенцији подељеној са резонантном ширином. Што је већи K , то је мања резонанца ширине, а што је константа фреквенција или период осцилатора за одређени поремећај. Реципрочност K је приближно пропорционална ограничавајућој тачности која се може остварити од стране хармоничног осцилатора као временски стандард (58).

4. Проблеми покретног клатна

Као што је познато, математичко клатно представља основни проблем аналитичке механике. Уколико се претпостави да се тачка вешања клатна креће по крутој подлози добија се сложенији динамички проблем, који може бити искоришћен за моделирање подсистема дизалица са аспекта аутоматизације и оптимизације процеса истовара расутих материјала (7).

Разматрање овакве физичке поставке клаћења терета још увек представља основу за формирање алгоритама у систему управљања кретања колица за спречавање клаћења терета.

Разматрање осцилација еластичне структуре услед дејства покретног система који у себи садржи терет коме је омогућено клаћење има велику примену у радовима из проблематике покретног оптерећења код дизалица.



Слика 4.1. Ву модел мосне дизалице са теретом (7)

Први овакав модел, где је објекат истраживања конструкција једногреде мосне дизалице, представљен је Огуманам постављањем диференцијалних осцилација просте греде помоћу Амилтоновог принципа (Oguamanam, Hansen, 1998). Препостављено је да се клаћење врши само у вертикалној равни, што је касније проширено на разматрање

осцилација греде у вертикалној и хоризонталној равни при чему се и клађење терета одвија просторно као што је приказано на слици 4.1 (43).

Бу је у раду увео концепт покретне матрице масе ради имплементације инерцијалних ефеката покретне масе на динамичко понашање структуре порталне дизалице. Притом, разматрани су трапезни профили брзина кретања покретног система. Решења су добијена уз помоћ нумеричке методе директне интеграције. Такође, разматран је утицај клађења терета у равни управној на осу главног носача са претпоставком познате промене угла клађења у времену по хармонијском закону. Концепт покретне матрице маса подразумева да се у укупној матрици инерције имплементира утицај покретне масе у зависности од положаја саме масе на структури. На тај начин укупна матрица инерције постаје матрица чији се елементи мењају у времену што представља веома сложен проблем са аспекта одређивања решења постављене диференцијалне једначине која описује проблем. Овде се даје предност методи Њумарна за директну интеграцију (61).

Бу је 2008. године проширио концепт покретне матрице маса на концепт покретног коначног елемента чиме се на адекватан начин симулира динамичка интеракција структуре покретне масе чиме матрица интеракције, матрица пригушења и матрица крутости система постају матрице са променљивим елементима (62)

На објекту структуре порталне дизалице истраживане су подужне и попречне осцилације структуре услед дејства покретног система који се идеализује једномасеним моделом. Утицај клађења терета у вертикалној равни је апроксимиран свођењем на еквивалентну покретну масу са претпоставком познавања функције угла клађења терета. Метода Њумарка је искоришћавана за решавање постављеног математичког модела. Концепт покретног коначног елемента, као иновативан и савремен приступ послужио је да се поново размотри проблем осцилација просте греде услед дејства покретне масе која се креће променљивом брзином (8).

Симулација циклуса кретања контејнера у софтверу ADAMS, са могућношћу клађења и утицај на животни век порталне дизалице приказана је у истраживању Георгијевића и сарадника (10).

Јазид је разматрао осцилације носеће конструкције порталне дизалице услед клађења терета и еластичности ужетног система. Једначине кретања целог система су изведене уз помоћ методе коначних елемената и Лагранжевих једначина (63).

Решења су добијена нумерички, комбинацијом методе Њумарка и методе Рунге-Кута. Закључено је да еластичност структуре утиче на динамичко понашање клатна и обрнуто.

5. Теоријска анализа клатна

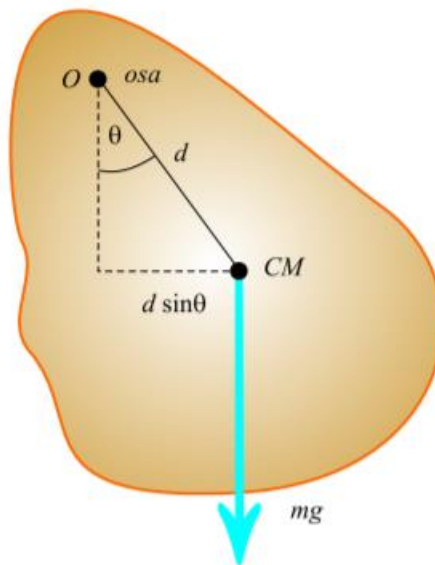
5.1. Врсте клатна

Већ је наглашено да клатно под дејством Земљине теже периодично осцилује. Осцилације које клатно врши се временом пригушују због присуства силе трења. У осовини клатна, као и трења између клатна и средине. У оквиру физике познате су следеће врсте клатна:

- Физичко клатно
- Торзионо клатно
- Математичко клатно.

5.1.1. Физичко клатно

Физичко клатно подразумева да је физички систем састављен од масивног крутог тела, које осцилује око непокретне хоризонталне осе у пољу силе Земљине теже. На слици 5.1.1. дат је приказ физичког клатна (4).



Слика 5.1.1. Физичко клатно

Како би кретање било осцилаторно, оса око које клатно осцилује не сме пролазити кроз центар масе крутог тела, и овде се у оквиру прве апроксимације не узимају у обзир силе трења које се појављују приликом кретања клатна. Како би се описала инерцијана својства које круто тело поседује приликом ротационог кретања, уводи се моменат инерције крутог тела који се означава са J , у односу на осу око које клатно осцилује. Период осциловања физичког клатна приказан је са формулом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \quad (5.1.1.)$$

где l представља нормално растојање осе ротације у односу на центар масе крутог тела, m његову масу, док је g убрзање силе Земљине теже. У складу са формулом 5.1.1, неопходно је одређивање периода T , а како би оно било одређено неопходно је одређивање величина J , l и m . Одређивање масе клатна је једноставно, међутим није једноставно одређивање момента инерције J и величине m . Како би се наведене величине дефинисале, долази до примене тзв, реверзионог клатна, које је засновано на чињеници да постоји могућност проналажења минимум две осе око којих би клатно осциловало са истим периодом, за било које круто тело. Из формуле 5.1.1, закључује се како неће доћи до промене периода T , уколико не дође до промене количника J/l . У тој ситуацији, за две осе ротације чији су моменти инерције J_1 и J_2 чија су растојања од центра масе l_1 и l_2 онда важи формула $\frac{J_1}{l_1} = \frac{J_2}{l_2}$.

Према Штајнеровој теореме (Steiner's theorem), могуће је извести следећу формулу:

$$J_i = J_C + ml_i^2 \quad i = 1, 2 \quad (5.1.2.)$$

где J_C представља момент инерције на осу која пролази кроз центар масе. На основу наведених релација формула 5.1.1. може бити представљена у следећем облику:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}} \quad (5.1.3.)$$

У овој формули је $l_0 = l_1 + l_2$ и представља нормално растојање међу две паралелне осе око којих клатно осцилује са истим периодима. Као што је могуће видети, формула 5.1.3 је једноставнија у односу на формулу 5.1.1, обзиром да захтева искључиво познавање величине l_0 , која се у ствари своди на мерење растојања међу носачима А и Б.

Одређивање дужине l_0 у практичном случају врши се на следећи начин. Произвољно се врши фиксирање положаја једне осе (оса aa' на слици 5.1) уз помоћ завртња на носачу А. Након тога се око наведене осе врши мерење периода осциловања уз помоћ познате методе мерења укупног времена за n осцилација (обично за 10 осцилација) и његовим дељењем са истим. По завршетку одређивања периода осциловања око осе aa' , неопходно је одређивање положаја друге осе (оса bb' на слици 5.1) уз помоћ завртња на носачу Б, док носач А остаје фиксиран, а око које клатно осцилује са истим периодом као и око осе aa' . Положај осе bb' смештен је са супротне стране у односу на осу aa' , у односу на центар масе клатна. При одређивању положаја осе bb' неопходно је мало експериментисања са циљем да се постигне да период осциловања буде идентичан као код осе aa' . Након тога, обавља се мерење растојања l_0

између носача А и В. На крају, коришћењем формуле 5.1.3, долази се до израза за гравитационо убрзање Земљине теже:

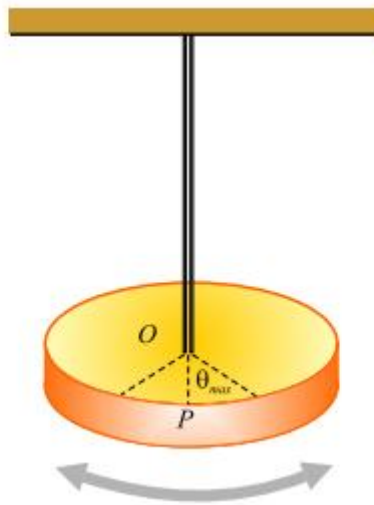
$$g = \frac{4\pi^2 l_0}{T^2} \quad (5.1.4.)$$

у оквиру кога су све величине које се налазе на десној страни познате.

5.1.2. Торзионо клатно

Торзионо клатно приказано је на слици 5.1.2, и код њега је тело, које поседује масу m , закачено о неистегљиву нит, закренуто под одређеним углом θ , услед чега због упредања жице, о коју је тело окачено, долази до реституционог (повратног) момента који је пропорционалан углу упредања (18).

$$M = -k\theta \quad (5.1.2.1.)$$



Слика 5.1.2. Осциловање торзионог клатна око линије OP са амплитудом θ_{max} (18)

Величина k представља торзиону константу жице. Примењивањем другог Њутновог закона добија се:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta \quad (5.1.2.2.)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{I}\theta \quad (5.1.2.3.)$$

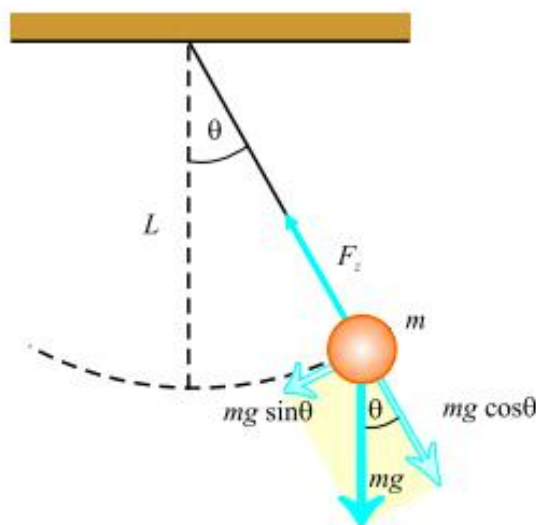
У овој ситуацији добијена је једначина којом је описано хармонијско осциловање, у овом случају са угаоном учесталошћу $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$, услед чега се период торзионог клатна представља са:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \quad (5.1.2.4).$$

Оно што је разлика у односу на претходне формуле, јесте чињеница да изрази не важе у апроксимацији малих углова, све док је реч о областима у којима су деформације жице еластичне.

5.1.3. Математичко клатно

Математичко клатно састављено је од тела које поседује масу m (које сматрамо материјалном тачком), које је окачено о неистегљиву и танку нит, која поседује дужину l , у пољу Земљине теже. Претходно описано математичко клатно приказано је на слици 5.3.1. (3).



Слика 5.1.3. Математичко клатно (3)

Кретање математичког клатна, које се одвија у вертикалној равни, након извођења из равнотежног положаја, се даље одвија под дејством силе гравитације. У ситуацијама када су мали углови отклоне, овакав систем креће се у виду слободног осцилатора.

У овом случају на тело делује сила затезања F_z , и сила гравитације означена са mg . Тангенцијална компонента силе земљине теже $mg \sin \theta$, увек има усмерење према равнотежном положају, $\theta = 0$, односно увек је супротно усмерена у односу на вектор помераја. На основу тога тангенцијална компонента гравитационе силе, уствари представља реституциону силу, и у складу са тим други Њутнов закон, за кретање по тангенти има формулу:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad (5.1.3.1.)$$

у којој је s део лука који је тело масе m прешло, а знак минус (-) показује да је тангенцијална сила усмерена према равнотежном положају. У складу са чињеницом да код малих углова важи да је $s = L\theta$, добија се следећа једначина:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta \quad (5.1.3.2.)$$

Када се први пут види, делује да овом формулом није описано линеарно хармонијско осциловање, обзиром да на десној страни не постоји величина од које се тражи извод на другој страни једначине, него њен синус. У складу са тим да је претпостављено како је угао одклона мали, $\sin \theta$ може да се апроксимира са θ , и онда формула кретања математичког клатна у том случају гласи:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta \quad (5.1.3.3.)$$

Према чињеници да наведена формула има форму једначине којом је описано кретање линеарног хармонијског осцилатора, изводи се закључак да се код малих углова одклона, односно амплитуда, кретање математичког клатна своди на линеарно хармонијско осциловање. Уколико се сумира све претходно наведено, долази се до тога да је решење последње диференцијалне једначине:

$$\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.1.3.4.)$$

у којој $\theta_{\max}$ представља максималну угаону елонгацију.

Угаона фреквенција представља се са:

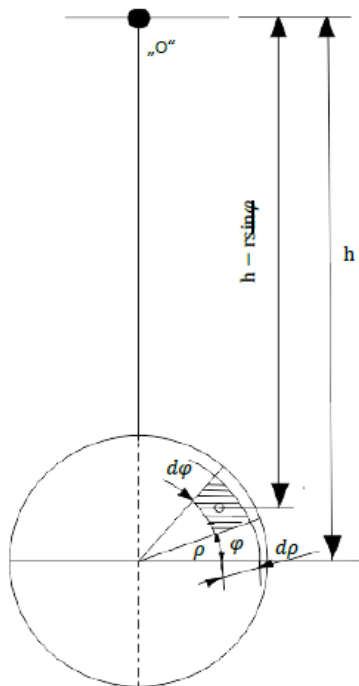
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (5.1.3.5.)$$

У складу са наведеним период осиловања клатна¹ представљен је формулом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (5.1.3.6.)$$

5.2. Теоријска анализа експерименталног система

На слици 5.2.1. приказано је физичко клатно.



