

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Примењена механика и аутоматско управљање

Предмет: Механика флуида

Број индекса: 131/2011

Владимир Д. Павловић

Основи теорије граничног слоја

завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Проф. др Савић Слободан-ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да:

- проучи одговарајућу литературу везану за теорију граничног слоја,
- опише струјање у граничном слоју и изведе основне једначине граничног слоја,
- прикаже решавање ових једначина за случај опструјавања равне плоче,
- дефинише аеропрофил и изложи основне напомене о њему, и
- на основу прикупљених и систематизованих података из препоручене и друге литературе наведене области, укаже на практичну примену теорије граничног слоја.

Препоручена литература:

- [1] Саљников, В., Динамика вискозног нестишљивог флуида, Машински факултет у Београду, Београд 1969.
- [2] Обровић, Б., Динамика флуида-изабрана поглавља, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 1998.
- [3] Обровић, Б., Механика флуида, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2007.

Крагујевац, 20. 10. 2014.

ментор:

Проф. др Савић Слободан

Захваљујем се мом ментору, професору Др Слободану Савићу, на великој помоћи при изради дипломског рада.

Такође велику захвалност дугујем мојој породици и притељима на моралној подршци током израде дипломског рада.

Владимир Павловић

Резиме

Основна идеја овог завршног рада је да се прикажу основе истраживања струјања флуида у граничном слоју, за случај опструјавања чврсте непорозне контуре тела. Ради се о врло комплексном струјању вискозног нестишљивог флуида које се описује веома сложеним системом парцијалних нелинеарних диференцијалних једначина другог реда, са сложеним почетним и граничним условима. У првом делу рада је разматрано струјање флуида и дефинисан појам граничног слоја.

У другом делу рада је одређена је дебљина граничног слоја и описано њено понашање при промени појединих параметара. Такође је приказано извођење Прантлових једначина граничног слоја за случај раванског стационарног струјања вискозног нестишљивог флуида поред чврстог непорозног зида.

У трећем делу нађено је решење једначине граничног слоја за најједноставнији случај струјања - опструјавање равне плоче.

Приказано је, такође, одређивање дебљине истискивања и дебљине губитка импулса.

Кључне речи: *флуид, струјање, гранични слој, равна плоча.*

Summary

The main idea of the final paper is to present the basics of research of fluid flow in the boundary layer, for the case flowing solid nonporous body contour. It is about a very complex flow of viscous incompressible fluid which is described by a very complex system of nonlinear partial differential equations of second order with complex initial and boundary conditions. In the first part of the paper is considered fluid flow and defined the concept of the boundary layer.

The second part is determined the thickness of the boundary layer and described her behavior at changing certain parameters. It is also shown performing Prantl boundary layer equations for the case of plane stationary flow of a viscous incompressible fluid near the solid nonporous wall.

In the third part it was found the solution boundary layer equations for the simplest case of flow - flowing flat plate.

Also it is shown determination of thickness extrusion and thickness loss of pulse.

Keywords: *fluid, flow, boundary layer, flat plate*

Садржај

1. Увод.....	1
2. Појам граничног слоја.....	3
2.1 Струјање у граничном слоју.....	6
2.2 Одвајање граничног слоја.....	7
3. Дебљина ламинарног граничног слоја.....	9
4. Прандтлове једначине граничног слоја.....	12
5. Аеропрофили.....	17
5.1 Постанак циркулације.....	18
6. Дебљина истискивања и дебљина губитка импулса.....	21
7. Гранични слој на плочи.....	24
8. Закључак.....	32
Литература.....	33

1. Увод

Све бржи развој науке изражава потребу за непрекидним истраживањем и увођењем новитета у виду метода решавања различитих проблема. Такав приступ анализирања и разматрања различитих проблема представља један од основних принципа науке и има га у свим областима истраживања, а самим тим и у изучавању проблема који се јављају приликом струјања флуида.

Кретање вискозног, реалног флуида је могуће описати помоћу веома комплексног система парцијалних нелинеарних диференцијалних једначина другог реда, са сложеним почетним и граничним условима, где се при њиховом решавању наилази на велике математичке проблеме. При решавању једначина које описују оваква сложена струјања, и које се самим тим јављају као сложеније парцијалне диференцијалне једначине, ради њиховог поједностављања било је неопходно увести различите методе, односно наћи њихова приближна решења, која имају задовољавајућу тачност за праксу. Неке од метода развоја приближних метода, односи се и на Теорију граничног слоја, веома важну област Механике флуида, посебно када се у техничко-технолошкој пракси узме у обзир примена резултата ове теорије.

Основу за тумачење многих важних процеса за технику, како се претпоставља, представља гранични слој. Гранични слој настаје при опструјавању чврстих површина вискозним флуидом, или при мешању струја вискозног флуида различитих брзина и физичких својстава. Многобројни проблеми енергетске кризе, управљања различитим процесима, заштите човекове и радне средине, захтевају истраживање кретања течности и гасова, а при томе, посебно, и познавање карактеристика граничног слоја. Резултати остварени у оквиру теорије граничног слоја се успешно користе у многим областима технике и технологије као што су: космичка истраживања, ракетна и авиотехника, пнеуматика и хидраулика, градња турбина, компресора, пумпи и читавог низа других апарата и уређаја, енергетике и енергетске ефикасности, екологије, развоја алтернативних извора енергије, процесне и хемијске индустрије, градње бродова, брана и насипа, филтрације воде и ваздуха, прорачуна водовода и гасовода, изучавање транспорта масе и енергије, индустрија аутомобила, пројектовање и експлоатација атомских реактора и МХД-генератора, у којима се одвија процес кретања флуида.

У Бернулијевој хидродинамици 1738. године, указано је да пријањање флуида за чврсте површине битно утиче на развој и карактер струјања. Ова појава је анализирана касније, у радовима Стокса, Пуасона и Навијеа, Менделјејева и Жуковског, али тек 1904. године, Прандтл је успео да диференцијалним једначинама математички прикаже њихове констатације, о значајном утицају вискозности на кретање флуида у околини тела, које тада и добијају назив, једначине граничног слоја. Прандтл је први указао на могућу

поделу укупног струјања вискозног флуида на две спрегнуте, али ипак засебне области, које се и математички посебно описују. На област спољашњег струјања (језгро струјања), где је могуће занемарити утицај вискозности, и где се распореди величина струјања сматрају познатим, и у извесном смислу независним од граничних услова који владају на површини канала, односно тела, и танку област, у околини површине тела, односно канала - струјање у граничном слоју, где вискозност игра значајну улогу на развој струјања. У том слоју, долази до нагле промене величина струјања флуида, од вредности које ове величине имају у спољашњем струјању (језгру), а које се може сматрати безвртложним, потенцијалним струјањем идеалног флуида, на њихове вредности на површинама тела или канала, које су одређене граничним условима [2].

Чак и у данашње време, теорија граничног слоја је веома актуелна, а може се рећи да је свој прави смисао пронашла у савременој авиоиндустрији и ракетној техници. Уз помоћ истраживања у овој области омогућено је да постане основа савремене механике течности и гасова [5].

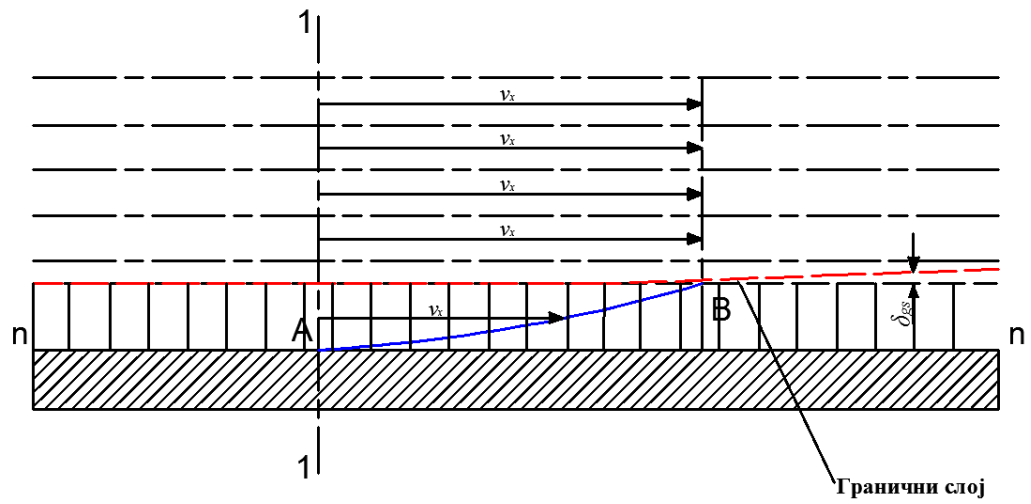
2. Појам граничног слоја

Гранични слој динамике флуида треба да одговори на питања колики је минималан утрошак енергије за протицање флуида или кретање тела кроз флуид и како се то постиже. Врста, порекло и величина отпорних сила, анализирају се у различитим струјним моделима: савршеном флуиду – потенцијалном струјању и вискозном флуиду. Уколико је облик тела такав да при кретању кроз флуид нема цепања струјница, теорија потенцијалног струјања и Ојлерова једначина довољне су да се добије стварна слика о отпорима. За кретање кроз вискозан флуид, теорија ламинарног струјања је довољна уколико струјање не напушта овај струјни режим, али за турбулентно опструјавање тела, које увек прати већа брзина, за пунија незаобљена тела, отворен систем једначина не може дати ни приближан одговор о квалитету отпорних сила. Пошто су у природи и техници присутна углавном оваква струјања, њихова математичка анализа са пратећим експерименталним истраживањима и данас представља основну делатност бројних истраживачких центара [2].

