

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Примењена механика и аутоматско управљање

Предмет: Механика флуида

Број индекса: 136/2015

Јанићије Д. Весовић

Основи теорије о граничном слоју

завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Проф. др Савић Слободан-ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да:

- проучи одговарајућу литературу везану за теорију граничног слоја,
- опише струјање и изведе основне једначине граничног слоја,
- прикаже решавање ових једначина за случај опструјавања равне плоче,
- дефинише аеропрофил и изложи основне напомене о њему, и
- на основу прикупљених података из препоручене и друге литературе наведене области, прикаже практичну примену теорије граничног слоја

Препоручена литература:

- [1] Саљников, В., Динамика вискозног нестишљивог флуида, Машински факултет у Београду, Београд 1969.
- [2] Обровић, Б., Динамика флуида-изабрана поглавља, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 1998.
- [3] Обровић, Б., Механика флуида, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2007.

Крагујевац, септембар 2018.

Ментор:

Проф. др Слободан Савић

Изјављујем да сам овај завршни рад урадио самостално, служећи се литературом и својим стеченим знањем.

Јанићије Весовић 136/2015

Резиме

У овом раду је приказана основа теорије струјања флуида у граничном слоју, у случају опструјавања чврсте, непорозне контуре тела. Ово струјање је врло комплексно и описује се сложеним системом парцијалних, нелинеарних диференцијалних једначина другог реда, са сложеним почетним и граничним условима. У првом делу рада описано је струјање флуида и појам граничног слоја.

У другом делу је обрађена дебљина граничног слоја и њена зависност у односу на друге параметре. Извођење Прантлових једначина је искоришћено за случај раванског стационарног струјања вискозног, нестишљивог флуида поред чврстог непорозног зида.

У трећем делу је решена једначина граничног слоја за случај струјања - опструјавања равне плоче.

У једној глави су обрађене дебљина истискивања и дебљина губитка импулса као и утицај трења на струјање флуида.

Кључне речи: флуид, гранични слој, струјање

Summary

In this final paper the basics of research of fluid flow in the boundary layer, for the case flowing solid, nonporous body contour is presented. Flow of viscous, incompressible fluid is very complex and is described by complex system of nonlinear partial differential equations of second order with complex initial and boundary conditions. First part of the paper describes fluid flow and defines the concept of the boundary layer.

Thickness of the boundary layer and behavior at changing parameters is described in the second part. Prandtl boundary layer equations for the case of plane stationary flow of a viscous incompressible fluid near the solid, nonporous wall are shown performing.

The third part explains finding the solution boundary layer equations for the case of flowing flat plate.

Also determination of thickness extrusion and thickness loss of pulse are shown and the friction between fluid and the wall.

Keywords: fluid, boundary layer, flow

Садржај

1. Увод	1
2. Појам граничног слоја	3
2.1 Струјање у граничном слоју	6
2.2 Одвајање граничног слоја.....	7
3. Дебљина ламинарног граничног слоја.....	8
4. Прандтлове једначине граничног слоја	11
5. Аеропрофили	16
5.1 Настанак циркулације.....	17
6. Отпор трења	20
7. Дебљина истискивања и дебљина губитка импулса.....	22
8. Гранични слој на плочи	25
9. Закључак	33
Литература	34

1. Увод

Све израженији захтеви савременог човека повећавају количину потребне енергије. Тиме воде ка једном од најприсутнијих и најважнијих проблема модерног доба, проблему енергетске кризе. Познавање природе и нивоа неповратности процеса, ствара могућност смањења учешћа губитака у укупној количини енергије, па самим тим, и њеног померања ка корисно потребном раду. Проблеми енергетске кризе, енергетска ефикасност, управљање процесима захтевају различита истраживања кретања течности и гасова.

Кретање вискозног, реалног флуида се описује системом парцијалних, нелинеарних диференцијалних једначина другог реда са сложеним почетним и граничним условима. Увођењем различитих метода упрошћавања, решења ових једначина су у пракси показала задовољавајућу тачност. Један део приближних метода се односи и на Теорију граничног слоја, веома важну област Механике флуида, чији су резултати нашли примену у техничко-технолошкој пракси.

Гранични слој, који се образује при опструјавању чврстих површина вискозним флуидом, или при мешању струја вискозног флуида различитих брзина и физичких особина, је основа за разумевање многих техничких процеса. Многе области науке и технологије као што су космичка истраживања, балистика, ракетна и авио техника, пнеуматика и хидраулика, екологија, енергетика и енергетска ефикасност, градња турбина, компресора, пумпи и низа других апарата и уређаја, ауто индустрија, филтрација воде и ваздуха, користе резултате који су остварени помоћу Теорије граничног слоја.

Још далеке 1738. године у Бернулијевој хидродинамици је указано да пријањање флуида за чврсту површину битно утиче на карактер струјања. Ова појава је анализирана и касније, у радовима Стокса, Пуасона и Навијеа, Менделјејева и Жуковског. Тек 1904. године, Прандтл први указује на могућност поделе укупног струјања вискозног флуида на две спрегнуте, али ипак засебне области. Те две области представљају спољашње струјање (језгро струјања), где је могуће занемарити утицај вискозности, и где се распореди величина струјања сматрају познатим и у извесном смислу независним од граничних услова који владају на површини тела и танку област, у околини површине тела - струјање у граничном слоју, где вискозност има значајну улогу на природу струјања. У том слоју, долази до нагле промене величина струјања, од вредности које флуид има у спољашњем струјању на њихове вредности на површинама тела или канала, које су одређене граничним условима.

Гранични слојеви се у принципу могу поделити у две основне групе: класични гранични слој, који се формира у околини оптичаног тела или на површинама канала, и који се налази између граничне површине и спољашње струје, и “слободни” гранични слој, који је са обе стране окружен потенцијалним струјањима савреног флуида-вртложни траг и сл. За случај класичног граничног слоја, неопходно је напоменути, да није реч само о оптицању

апсолутно чврсте површине, већ да се овај појам користи и у случајевима порозних контура, односно у случајевима усисавања односно удувавања флуида, случајевима еластичних површина и сл. Од тренутка када је Прандтл дефинисао проблем граничног слоја, значајан број истраживача ради на решавању многобројних, физички различито дефинисаних проблема струјања нестишљивог и стишљивог флуида, плазме. Може се казати, да се је развој Теорије граничног слоја одвијао у два основна правца: (1) правац физичког, а затим и математичког моделирања различитих процеса кретања флуида, који се у природи и техничко-технолошкој пракси срећу, (2) правац развоја тачних и приближних метода за решавање овако постављених математичких модела [1].

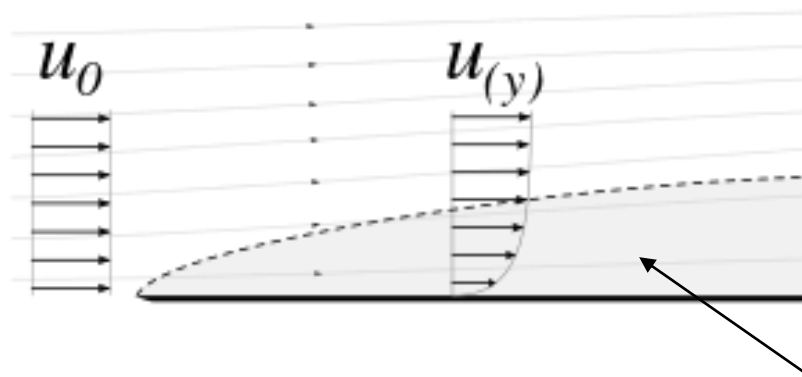
2. Појам граничног слоја

Коришћењем Навије-Стоксових једначина могуће је занемарити нелинеарне инерцијске чланове у случајевима када вискозност флуида има велики утицај на струјање (споро струјање веома вискозног флуида-уље за подмазивање). У таквим случајевима је брзина струјања релативно мала, а вискозност велика. Рејнолдсов број оваквих струјања је мали, $Re < 1$. Долази се до закључка да, ако је Рејнолдсов број струјања мали у односу на јединицу, онда се нелинеарни чланови у диференцијалним једначинама кретања могу занемарити.