Слика 5.2.1. Физичко клатно(49)

$$d_m = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho \cdot b \cdot \gamma$$

¹ У случају да се формула 4.3.1 решава без апроксимације, да су у питању мали углови за период да се добија формула $T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_{\max}}{2} + \dots \right]}$, на основу које је могуће видети да се за мале амплитудне углове добија добро позната релација за период малих осцилација математичког клатна (формула 4.3.6)

$$\begin{aligned}
dM_{o1} &= (h - \rho \cdot \sin \phi)^2 \cdot d_m \\
dM_{o1} &= h^2 \cdot d_m - 2\rho \cdot h \cdot \sin \phi \cdot d_m + \rho^2 \cdot \sin^2 \phi \cdot d_m \\
M_{o1} &= \iint h^2 \cdot d_m - 2 \iint \rho \cdot h \cdot \sin \phi \cdot d_m + \iint \rho^2 \cdot \sin^2 \phi \cdot d_m \\
M_{o1} &= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned} \tag{5.2.1.}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint h^2 \cdot d_m = \iint h^2 \cdot \rho \cdot b \cdot d\phi \cdot d\rho \cdot \gamma \\
I_1 &= h^2 \cdot b \cdot \gamma \cdot \left[\int_0^r \rho \cdot d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \right] \\
I_1 &= h^2 \cdot b \cdot \gamma \cdot \left[\frac{1}{2} r^2 \cdot 2\pi \right] \\
I_1 &= h^2 \cdot b \cdot \gamma \cdot r^2 \cdot \pi = r^2 \cdot \pi \cdot b \cdot \gamma \cdot h^2 \\
I_1 &= m_d \cdot h^2
\end{aligned} \tag{5.2.2.}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= -2 \iint \rho \cdot h \cdot \sin \phi \cdot d_m \\
I_2 &= -2 \iint \rho \cdot h \cdot \sin \phi \cdot b \cdot \gamma_m \cdot \rho \cdot d\phi \cdot d\rho \\
I_2 &= -2 \cdot h \cdot b \cdot \gamma_m \int \rho^2 \cdot d\rho \int \sin \phi \cdot d\phi \\
I_2 &= -2 \cdot h \cdot b \cdot \gamma_m \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^r \cdot [-\cos \phi]_0^{2\pi} \\
I_2 &= -2 \cdot h \cdot b \cdot \gamma_m \cdot \left[\frac{1}{3} r^3 \right] \cdot [-(1-1)] = 0
\end{aligned} \tag{5.2.3.}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \iint \rho^2 \cdot \sin^2 \phi \cdot d_m \\
I_3 &= \iint \rho^2 \cdot \sin^2 \phi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi \cdot b \cdot \gamma_m \\
I_3 &= b \cdot \gamma_m \cdot \int_0^r \rho^3 \cdot d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \cdot d\phi \\
I_3 &= b \cdot \gamma_m \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot r^4 \right] \cdot \left[\frac{\sin \chi \cdot \cos \chi}{2} \right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned} \tag{5.2.4.}$$

$$M_{o1} = m_d \cdot h^2 \tag{5.2.5.}$$

Елементарна маса шипке:

$$d_m = r_s^2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dy.$$

Елементарни момент инерције шипке:

$$dl\check{s} = y^2 \cdot d_m$$

$$dl\check{s} = r_s^2 \cdot \pi \cdot \rho_s \cdot y^2 \cdot dy.$$

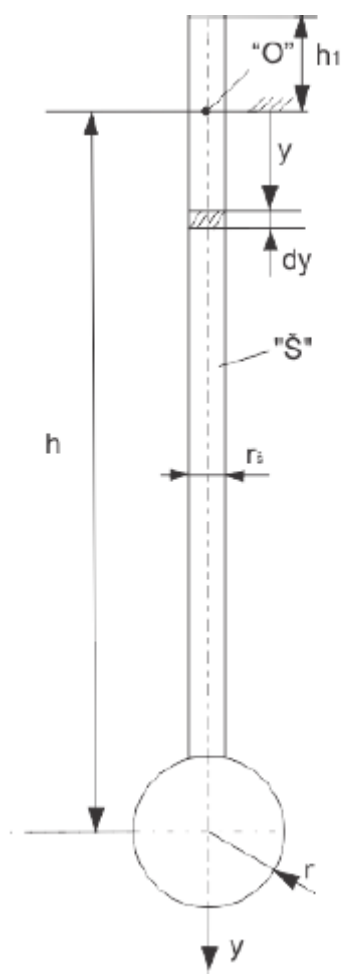
Момент инерције шипке:

$$l\check{s} = r_s^2 \cdot \pi \cdot \rho_s \cdot \int_{-h_1}^{(h-r)} y^2 \cdot dy$$

$$l\check{s} = r_s^2 \cdot \pi \cdot \rho_s \cdot \frac{1}{3} \cdot [y^3]_{-h_1}^{(h-r)}$$

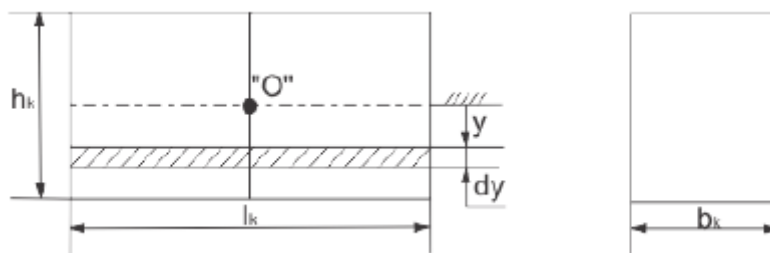
$$l\check{s} = \frac{1}{3} \cdot r_s^2 \cdot \pi \cdot \rho_s \cdot [(h-r)^3 + h_1^3]$$

$$\rho_s = 7850 \frac{kg}{m^3} \rightarrow \text{густина материјала шипке}$$



Слика 5.4.2. Физичко клатно са датим вредностима (49)

Момент инерције коцке:



Слика 5.4.3. Коцка са датим вредностима

$$dm_k = l_k \cdot b_k \cdot \rho_k \cdot dy$$

$$dl_k = l_k \cdot b_k \cdot \rho_k \cdot y^2 \cdot dy$$

$$I_k = l_k \cdot b_k \cdot \rho_k \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \cdot dy$$

$$I_k = l_k \cdot b_k \cdot \rho_k \cdot \frac{1}{3} \cdot [y^3]$$

$$I_k = \frac{1}{3} \cdot l_k \cdot b_k \cdot \rho_k \cdot h_k^3$$

$$I_k = \frac{1}{12} \cdot m_k \cdot h_k^2 \quad (5.2.6.)$$

Масени моменти инерције клатна:

$$M = M_D + M_S + M_K \quad (5.2.7.)$$

а) Момент инерције диска:

$$M_D = I_D = m_d \cdot h^2 \quad (5.2.8.)$$

m_d – маса диска

h - растојање од центра обртања до центра диска

б) Момент инерције шипке:

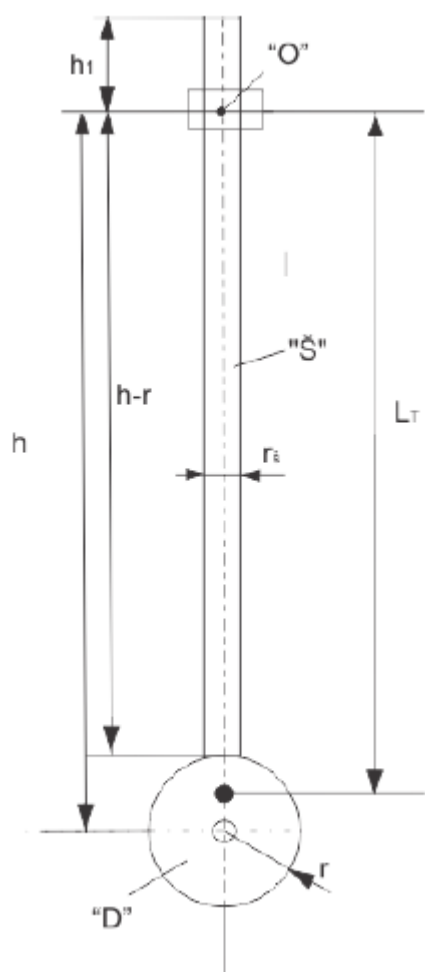
$$I_s = \frac{1}{3} \cdot r_s^2 \cdot \pi \cdot \rho_s \cdot [(h-r)^3 + h_1^3] \quad (5.2.9.)$$

в) Момент инерције коцке:

$$I_k = \frac{1}{12} \cdot m_k \cdot h_k^2 \quad (5.2.10.)$$

$$I = I_D + I_S + I_K \quad (5.2.11.)$$

Тежиште клатна:



$$m_D \cdot h + \rho_S \cdot r_S^2 \cdot \pi \cdot (h - r) - \rho_S \cdot r_S^2 \cdot \pi \cdot h_1 = (m_S + m_D) \cdot L_T$$

$$L_T = \frac{m_D \cdot h + \rho_S \cdot r_S^2 \cdot \pi \cdot (h - r - h_1)}{m_S + m_D}$$

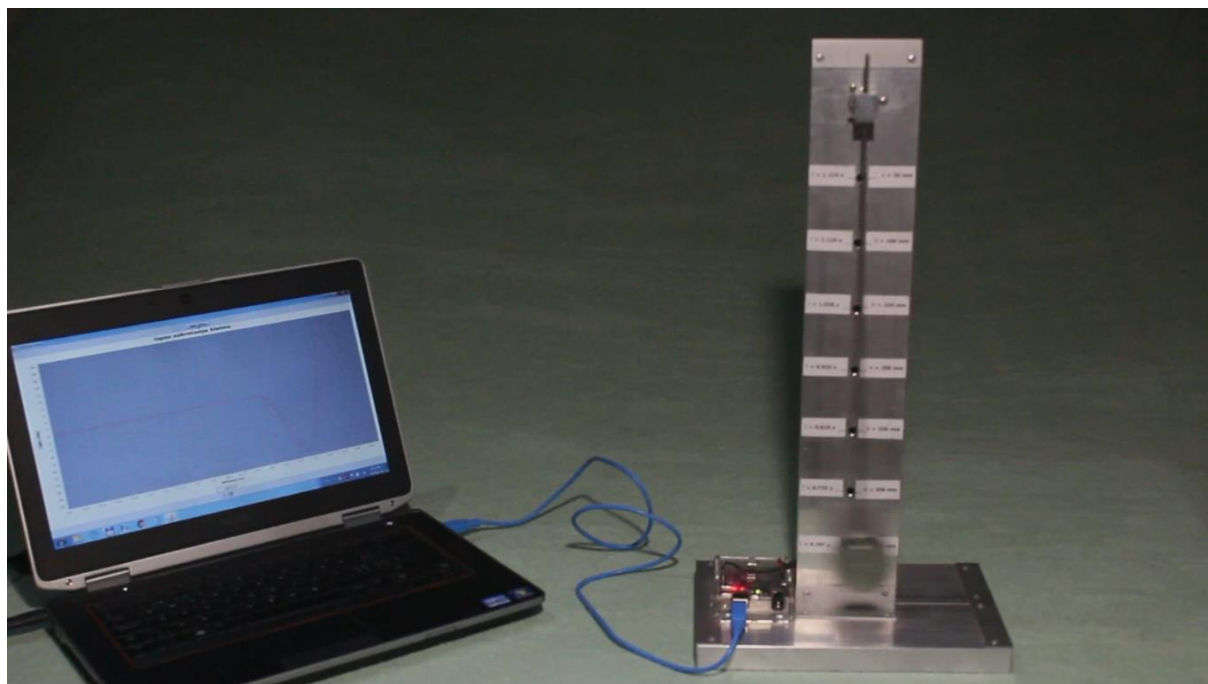
Период осциловања клатна (хармонијске осцилације)

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot L_T}} \quad (5.2.12.)$$

Слика 5.2.4. Тежиште клатна (49)

6. Физичко клатно са „Ардуино физичко-рачунарском платформом“

Физичко клатно приказано на слици 6.1. је опремљено ротационим енкодером и пратећом ардуино електроником. Прорачун теоријског периода осциловања је одрађен за 7 карактеристичних положаја клатна.



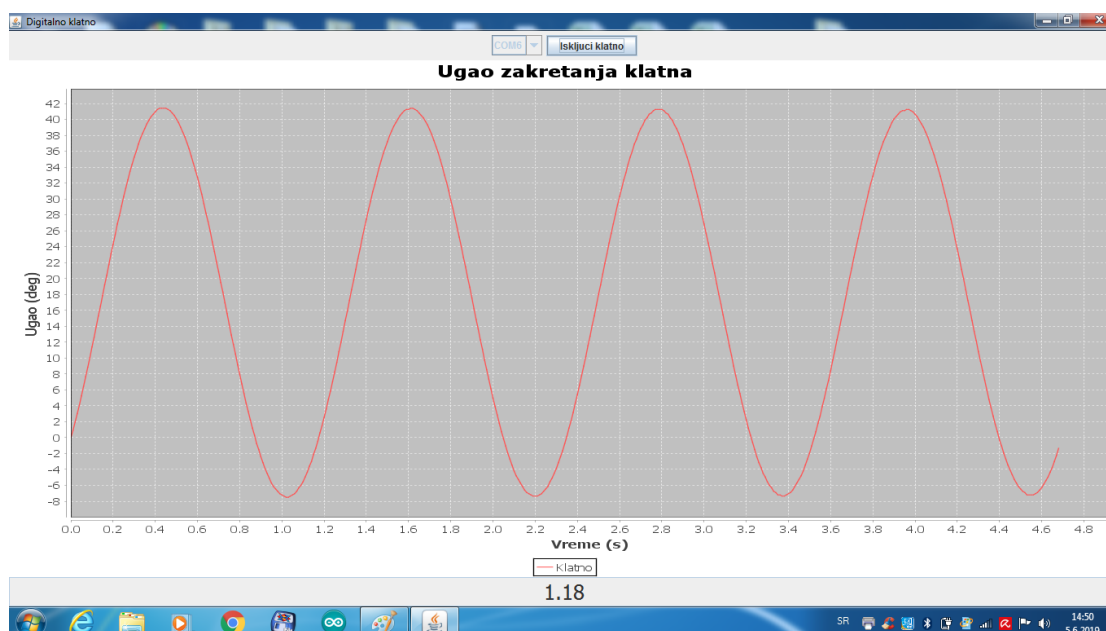
Слика 6.1. Физичко клатно са пратећом опремом

Потребне компоненте да би систем функционисао су:

- Рачунарска компонента са инсталираним програмом за приказивање позиције клатна и вредности периода осциловања,
- Клатно са физичко-рачунарском опремом.

6.1. Рачунарска компонента

Рачунар се са клатном повезује каблом, а пратећи софтвер приказује угао измештања клатна у временском домену и вредност периода осциловања клатна, у секундама. Програм је написан у „Java“ програмском пакету. Након повезивања клатна са рачунаром, потребно је укључити програм (у овом случају програм „Клатно“) након тога пустити тело да осцилује. На екрану се може читавати угао измештања клатна као и период осциловања (слика 6.1.1.).