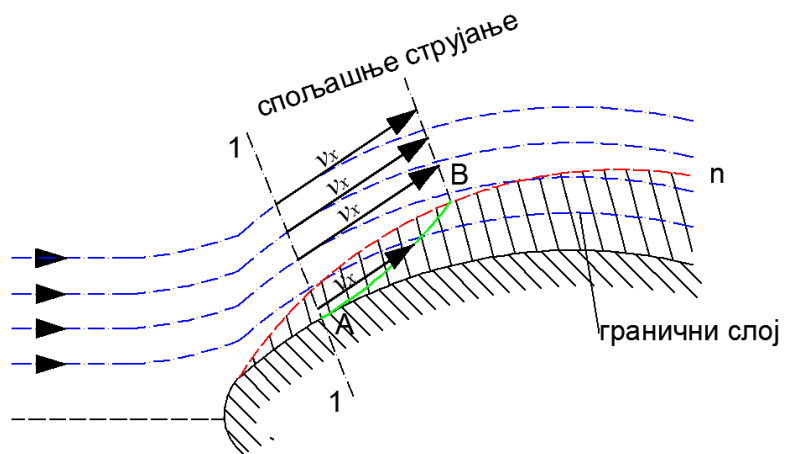
Применом Навије-Стоксових једначина могу се занемарити нелинеарни инерцијски чланови у случајевима када вискозност има одлучујући утицај на струјање флуида, тј. споро струјање флуида са веома великом вискозношћу, као што је нпр. уље за подмазивање. Тада је, брзина струјања релативно мала, а вискозност знатна. Стога је Рејнолдсов број оваквих струјања мале вредности $Re < 1$. У складу са тим, ако је Рејнолдсов број неких струјања мањи од јединице, онда се нелинеарни чланови у диференцијалним једначинама кретања могу занемарити.

Флуиди као што су вода и ваздух, у већини проблема струјања крећу се већим брзинама при малој вискозности, па је Рејнолдсов број ових струјања веома велики, $Re \gg 1$. Закључује се да се горе поменути нелинеарни чланови не могу занемарити. Ови се флуиди, лепе за чврсту површину тела које се опструјава. Ова особина утиче на карактер самог струјања, на шта су указивали многи истраживачи као нпр.: Бернули, Стокс, Менделјејев и Жуковски. После њих је немачки научник Л. Прантл извршио детаљну анализу струјања флуида при опструјавању чврстих тела, и тако први успео да струјање у непосредној близини површине тела изрази одређеним диференцијалним једначинама које су дефинисане као једначине граничног слоја.

Прантл је 1904. године, успоставио везу између кретања савршеног и реалног флуида постављајући теорију граничног слоја. Управо та веза је гранични слој, област флуида у блиској околини тела које се креће кроз флуид, у којој се вискозни утицаји не могу занемарити (слике 1 и 2). Према Прантлу, за одређене флуиде које имају релативно малу вискозност, ефекат унутрашњег трења је има утицаја само у уској области која се простира око границе флуида. У кореспонденцији са овом претпоставком струјање изван ове уске области, може се посматрати као савршени флуид или потенцијална струја[1].

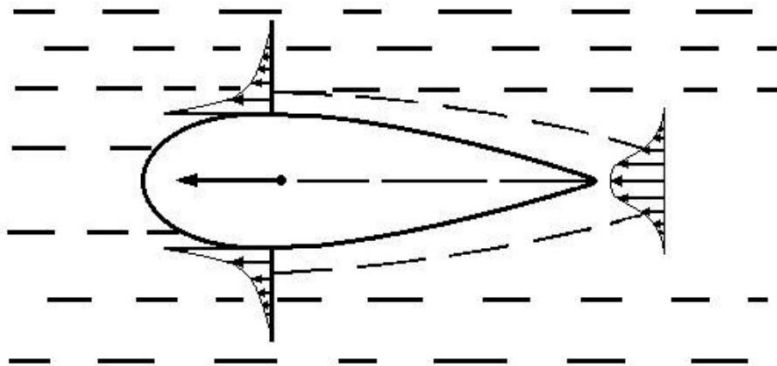


а)



б)

Слика 1. (а и б) Формирање граничног слоја на равној и закривљеној површини која мирује



Слика 2. Формирање граничног слоја код тела које се креће кроз течност

Прантл је утврдио да је задржавање флуида у блиској околини чврсте површине резултат лепљења делића флуида за површину опструјаваног тела. Брзина струјања флуида у том танком слоју расте у правцу нормале на зид, од нуле на контури тела до неке замишљене вредности која би постојала у случају када не би било кочења струјања (брзина спољашњег струјања), а ван њега брзина се скоро не мења. Обзиром да је тај слој доста танак, "градијент" подужне брзине у правцу управном на контуру опструјаваног тела је веома велики. У таквим околностима тангентни напон има врло високе вредности и износи $\tau = \mu \partial v_x / \partial y$, тако је и при веома малим вредностима коефицијента динамичке вискозности (велики Re бројеви). Тангентни напон који делује ван поменутог танког слоја је веома мали.

Постоје две области струјања флуида у околини опструјаваног тела при великим Re бројевима: прву која представља танак слој уз само тело – гранични слој и другу у којој се утицај трења може изоставити – спољашње струјање. У области ван граничног слоја струјање флуида може се сматрати невискозним и за њега важе закони потенцијалног струјања савршеног флуида. Према томе, слој флуида у непосредној близини чврсте површи тела са којим се флуид додирује, у коме је утицај вискозности флуида изразит, назива се гранични слој [1]. Због мале дебљине динамичког граничног слоја могуће је упростити Навије-Стоксове једначине при чему су у највећем броју проблема струјања, како стишљивог тако и нестишљивог флуида, ове упрошћене једначине већ решене.

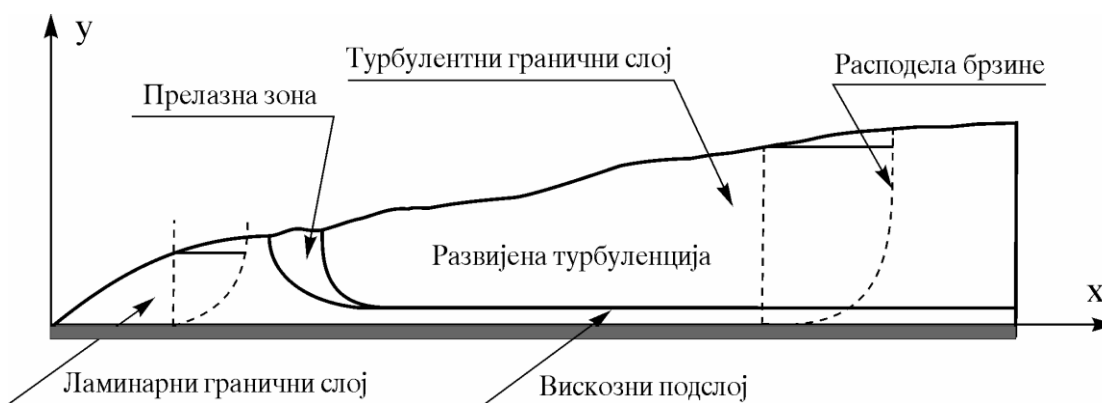
Уколико дође до размене топлоте између површине опструјаваног тела и струје флуида уз површину опструјаваног тела створиће се термодинамички (топлотни) гранични слој. Карактеристична за овај слој је промена температуре од неке почетне вредности на површини опструјаваног тела, до вредности на спољашњој граници граничног слоја. Процес дифузије настаје када је различита концентрација у различитим тачкама тока струјања флуида, тада настаје дифузиони гранични слој у коме се концентрација сваке компоненте мења од вредности на површини опструјаваног тела до неке вредности спољашњег струјања. Брзина, температура и концентрација било које

компоненте у одговарајућим граничним слојевима приближавају се асимптотски својим одређеним вредностима на спољашњој граници граничног слоја. Динамички и термодинамички гранични слој имају главну улогу у процесу динамичког и термодинамичког дејства струјања флуида и површине опструјаваног тела. Такође морамо узети у обзир материјал опструјаваног тела јер може доћи до хемијске реакције при контакту површине тела и флуида.