Технички најважнији флуиди, вода и ваздух, у највећем броју проблема се крећу великим брзинама при малој вискозности, па је Рејнолдсов број ових струјања доста велики, $Re \gg 1$. Поменути нелинеарни чланови се не могу априори занемарити. Ови флуиди се лепе за чврсту површ опструјаваног тела. Истраживачи међу којима су Бернули, Стокс, Менделеев и Жуковски су приметили да приањање реалних флуида за чврсте површи утиче на карактер самог струјања. Немачки научник Л.Прандтл је први успео да струјање у непосредној близини зида тела изрази у облику одговарајућих диференцијалних једначина, које су касније добиле назив једначине граничног слоја [2].

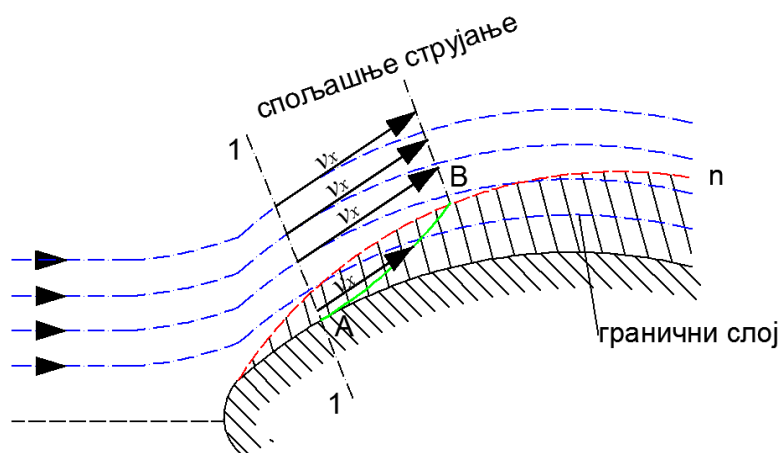
Прандтл је установио да је кочење флуида последица лепљења делића флуида за зидове опструјаваног тела. Подужна брзина струјања флуида, у том танком слоју, расте у правцу нормале на зид, од нуле на контури тела, до неке вредности која би постајала када зид не би кочио струјање (брзина спољашњег струјања). Ван њега брзина остаје иста. Поменути слој је практично веома танак, у њему је „градијент“ подужне брзине у правцу управном на контуру опструјаваног тела врло велики. У таквим случајевима тангентни напон $\tau = \mu \partial v_x / \partial y$ има веома високе вредности, чак и када су вредности коефицијента динамичке вискозности мале (велики Re бројеви). Ван тог танког слоја тангентни напон је минималан.

Закључује се да су у самом танком слоју уз зид опструјаваног тела силе вискозности великих вредности, док су ван овог слоја занемарљиво мале.

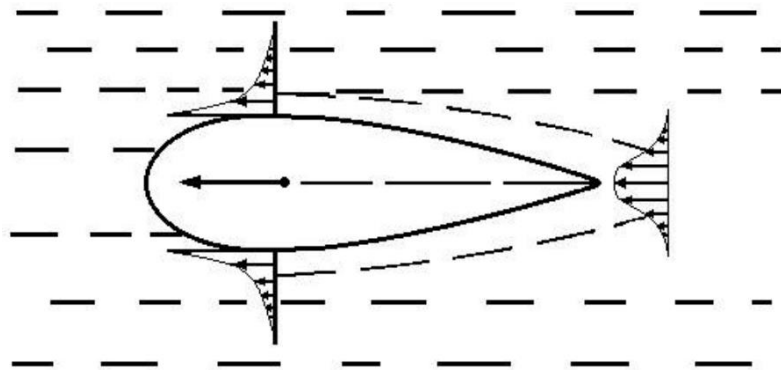


Гранични слој

Слика 1. Формирање граничног слоја на равной површини која мирује [3]



Слика 2. Формирање граничног слоја на закривљеној површини која мирује [4]



Слика 3. Формирање граничног слоја код тела које се креће кроз флуид [4]

Струјање флуида у близини опструјаваног тела, при великим Re бројевима, може се поделити на две области: прву која представља танак слој поред самог тела - гранични слој и другу - спољашње струјање, у којој је утицај трења занемарљив. Према томе, слој флуида у непосредној близини чврсте површи тела са којим се флуид додирује, у коме је утицај вискозности флуида изразит, назива се гранични слој. Мала дебљина динамичног граничног слоја омогућава упрошћавање Навије-Стоксових једначина. Упрошћене једначине су већ решене за велики број проблема струјања нестишљивих и стишљивих флуида [4].

У случају размене топлоте између струје флуида и површи опструјаваног тела, долази до формирања термодинамичког (топлотног) граничног слоја. У овом слоју се јавља промена температуре од вредности на зиду тела до одговарајуће вредности на спољашњој граници граничног слоја.

Процес дифузије настаје када се у различитим тачкама струјног тока јавља различита концентрација. Аналогно се уводи и дифузиони гранични слој у коме се концентрација сваке компоненте мења од вредности на зиду до одговарајућих вредности спољашњег струјања.

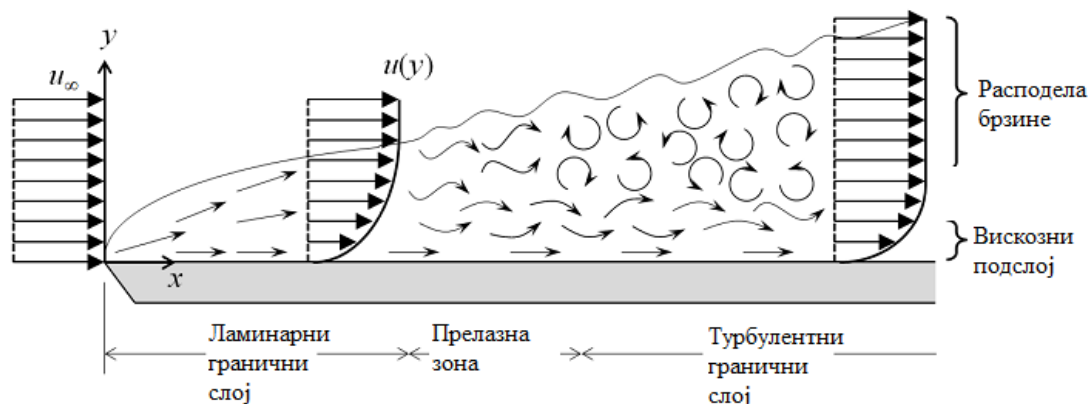
Брзина, температура и концентрација било које компоненте у одговарајућим граничним слојевима приближавају се асимптотски својим одређеним вредностима на спољашњој граници граничног слоја.

Иако су дебљине динамичког или термодинамичког граничног слоја много мање у односу на димензија тела, ови слојеви имају велики утицај у процесу узајмног динамичког и термодинамичког дејства струје флуида и опструјаваног зида. Материјал зида може да ступи у хемијске реакције са флуидом, што још више отежава проблем.

2.1 Струјање у граничном слоју

Струјање у граничном слоју је неједнако јер се мења дуж смера струјања, а односи се на простор између круте границе и слободног тока. Струјање у граничном слоју је одређено особинама реалног вискозног флуида док се подручје ван граничног слоја посматра као безвискозно струјање савршеног флуида.

Струјање у граничном слоју може бити двојако: ламинарно и турбулентно. Гранични слој полази од чела чврстог тела као ламинаран. Удаљавањем од чела слој се подебљава јер се нови делићи флуида који долазе брже гомилају од оних који напуштају гранични слој. У зависности од брзина, односно Рејнолдсовог броја, гранични слој може постати турбулентан. При струјању флуида преко равне плоче (слика 4) струјање флуида од чеоне површи до прелазне зоне је ламинарно, затим пролази кроз прелазну зону, након чега отиче турбулентно. Турбулентан гранични слој и равну плочу раздваја вискозни подслој који се јавља као последица веома малих брзина струјања уз саму плочу.



Слика 4. Режим струјања у граничном слоју дуж равне плоче [5]

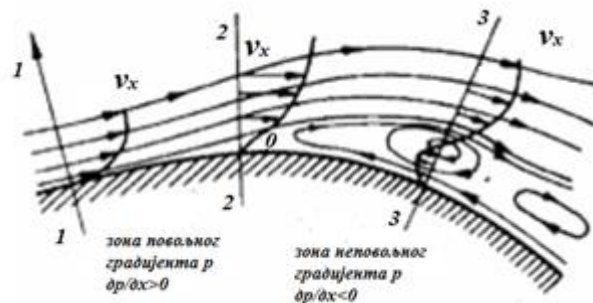
Да би се дефинисао Рејнолдсов број, потребно је усвојити неку карактеристичну дужину. У овој теорији то је растојање x од предње ивице чврстог тела - предња зауставна тачка. На самом почетку плоче гранични слој је веома танак, Рејнолдсов број има малу вредност, одакле се закључује да је струјање ламинарно.