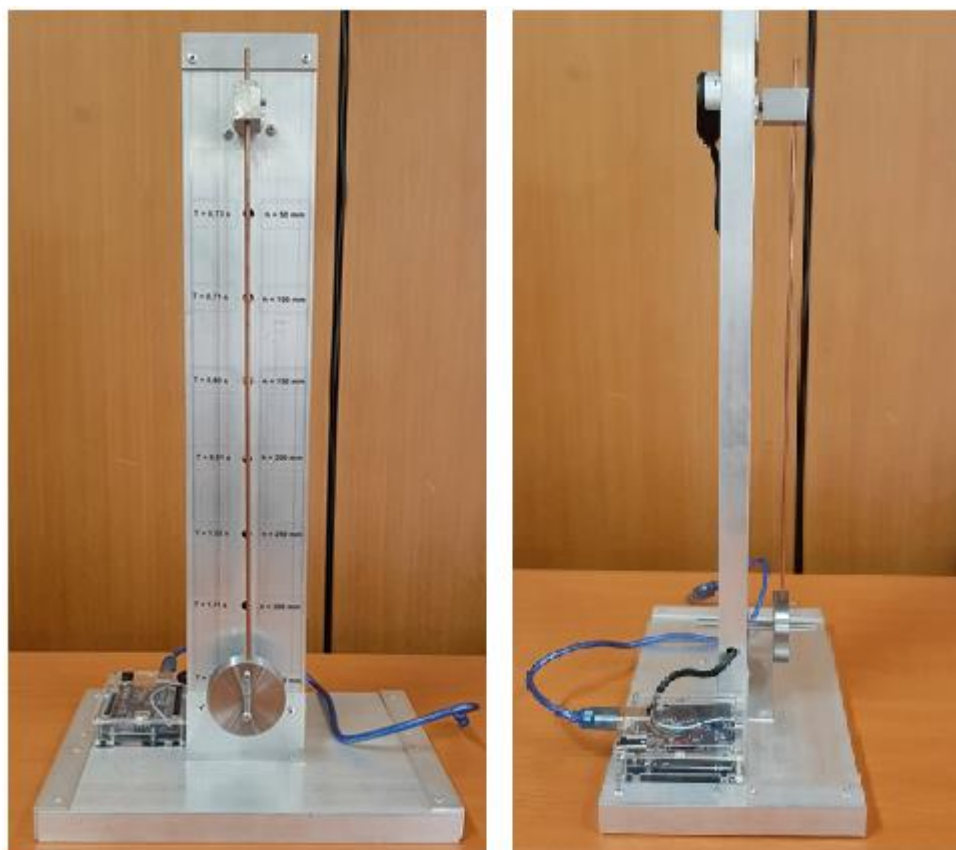
Слика 6.1.1. Програм за читавање периода осциловања у јединици времена

6.2. Клатно са физичко-рачунарском опремом

Клатно је опремљено:

- ротационим енкодером (ротациони механички елементи за употребу у електротехници и електроници, као што су: бројачи брзине, мерачи угла померања, елементи регистрације ротационог правца, итд. Мерни сигнали се обрађују у NC управљању и PLC аутоматима, или се једноставно исписују на дисплеју) и
- ардуино електроником (ардуино је електронска платформа заснована на хардверу и софтверу који је једноставан за коришћење. Ардуино плоче могу да читају улазе-светло на сензору, прст на дугмету или електронску поруку- и претварају га у одређени излаз-активирањем мотора, укључивањем ЛЕД-а, објављивањем нечега на мрежи. Ардуино се састоји од физичке матичне плоче, која се често назива микроконтролер, и команда софтвера, или IDE-Integrated Development Environment, који се користи на вашем рачунару и служи са писање и учитавање рачунарског кода на физичку плочу).

Платформа је приказана на слици 6.2.1.



Слика 6.2.1. Физичко клатно

На десној страни мерног стуба су исписане вредности висине (h) од тачке вешања до центра диска, док се на левој страни налазе теоријске вредности периода осциловања (T). При прорачуну су узете у обзир димензије и масе компоненти клатна (m_d , m_s , m_k) као и масени моменти инерције покретних делова (I_d, I_s, I_k). На основу овога добијен је укупни момент инерције

$$I = I_d + I_s + I_k, \quad \text{формула 6.2.1.}$$

а даљим математичким прорачуном и вредност редуковане дужине физичког клатна, тј. растојање од тачке вешања до тежишта клатна.

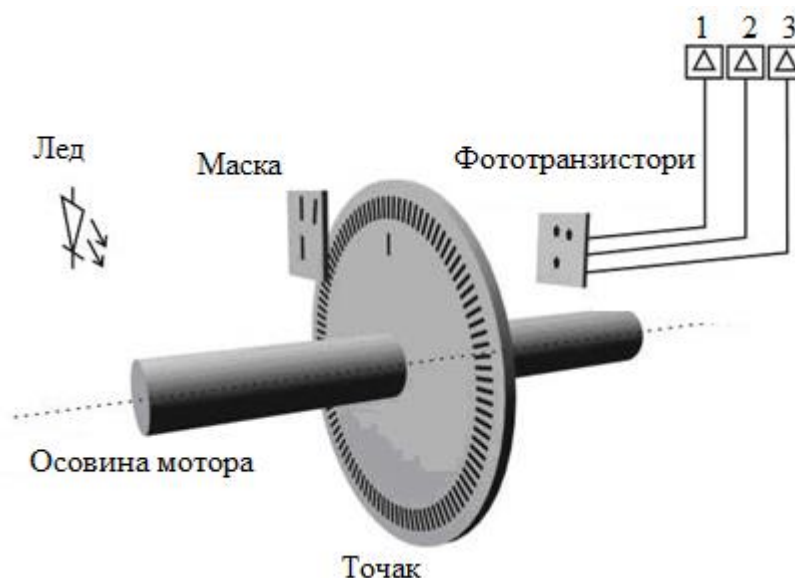
$$L_T = \frac{m_d \cdot h + \rho_s \cdot r_s^2 \cdot \pi \cdot (h - r - h_1)}{m_s + m_d} \quad \text{формула 6.2.2.}$$

Коначно, прорачуната је и теоријска вредност периода осциловања

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot L_T}} \quad \text{формула 6.2.3}$$

6.3. Принцип рада клатна

Време периода осциловања се добија тако што се у дефинисаним временским интервалима, за време осциловања клатна читавају (бележе) тренутне вредности угла са угаоног енкодера. За уређај на ком су вршена мерења за потребе рада, коришћен је енкодер инкременталног типа. Резолуција енкодера 360 импулса по пуном кругу. Овакав тип угаоног енкодера приказан је на слици 6.3 (67).



Слика 6.3. Угаони енкодер (67)

За читавање и бележење тренутне позиције угла клатна, коришћен је Ардуино микроконтролер (Arduino uno mikrokontroler). Ардуино је испрограмиран да на сваких 10 ms(милисекунди) очита вредност позиције енкодера у том тренутку и забележи је у излазну датотеку.

7. Експериментално добијени резултати периода осциловања

Као што је напоменуто у претходној тачки, уређај пружа могућност промене висине коју дефинишу гранични положаји:

- 50 mm
- 100 mm
- 150 mm
- 200 mm
- 250 mm
- 300 mm
- 350 mm

Циљ експерименталних истраживања је одређивање земљиног убрзања на основу познате висине клатна, масе, периода осциловања...

Експерименталне вредности добијене су на два начина и то:

- На основу читавања угаоног енкодера
- На основу броја фрејмова (слика) које су настале снимањем периода осциловања.

7.1. Резултати добијени на основу читавања угаоног енкодера и броја фрејмова на основу видео снимка

Припрема експеримента подразумева подешавање уређаја и састоји из следећих корака:

- повезивање клатна и рачунара усб (USB) каблом,
- покретање програма „клатно“ на рачунару,
- позиционирање клатна у одређени положај за мерење,
- покретање осциловања клатна,
- визуелно праћење периода осциловања у радном окружењу програма „клатно“,
- након заустављања клатна, или принудног прекидања читавања у програму, вредности читане са угаоног енкодера се чувају у екстензији `xlsx` (excel фајл) где се види положај клатна у датом временском периоду.

Фајл са снимљеним вредностима, читаним са угаоног енкодера клатна, омогућава да се прецизно одреди период трајања осциловања клатна за одређени положај клатна у односу на тачку вешања.

Да би се одредила вредност периода осциловања клатна T , потребно је да се у снимљеној датотеци пронађе вредност времена на почетку периода осциловања и

вредност времена на крају периода осциловања. Разлика ове две вредности се дели са 100 (број читавања вредности са уређаја у секунди) чиме се добија вредност периода осциловања T за одређени положај клатна у односу на тачку вешања клатна.

$$T = \frac{n}{100} \quad \text{n-број читавања угаоног енкодера у трајању једног периода осциловања}$$

100- број забележених вредности читавања угаоног енкодера у секунди

За следећу методу израчунавања периода осциловања клатна користи се видео снимак осциловања клатна где се посматрају позиције максималних углова осциловања. Да би се установило време између почетка и краја периода осциловања потребно је знати број фотографија (фрејмова) које камера забележи у току једног периода, како би било могуће установити број фрејмова током периода осциловања, видео је потребно поделити на појединачне фотографије. За експеримент коришћена је камера која бележи 120 фрејмова у секунди. На основу овога и познатог броја фотографија (фрејмова) између почетка и краја периода осциловања, могуће је израчунати време трајања периода осциловања.

Период осциловања овом методом израчунава се на следећи начин:

$$T = \frac{n}{120} \quad \text{n-број снимљених слика у трајању једног периода осциловања}$$

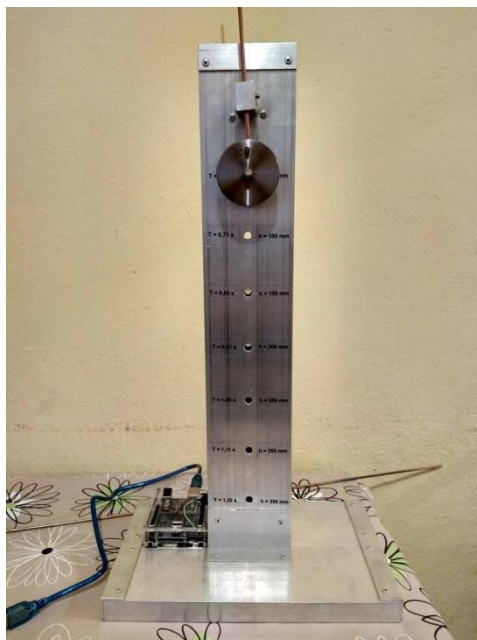
120-број снимљених слика у једној секунди видео снимка

Теоријски гледано, на основу броја вредности читавања можемо утврдити да је метода одређивања вредности периода осциловања путем видео снимка 16,667% прецизнија у односу на методу читавања вредности са угла нагиба клатна

$$\frac{120}{100} = \frac{100}{100 - x} \quad x = 16,667\%$$

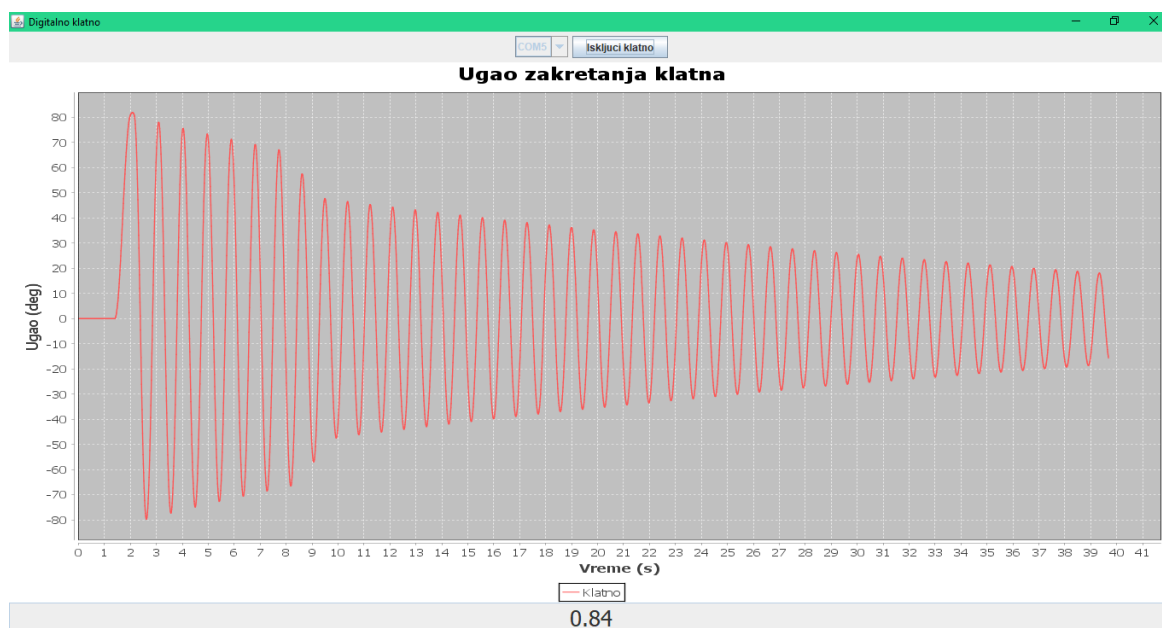
7.1.1. Период осциловања за положај клатна на растојању 50 mm од тачке вешања

На слици 7.1.1.1. приказано је физичко клатно у мировању на растојању 50 mm од тачке вешања. Из овог положаја потребно је клатно довести у положај под углом већи од 60° у односу на вертикални положај клатна у мировању.



Слика 7.1.1.1. Физичко клатно у мировању, на растојању 50 mm од тачке вешања

На слици 7.1.1.2. приказано је радно окружење програма „клатно“ на коме се види читавање тренутних вредности периода осциловања у времену.



Слика 7.1.1.2. Приказ периода осциловања на растојању 50 mm од тачке вешања

За време исцртавања периода осциловања у радном окружењу програма „клатно“, очитане вредности се бележе као *xlsx* (excel фајл). Тако забележени подаци пружају могућност израчунавања вредности периода осциловања другачијим методама. Такав начин очитавања вредности приказан је на слици 7.1.1.3.

T22														
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	1320,-1.0	почетак	1341,-123.0		1363,-8.0		1384,120.0			1405,26.0				
2	1321,-10.0		1342,-123.0		1364,0.0		1385,121.0			1406,18.0				
3	1322,-18.0		1343,-123.0		1365,9.0		1386,121.0			1407,9.0				
4	1323,-27.0		1344,-122.0		1365,9.0		1387,121.0			1408,1.0	крај			
5	1324,-35.0		1345,-120.0		1366,18.0		1388,119.0			1409,-8.0				
6	1325,-44.0		1346,-118.0		1367,26.0		1388,119.0			1410,-16.0				
7	1326,-52.0		1347,-115.0		1368,34.0		1389,118.0			1411,-25.0				
8	1327,-60.0		1348,-111.0		1369,43.0		1390,116.0							
9	1328,-67.0		1349,-107.0		1370,51.0		1391,113.0							
10	1329,-75.0		1350,-103.0		1371,58.0		1392,110.0							
11	1330,-81.0		1351,-98.0		1372,66.0		1393,106.0				1408-1320=		88	
12	1331,-88.0		1352,-92.0		1373,73.0		1394,101.0							
13	1332,-94.0		1353,-86.0		1374,79.0		1395,97.0							
14	1333,-99.0		1354,-80.0		1375,86.0		1396,91.0			T=	88/100	0,88		
15	1334,-104.0		1355,-73.0		1376,92.0		1397,85.0							
16	1335,-109.0		1356,-66.0		1377,97.0		1398,79.0							
17	1336,-113.0		1357,-58.0		1378,102.0		1399,72.0							
18	1337,-116.0		1358,-50.0		1379,106.0		1400,65.0							
19	1338,-119.0		1359,-42.0		1380,110.0		1401,58.0			100 број података у секунди				
20	1339,-121.0		1360,-34.0		1381,113.0		1402,50.0							
21	1340,-122.0		1361,-26.0		1382,116.0		1403,42.0							
22	1341,-123.0		1362,-17.0		1383,118.0		1404,34.0							
23														
24														

Слика 7.1.1.3. Приказ очитавања вредности периода осциловања на растојању 50 mm од тачке вешања

На слици 7.1.1.3. приказане су вредности очитавања времена и угла положаја клатна за положај клатна на растојању 50 mm од тачке вешања клатна. На основу вредности очитавања и информације о броју записа очитаних вредности уређаја у секунди, може се израчунати период осциловања клатна за дати положај у односу на тачку вешања.