2.1 Струјање у граничном слоју

Струјање у граничном слоју је неједнолико јер се развија дуж смера струјања а односи се на простор између круте границе и слободног тока. Струјање у подручју граничног слоја обележено је понашањем реалног вискозног флуида док се подручје изван граничног слоја посматра као безвискозно струјање савшеног флуида [4].

Постоје две врсте струјања у граничном слоју: ламинарно и турбулентно. Гранични слој полази од чела чврсте површи као ламинаран, удаљавајући се од чела чврсте површи он се подебљава јер се брже нагомилавају нови делићи флуида који долазе у гранични слој, од оних који напуштају гранични слој. Зависно од брзина односно Рејнолдсовог броја, гранични слој може затим постати турбулентан. Дакле, при струјању флуида преко равне плоче (слика 3) струјање флуида од чеоне површи до прелазне зоне ламинарно, затим пролази кроз прелазну зону после чега отиче турбулентно. Турбулентан гранични слој и равну плочу раздваја вискозни подслој који се јавља као последица веома малих брзина струјања уз саму плочу [6].



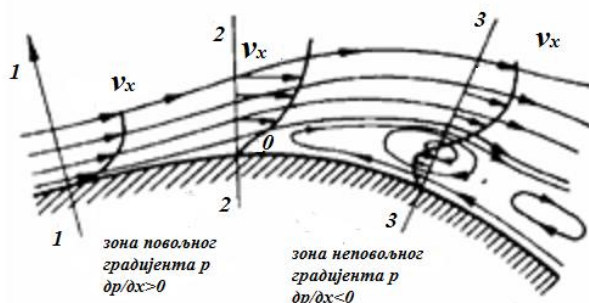
Слика 3. Режим струјања у граничном слоју дуж равне плоче

Потребно је усвојити одговарајућу дужину при дефинисању Рејнолдсовог броја, у овом случају то је углавном растојање x од предње ивице чврсте границе односно предње зауставне тачке. Уз сами почетак плоче гранични слој је врло танак, што значи да је мали и Рејнолдсов број који карактерише ламинарно струјање.

Турбулентна зона струјања се јавља на довољно великој удаљености од чеоне ивице плоче на којој Re број може да достигне вредност при којој је струјање турбулентно. Између је прелазна зона. Промена брзине у турбулентном граничном слоју у близини плоче је нагла а са удаљавањем од плоче је равномернија. У ламинарном граничном слоју брзина се мења постепено. Између турбулентног граничног слоја и чврсте површи формира се ламинарни или вискозни подслој. Формирање овог подслоја је неминовно, јер су непосредно до саме чврсте површи брзине сасвим мале. У овом подслоју расподела брзина је скоро линеарна али њен "градијент" је доста велики. Треба правити разлику између вискозног подслоја и ламинарног граничног слоја. Овај подслој карактерише веома мала дебљина која зависи од спољашње брзине, тј. са порастом спољашње брзине вискозни подслој постаје све тањи [1].

2.2 Одвајање граничног слоја

При опструјавању аеропрофила или обртних тела, у односу на опструјавања око плоче, знатно се мења градијент притиска p дужином турбулентног граничног слоја, а зависно од њега распоред брзине и тангенцијални напон τ_0 . Облик граничног слоја и распоред брзина у области одвајања илустровани су на слици 4. Види се да уколико је $\partial p / \partial x < 0$ (повољан градијент p) профил брзине је још увек пунији (у односу на равну плочу са $\partial p / \partial x = 0$), а при $\partial p / \partial x > 0$ (неповољан градијент p) профил брзине је оштрији (стрмији). При позитивном градијенту p профил брзине нагло се мења и одлепљује када је $\tau_0 \approx 0$ [3].



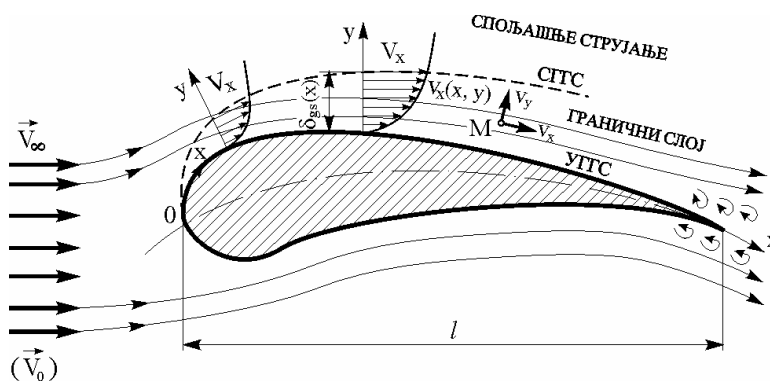
Слика 4. Одвајање граничног слоја

Због велике количине флуида која је успорена, долази до одлепљивања флуидне струје (тачка 0), ту појаву прати повећање притиска у складу са Бернулијевом једначином.

То повећање притиска, у садејству са тангенцијалним напоном на површини тела, тежи да врати флуид уназад. Тачка одвајања налази се на чврстој површини, јер је на том месту под дејством повећаног притиска и тангентног напона, заустављено кретање. Зачетак вртлога формира се низструјно од тачке одвајања због струјања у супротном правцу. Ефекат одвајања и вртложни траг су најзначајнији процес претварања кинетичке енергије у енергију притиска и губитка механичке енергије, такође. Аеродинамична тела обликују се тако да се тачка одвајања спусти што је могуће ниже. Ако гранични слој остане танак а одвајање се не догоди, притисак ће се приближно вратити флуидној струји. При томе ће отпор који се јавља бити искључиво последица трења [3].

3. Дебљина ламинарног граничног слоја

При одређивању дебљина граничног слоја δ_{gs} претпоставља се да су унутар граничног слоја вискозне силе и силе инерције величине истог реда. Код спољашњег струјања силе трења су занемарљиве у поређењу са силама инерције. У теорији граничног слоја се сматра да је релативна дебљина граничног слоја δ_{gs} / l мала величина, као и да је полупречник кривине зида опструјаваног тела довољно велики у односу на средњу дебљину граничног слоја. Шематски приказ распореда брзина у граничном слоју једног несиметричног профила (заједно са осталим параметрима граничног слоја) дат је на слици 5, при чему је, дужина у правцу нормалном на зид профила дата у већој размери.



Слика 5. Гранични слој око профила

где је:

x – криволинијска координата која се мери дуж посматраног зида од неке уочене тачке O

y – означена координата која се мери дуж нормале на зид

V_x – брзина спољашњег потенцијалног струјања (подужна пројекција брзине на спољашњој граници граничног слоја)

l – карактеристична дужина за гранични или тетива опструјаваног профила.

Из развијеног облика Навије-Стоксове једначине (1)

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\
\frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \\
\frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).
\end{aligned} \tag{1}$$

види да су инерцијске силе и силе трења (након множења са ρ) одређене члановима облика:

$$I = \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad T = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (\mu = \rho \nu).$$

Подужна пројекција брзине у граничном слоју мења се од $v_x = 0$ на непокретном зиду до $v_x = V_x(x)$ на спољашњој граници граничног слоја, то је ред величине ове пројекције $v_x \sim V_x$ (v_x може највише да буде једнако V_x). Видимо да је $x \sim l$ и $y \sim \delta_{gs}$, при томе знак " $\sim$ " означава ред величине. Следи да је извод $\partial v_x / \partial x$ пропорционалан количнику V_x / l . Други извод у изразу за силу трења је реда величине:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \sim \frac{1}{\delta_{gs}} \cdot \frac{V_x}{\delta_{gs}} = \frac{V_x}{\delta_{gs}^2}.$$

Инерцијалне силе и силе трења су величине реда:

$$I \sim \rho \frac{V_x^2}{l}, \quad T \sim \mu \frac{V_x}{\delta_{gs}^2}.$$

Како су ове силе величине истог реда, то се из релације

$$\rho \frac{V_x^2}{l} \sim \mu \frac{V_x}{\delta_{gs}^2}$$

налази да је

$$\delta_{gs} \sim \sqrt{\frac{\mu l}{\rho V_x}} = \sqrt{\frac{\nu l}{V_x}},$$

одакле је

$$\frac{\delta_{gs}}{l} \sim \sqrt{\frac{\nu}{V_x l}} = \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad Re = \frac{V_x \cdot l}{\nu} \tag{2}$$

Ако се карактеристична дужина l замени променљивом x , мереном одпредње зауставне тачке, добиће се да је

$$\delta_{gs} \sim \sqrt{\frac{vx}{V_x}} = \delta_{gs}(x), \quad \frac{\delta_{gs}}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_x}}, \quad Re_x = \frac{V_x \cdot x}{\nu}, \quad (3)$$

одакле се види да дебљина граничног слоја $\delta_{gs}(x)$ расте пропорционално са x .