На довољно великом растојању од предње ивице плоче Рејнолдсов број може да достигне велике вредности при којима струјање постаје турбулентно (турбулентна зона). Између ламинарне и турбулентне зоне налази се прелазна зона. У турбулентном граничном слоју промена брзине у близини плоче је нагла, док је даље од плоче расподела брзина

униформнија. У ламинарном делу граничног слоја промена брзине је постепенија. Између турбулентног граничног слоја и чврсте површи формира се ламинарни или вискозни подслој. Овај подслој се ствара јер су непосредно до самог тела брзине сасвим мале. У овом подслоју расподела брзина је скоро линеарна али њен „градијент“ је доста велики. Треба разликовати вискозни подслој и ламинарни гранични слој. Овај подслој карактерише веома мала дебелина која зависи од спољашње брзине. Са порастом спољашње брзине вискозни подслој је све тањи.

2.2 Одвајање граничног слоја

Опструјавање аеропрофила или обртних тела се разликује у односу на опструјавање око плоче. Градијент притиска p се знатно мења дужином турбулентног граничног слоја, а у односу на њега мењају се и распоред брзине и тангенцијални напон τ_0 . Облик граничног слоја и распоред брзина у области одвајања приказани су на слици 5. Уколико је $\partial p / \partial x < 0$ (повољан градијент p) профил брзине је још увек пунији (у односу на равну плочу са $\partial p / \partial x = 0$), а при $\partial p / \partial x > 0$ (неповољан градијент p) профил брзине је оштрији (стрмији). При позитивном градијенту p профил брзине нагло се мења и одлепљује када је $\tau_0 \approx 0$.

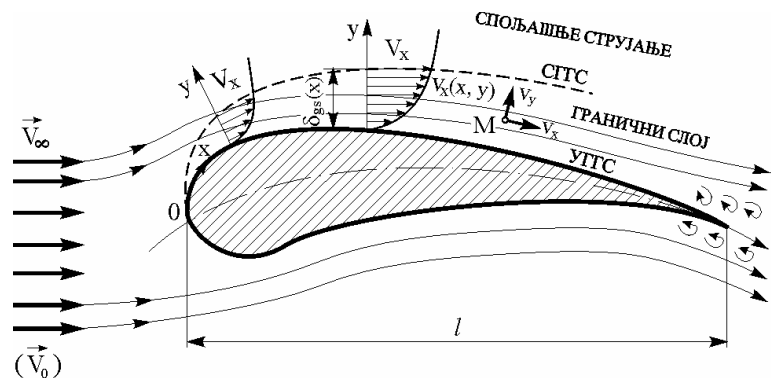


Слика 5. Одвајање граничног слоја [6]

Услед велике количине флуида која је успорена, долази до одвајања флуидне струје (тачка 0). Због овога се јавља повећање притиска у складу са Бернулијевом једначином. Заједничко дејство притиска и тангенцијалног напона на површини тела, тежи да врати флуид уназад. Тачка одвајања налази се на чврстој површини, јер је на том месту под дејством притиска и тангентног напона, заустављено кретање. Зачетак вртлога формира се ниже од тачке одвајања због струјања у супротном правцу. Ефекат одвајања и вртложни траг су најзначајнији процеси претварања кинетичке енергије у енергију притиска и губитка механичке енергије. Аеродинамична тела обликују се тако да се тачка одвајања спусти што је могуће ниже. Ако гранични слој остане танак а одвајање се не догоди, притисак ће се приближно вратити флуидној струји.

3. Дебљина ламинарног граничног слоја

Како би се одредила дебљина граничног слоја δ_{gs} полази се од претпоставке да су унутар граничног слоја вискозне силе и силе инерције величине истог реда. У спољашњем струјању могуће је занемарити силе трења у односу на силе инерције. У теорији граничног слоја се такође сматра да је релативна дебљина граничног слоја δ_{gs} / l мала величина, као и да је полупречник кривине зида опструјаваног тела довољно велики у односу на средњу дебљину граничног слоја. На слици 6 шематски је приказан распоред брзина у граничном слоју за један несиметрични профил (заједно са осталим параметрима граничног слоја), при чему је, размера дужине у правцу управном на зид профила увећана.



Слика 6. Гранични слој око профила [4]

где је :

x – криволинијска координата која се мери дуж посматраног зида од неке уочене тачке O

y – означена координата која се мери дуж нормале на зид

V_x – брзина спољашњег потенцијалног струјања (подужна пројекција брзине на спољашњој граници граничног слоја)

l – карактеристична дужина за гранични или тетива опструјаваног профила.

Из развијеног облика Навије-Стоксове једначине (1)

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\
\frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \\
\frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).
\end{aligned} \tag{1}$$

види да су инерцијске силе и силе трења (након множења са ρ) одређене члановима облика:

$$I = \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad T = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (\mu = \rho \nu).$$

Подужна пројекција брзине у граничном слоју мења се од $v_x = 0$ на непокретном зиду до $v_x = V_x(x)$ на спољашњој граници граничног слоја. Ред величине ове пројекције је $v_x \sim V_x$. Видимо да је $x \sim l$ и $y \sim \delta_{gs}$, при томе знак " $\sim$ " означава ред величине. Закључује се да је извод $\partial v_x / \partial x$ пропорционалан количнику V_x / l . Други извод у изразу за силу трења је реда величине:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \sim \frac{1}{\delta_{gs}} \cdot \frac{V_x}{\delta_{gs}} = \frac{V_x}{\delta_{gs}^2}.$$

Инерцијалне силе и силе трења су величине реда:

$$I \sim \rho \frac{V_x^2}{l}, \quad T \sim \mu \frac{V_x}{\delta_{gs}^2}.$$

Како су ове силе величине истог реда, то се из релације

$$\rho \frac{V_x^2}{l} \sim \mu \frac{V_x}{\delta_{gs}^2}$$

налази да је

$$\delta_{gs} \sim \sqrt{\frac{\mu l}{\rho V_x}} = \sqrt{\frac{\nu l}{V_x}},$$

одакле је

$$\frac{\delta_{gs}}{l} \sim \sqrt{\frac{\nu}{V_x l}} = \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad Re = \frac{V_x \cdot l}{\nu} \tag{2}$$

Ако се карактеристична дужина l замени променљивом x , мереном одпредње зауставне тачке, добиће се да је

$$\delta_{gs} \sim \sqrt{\frac{vx}{V_x}} = \delta_{gs}(x), \quad \frac{\delta_{gs}}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_x}}, \quad Re_x = \frac{V_x \cdot x}{\nu}, \quad (3)$$

одакле се види да дебљина граничног слоја $\delta_{gs}(x)$ расте пропорционално са x .

Коначно се може написати да је

$$\delta_{gs} = k \cdot \sqrt{\frac{vx}{V_x}}, \quad (4)$$

где је k неки коефицијент (бројни фактор) који се одређује касније за конкретни случај струјања флуида. Из релације (2) следи да се релативна дебљина граничног слоја δ_{gs} / l смањује са повећањем Re броја. Уколико је Re број мањи, дебљина граничног слоја је већа. За невискозни флуид, тј. када $Re \rightarrow \infty$, дебљина граничног слоја тежи нули [4].

4. Прандтлове једначине граничног слоја

Приликом извођења основних једначина граничног слоја, посматраће се раванско ($v_z = 0$, $\partial / \partial z = 0$) стационарно ($\partial / \partial t$) струјање вискозног, нестишљивог флуида поред чврстог непорозног зида, уз занемаривање запреминских сила ($f \approx 0$). Из разлога јер флуид струји уз криволинијску контуру зида, при чему је закривљење мало, могуће је уместо криволинијске подужне координате s користити Декартову координату x ($x \approx s$). У разматраном случају струјања (слика 6) једначине кретања вискозног флуида (1) свODE се на једначине:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

у одговарајуће граничне услове.