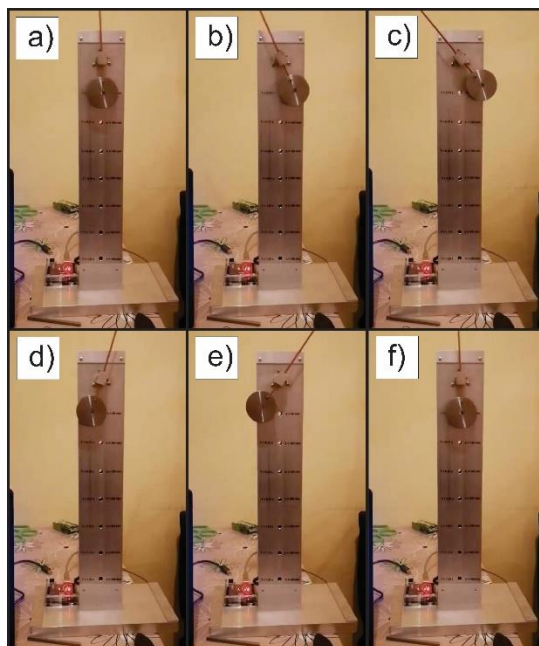
$$T = \frac{n}{100} = \frac{\text{почетак} - \text{крај}}{100} = \frac{1408 - 1320}{100} = \frac{88}{100} = 0,88$$

почетак-очитавање енкодера у почетку периода осциловања

крај-очитавање енкодера на крају периода осциловања

100- број забележених вредности очитавања угаоног енкодера у секунди

На слици 7.1.1.4. приказане су различите позиције клатна, за положај клатна на растојању од 50 mm од тачке вешања клатна, у току трајања једног периода осциловања.



Слика 7.1.1.4. Различити положаји клатна у току трајања периода осциловања
 слика а-фрејм 17; слика б-фрејм 41; слика с-фрејм 60, слика д-фрејм 89, слика е-фрејм
 101, слика ф- фрејм 120

На основу броја фрејмова забележених током једног периода осциловања клатна и информација о броју слика забележених у секунди током снимка, може се израчунати период осциловања клатна за дати положај у односу на тачку вешања.

$$T = \frac{f - a}{120} = \frac{120 - 17}{120} = \frac{103}{120} = 0.86s$$

a- број фрејма (слике) на почетку периода осциловања

f-број фрејма (слике) на крају периода осциловања

120- број снимљених слика у једној секунди видео снимка.

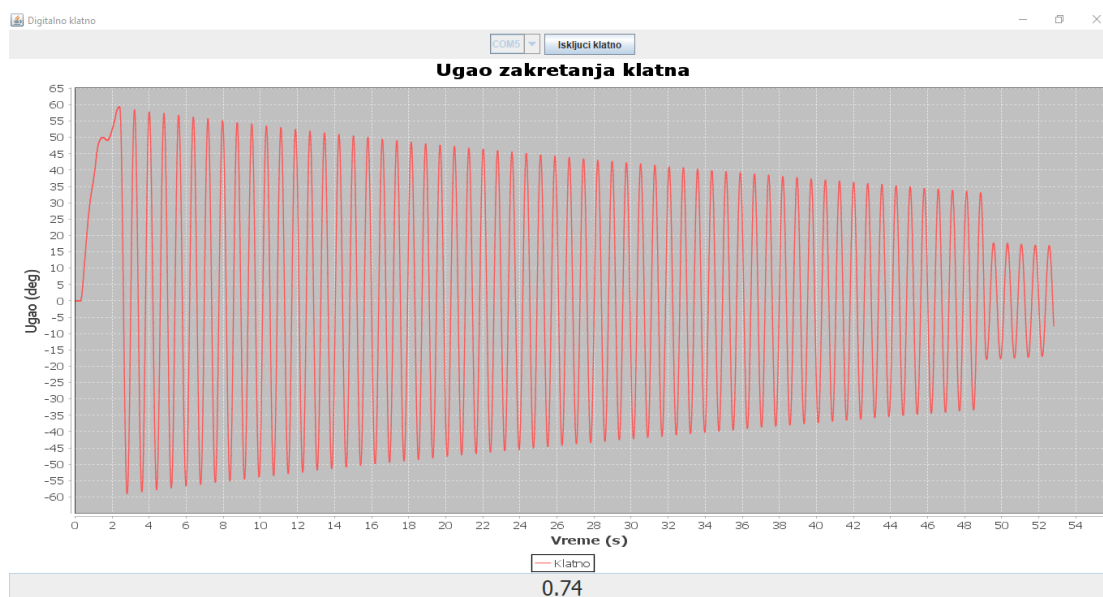
7.1.2. Период осциловања за положај клатна на растојању 100 mm од тачке вешања

На слици 7.1.2.1. приказано је физичко клатно у мировању на растојању 100 mm од тачке вешања. Из овог положаја потребно је клатно довести у положај под углом већи од 60° у односу на вертикални положај клатна у мировању.



Слика 7.1.2.1. Физичко клатно у мировању, на растојању 100 mm од тачке вешања

На слици 7.1.2.2. приказано је радно окружење програма „клатно“ на коме се види читавање тренутних вредности периода осциловања у времену.



Слика 7.1.2.2. Приказ периода осциловања на растојању 100 mm од тачке вешања

За време исцртавања периода осциловања у радном окружењу програма „клатно“, очитане вредности се бележе као *xlsx* (excel фајл). Тако забележени подаци пружају могућност израчунавања вредности периода осциловања другачијим методама. Такав начин очитавања вредности приказан је на слици 7.1.2.3.

R13		fx											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	3349,-50.0		3372,118.0		3396,-38.0		3420,-87.0						
2	3350,-41.0		3373,119.0		3397,-48.0		3420,-87.0						
3	3351,-31.0		3374,119.0		3398,-56.0		3421,-80.0						
4	3352,-22.0		3375,118.0		3399,-65.0		3422,-73.0						
5	3353,-12.0		3376,116.0		3400,-73.0		3423,-65.0						
6	3354,-2.0	почетак	3377,113.0		3401,-80.0		3424,-56.0						
7	3355,8.0		3378,109.0		3402,-87.0		3425,-48.0		100	број података у секунди			
8	3356,18.0		3379,105.0		3403,-94.0		3426,-39.0						
9	3357,28.0		3380,100.0		3404,-99.0		3427,-29.0						
10	3358,37.0		3381,94.0		3405,-104.0		3428,-20.0						
11	3359,46.0		3382,88.0		3406,-109.0		3429,-10.0						
12	3360,56.0		3383,81.0		3407,-112.0		3430,0.0	крај					
13	3361,64.0		3384,73.0		3408,-115.0		3431,9.0			3430-3354=		76	
14	3362,72.0		3385,65.0		3409,-117.0		3432,19.0						
15	3363,80.0		3386,57.0		3410,-118.0		3433,29.0						
16	3364,87.0		3387,48.0		3411,-119.0		3434,38.0						
17	3365,93.0		3388,39.0		3412,-119.0		3435,47.0			T=	76/100=	0,76	
18	3366,99.0		3389,30.0		3413,-117.0		3436,56.0						
19	3367,104.0		3390,20.0		3414,-115.0		3437,64.0						
20	3368,109.0		3391,10.0		3415,-112.0		3438,72.0						
21	3369,112.0		3392,0.0		3416,-109.0		3439,80.0						
22	3370,115.0		3393,-10.0		3417,-104.0		3440,86.0						
23	3371,117.0		3394,-19.0		3418,-99.0		3441,92.0						
24	3372,118.0		3395,-29.0		3419,-94.0								
25													

Слика 7.1.2.3. Приказ периода осциловања на растојању 100 mm од тачке вешања

На слици 7.1.2.3. приказане су вредности очитавања времена и угла положаја клатна за положај клатна на растојању 100 mm од тачке вешања клатна. На основу вредности очитавања и информације о броју записа очитаних вредности уређаја у секунди, може се израчунати период осциловања клатна за дати положај у односу на тачку вешања.

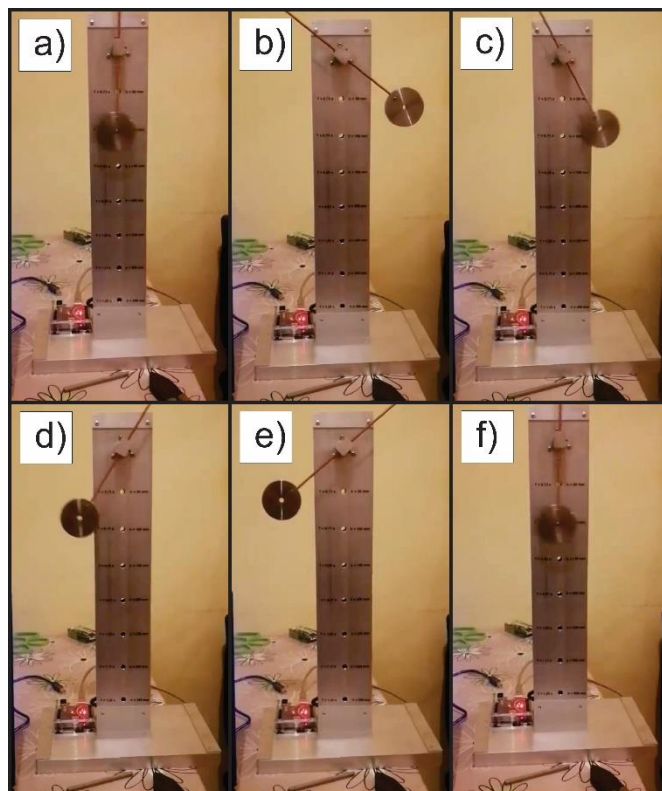
$$T = \frac{n}{100} = \frac{\text{почетак} - \text{крај}}{100} = \frac{3430 - 3354}{100} = \frac{76}{100} = 0,76$$

почетак-очитавање енкодера у почетку периода осциловања

крај-очитавање енкодера на крају периода осциловања

100- број забележених вредности очитавања угаоног енкодера у секунди

На слици 7.1.2.4. приказане су различите позиције клатна, за положај клатна на растојању од 100 mm од тачке вешања клатна, у току трајања једног периода осциловања.



Слика 7.1.2.4. Различити положаји клатна у току трајања периода осциловања
Слика а-фрејм 48, слика б-фрејм 66, слика ц-фрејм 77, слика д-фрејм 98, слика е-
фрејм 114, слика ф-фрејм 138

На основу броја фрејмова забележених током једног периода осциловања клатна и информација о броју слика забележених у секунди током снимка, може се израчунати период осциловања клатна за дати положај у односу на тачку вешања.

$$T = \frac{f - a}{120} = \frac{138 - 48}{120} = \frac{90}{120} = 0.75s$$

a- број фрејма (слике) на почетку периода осциловања

f-број фрејма (слике) на крају периода осциловања

120- број снимљених слика у једној секунди видео снимка.

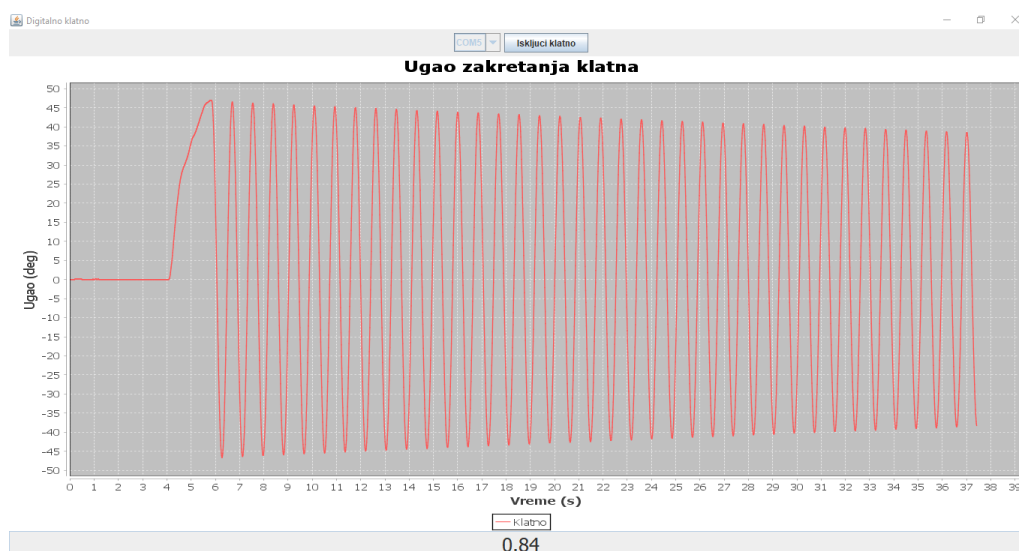
7.1.3. Период осциловања за положај клатна на растојању 150 mm од тачке вешања

На слици 7.1.3.1. приказано је физичко клатно у мировању на растојању 150 mm од тачке вешања. Из овог положаја потребно је клатно довести у положај под углом већи од 60° у односу на вертикални положај клатна у мировању.



Слика 7.1.3.1 Физичко клатно у мировању, на растојању 150 mm од тачке вешања

На слици 7.1.3.2. приказано је радно окружење програма „клатно“ на коме се види очитивање тренутних вредности периода осциловања у времену.



Слика 7.1.3.2. Приказ периода осциловања на растојању 150 mm од тачке вешања

За време исцртавања периода осциловања у радном окружењу програма „клатно“, очитане вредности се бележе као *xlsx* (excel фајл). Тако забележени подаци пружају могућност израчунавања вредности периода осциловања другачијим методама. Такав начин очитавања вредности приказан је на слици 7.1.3.3.