Коначно се може написати да је

$$\delta_{gs} = k \cdot \sqrt{\frac{vx}{V_x}}, \quad (4)$$

где је k неки коефицијент (бројни фактор) који се накнадно одређује за конкретни случај струјања флуида. На основу релације (2) следује да се релативна дебљина граничног слоја δ_{gs} / l смањује са повећањем Re броја. Уколико је Re број мањи, дебљина граничног слоја је већа. За невискозни флуид, тј. када $Re \rightarrow \infty$, дебљина граничног слоја тежи нули.

4. Прандтлове једначине граничног слоја

При извођењу основних једначина граничног слоја, посматраће се раванско ($v_z = 0$, $\partial / \partial z = 0$) стационарно ($\partial / \partial t$) струјање вискозног нестишљивог флуида поред чврстог непорозног зида, уз занемаривање запреминских сила ($f \approx 0$). Из разлога што флуид струји уз криволинијску контуру зида, при чему је закривљење мало, могуће је уместо криволинијске подужне координате s користити Декартову координату x ($x \approx s$). У разматраном случају струјања (слика 5) једначине кретања вискозног флуида (1) се свODE на једначине:

$$\begin{aligned}v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{5}$$

уз одговарајуће граничне услове.

Систем једначина (5) можемо упростити изостављањем чланова једначина система који су у односу на остале чланове мале величине. При том би требао да се одреди ред величине свих чланова једначина система (5), уз услов да је δ_{gs} / l мала величина. Методе теорије граничног слоја односе на случајеве струјања флуида дефинисане већим вредностима Рејнолдсовог броја, па ће се анализа при извођењу вршити на бази Рејнолдсовог броја. Због тога се уместо физичких уводе бездимензијске променљиве (x , y , v_x , v_y и p) изразима:

$$x = L\bar{x}, \quad y = \frac{L}{\sqrt{Re}}\bar{y}, \quad v_x = V_\infty \bar{v}_x, \quad v_y = \frac{V_\infty}{\sqrt{Re}}\bar{v}_y, \quad p = \rho V_\infty^2 \bar{p}\tag{6}$$

у којима је:

L - "размера" подужне координате ($L = l$ и константа је за одређени проблем струјања), V_∞ - "размера" подужне пројекције брзине ($V_\infty = \text{const.}$). При томе је $Re = V_\infty L / \nu$, односно $\nu = V_\infty L / Re$.

На пример, помоћу променљивих (6), конвективни чланови прве једначине и први вискозни члан система (5) се трансформишу као:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = V_\infty \bar{v}_x \frac{\partial (V_\infty \bar{v}_x)}{\partial (L\bar{x})} = \frac{V_\infty^2}{L} \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}},$$

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{V_\infty}{\sqrt{Re}} \bar{v}_y \frac{\partial (V_\infty \bar{v}_x)}{\partial \left(\frac{L}{\sqrt{Re}} \bar{y}\right)} = \frac{V_\infty^2}{L} \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}},$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial (L\bar{x})} \left[\frac{\partial (V_\infty \bar{v}_x)}{\partial (L\bar{x})} \right] = \frac{V_\infty}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{V_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{x}^2}$$

Након трансформисања свих чланова уз помоћ релација (6), систем (5) се своди на следећи систем бездимензијских једначина:

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{y}^2},$$

$$\frac{1}{Re} \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial \bar{y}^2},$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} = 0.$$

Како се разматрају случајеви струјања са већим Рејнолдсовим бројевима, то се, за велике вредности Re - бројева, претходне једначине свODE на:

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{y}^2},$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}},$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} = 0.$$

Сада ове бездимензијске једначине, уз помоћ веза (6), треба трансформисати у димензијски облик. Овако се за раванско стационарно струјање вискозног нестишљивог флуида у граничном слоју, добијају Прантлове једначине раванског граничног слоја нестишљивог флуида:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

Друга динамичка једначина (5) се свела на једначину $\partial p / \partial y = 0$, па се у првој динамичкој једначини (7) може писати да је $(1/\rho) \partial p / \partial x = (1/\rho) dp / dx$. Из једначине $\partial p / \partial y = 0$ види се да се притисак преноси управно на гранични слој. То значи да је гранични слој веома танак. Због чињенице да у граничном слоју брзина струјања расте од нуле до неке вредности у спољашњем струјању као што је приказано на слици 5, спољашње струјање се карактерише као невртложно тј. потенцијално струјање савршеног флуида. Из овога следи да се за спољашњу границу граничног слоја може применити Коши - Лагранжев интеграл Ојлерових једначина v_x

$$p + \frac{\rho V_x^2}{2} = const.,$$

даље се диференцирањем налази да је

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = V_x \frac{dV_x}{dx}$$

Функцију притиска $p = p(x)$ могуће је одредити уз помоћ Коши - Лагранжеве једначине из познате расподеле брзине спољашњег струјања течности $V_x = V_x(x)$. Непроменљивост притиска дуж дебљине граничног слоја ($\partial p / \partial y = 0$) значи да се притисак у области граничног слоја може представити као позната функција криволинијске координате x . Како се притисак дуж дебљине граничног слоја не мења ($\partial p / \partial y = 0$), то значи да се у области граничног слоја притисак може сматрати познатом функцијом криволинијске координате x . Искључивање притиска из система једначина могуће је Коши - Лагранжевом једначином, што значи да на основу тога могу да се напишу следеће релације

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = V_x \frac{dV_x}{dx} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (7')$$

Након упоређивања система једначина (5) и (7') видимо да се веома поједностављује стање задржавањем чланова највећег реда. Мањи је број једначина и непознатих функција (пре упоређивања v_x, v_y, p ; после: v_x, v_y). Такође је из прве једначине нестао један извод другог реда. Једначине су и даље нелинеарне, а и ред им је исти. Приликом проучавања струјања флуида у граничном слоју постоје одређени проблеми са

нелинеарним инерцијским члановима. Једначинама (7) или (7') треба придодати и одговарајуће граничне услове. Под претпоставком да је посматрано опструјавано тело непокретно и непорозно, онда непознате функције $v_x(x, y)$ и $v_y(x, y)$ морају задовољити следеће услове приањања:

$$v_x = 0, \quad v_y = 0 \quad \text{за } y = 0 \quad (8)$$

Овим граничним условима треба да се додају услови на граници граничног слоја чија се дебљина може сматрати или бесконачно великом (асимптотски гранични слој) или коначном. У коначном граничном слоју дебљина граничног слоја се посматра као непозната функција криволинијске координате x . Ови гранични услови требају најпре да исказују непрекидност основне брзинске пројекције v_x . [8] Посматрањем дебљине граничног слоја као коначне имамо следеће граничне услове

$$v_x = V_x(x), \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \right) \quad \text{за } y = \delta_{gs} \quad (8')$$

или

$$v_x = V_x(x), \quad \text{за } y \rightarrow \infty \quad (8'')$$

за тзв. асимптотски гранични слој.

Закључујемо да је суштина математичког проучавања кретања вискозног нестишљивог флуида решавање диференцијалних парцијалних једначина (7') са потребним граничним условима. Помоћу одређених метода као што је нпр. метода коначних разлика решене су одређене једначине граничног слоја, занемарујући нелинеарност и граничне услове на непознатој граници [1].

При проучавању граничног слоја, у једначине граничног слоја можемо увести функцију струјања $\psi(x, y)$. За интеграљење једначина граничног слоја нестишљивог флуида ова функција се уводи посредством већ познатих (9) веза:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (9)$$

при чему је једначина континуитета идентички задовољена. Заменом ових израза у прву једначину (7') добиће се једначина у облику

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = V_x \frac{dV_x}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (10)$$

Примећује се да се увођењем функције струјања број непознатих функција смањио са две (v_x, v_y код система (7')) на једну (ψ у једначини (10)). Такође, ова функција је утицала на повећање реда диференцијалне једначине. Дакле, добијена једначина (10) представља парцијалну диференцијалну једначину трећег реда, док је прва једначина система (7') једначина другог реда. У једначину (10) додају се гранични услови, који у складу са (8) и (8') гласе:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \text{за } y = 0;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = V_x(x), \quad \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \right), \quad \text{за } y = \delta_{gs}, \quad y \rightarrow \infty \quad (11)$$

Прорачун граничног слоја за неки реалан случај струјања врши се због одређивања закона расподела брзина и тангентног напона на зиду опструјаваног тела. При решавању проблема простирања топлоте као и за одређивање положаја тачке одвајања граничног слоја потребно је познавање брзине. У односу на тангентни напон одређује се сила трења тј. отпор који је последица трења флуида о површину тела које флуид опструјава. Тангентни напон на зиду тела може се представити преко следеће релације

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (12)$$

где је μ - коефицијент динамичке вискозности флуида.