Систем једначина (5) може се упростити изостављањем чланова једначина система који су у односу на остале чланове занемарљиви. При том би требао да се одреди ред величине свих чланова једначина система (5), уз услов да је δ_{gs} / l мала величина. Методе теорије граничног слоја односе на случајеве струјања флуида дефинисане већим вредностима Рејнолдсовог броја, па ће се анализа при извођењу вршити на бази Рејнолдсовог броја. Због тога се уместо физичких уводе бездимензијске променљиве (x , y , v_x , v_y и p) изразима:

$$x = L\bar{x}, \quad y = \frac{L}{\sqrt{Re}}\bar{y}, \quad v_x = V_\infty \bar{v}_x, \quad v_y = \frac{V_\infty}{\sqrt{Re}}\bar{v}_y, \quad p = \rho V_\infty^2 \bar{p} \quad (6)$$

у којима је:

L - "размера" подужне координате ($L = l$ и константа је за одређени проблем струјања), V_∞ - "размера" подужне пројекције брзине ($V_\infty = \text{const.}$). При томе је $Re = V_\infty L / \nu$, односно $\nu = V_\infty L / Re$.

Помоћу променљивих (6), конвективни чланови прве једначине и први вискозни члан система (5) се трансформишу као:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = V_\infty \bar{v}_x \frac{\partial (V_\infty \bar{v}_x)}{\partial (L\bar{x})} = \frac{V_\infty^2}{L} \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}},$$

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{V_\infty}{\sqrt{Re}} \bar{v}_y \frac{\partial (V_\infty \bar{v}_x)}{\partial \left(\frac{L}{\sqrt{Re}} \bar{y} \right)} = \frac{V_\infty^2}{L} \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}},$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial (L\bar{x})} \left[\frac{\partial (V_\infty \bar{v}_x)}{\partial (L\bar{x})} \right] = \frac{V_\infty}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{V_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{x}^2}$$

Трансформацијом свих чланова уз помоћ релација (6), систем (5) се своди на следећи систем бездимензијских једначина:

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{y}^2},$$

$$\frac{1}{Re} \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial \bar{y}^2},$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} = 0.$$

Како се разматрају случајеви струјања са већим Рејнолдсовим бројевима, то се, за велике вредности Re - бројева, претходне једначине свODE на:

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{y}^2},$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}},$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} = 0.$$

Сада ове бездимензијске једначине, уз помоћ веза (6), треба трансформисати у димензијски облик. Овако се за раванско стационарно струјање вискозног нестишљивог флуида у граничном слоју, добијају Прантлове једначине раванског граничног слоја нестишљивог флуида:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

Друга динамичка једначина (5) се свела на једначину $\partial p / \partial y = 0$, па се у првој динамичкој једначини (7) може писати да је $(1/\rho) \partial p / \partial x = (1/\rho) dp / dx$. Из једначине $\partial p / \partial y = 0$ види се да се притисак преноси управно на гранични слој. Закључак је да је гранични слој веома танак. Због чињенице да у граничном слоју брзина струјања расте од нуле до неке вредности у спољашњем струјању као што је приказано на слици 6, спољашње струјање се карактерише као невртно тј. потенцијално струјање савршеног флуида. Из овога следи да се за спољашњу границу граничног слоја може применити Коши - Лагранжев интеграл Ојлерових једначина v_x

$$p + \frac{\rho V_x^2}{2} = const.,$$

даље се диференцирањем налази да је

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = V_x \frac{dV_x}{dx}$$

Функцију притиска $p = p(x)$ могуће је одредити уз помоћ Коши - Лагранжеве једначине из познате расподеле брзине спољашњег струјања течности $V_x = V_x(x)$. Непроменљивост притиска дуж дебљине граничног слоја ($\partial p / \partial y = 0$) значи да се притисак у области граничног слоја може представити као позната функција криволинијске координате x . Како се притисак дуж дебљине граничног слоја не мења ($\partial p / \partial y = 0$), то значи да се у области граничног слоја притисак може сматрати познатом функцијом криволинијске координате x . Искључивање притиска из система једначина могуће је Коши - Лагранжевом једначином, што значи да на основу тога могу да се напишу следеће релације

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = V_x \frac{dV_x}{dx} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (7')$$

Након упоређивања система једначина (5) и (7') видимо да се веома поједностављује стање задржавањем чланова највећег реда. Мањи је број једначина и непознатих функција (пре упоређивања v_x, v_y, p ; после: v_x, v_y). Из прве једначине нестало је један извод другог реда. Једначине су и даље нелинеарне, а и ред им је исти. Приликом проучавања струјања флуида у граничном слоју постоје одређени проблеми са нелинеарним инерцијским члановима. Једначинама (7) или (7') треба придодати и одговарајуће граничне услове. Под

претпоставком да је посматрано опструјавано тело непокретно и непорозно, онда непознате функције $v_x(x, y)$ и $v_y(x, y)$ морају задовољити следеће услове приањања:

$$v_x = 0, \quad v_y = 0 \quad \text{за} \quad y = 0 \quad (8)$$

Овим граничним условима додају се и услови на граници граничног слоја чија се дебљина може сматрати бесконачно великом (асимптотски гранични слој) или коначном. У коначном граничном слоју, дебљина граничног слоја се посматра као непозната функција криволинијске координате x . Ови гранични услови требају најпре да исказују непрекидност основне брзинске пројекције v_x . Посматрањем дебљине граничног слоја као коначне имамо следеће граничне услове

$$v_x = V_x(x), \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \right) \quad \text{за} \quad y = \delta_{gs} \quad (8')$$

или

$$v_x = V_x(x), \quad \text{за} \quad y \rightarrow \infty \quad (8'')$$

за тзв. асимптотски гранични слој.

Суштина математичког проучавања кретања вискозног нестишљивог флуида је решавање диференцијалних парцијалних једначина (7') са потребним граничним условима. Помоћу одређених метода као што је нпр. метода коначних разлика решене су одређене једначине граничног слоја, занемарујући нелинеарност и граничне услове на непознатој граници [4].

При проучавању граничног слоја, у једначине граничног слоја можемо увести функцију струјања $\psi(x, y)$. За интеграљење једначина граничног слоја нестишљивог флуида ова функција се уводи посредством већ познатих (9) веза:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (9)$$

при чему је једначина континуитета идентички задовољена. Заменом ових израза у прву једначину (7') добиће се једначина у облику

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = V_x \frac{dV_x}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (10)$$

Примећује се да се увођењем функције струјања број непознатих функција смањено са две (v_x, v_y код система (7')) на једну (ψ у једначини (10)). Такође, ова функција је утицала на повећање реда диференцијалне једначине. Дакле, добијена једначина (10) представља парцијалну диференцијалну једначину трећег реда, док је прва једначина система (7') једначина другог реда. У једначину (10) додају се гранични услови, који у складу са (8) и (8') гласе:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \text{за } y = 0;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = V_x(x), \quad \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \right), \quad \text{за } y = \delta_{gs}, \quad y \rightarrow \infty \quad (11)$$

Прорачун граничног слоја за неки реалан случај струјања врши се због одређивања закона расподела брзина и тангентног напона на зиду опструјаваног тела. При решавању проблема простирања топлоте као и за одређивање положаја тачке одвајања граничног слоја потребно је познавање брзине. У односу на тангентни напон одређује се сила трења тј. отпор који је последица трења флуида о површину тела које флуид опструјава. Тангентни напон на зиду тела може се представити преко следеће релације

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (12)$$

где је μ - коефицијент динамичке вискозности флуида.

За израчунавање тангентног напона и отпора услед трења, мора бити познат "градијент" брзине на зиду и то дуж целе контуре опструјаваног тела. Овај "градијент" одређује се искључиво решавањем једначина граничног слоја.

Под дејством поља повишеног притиска, код тела са заобљеним задњим делом долази до одвајања граничног слоја и до формирања вртложне зоне (вртложна бразда) која настаје иза тела. Отпор притиска настаје као узрок велике разлике између притиска безвискозног струјања и притиска у вртложној зони, која се јавља у одређеним тачкама испред тела у вртложној зони. Код танких аеропрофила, при малим нападним угловима, постепено је пораст притиска са приближавањем њиховој задњој ивици, па нема одвајања граничног слоја, па је и ширина вртложне зоне мала. Због тога је отпор притиска врло мали, тако да једини отпор кретању аеропрофила је отпор трења, који је незнатан. Флуид у тачки одвајања скреће из поља повећаног притиска и одлази у спољашње струјање [1]. Тачка одвајања дефинисана је изразом

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

Приликом израчунавања отпора услед трења одговарајуће интеграљење се спроводи дуж контуре тела и то почев од предње зауставне тачке (слика 5) па до задње ивице тела, односно само до тачке одвајања, ако одвајање граничног слоја наступа испред задње ивице тела [4].