O23		fx											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2348,-51.0		2371,121.0		2394,6.0		2417,-122.0						
2	2349,-42.0		2372,122.0		2395,-3.0		2418,-120.0						
3	2350,-33.0		2373,124.0		2396,-12.0		2419,-118.0						
4	2351,-24.0		2374,124.0		2397,-22.0		2420,-114.0						
5	2352,-14.0		2375,124.0		2398,-31.0		2421,-111.0						
6	2353,-5.0	почетак	2376,123.0		2399,-40.0		2422,-106.0		100	број података у секунди			
7	2354,5.0		2377,121.0		2400,-49.0		2423,-101.0						
8	2355,14.0		2378,119.0		2401,-57.0		2424,-96.0						
9	2356,24.0		2379,115.0		2402,-66.0		2425,-90.0						
10	2357,33.0		2380,112.0		2403,-73.0		2426,-83.0						
11	2358,42.0		2381,107.0		2404,-81.0		2427,-76.0						
12	2359,51.0		2382,102.0		2405,-88.0		2428,-68.0		2435-22353=	82	s		
13	2360,59.0		2383,96.0		2406,-94.0		2429,-60.0						
14	2361,67.0		2384,90.0		2407,-100.0		2430,-52.0						
15	2362,75.0		2385,83.0		2408,-105.0		2431,-43.0						
16	2363,82.0		2386,76.0		2409,-109.0		2432,-34.0		T=	82/100=	0,82		
17	2364,89.0		2387,68.0		2410,-113.0		2433,-25.0						
18	2365,95.0		2388,60.0		2411,-117.0		2434,-16.0						
19	2366,101.0		2389,52.0		2412,-119.0		2435,-6.0	крај					
20	2367,106.0		2390,43.0		2413,-121.0		2436,3.0						
21	2368,111.0		2391,34.0		2414,-122.0		2437,12.0						
22	2369,115.0		2392,25.0		2415,-123.0		2438,22.0						
23	2370,118.0		2393,16.0		2416,-122.0		2439,31.0						
24													
25													

Слика 7.1.3.3. Приказ периода осциловања на растојању 150 mm од тачке вешања

На слици 7.1.3.3. приказане су вредности очитавања времена и угла положаја клатна за положај клатна на растојању 150 mm од тачке вешања клатна. На основу вредности очитавања и информације о броју записа очитаних вредности уређаја у секунди, може се израчунати период осциловања клатна за дати положај у односу на тачку вешања

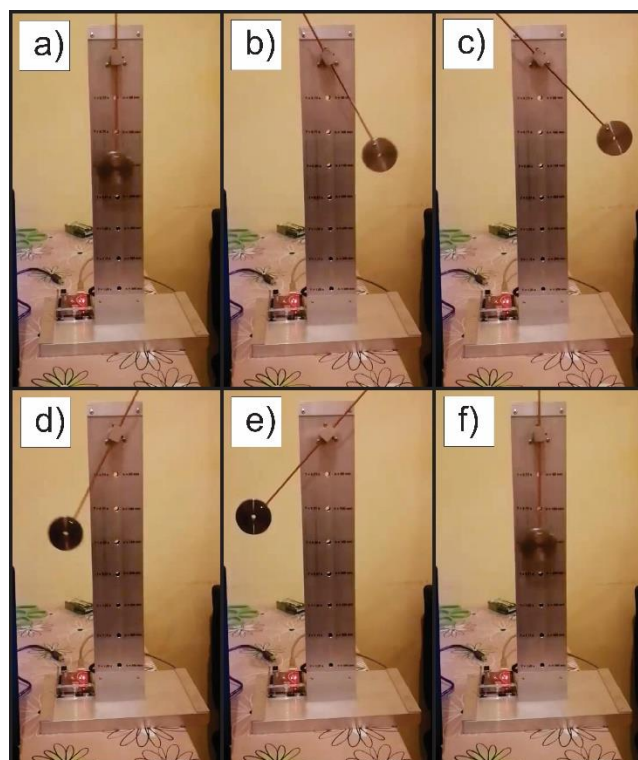
$$T = \frac{n}{100} = \frac{\text{почетак} - \text{крај}}{100} = \frac{2435 - 2353}{100} = \frac{82}{100} = 0,82$$

почетак-очитавање енкодера у почетку периода осциловања

крај-очитавање енкодера на крају периода осциловања

100- број забележених вредности очитавања угаоног енкодера у секунди.

На слици 7.1.3.4. приказане су различите позиције клатна, за положај клатна на растојању од 150 mm од тачке вешања клатна, у току трајања једног периода осциловања.



Слика 7.1.3.4. Различити положаји клатна у току трајања периода осциловања
Слика а-фрејм 30, слика б-фрејм 49, слика ц-фрејм 67, слика д-фрејм 89, слика е-
фрејм 109, слика ф-фрејм 131

На основу броја фрејмова забележених током једног периода осциловања клатна и информација о броју слика забележених у секунди током снимка, може се израчунати период осциловања клатна за дати положај у односу на тачку вешања.

$$T = \frac{f - a}{120} = \frac{131 - 30}{120} = \frac{101}{120} = 0.84s$$

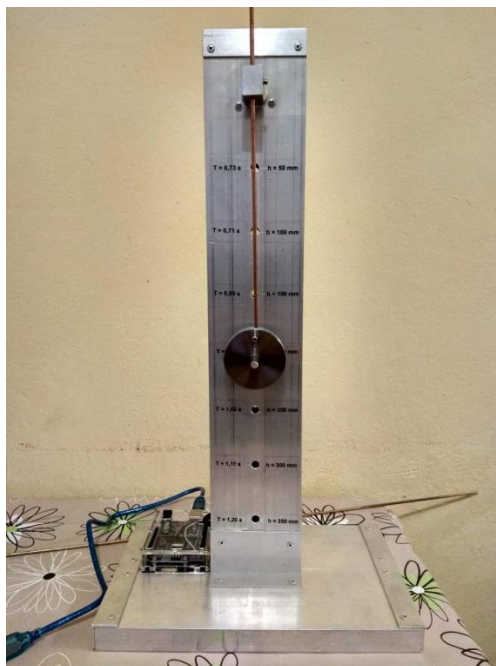
a- број фрејма (слике) на почетку периода осциловања

f-број фрејма (слике) на крају периода осциловања

120- број снимљених слика у једној секунди видео снимка.

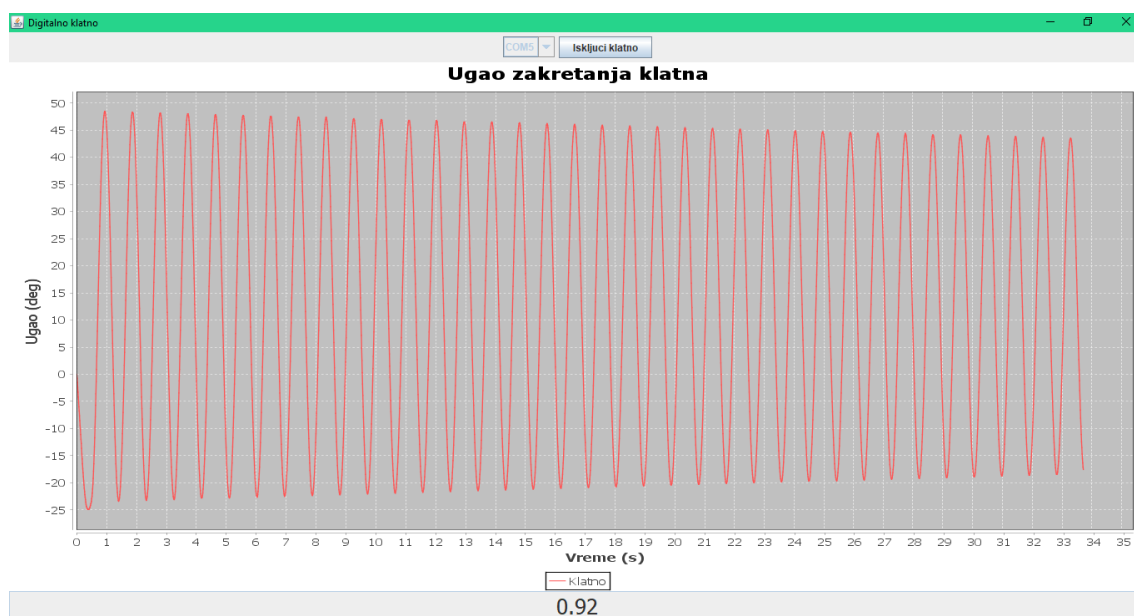
7.1.4. Период осциловања за положај клатна на растојању 200 mm од тачке вешања

На слици 7.1.4.1. приказано је физичко клатно у мировању на растојању 200 mm од тачке вешања. Из овог положаја потребно је клатно довести у положај под углом већи од 60° у односу на вертикални положај клатна у мировању.



Слика 7.1.4.1 Физичко клатно у мировању, на растојању 200 mm од тачке вешања

На слици 7.1.4.2. приказано је радно окружење програма „клатно“ на коме се види очитавање тренутних вредности периода осциловања у времену.



Слика 7.1.4.2. Приказ периода осциловања на растојању 200 mm од тачке вешања

За време исцртавања периода осциловања у радном окружењу програма „клатно“, очитане вредности се бележе као *xlsx* (excel фајл). Тако забележени подаци пружају могућност израчунавања вредности периода осциловања другачијим методама. Такав начин очитавања вредности приказан је на слици 7.1.4.3.

	Q22		<i>f_x</i>											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	1422,46.0		1445,-112.0		1468,-42.0		1491,113.0		1514,38.0					
2	1423,38.0		1446,-115.0		1469,-34.0		1492,115.0		1515,30.0					
3	1424,30.0		1447,-117.0		1470,-26.0		1493,117.0		1516,22.0					
4	1425,22.0		1448,-119.0		1471,-18.0		1494,119.0		1517,14.0					
5	1426,14.0		1449,-120.0		1472,-10.0		1495,120.0		1518,6.0	крај				
6	1427,6.0	почетак	1450,-121.0		1473,-1.0		1496,120.0		1519,-2.0					
7	1428,-3.0		1451,-121.0		1474,7.0		1497,120.0		1520,-10.0					
8	1429,-11.0		1452,-120.0		1475,15.0		1498,119.0		1521,-19.0					
9	1430,-19.0		1453,-119.0		1476,23.0		1499,117.0		1522,-27.0					
10	1431,-27.0		1454,-117.0		1477,31.0		1500,115.0		1523,-35.0					
11	1432,-35.0		1455,-115.0		1478,39.0		1501,113.0		1524,-43.0		100 број података у секунди			
12	1433,-43.0		1456,-111.0		1479,47.0		1502,110.0		1525,-50.0					
13	1434,-51.0		1457,-108.0		1480,54.0		1503,106.0		1526,-58.0					
14	1435,-59.0		1458,-104.0		1481,62.0		1504,102.0		1527,-65.0		1518-1427=	91 s		
15	1436,-66.0		1459,-100.0		1482,69.0		1505,97.0		1528,-71.0					
16	1437,-73.0		1460,-95.0		1483,75.0		1506,92.0		1529,-78.0					
17	1438,-79.0		1461,-90.0		1484,81.0		1507,87.0		1530,-84.0					
18	1439,-85.0		1462,-84.0		1485,87.0		1508,81.0		1531,-90.0	T=	91/100=	0,91		
19	1440,-91.0		1463,-78.0		1486,93.0		1509,74.0		1532,-95.0					
20	1441,-96.0		1464,-71.0		1487,98.0		1510,68.0		1533,-99.0					
21	1442,-101.0		1465,-65.0		1488,102.0		1511,61.0		1534,-104.0					
22	1443,-105.0		1466,-57.0		1489,106.0		1512,54.0		1535,-108.0					
23	1444,-109.0		1467,-50.0		1490,110.0		1513,46.0		1536,-111.0					
24														
25														

Слика 7.1.4.3. Приказ периода осциловања на растојању 200 mm од тачке вешања

На слици 7.1.4.3. приказане су вредности очитавања времена и угла положаја клатна за положај клатна на растојању 200 mm од тачке вешања клатна. На основу вредности очитавања и информације о броју записа очитаних вредности уређаја у секунди, може се израчунати период осциловања клатна за дати положај у односу на тачку вешања.

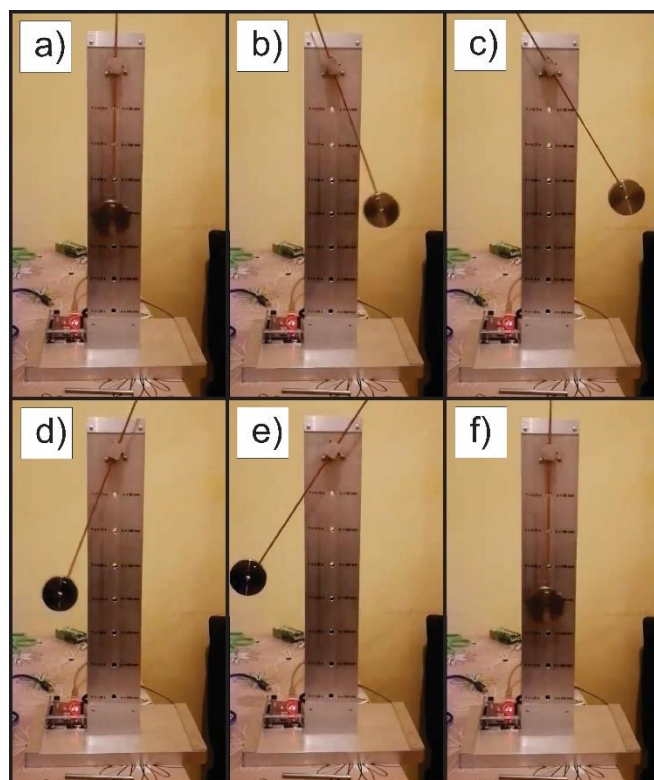
$$T = \frac{n}{100} = \frac{\text{почетак} - \text{крај}}{100} = \frac{1518 - 1427}{100} = \frac{91}{100} = 0,91$$

почетак-очитавање енкодера у почетку периода осциловања

крај-очитавање енкодера на крају периода осциловања

100- број забележених вредности очитавања угаоног енкодера у секунди.

На слици 7.1.3.4. приказане су различите позиције клатна, за положај клатна на растојању од 200 mm од тачке вешања клатна, у току трајања једног периода осциловања.



Слика 7.1.4.4. Различити положаји клатна у току трајања периода осциловања
Слика а-фрејм 45, слика б-фрејм 69, слика ц-фрејм 89, слика д-фрејм 108, слика е-
фрејм 139, слика ф-фрејм 156

На основу броја фрејмова забележених током једног периода осциловања клатна и информација о броју слика забележених у секунди током снимка, може се израчунати период осциловања клатна за дати положај у односу на тачку вешања.

$$T = \frac{f - a}{120} = \frac{156 - 45}{120} = \frac{111}{120} = 0.92s$$

a- број фрејма (слике) на почетку периода осциловања

f-број фрејма (слике) на крају периода осциловања

120- број снимљених слика у једној секунди видео снимка.

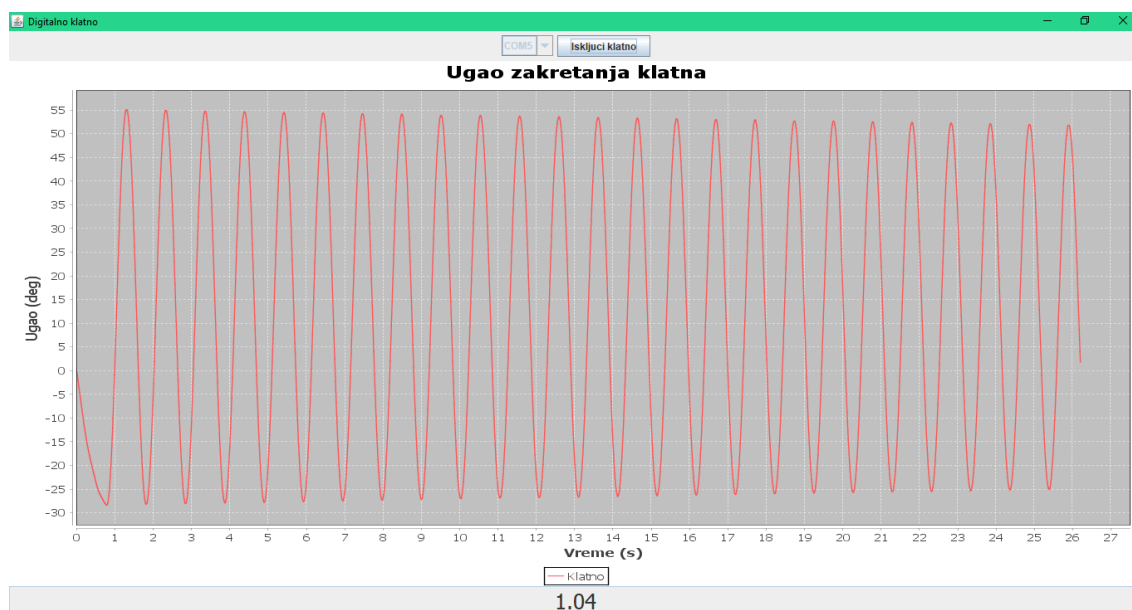
7.1.5. Период осциловања за положај клатна на растојању 250 mm од тачке вешања

На слици 7.1.5.1. приказано је физичко клатно у мировању на растојању 250 mm од тачке вешања. Из овог положаја потребно је клатно довести у положај под углом већи од 60° у односу на вертикални положај клатна у мировању.