За израчунавање тангентног напона и отпора услед трења, мора бити познат "градијент" брзине на зиду и то дуж целе контуре опструјаваног тела. Овај "градијент" одређује се искључиво решавањем једначина граничног слоја.

Под дејством поља повишеног притиска, код тела са заобљеним задњим делом долази до одвајања граничног слоја и до формирања вртложне зоне (вртложна бразда) која настаје иза тела. Отпор притиска настаје као узрок велике разлике између притиска безвискозног струјања и притиска у вртложној зони, која се јавља у одређеним тачкама испред тела у вртложној зони. Код танких аеропрофила, при малим нападним угловима, постепено је пораст притиска са приближавањем њиховој задњој ивици, па нема одвајања граничног слоја, па је и ширина вртложне зоне мала. Због тога је отпор притиска врло мали, тако да једини отпор кретању аеропрофила је отпор трења, који је незнатан. Флуид у тачки одвајања скреће из поља повећаног притиска и одлази у спољашње струјање [1]. Тачка одвајања дефинисана је изразом

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

Приликом израчунавања отпора услед трења одговарајуће интеграљење се спроводи дуж контуре тела и то почев од предње зауставне тачке (слика 5) па до задње ивице тела, односно само до тачке одвајања, ако одвајање граничног слоја наступа испред задње ивице тела [1].

5. Аеропрофили

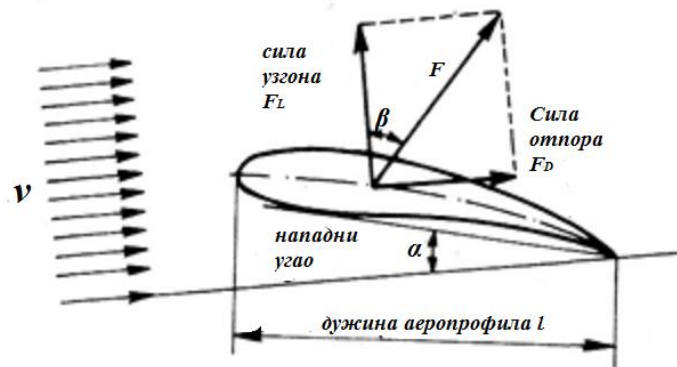
Према дефиницији аеропрофил је обликовано тело које изазива аеродинамичку силу нормално на његово кретање кроз флуид са малим отпором. Ова сила је узгонска F_L и заједно са отпорном F_D одређује укупну силу F којом флуид дејствује на аеропрофил. Карактеристична дужина аеропрофила означена је са l , његов распон са b , а носећа карактеристична површина профила је $A=bl$. Силе отпора и узгона дефинисане су са:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 c_D A$$

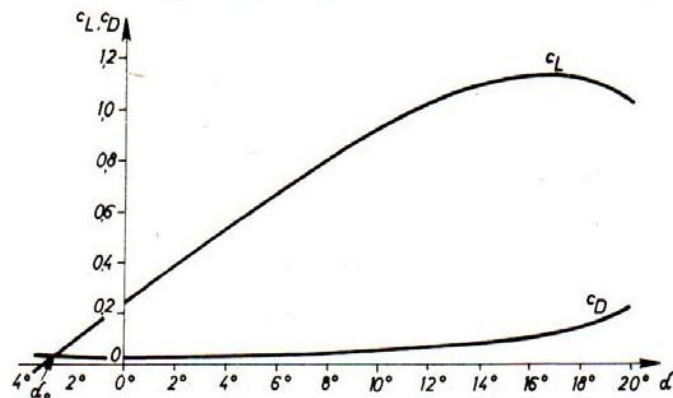
и

$$F_L = \frac{1}{2} \rho v^2 c_L A$$

где су c_L и c_D коефицијенти узгона и отпора и једнаки су за све сличне моделе аеропрофила при истим нападним угловима. На слици 7 приказане су карактеристичне криве промене коефицијента отпора аеропрофила за различите нападне углове α [3].



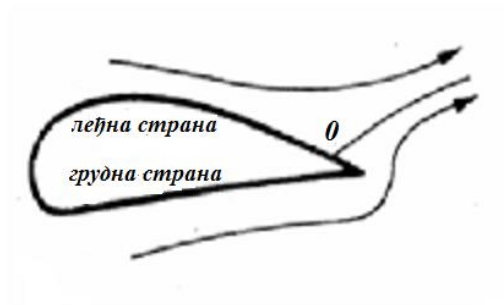
Слика 6. Силе на аеропрофилу



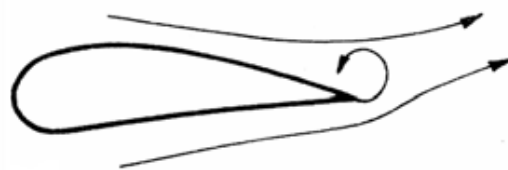
Слика 7. Коефицијенти отпора аеропрофила

5.1 Постанак циркулације

При врло малим брзинама када аеропрофил почиње да се креће из стања мировања, слика опструјавања у близини задње ивице аеропрофила изгледаће као на слици 8а, са зауставном тачком 0 на леђној страни, на извесној малој удаљености са задње ивице. Уколико брзина аеропрофила расте, струјнице са грудне стране нису више у стању да обиђу око задње ивице због великих сила вискозности, које почињу да делују услед великог градијента брзине, те се струјање одвија од задње ивице, а у некој тачки, између ове и малопређашње зауставне, ствара се вртлог, као што је показано на слици 8б који се назива почетни вртлог јер се формира покретањем аеропрофила. Када овај вртлог порасте до извесне величине, он се одваја од аеропрофила и одлази низ струјно поље. Пошто циркулација око било какве контуре мора бити једнака нули, јер је таква била и пре кретања, око аеропрофила мора постојати циркулација Γ која је по величини једнака, али супротног смера од почетне циркулације. Циркулација око аеропрофила назива се везаном циркулацијом. Када се аеропрофил заустави, везани вртлог (који не може да се уништи) силази са аеропрофила и поништава се почетним вртлогом који се задржао у струјном пољу. Последња констатција односи се на савршени флуид, или кратко кретање аеропрофила кроз реалан флуид. За дуго кретање аеропрофила у реалном флуиду почетни вртлог током времена исчезне због деловања силе трења, а везани вртлог је присутан јер га генерише само кретање. На слици 9 приказани су почетни, везани и крајњи вртлог [3].

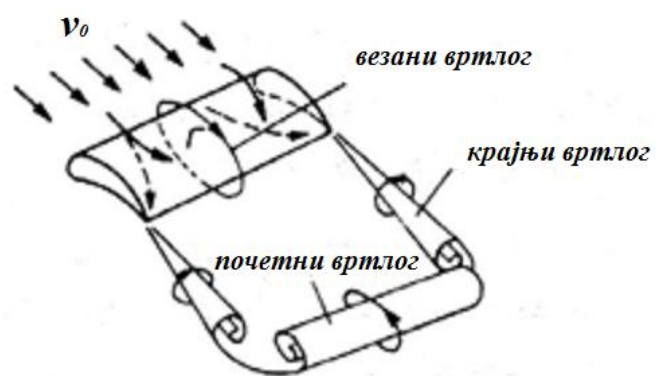


а)

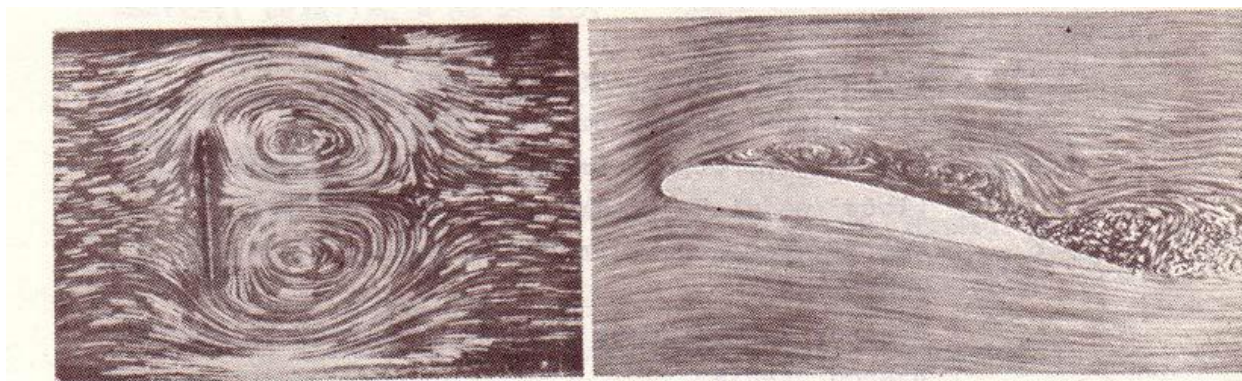


б)

Слика 8. Формирање почетног вртлога



Слика 9. Везани, почетни и крајњи вртлог



Слика 10. Опструјавање тела са формирањем вртлога

У укупном отпору тела аеродинамичког облика у пројектној тачки треба да доминира отпор површинског трења. Та тачка најчешће дефинише режим употребе аеродинамичког тела. Ламинарно струјање у граничном слоју треба што дуже да се задржи у и око овог режима [7].