5. Аеропрофили

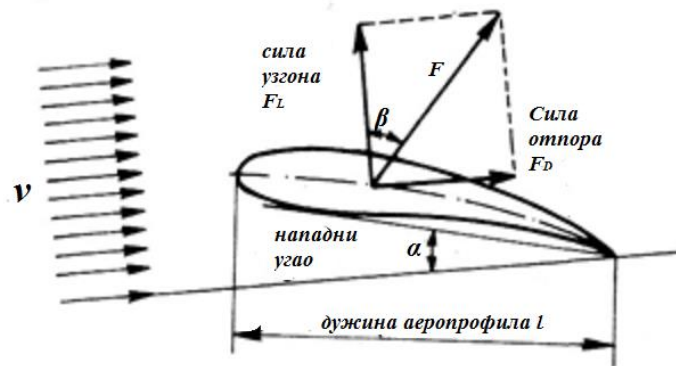
Аеропрофил представља тело које је обликовано тако да изазива аеродинамичку силу нормално на његово кретање кроз флуид са малим отпором. Узгонска сила F_L , заједно са отпорном силом F_D одређује укупну силу F којом флуид дејствује на аеропрофил. Карактеристична дужина аеропрофила означена је са l , његов распон са b , а носећа површина профила је $A=bl$. Силе отпора и узгона дефинисане су са:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 c_D A$$

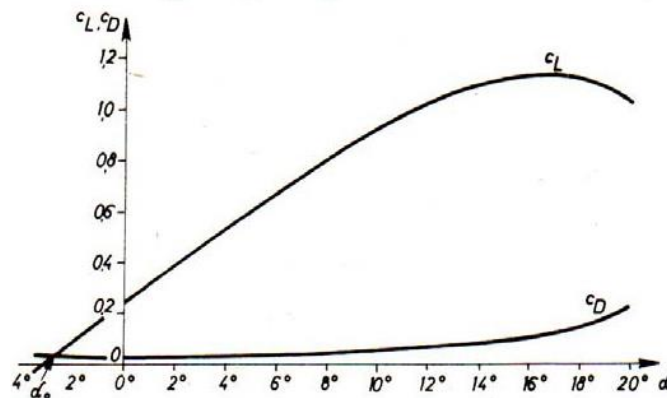
и

$$F_L = \frac{1}{2} \rho v^2 c_L A$$

где су c_L и c_D коефицијенти узгона и отпора и једнаки су за све сличне моделе аеропрофила при истим нападним угловима. На слици 8 приказане су карактеристичне криве промене коефицијента отпора аеропрофила за различите нападне углове α .



Слика 7. Силе на аеропрофилу [7]



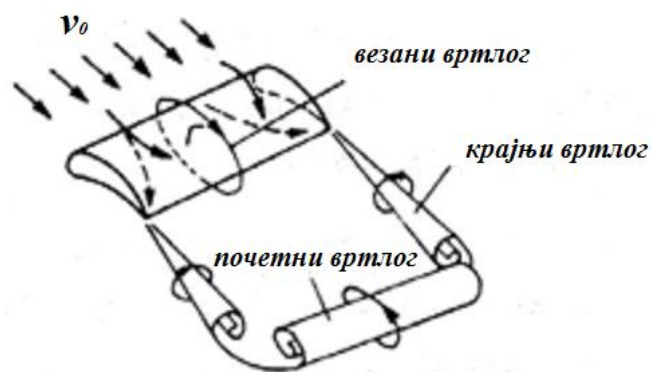
Слика 8. Коефицијенти отпора аеропрофила [7]

5.1 Настанак циркулације

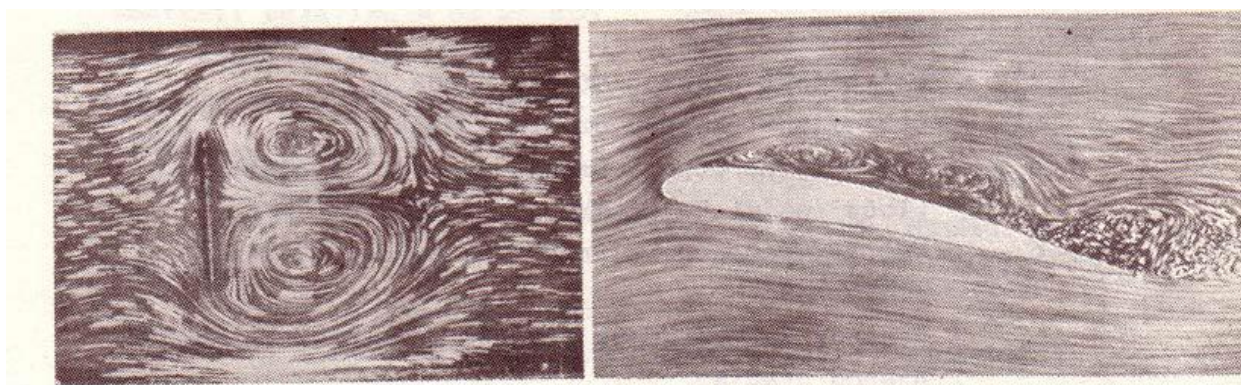
Аеропрофил почиње да се креће врло малом брзином, слика опструјавања код задње ивице аеропрофила изгледа као на слици 9а, са зауставном тачком 0 на леђној страни, на малој удаљености од задње ивице. При порасту брзине аеропрофила, струјнице са грудне стране више не могу да обиђу задњу ивицу због великих сила вискозности, које почињу да делују услед великог градијента брзине. Струјање се одвија од задње ивице, а у некој тачки, између ове и зауставне, ствара се вртлог, као што је приказано на слици 9б који се назива почетни вртлог јер се формира покретањем аеропрофила. Вртлог расте до извесне величине, а затим се одваја од аеропрофила и одлази низ струјно поље. Циркулација око било какве контуре мора бити једнака нули, јер је таква била и пре почетка кретања. Зато се јавља циркулација Γ која је по интензитету једнака, али супротног смера од почетне циркулације. Циркулација око аеропрофила назива се везаном циркулацијом. При заустављању аеропрофила, везани вртлог (који не може да се уклони) силази са аеропрофила и поништава се са почетним вртлогом ко је остао у струјном пољу. Последњи исказ односи се на савршени флуид, или кратко кретање аеропрофила кроз реалан флуид. За дуже кретање аеропрофила у реалном флуиду почетни вртлог током времена исчезне услед деловања силе трења, а везани вртлог је присутан јер га генерише само кретање. На слици 10 приказани су почетни, везани и крајњи вртлог.



Слика 9. Настанак вртлога [7]



Слика 10. Почетни, крајњи и везани вртлог [7]



Слика 11. Опструјавање тела уз настанак вртлога [8]

Највећи део укупног отпора тела које је аеродинамично је отпор површинског трења. У тој тачки се дефинише режим употребе тела. Ламинарно струјање у граничном слоју треба да остане што дуже у области овог режима.

Код тела која нису аеродинамична највећи део укупног отпора је последица притиска, односно отпор облика. Зона струјања треба да буде што дужа и да се у њој налазе вртлози, што је битно у процесима мешања.

Код узгонских тела као што су крила авиона, реп авиона, кракови ротора хеликоптера отпор површинског трења при малим угловима има највећи утицај.

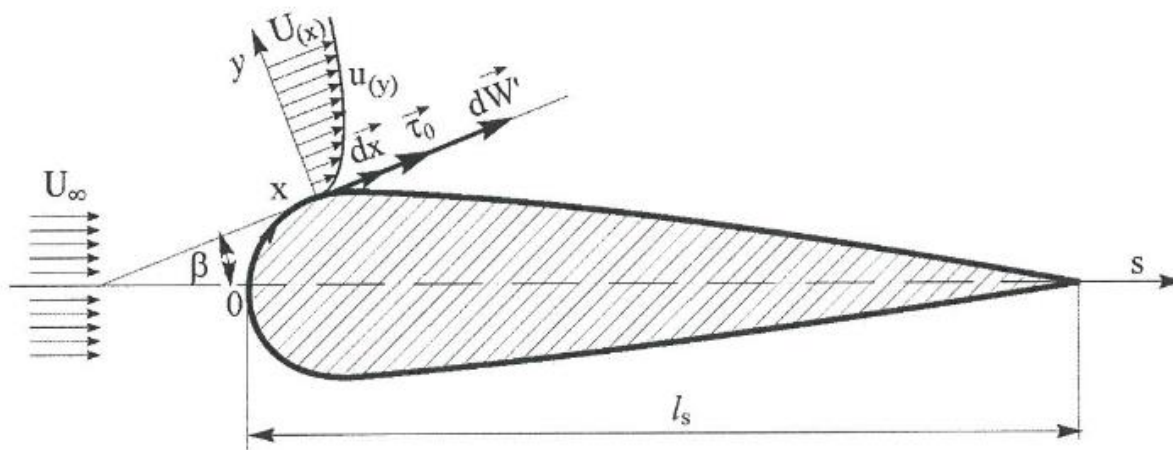
6. Отпор трења

Основни задатак прорачуна граничног слоја за неки конкретан случај, своди се на одређивање закона расподела брзина и тангентног напона на зиду опструјаваног тела. Познавање брзина је неопходно за решавање проблема простирања топлоте као и за одређивање положаја тачке одвајања граничног слоја. Тангентни напон, који настаје услед трења, служи за одређивање силе трења, односно отпора који настаје услед трења флуида о површину опструјаваног тела.