Слика 7.1.5.1. Физичко клатно у мировању, на растојању 250 mm од тачке вешања

На слици 7.1.5.2. приказано је радно окружење програма „клатно“ на коме се види читавање тренутних вредности периода осциловања у времену.



Слика 7.1.5.2. Приказ периода осциловања на растојању 250 mm од тачке вешања

За време исцртавања периода осциловања у радном окружењу програма „клатно“, очитане вредности се бележе као *xlsx* (excel фајл). Тако забележени подаци пружају могућност израчунавања вредности периода осциловања другачијим методама. Такав начин очитавања вредности приказан је на слици 7.1.5.3.

R22 fx														
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	1477,-36.0		1500,110.0		1523,61.0		1546,-95.0		1569,-86.0					
2	1478,-28.0		1501,112.0		1524,54.0		1547,-100.0		1570,-80.0					
3	1479,-21.0		1502,115.0		1525,48.0		1548,-104.0		1571,-74.0		100 број података у секунди			
4	1480,-13.0		1503,117.0		1526,41.0		1549,-108.0		1572,-68.0					
5	1481,-6.0		1504,118.0		1527,33.0		1550,-111.0		1573,-62.0					
6	1482,2.0	почетак	1505,119.0		1528,26.0		1551,-114.0		1574,-55.0					
7	1483,10.0		1506,120.0		1529,19.0		1552,-116.0		1575,-48.0					
8	1484,17.0		1507,120.0		1530,11.0		1553,-118.0		1576,-41.0		1582-1482	100		
9	1485,25.0		1508,120.0		1531,4.0		1554,-119.0		1577,-34.0					
10	1486,32.0		1509,118.0		1532,-4.0		1555,-120.0		1578,-27.0					
11	1487,39.0		1510,117.0		1533,-11.0		1556,-121.0		1579,-19.0					
12	1488,46.0		1511,115.0		1534,-19.0		1557,-121.0		1580,-12.0					
13	1489,53.0		1512,113.0		1535,-26.0		1558,-120.0		1581,-4.0		T=	100/100	1	
14	1490,60.0		1513,110.0		1536,-34.0		1559,-119.0		1582,4.0	крај				
15	1491,66.0		1514,107.0		1537,-41.0		1560,-118.0		1583,11.0					
16	1492,72.0		1515,103.0		1538,-48.0		1561,-116.0		1584,18.0					
17	1493,78.0		1516,99.0		1539,-55.0		1562,-114.0		1585,26.0					
18	1494,84.0		1517,95.0		1540,-62.0		1563,-111.0		1586,33.0					
19	1495,89.0		1518,90.0		1541,-68.0		1564,-108.0		1587,40.0					
20	1496,94.0		1519,85.0		1542,-74.0		1565,-104.0		1588,47.0					
21	1497,98.0		1520,80.0		1543,-80.0		1566,-100.0		1589,54.0					
22	1498,102.0		1521,74.0		1544,-86.0		1567,-95.0		1590,61.0					
23	1499,106.0		1522,68.0		1545,-91.0		1568,-91.0		1591,67.0					
24														
25														

Слика 7.1.5.3. Приказ периода осциловања на висини од 250 mm

На слици 7.1.5.3. приказане су вредности очитавања времена и угла положаја клатна за положај клатна на растојању 250 mm од тачке вешања клатна. На основу вредности очитавања и информације о броју записа очитаних вредности уређаја у секунди, може се израчунати период осциловања клатна за дати положај у односу на тачку вешања.

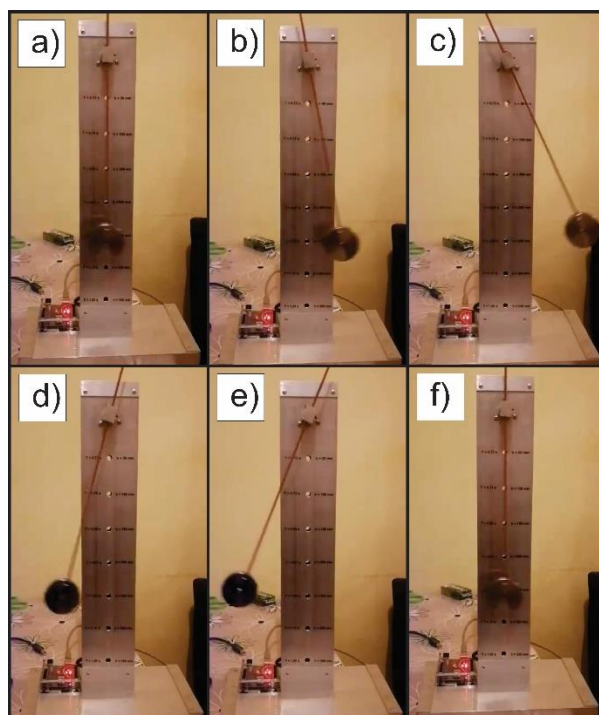
$$T = \frac{n}{100} = \frac{\text{почетак} - \text{крај}}{100} = \frac{1582 - 1482}{100} = \frac{100}{100} = 1,$$

почетак-очитавање енкодера у почетку периода осциловања

крај-очитавање енкодера на крају периода осциловања

100- број забележених вредности очитавања угаоног енкодера у секунди.

На слици 7.1.5.4. приказане су различите позиције клатна, за положај клатна на растојању од 250 mm од тачке вешања клатна, у току трајања једног периода осциловања.



Слика 7.1.5.4. Различити положаји клатна у току трајања периода осциловања
Слика а-фрејм 62, слика б-фрејм 80, слика ц-фрејм 111, слика д-фрејм 128, слика е-
фрејм 156, слика ф-фрејм 184

На основу броја фрејмова забележених током једног периода осциловања клатна и информација о броју слика забележених у секунди током снимка, може се израчунати период осциловања клатна за дати положај у односу на тачку вешања.

$$T = \frac{f - a}{120} = \frac{184 - 62}{120} = \frac{122}{120} = 1,02s$$

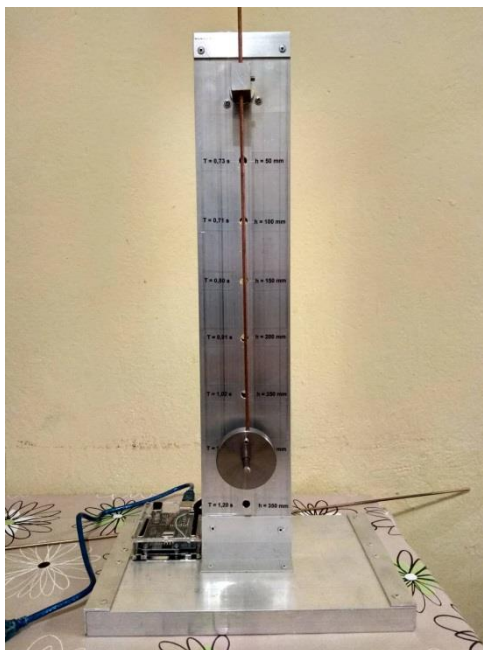
a- број фрејма (слике) на почетку периода осциловања

f-број фрејма (слике) на крају периода осциловања

120- број снимљених слика у једној секунди видео снимка.

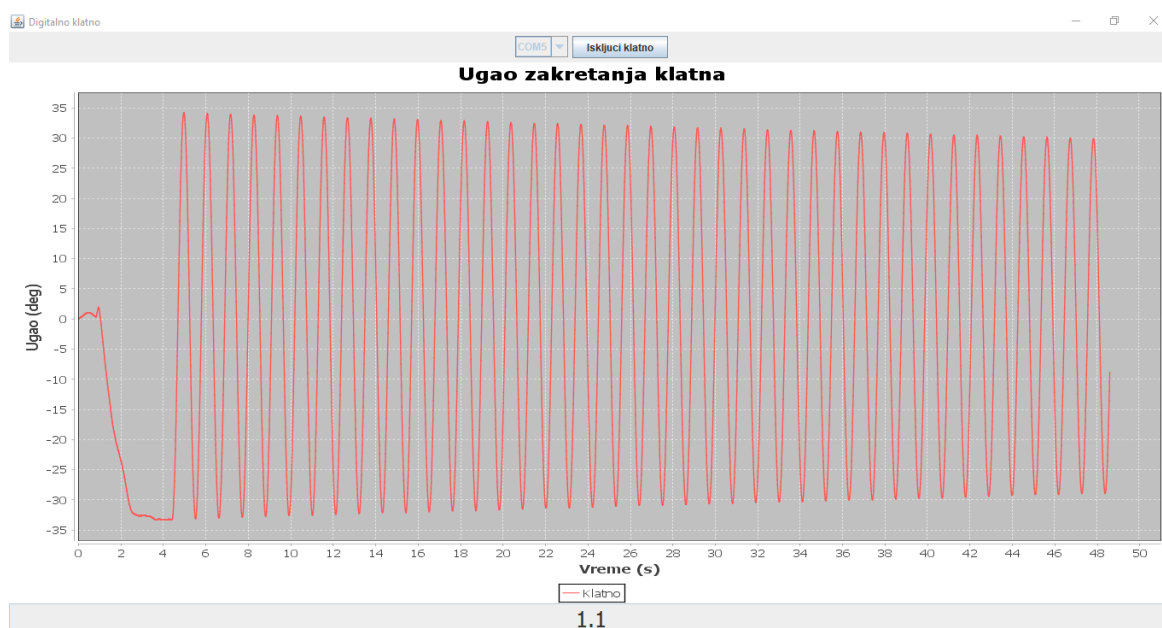
7.1.6. Период осциловања за положај клатна на растојању 300 mm од тачке вешања

На слици 7.1.6.1. приказано је физичко клатно у мировању на растојању 300 mm од тачке вешања. Из овог положаја потребно је клатно довести у положај под углом већи од 60° у односу на вертикални положај клатна у мировању.



Слика 7.1.6.1 Физичко клатно у мировању, на растојању 300 mm од тачке вешања

На слици 7.1.6.2. приказано је радно окружење програма „клатно“ на коме се види очитавање тренутних вредности периода осциловања у времену.



Слика 7.1.6.2. Приказ периода осциловања на растојању 300 mm од тачке вешања

За време исцртавања периода осциловања у радном окружењу програма „клатно“, очитане вредности се бележе као *xlsx* (excel фајл). Тако забележени подаци пружају могућност израчунавања вредности периода осциловања другачијим методама. Такав начин очитавања вредности приказан је на слици 7.1.6.3.

U22				f _x												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	1170,-40.0		1193,99.0		1216,85.0		1239,-60.0		1262,-115.0		1285,3.0	крај				
2	1171,-33.0		1194,102.0		1217,80.0		1240,-66.0		1263,-113.0		1286,10.0					
3	1172,-27.0		1195,105.0		1218,75.0		1241,-72.0		1264,-111.0		1287,17.0					
4	1173,-20.0		1196,108.0		1219,69.0		1242,-77.0		1265,-108.0		1288,24.0					
5	1174,-13.0		1197,111.0		1220,64.0		1243,-82.0		1266,-105.0		1289,31.0					
6	1175,-6.0		1198,113.0		1221,58.0		1244,-87.0		1267,-101.0		1290,37.0					
7	1176,0.0	почетак	1199,115.0		1222,52.0		1245,-92.0		1268,-97.0		1291,43.0		1285-1176=	109		
8	1177,7.0		1200,116.0		1223,45.0		1246,-96.0		1269,-93.0		1292,49.0					
9	1178,14.0		1201,117.0		1224,39.0		1247,-100.0		1270,-89.0		1293,56.0					
10	1179,21.0		1202,117.0		1225,33.0		1248,-104.0		1271,-84.0		1294,61.0					
11	1180,28.0		1203,117.0		1226,26.0		1249,-107.0		1272,-79.0		1295,67.0					
12	1181,35.0		1204,117.0		1227,19.0		1250,-110.0		1273,-74.0		1296,73.0		T=	109/100	1,09	
13	1182,41.0		1205,117.0		1228,13.0		1251,-113.0		1274,-68.0		1297,78.0					
14	1183,47.0		1206,116.0		1229,6.0		1252,-115.0		1275,-62.0		1298,83.0					
15	1184,53.0		1207,114.0		1230,-1.0		1253,-117.0		1276,-57.0		1299,87.0					
16	1185,59.0		1208,113.0		1231,-8.0		1254,-118.0		1277,-50.0		1300,92.0					
17	1186,65.0		1209,110.0		1232,-15.0		1255,-119.0		1278,-44.0		1301,96.0					
18	1187,71.0		1210,108.0		1233,-21.0		1256,-120.0		1279,-37.0		1302,99.0					
19	1188,76.0		1211,105.0		1234,-28.0		1257,-120.0		1280,-31.0		1303,103.0					
20	1189,81.0		1212,101.0		1235,-35.0		1258,-120.0		1281,-24.0							
21	1190,86.0		1213,98.0		1236,-41.0		1259,-119.0		1282,-17.0							
22	1191,91.0		1214,94.0		1237,-48.0		1260,-119.0		1283,-10.0							
23	1192,95.0		1215,89.0		1238,-54.0		1261,-117.0		1284,-4.0							
24																
25																

Слика 7.1.6.3. Приказ периода осциловања на висини од 300 mm

На слици 7.1.6.3. приказане су вредности очитавања времена и угла положаја клатна за положај клатна на растојању 300 mm од тачке вешања клатна. На основу вредности очитавања и информације о броју записа очитаних вредности уређаја у секунди, може се израчунати период осциловања клатна за дати положај у односу на тачку вешања.

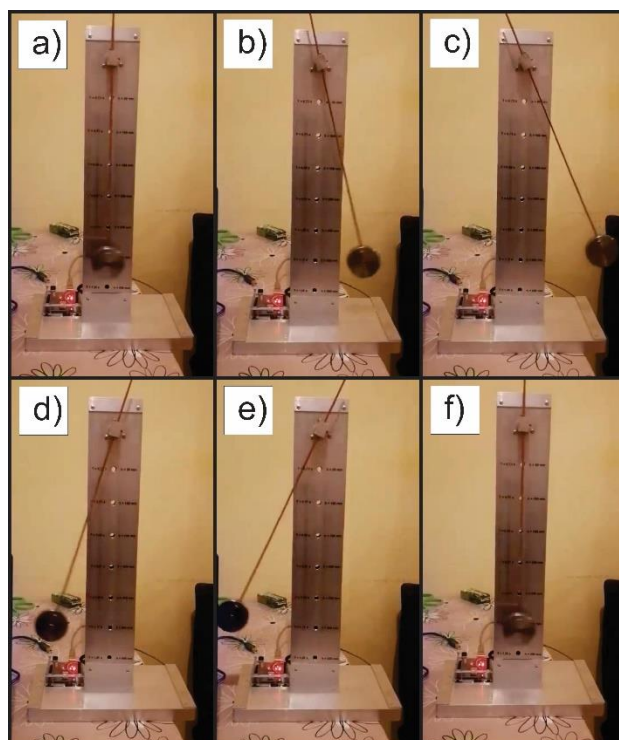
$$T = \frac{n}{100} = \frac{\text{почетак} - \text{крај}}{100} = \frac{1285 - 1176}{100} = \frac{109}{100} = 1,09$$

почетак-очитавање енкодера у почетку периода осциловања

крај-очитавање енкодера на крају периода осциловања

100- број забележених вредности очитавања угаоног енкодера у секунди

На слици 7.1.6.4. приказане су различите позиције клатна, за положај клатна на растојању од 300 mm од тачке вешања клатна, у току трајања једног периода осциловања.