Код неаеродинамичких тела у њиховом укупном отпору доминира утицај притиска односно отпор облика. Зона струјања треба да буде што дужа и да садржи вртлоге, што је значајно у процесима мешања [7].

Што се тиче узгонских тела (кракове ротора хеликоптера, кракове елисе пропелзора авиона, крила авиона, реп авиона, итд.) отпор површинског трења при малим угловима је доминантан [7].

6. Дебљина истискивања и дебљина губитка импулса

Како се подужна пројекција брзине $v_x(x, y)$ мења од $v_x=0$ на унутрашњој граници граничног слоја до $v_x=V_x(x)$ на спољашњој граници, тај прелаз брзине граничног слоја у брзину спољашњег струјања $V_x(x)$ је асимптотски. При преласку из из граничног слоја у спољашње струјање, услови на спољашњој граници слоја треба да прикажу непрекидност пројекције $v_x(x, y)$ (као и непрекидност тангентног напона). Уколико је граница између површине чврстог тела и флуида видљива, одређивање спољашње границе односно дебљине $\delta_{gs}(x)$ граничног слоја биће произвољно.

Дебљина граничног слоја је растојање од зида опструјаваног тела на коме се брзина граничног слоја разликује за 1% од брзине $V_x(x)$ спољашњег струјања [1].

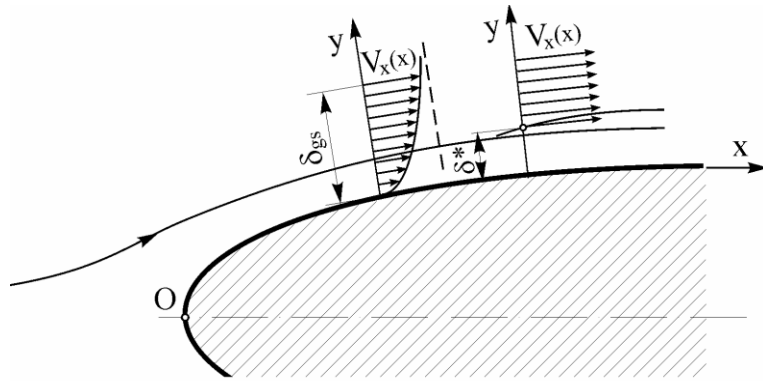
Као што је већ напоменуто, у теорији граничног слоја позната је расподела брзине $V_x(x)$ спољашњег струјања која се одређује у односу на решења задатка о острујавању посматране контуре савршеним флуидом.

Спољашњом брзином сматрамо ону брзину коју би невискозан флуид имао на површини посматраног тела, у истом простору струјања и под истим условима струјања [1].

Уместо дебљине граничног слоја која је доста произвољно дефинисана у савременој теорији граничног слоја користимо дебљину истискивања δ^* и дебљину губитка импулса δ^{**} . Приметиће се да ове дебљине физички имају више смисла. Смањење брзине у граничном слоју прати и пад протока. То смањење протока кроз површину јединичне ширине је

$$\int_{y=0}^{\infty} V_x \cdot 1 \cdot dy - \int_{y=0}^{\infty} v_x \cdot 1 \cdot dy = \int_{y=0}^{\infty} (V_x - v_x) dy.$$

Ово смањење протока, условљено вискозношћу, може да се изрази преко спољашње брзине као производ $V_x \delta^*$ где δ^* представља величину за коју се може замислити да је првобитно потенцијално струјање померено од зида.



Слика 11. Одређивање дебљине истискивања

Изједначавањем оба израза за смањење протока добија се образац за одређивање дебљине истискивања (дебљине пада протока) који гласи

$$\delta^* = \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{v_x}{V_x}\right) dy \quad (13)$$

Дебљина истискивања је вертикално растојање од зида за које би приликом смањења брзине у граничном слоју требало померити чврсто тело када би преко њега струјао савршен флуид једнаком брзином $V_x(x)$, да би проток флуида био исти. Оваква карактеристика је знатно мање осетљива на асимптотски карактер распореда брзина, јер израз $(1 - v_x/V_x)$ брзо конвергира ка нули. У односу на количину кретања потенцијалног струјања као последица трења у граничном слоју долази до смањења количине кретања које износи

$$\rho \int_{y=0}^{\infty} v_x (V_x - v_x) dy.$$

При претпоставци да је првобитно потенцијално струјање померено од зида за величину дебљине губитка импулса δ^{**} , онда то смањење количине кретања може да се изрази као $\rho 2\delta^{**}V_x$. Из услова једнакости оба израза

$$\rho V_x^2 \delta^{**} = \rho \int_{y=0}^{\infty} v_x (V_x - v_x) dy,$$

слиди релација за израчунавање δ^{**} , која гласи

$$\delta^{**} = \int_{y=0}^{\infty} \frac{v_x}{V_x} \left(1 - \frac{v_x}{V_x}\right) dy \quad (14)$$

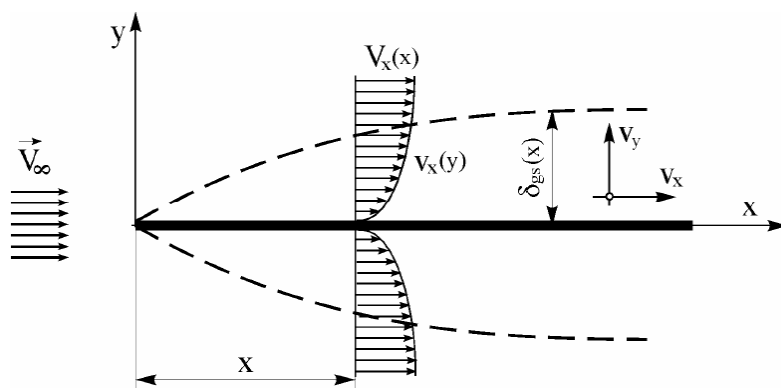
Дакле, дебљина губитка импулса δ^{**} се може се дефинисати као растојање од зида за које је количина кретања савршеног флуида једнака смањењу количине кретања реалног флуида приликом успоравања флуидних делића у граничном слоју. Уколико уместо асимптотског граничног слоја посматра модел слоја коначне дебљине δ_{gs} , онда уместо горње границе у интегралима (13) и (14) замењујемо са δ_{gs} . Па имамо израз за дебљину истискивања који гласи

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta_{gs}} \left(1 - \frac{v_x}{V_x}\right) dy \quad (13')$$

Из израза (13') примећујемо да се веза између дебљине граничног слоја δ_{gs} и дебљине истискивања δ^* може одредити само уколико је позната расподела подужне пројекције брзине у граничном слоју.

7. Гранични слој на плочи

Блазиус (Blasius) је извршио прву примену Прантлових једначина граничног слоја (7), односно (7') на примеру струјања нестишљивог флуида дуж равне и танке полубесконачне плоче, која је постављена тако да буде паралелна вектору брзине $\vec{V}_\infty$ непоремећеног једноликог струјања (слика 12) [1].



Слика 12. Гранични слој на равној плочи

Применом конформног пресликавања, за овај пример струјања дефинисана је брзина спољашњег потенцијалног струјања која износи

$$V_x(x) = V_\infty = \text{const.}$$

Због константне брзине спољашњег струјања, добија да је $dp/dx = 0$, тако да у овом случају струјања једначине граничног слоја гласе:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Одговарајући гранични услови за асимптотски гранични слој су:

$$\begin{aligned} v_x = v_y &= 0 \quad \text{за} \quad y = 0; \\ v_x &= V_\infty, \quad \text{за} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{15'}$$

Увођењем граничних услова (15') у једначине (15) Блазиус је претпоставио да постоји међусобна сличност између профила брзина $v_x(y)$ на различитим растојањима x од предње ивице полубесконачне плоче. Значи да се ови профили могу поклопити уколико се за подужну пројекцију v_x и попречну координату y изаберу одговарајуће погодне размере ("афина сличност"). За v_x може се као размера узети V_∞ а за вертикалну удаљеност од плоче дебљина граничног слоја $\delta_{gs}(x)$. У складу са тим закон расподеле брзина можемо написати у облику

$$\frac{v_x}{V_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta_{gs}}\right), \quad (16)$$

где је функција f независна од удаљености x .