Ако је расподела брзина у граничном слоју позната, онда се тангентни напон τ_0 на зиду, одређује према (12):

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}$$

где је μ динамички коефицијент вискозности.



Слика 12. Сила трења за случај раванског струјања [4]

За случај раванског струјања (слика 12), елементарна сила трења на контури цилиндричног тела износи

$$dW' = \tau_0 dA = \tau_0 b dx$$

где је x - криволинијска координата, b - ширина опструјаваног тела (која је управна на раван цртежа)

Пројекција елементарне силе трења у правцу брзине U_∞ непоремећеног једноликог струјања у бесконачности (далеко од тела) износи:

$$dW = \tau_0 b dx \cos\beta$$

где је β - угао који заклапа тангента на површину тела са правцем брзине U_∞

Сила отпора трења само за једну (горњу) половину тела одређена је обрасцем

$$W = b \int_0^{l_x} \tau_0 \cos\beta dx \quad (13)$$

Будући да је

$$\cos\beta dx = ds$$

при чему оса s има правац брзине U_∞ формула (13) може да се напише и као

$$W = b \mu \int_0^{l_s} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} ds \quad (14)$$

Према томе за израчунавање отпора услед трења треба унапред да се зна градијент брзине на зиду и то дуж целе контуре опструјаваног тела. Овај градијент се одређује решавањем једначина граничног слоја. Приликом израчунавања отпора трења интеграљење треба да се изврши дуж контуре тела и то почев од предње зауставне тачке O ($x = 0$), па по могућству до задње ивице тела ($x = l_x$). Ако међутим, одвајање граничног слоја наступа испред задње ивице тела, онда интеграл (13) треба срачунати само до тзв. тачке одвајања [4].

7. Дебљина истискивања и дебљина губитка импулса

Подужна пројекција брзине $v_x(x, y)$ се мења од $v_x=0$ на унутрашњој граници граничног слоја до $v_x=V_x(x)$ на спољашњој граници, тај прелаз брзине граничног слоја у брзину спољашњег струјања $V_x(x)$ је асимптотски. При преласку из граничног слоја у спољашње струјање, услови на спољашњој граници слоја треба да прикажу непрекидност пројекције $v_x(x, y)$ (као и непрекидност тангентног напона). Уколико је граница између површине чврстог тела и флуида видљива, одређивање спољашње границе односно дебљине $\delta_{gs}(x)$ граничног слоја биће произвољно.

Дебљина граничног слоја представља растојање од зида опструјаваног тела на коме се брзина граничног слоја разликује за 1% од брзине $V_x(x)$ спољашњег струјања.

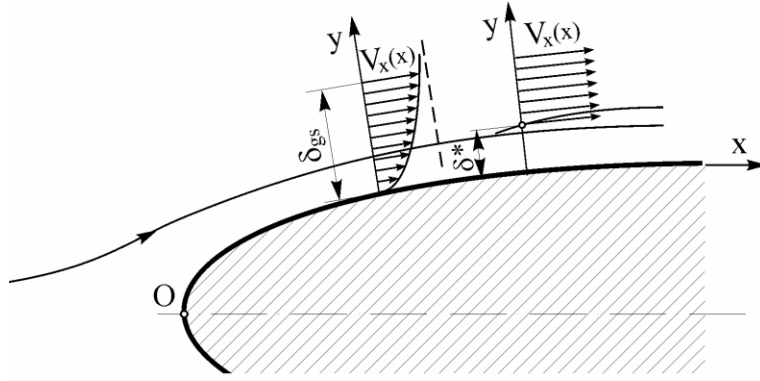
У теорији граничног слоја позната је расподела брзине $V_x(x)$ спољашњег струјања која се одређује у односу на решења задатка о опструјавању посматране контуре савршеним флуидом.

Спољашњом брзином се сматра она брзина коју би невискозан флуид имао на површини посматраног тела, у истом простору струјања и под истим условима струјања.

Уместо дебљине граничног слоја која је доста произвољно дефинисана у савременој теорији граничног слоја користимо дебљину истискивања δ^* и дебљину губитка импулса δ^{**} . Приметиће се да ове дебљине физички имају више смисла. Смањење брзине у граничном слоју прати и пад протока. То смањење протока кроз површину јединичне ширине је

$$\int_{y=0}^{\infty} V_x \cdot 1 \cdot dy - \int_{y=0}^{\infty} v_x \cdot 1 \cdot dy = \int_{y=0}^{\infty} (V_x - v_x) dy.$$

Ово смањење протока, условљено вискозношћу, може да се изрази преко спољашње брзине као производ $V_x \delta^*$ где δ^* представља величину за коју се може замислити да је првобитно потенцијално струјање померено од зида.



Слика 13. Одређивање дебљине истискивања [4]

Изједначавањем оба израза за смањење протока добија се образац за одређивање дебљине истискивања (дебљине пада протока) који гласи

$$\delta^* = \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{v_x}{V_x}\right) dy \quad (15)$$

Дебљина истискивања је вертикално растојање од зида за које би приликом смањења брзине у граничном слоју требало померити чврсто тело када би преко њега струјао савршен флуид једнаком брзином $V_x(x)$, да би проток флуида био исти. Оваква карактеристика је знатно мање осетљива на асимптотски карактер распореда брзина, јер израз $(1 - v_x/V_x)$ брзо конвергира ка нули. У односу на количину кретања потенцијалног струјања као последица трења у граничном слоју долази до смањења количине кретања које износи

$$\rho \int_{y=0}^{\infty} v_x (V_x - v_x) dy.$$

При претпоставци да је првобитно потенцијално струјање померено од зида за величину дебљине губитка импулса δ^{**} , онда то смањење количине кретања може да се изрази као $\rho 2\delta^{**}V_x$. Из услова једнакости оба израза

$$\rho V_x^2 \delta^{**} = \rho \int_{y=0}^{\infty} v_x (V_x - v_x) dy,$$

слиди релација за израчунавање δ^{**} , која гласи

$$\delta^{**} = \int_{y=0}^{\infty} \frac{v_x}{V_x} \left(1 - \frac{v_x}{V_x}\right) dy \quad (16)$$

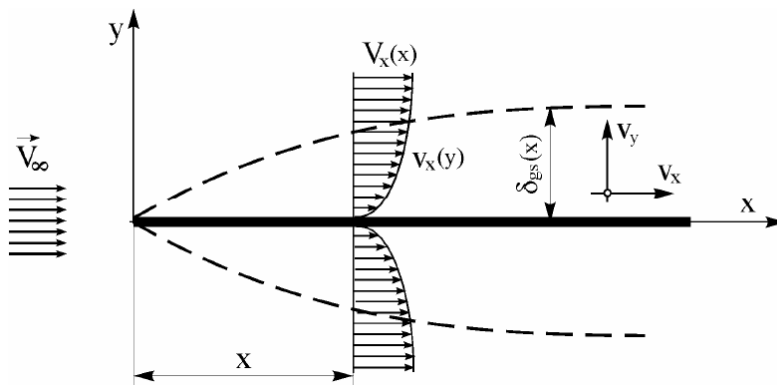
Дакле, дебљина губитка импулса δ^{**} се може се дефинисати као растојање од зида за које је количина кретања савршеног флуида једнака смањењу количине кретања реалног флуида приликом успоравања флуидних делића у граничном слоју. Уколико уместо асимптотског граничног слоја посматра модел слоја коначне дебљине δ_{gs} , онда уместо горње границе у интегралима (15) и (16) замењујемо са δ_{gs} . Тако добијамо израз за дебљину истискивања који гласи:

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta_{gs}} \left(1 - \frac{v_x}{V_x}\right) dy \quad (15')$$

Из израза (15') примећујемо да се веза између дебљине граничног слоја δ_{gs} и дебљине истискивања δ^* може одредити само уколико је позната расподела подужне пројекције брзине у граничном слоју [7].