Слика 7.1.6.4. Различити положаји клатна у току трајања периода осциловања
Слика а-фрејм 28, слика б-фрејм 40, слика ц-фрејм 72, слика д-фрејм 102, слика е-
фрејм 147, слика ф-фрејм 161

На основу броја фрејмова забележених током једног периода осциловања клатна и информација о броју слика забележених у секунди током снимка, може се израчунати период осциловања клатна за дати положај у односу на тачку вешања.

$$T = \frac{f - a}{120} = \frac{161 - 28}{120} = \frac{133}{120} = 1,11\text{s}$$

a - број фрејма (слике) на почетку периода осциловања

f -број фрејма (слике) на крају периода осциловања

120- број снимљених слика у једној секунди видео снимка.

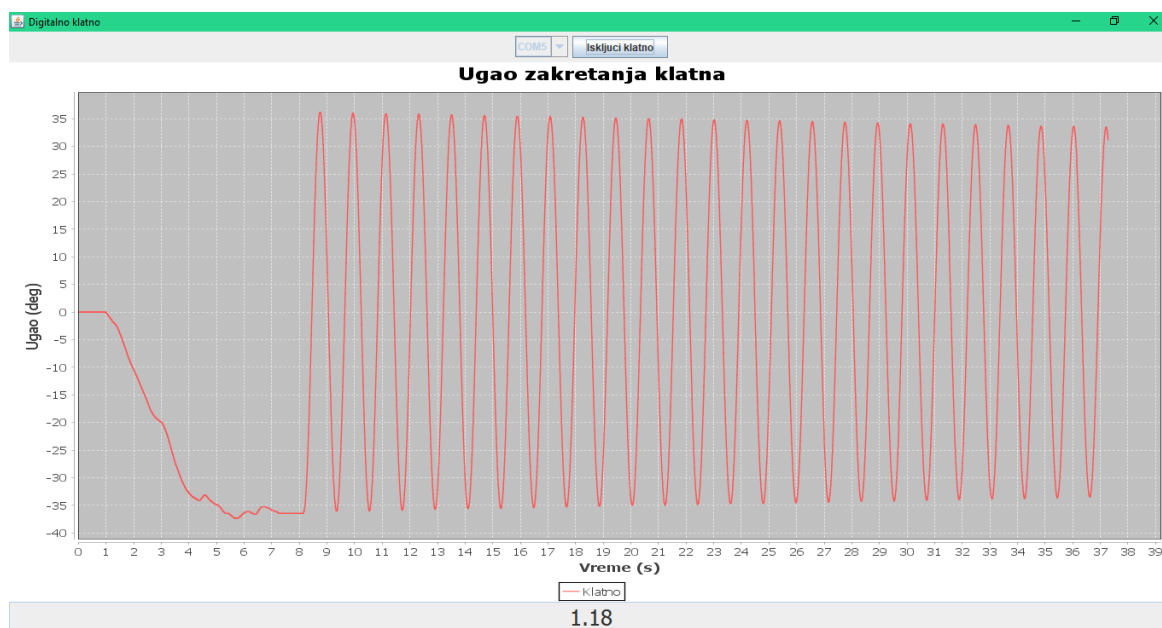
7.1.7. Период осциловања за положај клатна на растојању 350 mm од тачке вешања

На слици 7.1.7.1. приказано је физичко клатно у мировању на растојању 350 mm од тачке вешања. Из овог положаја потребно је клатно довести у положај под углом већи од 60° у односу на вертикални положај клатна у мировању.



Слика 7.1.7.1. Физичко клатно у мировању, на растојању 350 mm од тачке вешања

На слици 7.1.7.2. приказано је радно окружење програма „клатно“ на коме се види очитавање тренутних вредности периода осциловања у времену.



Слика 7.1.7.2. . Приказ периода осциловања на растојању 350 mm од тачке вешања

За време исцртавања периода осциловања у радном окружењу програма „клатно“, очитане вредности се бележе као *xlsx* (excel фајл). Тако забележени подаци пружају могућност израчунавања вредности периода осциловања другачијим методама. Такав начин очитавања вредности приказан је на слици 7.1.7.3.

S22		f _*														
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	1797,42.0		1820,-96.0		1843,-105.0		1866,26.0		1889,122.0		1912,54.0					
2	1798,36.0		1821,-100.0		1844,-102.0		1867,33.0		1890,123.0		1913,47.0		100 број података у секунди			
3	1799,30.0		1822,-103.0		1845,-98.0		1868,39.0		1891,123.0		1914,41.0					
4	1800,23.0		1823,-107.0		1846,-94.0		1869,45.0		1892,123.0		1915,35.0					
5	1801,17.0		1824,-110.0		1847,-89.0		1870,51.0		1893,123.0		1916,29.0					
6	1802,10.0		1825,-113.0		1848,-84.0		1871,57.0		1894,122.0		1917,22.0		1920-1803	117		
7	1803,3.0	почетак	1826,-116.0		1849,-79.0		1872,63.0		1895,121.0		1918,16.0					
8	1804,-3.0		1827,-118.0		1850,-74.0		1873,69.0		1896,119.0		1919,9.0					
9	1805,-10.0		1828,-120.0		1851,-69.0		1874,74.0		1897,117.0		1920,2.0	крај				
10	1806,-16.0		1829,-121.0		1852,-63.0		1875,79.0		1898,115.0		1921,-4.0					
11	1807,-23.0		1830,-122.0		1853,-57.0		1876,84.0		1899,113.0		1922,-11.0					
12	1808,-29.0		1831,-123.0		1854,-51.0		1877,89.0		1900,109.0		1923,-17.0					
13	1809,-36.0		1832,-123.0		1855,-45.0		1878,93.0		1901,106.0		1924,-24.0		T=	117/100=	1,17	
14	1810,-42.0		1833,-124.0		1856,-39.0		1879,98.0		1902,103.0		1925,-30.0					
15	1811,-49.0		1834,-123.0		1857,-33.0		1880,101.0		1903,99.0		1926,-37.0					
16	1812,-54.0		1835,-123.0		1858,-26.0		1881,105.0		1904,95.0		1927,-43.0					
17	1813,-60.0		1836,-122.0		1859,-20.0		1882,109.0		1905,91.0		1928,-49.0					
18	1814,-66.0		1837,-121.0		1860,-13.0		1883,111.0		1906,86.0		1929,-55.0					
19	1815,-71.0		1838,-119.0		1861,-6.0		1884,114.0		1907,81.0		1930,-61.0					
20	1816,-77.0		1839,-117.0		1862,0.0		1885,117.0		1908,76.0		1931,-67.0					
21	1817,-82.0		1840,-115.0		1863,7.0		1886,118.0		1909,71.0		1932,-72.0					
22	1818,-87.0		1841,-112.0		1864,13.0		1887,120.0		1910,65.0		1933,-77.0					
23	1819,-91.0		1842,-109.0		1865,20.0		1888,121.0		1911,59.0		1934,-82.0					
24																
25																

Слика 7.1.7.3. Приказ периода осциловања на висини од 100 mm

На слици 7.1.7.3. приказане су вредности очитавања времена и угла положаја клатна за положај клатна на растојању 300 mm од тачке вешања клатна. На основу вредности очитавања и информације о броју записа очитаних вредности уређаја у секунди, може се израчунати период осциловања клатна за дати положај у односу на тачку вешања.

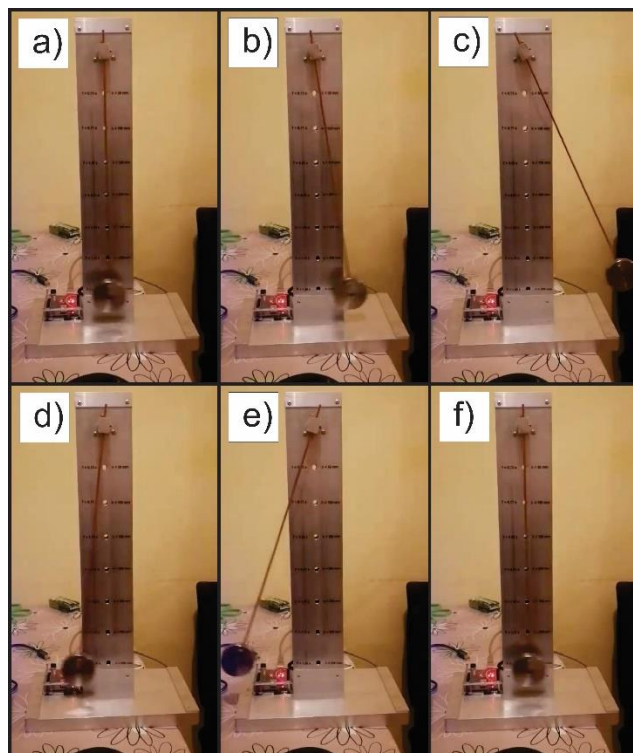
$$T = \frac{n}{100} = \frac{\text{почетак} - \text{крај}}{100} = \frac{1920 - 1803}{100} = \frac{117}{100} = 1,17$$

почетак-очитавање енкодера у почетку периода осциловања

крај-очитавање енкодера на крају периода осциловања

100- број забележених вредности очитавања угаоног енкодера у секунди

На слици 7.1.7.4. приказане су различите позиције клатна, за положај клатна на растојању од 350 mm од тачке вешања клатна, у току трајања једног периода осциловања.



Слика 7.1.7.4. Различити положаји клатна у току трајања периода осциловања
Слика а-фрејм 39, слика б-фрејм 43, слика ц-фрејм 81, слика д-фрејм 127, слика е-фрејм 162, слика ф-фрејм 183

На основу броја фрејмова забележених током једног периода осциловања клатна и информација о броју слика забележених у секунди током снимка, може се израчунати период осциловања клатна за дати положај у односу на тачку вешања.

$$T = \frac{f - a}{120} = \frac{183 - 39}{120} = \frac{144}{120} = 1,2s$$

a - број фрејма (слике) на почетку периода осциловања

f -број фрејма (слике) на крају периода осциловања

120- број снимљених слика у једној секунди видео снимка.

7.2. Одређивање вредности гравитационог убрзања (g) на основу експериментално добијених вредности Т (периода осциловања)

Након што је одређена вредност периода осциловања, експерименталним путем, из образаца $T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot L_T}}$ можемо одредити вредност g.

Полазни подаци за одређивање гравитационог убрзања дати су у табели 1.

Табела 1: Полазни подаци

Полазни подаци	
Маса диска - m_D [g]	177,7
Полупречник диска - r [mm]	25
Густина шипке - ρ_s [kg/m ³]	7850
Полупречник шипке - r_s [mm]	1,5
Дужина шипке [mm]	420
Маса шипке - m_s [g]	23,305120
Маса коцке - m_k [g]	19,6
Висина коцке - h_k [mm]	20
m_d+m_s	201,005120

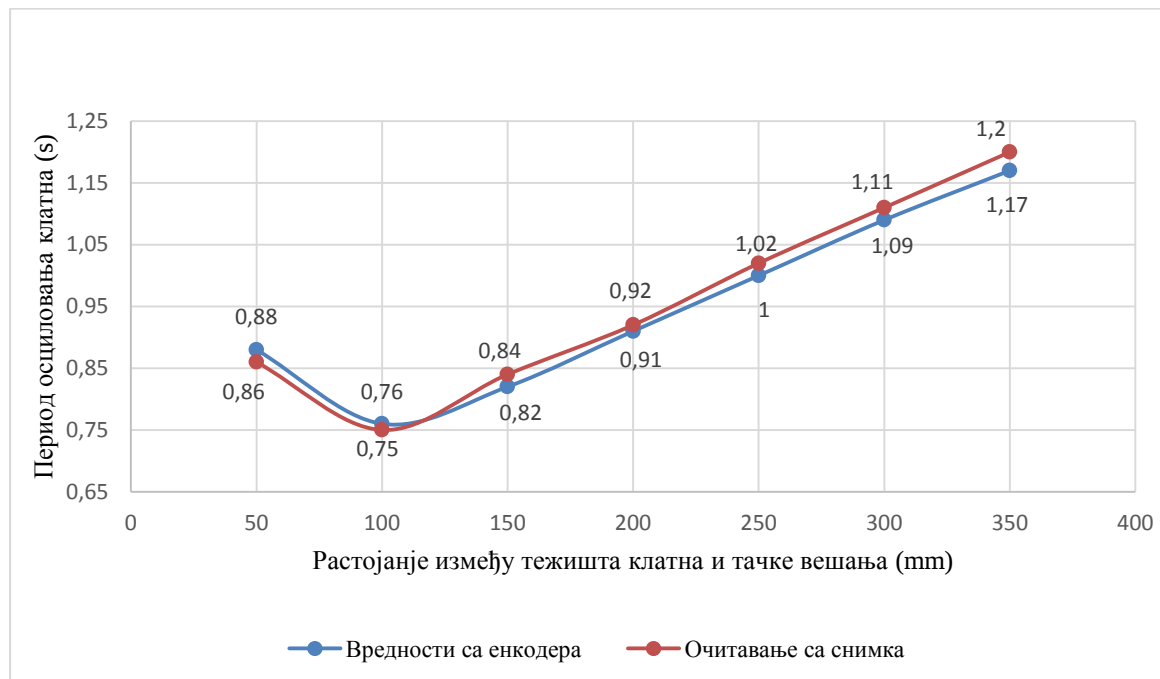
Вредност g за различите висине клатна дате су у табели 2.

Табела 2: Вредности података потребних за експеримент

Прорачун	I	II	III	IV	V	VI	VII
Висина од тачке вешања до центра диска - h [mm]	350	300	250	200	150	100	50
Висина од врха шипке до тачке вешања - h_1 [mm]	80	130	180	230	280	330	380
Момент инерције диска - I_D [kgm ²]	0,021768	0,015993	0,011106	0,007108	0,003998	0,001777	0,00044425
Момент инерције шипке - I_S [kgm ²]	0,000644	0,000425	0,000319	0,00032417	0,000442	0,000672	0,00101520
Момент инерције коцке - I_k [kgm ²]	6,53E-07	6,53E-07	6,53E-07	6,5333E-07	6,53E-07	6,53E-07	6,5333E-07
Момент инерције - I [kgm ²]	0,022413	0,016419	0,011425	0,00743282 3	0,004441	0,00245	0,00146011
Висина тежишта - L_T [mm]	309,4876	265,2572	221,0267	176,796233	132,5658	88,33531	44,1048548
Период осциловања клатна (теоријска вредност) - T [s]	1,204129	1,11322	1,017317	0,91744958	0,818972	0,745197	0,81412607
T_1 -вредност периода осциловања на основу очитавања угаоног енкодера	1,17	1,09	1	0,91	0,82	0,76	0,88
T_2 добијено на основу броја слика	1,2	1,11	1,02	0,92	0,84	0,75	0,86
g_1 -убрзање земљине теже на основу T_1	10,39067	10,23241	10,1527	9,97127369	9,785425	9,431571	8,39628144
g_2 -убрзање земљине теже на основу T_2	9,877633	9,866996	9,758455	9,75568495	9,325	9,684756	9,21496648

7.3. Дискусија добијених резултата

На дијаграму 7.3.1. приказана је зависност растојања између тежишта клатна и тачке вешања клатна у односу на период осциловања клатна T .