Према (3), дебљина граничног слоја одређена као

$$\delta_{gs}(x) \sim \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}},$$

Због тога се уместо попречене променљиве y уводи нова бездимензијска променљива η уз помоћ следеће релације

$$\eta = \frac{y}{\delta_{gs}} = \frac{y}{\sqrt{\frac{vx}{V_\infty}}} = \eta(x, y), \quad \left(y = \eta \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}} \right) \quad (17)$$

на основу које је

$$v_x = V_\infty f(\eta). \quad (16')$$

Посредством веза (9), којима је дефинисана струјна функција $\psi(x, y)$, даље можемо написати

$$\psi = \int v_x(x, y) dy = \int V_\infty f(\eta) \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}} d\eta = \sqrt{V_\infty vx} \int f(\eta) d\eta$$

$$\psi = \sqrt{V_\infty vx} \Phi(\eta) \quad (18)$$

где је $\Phi(\eta) = \int f(\eta) d\eta$ - бездимензијска функција струјања

Подужна и попречна пројекција брзине v_x и v_y у граничном слоју изражене су преко функције $\Phi(\eta)$, као:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = V_\infty \Phi'(\eta) \quad (19)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V_\infty \nu}{x}} [\eta \Phi'(\eta) - \Phi(\eta)] \quad (20)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x}$$

где је $\Phi'(\eta)$ означава први извод функције $\Phi(\eta)$ по η .

Парцијални изводи који улазе у једначине (15), уз овако дефинисане пројекције брзине лако се могу наћи, а то су:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [V_\infty \Phi'(\eta)] = V_\infty \Phi''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{V_\infty}{2x} \eta \Phi''(\eta),$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [V_\infty \Phi'(\eta)] = V_\infty \Phi''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} \Phi''(\eta), \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} \Phi''(\eta) \right] \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{V_\infty^2}{\nu x} \Phi'''(\eta).$$

Када се изрази (19), (20) и (21) унесу у прву једначину система (15), након тога ће се за одређивање бездимензијске функције струјања $\Phi(\eta)$ добити следећа обична деференцијална једначина

$$2\Phi''' + \Phi\Phi'' = 0 \quad (22)$$

Гранични услови који су еквивалентни за функцију Φ су следећи:

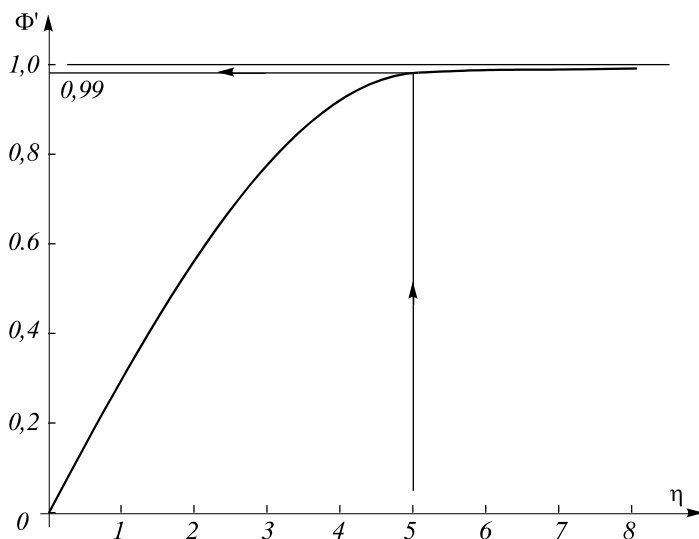
$$\begin{aligned} \Phi = 0, \quad \Phi' = 0 \quad \text{за} \quad \eta = 0 \\ \Phi' = 1 \quad \text{за} \quad \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (23)$$

Како је једначина континуитета идентички задовољена следи да се систем од две парцијалне диференцијалне једначине (15) своди на једну нелинеарну диференцијалну једначину трећег реда (22). Решење једначине је потпуно одређено са три гранична услова (23).

Упрошћавањем се диференцијалне парцијалне једначине граничног слоја свде на једну обичну диференцијалну једначину што је врло важно математички гледано, при томе можемо рећи да је одговарајуће решење "слично" или "аутомодално". То "слично"

решење поседују једначине граничног слоја само када је брзина спољашњег потенцијалног струјања $V_x(x)$ пропорционална степену дужине лука, измереног дуж зида опструјаваног тела (или је ова брзина константна). Овај услов је испуњен код опструјавања тела облика клина чији је угао отвора $\pi\beta$ (Falkner, Skan, Hartree) [1].

Немогуће је наћи опште решење диференцијалне једначине (22) у затвореном облику. Због тога је решавање ове једначине вршено или развијањем у степени ред или нумеричком интеграцијом. Блазиус је први пронашао решење једначине (22) у облику развоја у ред. Решење ове једначине је после Блазијусовог решења пронађено и нумеричком интеграцијом употребом рачунара. Вредности функције Φ и њених извода Φ' и Φ'' које су веома прецизно одређене Л. Хоуарт (L. Howarth) за разне вредности бездимензијске променљиве η дате су у табели 1. На основу нумеричких резултата урађен је дијаграм бездимензијске подужне брзине $\Phi' = v_x / V_\infty$ на слици 13 [1].



Слика 13. Дијаграм бездимензијске подужне брзине на плочи

Помоћу добијеног нумеричког решења (22) омогућено је лако израчунавање напона трења (локални тангентни напон) на површини плоче. У кореспонденцији са општом формулом (12) овај напон једнак је

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} \Phi''(0).$$

ТАБЕЛА 1. – Вредности функције Φ и њених извода Φ' и Φ'' за плочу

η	Φ	$\Phi' = v_x / V_\infty$	Φ''
0	0	0	0.33206
0.2	0.00664	0.06641	0.33199
0.4	0.02656	0.13277	0.33147
0.6	0.05974	0.19894	0.33008
0.8	0.10611	0.26471	0.32739
1.0	0.16557	0.32979	0.32301
1.2	0.23795	0.39378	0.31659
1.4	0.32298	0.46527	0.30787
1.6	0.42032	0.51676	0.29667
1.8	0.52952	0.57477	0.28293
2.0	0.65003	0.62977	0.26675
2.2	0.78120	0.68132	0.24835
2.4	0.92230	0.72899	0.22809
2.6	1.07252	0.77246	0.20646
2.8	1.23099	0.81152	0.18401
3.0	1.39682	0.84605	0.16136
3.2	1.56911	0.87609	0.13913
3.4	1.74696	0.90177	0.11788
3.6	1.92954	0.92333	0.09809
3.8	2.11605	0.94112	0.08013
4.0	2.30576	0.95552	0.06424
4.2	2.49806	0.96696	0.05052
4.4	2.69238	0.97587	0.03897
4.6	2.88260	0.98269	0.02948
4.8	3.09534	0.98779	0.02187
5.0	3.28329	0.99155	0.01591
5.2	3.48189	0.99425	0.01134

5.4	3.68094	0.99616	0.00793
5.6	3.88031	0.99748	0.00543
5.8	4.07990	0.99838	0.00365
6.0	4.27964	0.99898	0.0024
6.2	4.47948	0.99337	0.00165
6.4	4.67938	0.99961	0.00098
6.6	4.87931	0.99977	0.00061
6.8	5.07928	0.99987	0.00037
7.0	5.27926	0.99992	0.00022
7.2	5.47926	0.99996	0.00013
7.4	5.67924	0.99998	0.00007
7.6	5.87924	0.99999	0.00004
7.8	6.07923	1.00000	0.00002
8.0	6.27923	1.00000	0.00001
8.2	6.47923	1.00000	0.00001
8.4	6.67923	1.00000	0.00000
8.6	6.87923	1.00000	0.00000
8.8	7.07923	1.00000	0.00000

Како је, према табели 1, $\Phi''(0) = 0,332$, то се заменом ове вредности добија образац

$$\tau_0 = 0.332\rho \sqrt{\frac{V_\infty^3 v}{x}} = \tau_0(x), \quad (24)$$

који представља Блазиусову формулу за тангентни напон на зиду плоче. Са овим је бездимензијски тангентни напон на површини плоче

$$\frac{\tau_0(x)}{\rho \frac{V_\infty^2}{2}} = 0,664 \sqrt{\frac{v}{V_\infty x}} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad (25)$$

Дебљина граничног слоја $\delta_{gs}(x)$, као и дебљина истискивања δ^* и дебљина губитка импулса δ^{**} могу се одредити релативно лако помоћу теоријског Блазиусовог решења. Из табеле 6, а и са дијаграма на слици 13, види се да на бездимензијском растојању $\eta = 5,0$ подужна пројекција брзине постаје $v_x \approx 0,99 V_\infty$, што одговара дебљини граничног слоја

$$\delta_{gs}(x) \approx 5,0 \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}}, \quad (26)$$

коју је први одредио Блазиус. Релативна дебљина граничног слоја израчунава се преко обрасца

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,0}{\sqrt{\frac{V_\infty x}{v}}} = \frac{5,0}{\sqrt{Re_x}}$$

одакле видимо да релативна дебљина граничног слоја на плочи може да буде мала само при довољно великим Рејнолдсовим бројевима [1].