8. Гранични слој на плочи

Блазиус је први применио Прандтлове једначине граничног слоја (7), односно (7') на примеру струјања нестишљивог флуида дуж равне и танке полубесконачне плоче, постављене тако да буде паралелна вектору брзине $\vec{V}_\infty$ непоремећеног једноликог струјања (слика 13).



Слика 14. Гранични слој на равној плочи [4]

Применом конформног пресликавања, за овај пример струјања дефинисана је брзина спољашњег потенцијалног струјања која износи

$$V_x(x) = V_\infty = \text{const.}$$

Због константне брзине спољашњег струјања, добија да је $dp/dx = 0$, тако да у овом случају струјања једначине граничног слоја гласе:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Одговарајући гранични услови за асимптотски гранични слој су:

$$\begin{aligned} v_x = v_y = 0 \quad \text{за} \quad y = 0; \\ v_x = V_\infty, \quad \text{за} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (17')$$

Увођењем граничних услова (17') у једначине (17), Блазиус је претпоставио да постоји међусобна сличност између профила брзина $v_x(y)$ на различитим растојањима x од предње ивице полубесконачне плоче. Ови профили се могу поклопити уколико се за подужну пројекцију v_x и попречну координату y изабери одговарајуће погодне размере ("афина сличност"). За v_x може се као размера узети V_∞ а за вертикалну удаљеност од плоче дебљина граничног слоја $\delta_{gs}(x)$. У складу са тим закон расподеле брзина можемо написати у облику

$$\frac{v_x}{V_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta_{gs}}\right), \quad (18)$$

где је функција f независна од удаљености x .

Према (3), дебљина граничног слоја је одређена као

$$\delta_{gs}(x) \sim \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}},$$

Због тога се уместо попречене променљиве y уводи нова бездимензијска променљива η уз помоћ следеће релације

$$\eta = \frac{y}{\delta_{gs}} = \frac{y}{\sqrt{\frac{vx}{V_\infty}}} = \eta(x, y), \quad \left(y = \eta \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}} \right) \quad (19)$$

на основу које је

$$v_x = V_\infty f(\eta). \quad (18')$$

Посредством веза (9), којима је дефинисана струјна функција $\psi(x, y)$, даље можемо написати

$$\psi = \int v_x(x, y) dy = \int V_\infty f(\eta) \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}} d\eta = \sqrt{V_\infty vx} \int f(\eta) d\eta$$

$$\psi = \sqrt{V_\infty vx} \Phi(\eta) \quad (20)$$

где је $\Phi(\eta) = \int f(\eta) d\eta$ - бездимензијска функција струјања

Подужна и попречна пројекција брзине v_x и v_y у граничном слоју изражене су преко функције $\Phi(\eta)$, као:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = V_\infty \Phi'(\eta) \quad (21)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V_\infty \nu}{x}} [\eta \Phi'(\eta) - \Phi(\eta)] \quad (22)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x}$$

где је $\Phi'(\eta)$ означава први извод функције $\Phi(\eta)$ по η .

Парцијални изводи који улазе у једначине (16), уз овако дефинисане пројекције брзине лако се могу наћи, а то су:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [V_\infty \Phi'(\eta)] = V_\infty \Phi''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{V_\infty}{2x} \eta \Phi''(\eta), \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [V_\infty \Phi'(\eta)] = V_\infty \Phi''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} \Phi''(\eta), \\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} \Phi''(\eta) \right] \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{V_\infty^2}{\nu x} \Phi''(\eta). \end{aligned} \quad (23)$$

Када се изрази (21), (22) и (23) унесу у прву једначину система (17), након тога ће се за одређивање бездимензијске функције струјања $\Phi(\eta)$ добити следећа обична деференцијална једначина

$$2\Phi''' + \Phi\Phi'' = 0 \quad (24)$$

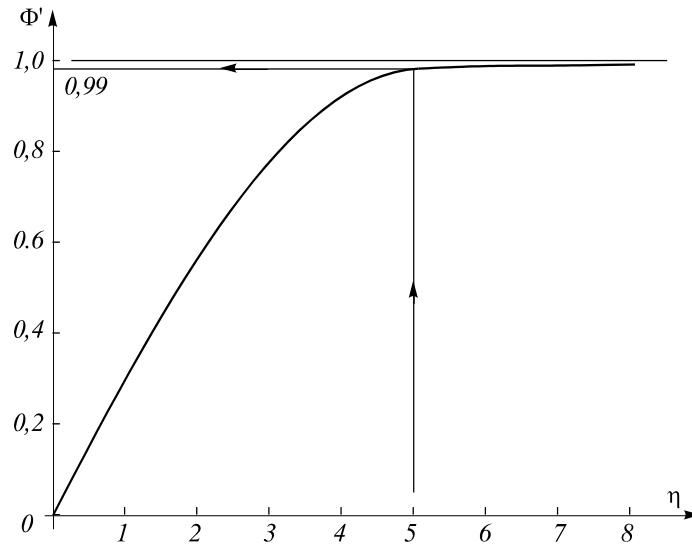
Гранични услови који су еквивалентни за функцију Φ су следећи:

$$\begin{aligned} \Phi &= 0, \quad \Phi' = 0 \quad \text{за} \quad \eta = 0 \\ \Phi' &= 1 \quad \text{за} \quad \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (25)$$

Како је једначина континуитета идентички задовољена следи да се систем од две парцијалне диференцијалне једначине (17) своди на једну нелинеарну диференцијалну једначину трећег реда (24). Решење једначине је потпуно одређено са три гранична услова (25).

Упрошћавањем се диференцијалне парцијалне једначине граничног слоја свде на једну обичну диференцијалну једначину што олакшава математичке операције, при томе можемо рећи да је одговарајуће решење "слично" или "аутомодално". То "слично" решење поседују једначине граничног слоја само када је брзина спољашњег потенцијалног струјања $V_x(x)$ пропорционална степену дужине лука, измереног дуж зида опструјаваног тела (или је ова брзина константна). Овај услов је испуњен код опструјавања тела облика клина чији је угао отвора $\pi\beta$ (Falkner, Skan, Hartree) [7].

Није могуће наћи опште решење диференцијалне једначине (24) у затвореном облику. Због тога је решавање ове једначине вршено или развијањем у степени ред или нумеричком интеграцијом. Блазиус је први пронашао решење једначине (24) у облику развоја у ред. Решење ове једначине је после Блазијусовог решења пронађено и нумеричком интеграцијом употребом рачунара. Вредности функције Φ и њених извода Φ' и Φ'' које су веома прецизно одређене за разне вредности бездимензијске променљиве η дате су у табели 1. На основу нумеричких резултата урађен је дијаграм бездимензијске подужне брзине $\Phi' = v_x / V_\infty$ на слици 15.



Слика 15. Дијаграм бездимензијске подужне брзине на плочи [4]

Помоћу добијеног нумеричког решења (24) омогућено је лако израчунавање напона трења (локални тангентни напон) на површини плоче. У кореспонденцији са општом формулом (12) овај напон једнак је

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} \Phi''(0).$$

ТАБЕЛА 1. – Вредности функције Φ и њених извода Φ' и Φ'' за плочу [4]

η	Φ	$\Phi' = v_x / V_\infty$	Φ''
0	0	0	0.33206
0.2	0.00664	0.06641	0.33199
0.4	0.02656	0.13277	0.33147
0.6	0.05974	0.19894	0.33008
0.8	0.10611	0.26471	0.32739
1.0	0.16557	0.32979	0.32301
1.2	0.23795	0.39378	0.31659
1.4	0.32298	0.46527	0.30787
1.6	0.42032	0.51676	0.29667
1.8	0.52952	0.57477	0.28293
2.0	0.65003	0.62977	0.26675
2.2	0.78120	0.68132	0.24835
2.4	0.92230	0.72899	0.22809
2.6	1.07252	0.77246	0.20646
2.8	1.23099	0.81152	0.18401
3.0	1.39682	0.84605	0.16136
3.2	1.56911	0.87609	0.13913
3.4	1.74696	0.90177	0.11788
3.6	1.92954	0.92333	0.09809
3.8	2.11605	0.94112	0.08013
4.0	2.30576	0.95552	0.06424
4.2	2.49806	0.96696	0.05052
4.4	2.69238	0.97587	0.03897
4.6	2.88260	0.98269	0.02948
4.8	3.09534	0.98779	0.02187
5.0	3.28329	0.99155	0.01591
5.2	3.48189	0.99425	0.01134