Дијаграм 7.3.1. Зависност растојања између тежишта клатна и тачке вешања клатна у односу на период осциловања клатна T

Рачунање периода осциловања на основу очитавања и снимања вредности положаја енкодера потпуно се подудара са вредностима периода осциловања које програм праћења клатна приказује као тренутну вредност осцилације. Периоди осцилација подударају се јер се у оба случаја рачунају на исти начин. Време осцилације периода осцилације може се појавити, али је само привидно, јер програм за тренутно надгледање клатна штампа време периода осцилације са прецизношћу 0,02s.

Ако се упореди горе описана метода за израчунавање времена осцилације клатна са методом израчунавања истог надгледањем видеа, закључује се да је метода праћења видеа тачнија од теоријске вредности периода осцилације. Већа прецизност израчунатог времена периода осцилације гледањем видео записа у поређењу са директним очитавањем тренутне вредности угла клатна из давача директно је узрокована бројем забележених вредности угла клатна у секунди. Видео је забележио 120 вредности у секунди у поређењу са 100 вредности које су забележили Ардуино и угаони енкодер.

Већа фреквенција очитавања положаја клатна омогућава могућност тачније поравнања положаја почетка и краја периода осцилације, што директно утиче на прецизност израчунавања периода осцилације.

У табели 3 приказан је проценат грешке које се дешавају приликом упоређивања резултата добијеним на ова два начина. Проценат грешке је приказан преко вредности g (убрзања земљине теже) које је константно и износи $9,81 \text{ m/s}^2$.

Табела 3: Проценат грешке

$g \text{ m/s}^2$	9,81						
g1-убрзање земљине теже на основу T1	10,39067	10,23241	10,1527	9,971273696	9,785425	9,431571	8,396281441
g2-убрзање земљине теже на основу T2	9,877633	9,866996	9,758455	9,755684957	9,325	9,684756	9,21496648
грешка прорачуна приказана преко g1 (%)	5,919184	4,30591	3,493338	1,643972434	0,250507	3,857582	14,41099448
грешка прорачуна приказана преко g2 (%)	0,689424	0,581001	0,525434	0,553670165	4,943935	1,276693	6,065581244

Закључак

Физичко клатно представља осцилаторни систем који образује чврсто тело које може да осцилује под утицајем Земљине теже око хоризонталне осе која не пролази кроз центар масе тог тела.

Уколико на тело делује сила која је пропорционална отклону тела из равнотежног положаја, долази до врло специфичног кретања. Уколико је та сила усмерена према равнотежном положају, долази до успостављања „напред-назад“ кретања тела. Овакав вид кретања представља периодично кретање или осциловање. Осциловање представља догађање код кога се неки физички систем или нека појава након промене враћа у почетно стање.

Теоријским и експерименталним методама мерено је и израчунато време периода осциловања физичког клатна за различита растојања клатна од тачке вешања. На тај начин идентификована је најповољнија метода за мерење периода осциловања физичког клатна. Теоријски модел израчунавања периода осциловања је коришћен као релевантан за одређивање прецизности измерених резултата.

Имплементацијом експериментално добијеног периода осциловања у теоријски модел за рачунање периода осциловања физичког клатна, добијене су вредности гравитационог убрзања (g), на основу којих је могуће утврдити величину грешке мерења времена периода осциловања.

На основу анализе добијених резултата могуће је утврдити несавршености самог уређаја са аспекта конструкције, као и несавршености самих метода мерења периода осциловања клатна. Дати су предлози за побољшања самог уређаја и метода мерења. На овај начин постављене су смернице за даљи развој и истраживање оваквог уређаја и метода мерења.

Литература

1. Andrewes, H. (1994). Clocks and Watches: The leap to precision. In Macey, S. (1994). *Encyclopedia of Time*. Taylor & Francis. pp. 123–125.
2. Auering, J. W. (1986). Simple Control Strategies for Grab Cranes to Avoid Swinging of the Load at the Destination. *Förden und haben*, 6, pp. 413-420.
3. Baker, T. (1961). *Dictionary of Mathematics*. Oxford: G. Newnes.
4. Bevilaqua, F. et al. (2005). The pendulum: From constrained fall to the concept of potential". In: Matthews, M.R., Gauld, C.F., Stinner, A. *The Pendulum: Scientific, Historical, Philosophical, and Educational Perspectives*. Dordrech: Springer. pp. 195–200.
5. Beckett, E. (1874). *A Rudimentary Treatise on Clock and Watches and Bells*. London: Lockwood & Co.
6. Bolotnik, N. N., Chiong, N. (1983). About optimal length of suspended load during the motion of systems based on pendulum. *Izvestiya Akademii Nauk USSR - Mekhanika Tverdogo Tela*, 6., pp. 28-34.
7. Бугарућ, У. (1996). *Прилог оптимизацији процеса истовара расутих терета у речним лукама*. (магистарска теза). Београд: Машински факултет.
8. Esen, I. (2011). Dynamic response of a beam dueto an accelerating moving mass using finite element approximation. *Mathematical and Computational Applications*, 16(1), pp. 171-182.
9. Good, G. (1998). *Sciences of the Earth: An Encyclopedia of Events, People, and Phenomena*. London: Routledge.
10. Gregorijević M., Bojanić, V., Bojanić, G., Novković, M. (2009). Container cranes for river ports, control and calculation of life time as the optimization base. International conference MHCL 09, Belgrade, pp. 53-60.
11. Drake, S. (2003). *Galileo at Work: His scientific biography*. USA: Courier Dover.
12. Zaremba, A. T. (1982). Optimal pendulum motion during the phases limit of the point's suspension velocity. *Izvestiya Akademii Nauk USSR - Mekhanika Tverdogo Tela*, 3, pp. 28-34.
13. Zrnić, Dj., Bugarić, U., Vuković, J. (19959. The optimisation of moving cycle of grab by unloading bridges, *Proc. IFToMM 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Milano, 2, pp. 1001-1005.
14. Jespersen, J., Fitz-Randolph, J., Robb, J. (1999). *From Sundials to Atomic Clocks: Understanding Time and Frequency*. New York: Courier Dover.
15. Jones,. J. F., Petterson, B. J. (1988). Oscillation Damped Movement of Suspended Objects, *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Philadelphia*, Pennsylvania, pp. 956-962.
16. Jones, T. (2000). *Splitting the Second: The Story of Atomic Time*. Florida: CRC Press.
17. Kaler, J. (2002). *Ever-changing Sky: A Guide to the Celestial Sphere*. UK: Cambridge Univ. Press.
18. Караматовић, Ј. (2005). *Физика*. Универзитет у Нишу: Архитектонски факултет.

19. Karihaloo, B. L., Parbery, R. D. (1982). Optimal Control of a Dynamical System Representing a Gantry Crane. *Journal of Optimisation Theory and Applications*, 36, pp. 409-417.
20. Kater, H. (1818). An account of experiments for determining the length of the pendulum vibrating seconds in the latitude of London. *Phil. Trans. R. Soc.*, 104 (33): 109.
21. Kazak S. A. (1968). *Dynamics of Bridge Cranes*. Moscow: Masinostroenie.
22. Kazak, S. A. (1991). Pendulum oscillations of load and influence of the driving mechanism to the trolley motion. *Vestnik Masinostroenia*, 8, pp. 30-32.
23. Komarov, M. S. (1962). *Dynamics of transportation machines*. Moscow: Masgiz.
24. Kress, R. L., Jansen, J. F., Noakes M. W. (1994). Experimental Implementation of a Robust Damped Oscillation Control Algorithm on a Full-sized, Two-Degree-Of-Freedom, AC Induction Motor Driven Crane. *Proc. Fifth International Symposium on Robotics and Manufacturing*, Maui, Hawaii, pp. 585-592.
25. King, A. (1979). Ibn Yunus and the pendulum: a history of errors. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 29 (104): 35-52.
26. Lenzen, F., Multauf, F. (1964). Paper 44: Development of gravity pendulums in the 19th century. *United States National Museum Bulletin 240: Contributions from the Museum of History and Technology reprinted in Bulletin of the Smithsonian Institution*. Washington: Smithsonian Institution Press.
27. Lobov, N. A. (1987). *Dynamics of cranes*. Moscow: Masinostroenie.
28. Matthys, Robert J. (2004). *Accurate Pendulum Clocks*. UK: Oxford Univ. Press. pp. 27-36.
29. Matthews, R. (1994). Science Teaching: The Role of History and Philosophy of Science. *Psychology Press*, 121-122.
30. Matthews, R. (2000). *Time for science education*. Berlin: Springer.
31. Marrison, W. (1948). The Evolution of the Quartz Crystal Clock. *Bell System Technical Journal*. 27 (3): 510-588.
32. Марјановић, Ј. (2008). *Кључеви за разумевање гравитационих машина Вељка Милковића*. Доступно на: http://swissensschaft.ch/tesla/content/T_Library/L_Theory/Alternative/Jovan_Marjanovic_Kljucevi_Gravitacionih_Masina.pdf (приступљено: октобар 2018.)
33. Mahoney, S. (2007). *Christian Huygens: The Measurement of Time and of Longitude at Sea*. Princeton: Princeton University.
34. Morton, S., Charlton, L. (2005). *China: Its History and Culture*. New York: McGraw-Hill, Inc.
35. Moustafa, K. A. F., Ebeid, A. M. (1988). Nonlinear Modeling and Control of Overhead Crane Load Sway. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 110, pp. 266-271.
36. Nauenberg, M. (2004). Hooke and Newton: Divining Planetary Motions. *Physics Today*, 57 (2):13.
37. Nauenberg, M. (2006). Robert Hooke's seminal contribution to orbital dynamics. In: Cooper, M., Hunter, M. *Robert Hooke: Tercentennial Studies*. Burlington: Ashgate Publishing. pp. 17-19.

38. Newton, R. (2004). *Galileo's Pendulum: From the Rhythm of Time to the Making of Matter*. Harvard: Harvard University Press.
39. Noakes, M. W., Jansen, J. F. (1992). Generalized Inputs for Damped-Vibration Control of suspended payloads. *Robotics and Autonomous Systems*, 10, pp. 199-20
40. Noakes, M. W., Kress, R. L., Appleton, G. T. (1993). Implementation of Damped-Oscillation Crane Control for Existing ac Induction Motor-Driven Cranes. *Proc. Annual Meeting of the American Nuclear Society*, pp. 479-485
41. O'Connor, J., Robertson, F. (1999). *Abu'l-Hasan Ali ibn Abd al-Rahman ibn Yunus*. University of St Andrews.
42. O'Connor, J.; Robertson, F. (2002). "Robert Hooke". *Biographies, MacTutor History of Mathematics Archive*. Univ. of St. Andrews, Scotland: School of Mathematics and Statistics.
43. Oguamanam, D.C.D. Hansen, J.S. (1998). Dynamic respons of an overhad crane system. *Journal of Sound and Vibration*, 213(5), pp. 889-906.
44. Oguamanam, D.C.D., Hansen, J.S., Heppler, G.R. (2001). Dynamics of a three-dimensional overhead crane system. *Journal of Sound and Vibration*, 242(3), pp. 411-426.
45. Rubin, J. (2007). The invention of the Foucault Pendulum. Dostupno na: <https://www.juliantrubin.com/bigten/foucaultpendulum.html>. Pristupljeno: oktobar 2018.
46. Sage, A. P., White, C. C. (1977). *Optimum System Control*. Eaglewood: Prentice-Hall.
47. Singer, C. N., Seering, W. P. (1992). An Extension of Command Shaping Methods for Controlling Residual Vibration Using Frequency Sampling, *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nice, pp. 800-806.
48. Sokolov, B. N. (1985). Synthesis of optimal control of pendulum energy, *Izvestiya Akademii Nauk USSR - Mekhanika Tverdogo Tela*, 2, pp. 54-56.
49. Скрипта принципа рада Физичког клатна (2017) *Факултет инжењерских наука, Крагујевац*.
50. Tobin, W. (2003). *The Life and Science of Leon Foucault: The man who proved the Earth rotates*. UK: Cambridge University Press.
51. Torge, W. (2001). *Geodesy: An Introduction*. New York: Walter de Gruyter.
52. Torzo, G., Peranzoni, P. (2009). The Real pendulum: theory, simulation, experiment. *Lat. Am. J. Phys. Educ.* Vol. 3, No. 2.
53. Unbehauen, H., Metha, A., Pura, R. (1987). On-line determination of the angle of swing angular velocity of a grab crane. *Förden und haben*, 6, pp. 399-401.
54. Carbon, L. (1986). Advanced Drive Technology for Cranes. *Bulk solids handling*, pp. 761-767.
55. Chiong, N. (1984). Optimal control of motion of the pendulum based system on the surface with friction, *Izvestiya Akademii Nauk USSR - Mekhanika Tverdogo Tela*, 1, pp. 67-72.
56. Claude, A., Guinot, B., Lyle, S. (2001). *The Measurement of Time: Time, Frequency, and the Atomic Clock*. UK: Cambridge Univ. Press
57. Hall, S. (1978). The scholastic pendulum. *Annals of Science*, 35(5):441–462.

58. Headrick, M. (2002). Origin and Evolution of the Anchor Clock Escapement. *Control Systems Magazine, Inst. Of Electrical and Electronic Engineers*. 22 (2).
59. Huygens, C. (1658). *Hronologium*. The Hague: Adrian Vlaqc., translation by Ernest L. Edwardes (1970), *Antiquarian Horology*, Vol.7, No.1.
60. Hyde, J. M., Seering, W. P. (1991). Using Input Command Pre-Shaping to Suppress Multiple Mode Vibration, *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, California, pp. 2604-2609.
61. Wu, J.J. (2004). Dynamic responses of a three-dimensional framework duet to moving carriage hoisting a swinging object. *International journal for numericam methods in engineering*, 59, pp. 1679-1702.
62. Wu, J.J. (2008). Transverse and longitudinal vibrations of a frame structure due to moving trolley and the hoisted object using moving finite element. *Internatonal Journal of Mechanical Sciences*, 50, pp. 613-325.
63. Yazid, E., Parman, S., Fuad, K. (2011). Vibration Analysis of flexible Gantry Crane System Subjected Swinging Motionof Payload. *Jorunal of Applied Sciences*, 10, pp. 1707-1715.
64. Younesian, D., Ghafoori, E., Sadeghpour, M. (2010). Nonlinear vibrationof a three dimensional moving gantry crane subjected to a travelling trolley hoisting a swinging object. *Transactions o the Canadiana Society for Mechanical Engineering*, 34(3-4), pp. 333-350.
65. <http://www.17centurymaths.com/contents/huygens/horologiumpart2b.pdf>
Pristupljeno: oktobar 2018.
66. <http://www.17centurymaths.com/contents/huygenscontents.html> Pristupljeno: oktobar 2018.
67. <http://www.otpornik.com/elektronika/senzor/digitalni-inkrementalni-enkoder.html>