Полазећи од обрасца (13') за гранични слој коначне дебљине, дебљина истискивања δ^* рачуна се према формули

$$\begin{aligned} \delta^* &= \int_0^{\delta_{gs}} \left(1 - \frac{v_x}{V_\infty}\right) dy = \int_0^{\delta_{gs}} [1 - \Phi'(\eta)] \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}} d\eta = \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}} [\eta - \Phi(\eta)] \Big|_{\eta=0}^{\eta=5} = \\ &= \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}} [5 - \Phi(5) + \Phi(0)], \end{aligned}$$

јер је на граници граничног слоја $\eta = 5$.

Убацујући одговарајуће вредности из табеле 6, добиће се

$$\delta^* = 1,72 \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}},$$

након упоређивања са (26), видимо да је при опструјавању равне плоче дебљина истискивања једнака трећини дебљине граничног слоја $\delta^* \approx \delta_{gs} / 3$. Као што је већ поменуто, Блазиус је извео и образац за израчунавање дебљине губитка импулса. У најновијој теорији, у складу са општим обрасцима (13) и (14), за дебљину истискивања и губитка импулса у случају подужног оптицања равне плоче, користе се обрасци:

$$\delta^* = 1,721 \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}}, \quad \delta^{**} = 0,664 \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}}. \quad (27)$$

Блазиусова теорија је касније проверавана и потврђена експериментима многобројних истраживача. Никурадзе је спровео нејдеталнија мерења и то за различите вредности Рејнолдсових бројева. Он је констатовао практично потпуно поклапање профила брзине добијених мерењем са профилима који су добијени теоријским путем. Никурадзе је експерименталним путем потврдио теорију сличности профила брзине за различито x . Ово поклапање је експериментално доказано само за релативно велике Re бројеве. Ова теорија се не може применити за ту област с обзиром да је у близини предње плоче локални Рејнолдсов број Re_x још мали. Што се тиче својства струјања у близини предње ивице плоче, могу да се одредити само применом Навије - Стоксових једначина.

Значајно је истаћи да добијено решење једначина граничног слоја на равnoj плочи представља најједноставнији случај струјања за који је $dV_x/dx = 0$, тј. $dp/dx = 0$. У случају оптицања тела са подужним градијентом притиска ($dp/dx \neq 0$), немогуће је одговарајуће полазне парцијалне диференцијалне једначине граничног слоја свести на обичне диференцијалне једначине. Стога су научници своја истраживања усмерили наразвијање таквих приближних метода које би упростиле задатак проучавања кретања флуида у граничном слоју. Међу првима је развијена тзв. метода интегралних веза која се заснива на примени тзв. импулсне једначине. Код ове методе (Pohlhausen) (за случај оптицања раванске заобљене контуре) претпостављасе да се однос брзина $v_x(x, y)/V_x(x) = f(\eta)$ може представити у облику полинома трећег или четвртог степена. Коришћењем граничних и допунских граничних услова одређивани су непознати коефицијенти поменутог полинома, а за одређивање дебљине граничног слоја користи се интегрална веза. У закону за расподелу брзинепо пресеку граничног слоја $f(\eta)$ појављује се код ове методе један параметар, који је касније назван параметар облика или формпараметар.

Каснија истраживања су показала да је Полхаузендова метода недовољно тачна за примену, нарочито код граничних слојева са успореним струјањем. Својевремено су се развиле друге вишепараметарске методе (Н. Schlichting, Л. Г. Лойцянский и др.) које су давале тачније резултате. У савременој теорији граничног слоја развијена је метода уопштене сличности која се базира на импулсној једначини и на увођењу скупова параметара сличности. Практична примена тог закона сличности се састоји у томе да је довољно спровести само један прорачун граничног слоја за све Re бројеве при којима је струјање ламинарно [8]. Многобројни проблеми струјања решени су овом методом, како нестишљивог флуида, тако и стишљивог флуида, дисоцираног и јонизованог гаса.

Шездесетих година XX века почиње да се изучава магнетохидродинамички (МХД) гранични слој. МХД теорија граничног слоја има велики утицај на развој магнетне хидродинамике. Ова теорија дала је резултате који су пронашли значајну примену, најпре у авиоиндустрији, индустрији специјалних мотора, при пројектовању и експлоатацији атомских реактора, МХД генератора, као и код неких уређаја који имају примену у хемијској технологији [5].

8. Закључак

Основа тумачења великог броја врло важних процеса у техници и технологији представља управо теорија граничног слоја. Треба истаћи да се резултати који су добијени током истраживања из ове области веома заступљени у другим наукама, техници и технологији као што су: балистика, космичка истраживања, ракетна и авиотехника, пнеуматика, хидраулика, градња турбина, компресора и пумпи, екологија процесна и хемијска индустрија, градња бродова, брана и насипа, прорачун водовода и гасовода, изучавање транспорта масе и енергије, индустрије аутомобила, као и код пројектовања и експлоатације атомских реактора МХД генератора.

У првом делу овог рада описан је појам граничног слоја и његов значај при протицању флуида. Про том протицању одвајају се одређене врсте струјања (ламинарно и турбулентно). За струјање вискозног флуида теорија ламинарног струјања је довољна уколико струјање не излази из режима ламинарног струјања, али за турбулентно опструјавање тела, отворен систем једначина не може дати ни приближну слику о отпорним силама. Код одређивања дебљине граничног слоја закључили смо да се дебљина смањује са повећањем Re броја, односно повећањем брзине струјања и обрнуто.

Други део рада односи се на решавање Прандтлових једначина граничног слоја при чему је посматрано раванско стационарно струјање вискозног флуида поред чврстог непорозног зида, уз занемаривање запреминских сила, при чему имамо благо закривљење зида. Да би се што реалније одредиле особине струјања у граничном слоју, уводе се и одговарајући гранични услови у системе једначина. Помоћу метода као што је нпр. метода коначних разлика, решене су одређене једначине граничног слоја занемарујући нелинеарност и граничне услове на непознатој граници. При решавању једначина граничног слоја значајно је напоменути да добијено решење једначина граничног слоја на равној плочи представља најједноставнији случај струјања.

У трећем делу дефинисан је аеропрофил као посебно обликовано тело које изазива аеродинамичку силу нормално на његово кретање. Такође је описано и његово кретање кроз флуид, односно постанак циркулације око контуре тела. Значај аеропрофила огледа се код конструисања узгонских тела као што су (реп авиона, крила авиона, кракови елисе пропулзора авиона, ротор хеликоптера) као и код тела која нису аеродинамична и имају велики отпор облика и значајна су у процесима мешања.

Литература

- [1] Обровић, Б., Динамика флуида-изабрана поглавља, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 1998.
- [2] Боричић, А., Универзалне методе у истраживању нестационарног раванског ламинарног струјања нестишљивог проводног флуида, у спрегнутим МХД, динамичким, топлотним и дифузионим граничним слојевима, Докторска дисертација, Универзитет у Нишу, Машински факултет у Нишу, Ниш, 2014.
- [3] www.dodaj.rs/f/3q/Ii/4SAjk7O/granicni-sloj-i-otpori-s.pdf, преузето октобра 2014.
- [4] http://info.grad.hr/res/gf_osoblje/1043661511/doc/mehanika%20teku%C4%87ina_skripta/mehanika_tekucina.pdf, преузето октобра 2014.
- [5] Савић, С., Решавање проблема струјања јонизованог гаса у граничном слоју за случај непорозне и порозне контуре опструјаваног тела, докторска дисертација, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац 2005.
- [6] Вороњец, К., Обровић, Н., Механика флуида, Универзитет у Београду, Београд 1979.
- [7] Маричић, Н., Механика флуида, Факултет техничких наука у Косовској Митровици, Косовска Митровица 2003.
- [8] Саљников, В., Динамика вискозног нестишљивог флуида, Машински факултет у Београду, Београд 1969.