5.4	3.68094	0.99616	0.00793
5.6	3.88031	0.99748	0.00543
5.8	4.07990	0.99838	0.00365
6.0	4.27964	0.99898	0.0024
6.2	4.47948	0.99337	0.00165
6.4	4.67938	0.99961	0.00098
6.6	4.87931	0.99977	0.00061
6.8	5.07928	0.99987	0.00037
7.0	5.27926	0.99992	0.00022
7.2	5.47926	0.99996	0.00013
7.4	5.67924	0.99998	0.00007
7.6	5.87924	0.99999	0.00004
7.8	6.07923	1.00000	0.00002
8.0	6.27923	1.00000	0.00001
8.2	6.47923	1.00000	0.00001
8.4	6.67923	1.00000	0.00000
8.6	6.87923	1.00000	0.00000
8.8	7.07923	1.00000	0.00000

Како је, према табели 1, $\Phi''(0) = 0,332$, то се заменом ове вредности добија образац

$$\tau_0 = 0.332\rho \sqrt{\frac{V_\infty^3 v}{x}} = \tau_0(x), \quad (26)$$

који представља Блазиусову формулу за тангентни напон на зиду плоче. Са овим је бездимензијски тангентни напон на површини плоче

$$\frac{\tau_0(x)}{\rho \frac{V_\infty^2}{2}} = 0,664 \sqrt{\frac{v}{V_\infty x}} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad (27)$$

Дебљина граничног слоја $\delta_{gs}(x)$, као и дебљина истискивања δ^* и дебљина губитка импулса δ^{**} могу се одредити помоћу теоријског Блазиусовог решења. Из табеле 1, а и са дијаграма на слици 13, види се да на бездимензијском растојању $\eta = 5,0$ подужна пројекција брзине постаје $v_x \approx 0,99 V_\infty$, што одговара дебљини граничног слоја

$$\delta_{gs}(x) \approx 5,0 \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}}, \quad (28)$$

коју је први одредио Блазиус. Релативна дебљина граничног слоја израчунава се преко обрасца

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,0}{\sqrt{\frac{V_\infty x}{v}}} = \frac{5,0}{\sqrt{Re_x}}$$

одакле видимо да релативна дебљина граничног слоја на плочи може да буде мала само при довољно великим Рејнолдсовим бројевима.

Полазећи од обрасца (15) за гранични слој коначне дебљине, дебљина истискивања δ^* рачуна се према формули

$$\begin{aligned} \delta^* &= \int_0^{\delta_{gs}} \left(1 - \frac{v_x}{V_\infty}\right) dy = \int_0^{\delta_{gs}} [1 - \Phi'(\eta)] \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}} d\eta = \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}} [\eta - \Phi'(\eta)] \Big|_{\eta=0}^{\eta=5} = \\ &= \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}} [5 - \Phi(5) + \Phi(0)], \end{aligned}$$

јер је на граници граничног слоја $\eta = 5$.

Убацујући одговарајуће вредности из табеле 1, добиће се

$$\delta^* = 1,72 \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}},$$

након упоређивања са (28), видимо да је при опструјавању равне плоче дебљина истискивања једнака трећини дебљине граничног слоја $\delta^* \approx \delta_{gs} / 3$. Као што је већ поменуто, Блазиус је извео и образац за израчунавање дебљине губитка импулса. У најновијој теорији, у складу са општим обрасцима (15) и (16), за дебљину истискивања и губитка импулса у случају подужног оптицања равне плоче, користе се обрасци:

$$\delta^* = 1,721 \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}}, \quad \delta^{**} = 0,664 \sqrt{\frac{vx}{V_\infty}}. \quad (29)$$

Блазиусову теорију су многи истраживачи касније проверавали и потврдили експериментима. Никурадзе је извршио најпрецизнија мерења за различите вредности Рејнолдсовог броја. Он је закључио скоро потпуно поклапање профила брзине добијених мерењем са профилима који су добијени теоријским путем. Никурадзе је експериментима потврдио теорију сличности профила брзине за различито x . Ово поклапање је експериментално доказано само за релативно велике вредности Рејнолдсовог броја. Теоријски се не може показати, обзиром да је у близини предње плоче локални Рејнолдсов број Re_x још мали. Што се тиче својства струјања у близини предње ивице плоче, могу да се одреде само применом Навије- Стоксових једначина [7].

Значајно је истаћи да добијено решење једначина граничног слоја на равnoj плочи представља најједноставнији случај струјања за који је $dV_x/dx = 0$, тј. $dp/dx = 0$. У случају оптицања тела са подужним градијентом притиска ($dp/dx \neq 0$), немогуће је одговарајуће полазне парцијалне диференцијалне једначине граничног слоја свести на обичне диференцијалне једначине. Стога су научници своја истраживања усмерили наразвијање таквих приближних метода које би упростиле задатак проучавања кретања флуида у граничном слоју. Међу првима је развијена тзв. метода интегралних веза која се заснива на примени тзв. импулсне једначине. Код ове методе (Pohlhausen) (за случај оптицања раванске заобљене контуре) претпостављасе да се однос брзина $v_x(x, y)/V_x(x) = f(\eta)$ може представити у облику полинома трећег или четвртог степена. Коришћењем граничних и допунских граничних услова одређивани су непознати коефицијенти поменутог полинома, а за одређивање дебљине граничног слоја користи се интегрална веза. У закону за расподелу брзинепо пресеку граничног слоја $f(\eta)$ појављује се код ове методе један параметар, који је касније назван параметар облика или формпараметар.

Каснијим истраживањем показано је да је Полхаузенoва метода недовољно тачна за примену, поготово код граничних слојева са успореним струјањем. Након тога су се развиле друге вишепараметарске методе (Н. Schlichting, Л. Г. Лойцянский и др.) које су биле тачније. У модерној теорији граничног слоја развијена је метода уопштене сличности која се базира на импулсној једначини и на увођењу скупова параметара сличности. Практична примена тог закона сличности се састоји у томе да је довољно спровести само један прорачун граничног слоја за све Re бројеве при којима је струјање ламинарно. Многobројни проблеми струјања решени су овом методом, како нестишљивог тако и стишљивог флуида, дисоцираног и јонизованог гаса [10].

9. Закључак

Теорија граничног слоја служи као основа за тумачење великог броја процеса у техници и технологији. Резултати који су израчунати приликом истраживања су заступљени у наукама као што су: пнеуматика, хидраулика, балистика. Такође имају примену и у хемијској, аутомобилској и авио индустрији.

Први део овог рада описује сам појам граничног слоја и његов утицај при протицању флуида. Током протицања се одвајају две врсте струјања (ламинарно и турбулентно). Када је у питању вискозан флуид, теорија ламинарног струјања је довољна уколико струјање не излази из тог режима, међутим за турбулентно опструјавање тела, отворен систем једначина не може дати приближну слику о отпорним силама. При одређивању дебљине граничног слоја долази се до закључка да се дебљина смањује са повећањем Re броја, односно повећањем брзине струјања и обрнуто.

У другом делу рада дато је решење Прандтлових једначина граничног слоја при чему се посматра раванско, стационарно струјање вискозног флуида преко чврстог, непорозног зида, уз занемаривање запреминских сила, при чему имамо благо закривљење зида. Увођењем одговарајућих граничних услова у системе једначина, особине струјања се могу реалније одредити. Уз помоћ методе коначних разлика, решене су одређене једначине граничног слоја уз занемаривање нелинеарности и граничних услова на непознатој граници.

У трећем делу описани су аеропрофили, који представљају посебно обликовано тело које изазива аеродинамичку сили нормално на његово кретање. Описано је како се такво тело креће кроз флуид, односно настанак циркулације око контуре тела. Аеропрофили имају велики значај при конструисању узгонских тела као што су: крила авиона, реп авиона, ротор хеликоптера, као и код тела која нису аеродинамична и имају велики отпор облика и значајна су у процесима мешања. Такође је и објашњен утицај трења које настаје услед додира флуида и опструјаваног тела.

Литература

- [1] Савић, С., Решавање проблема сртујања јонизованог гаса у граничном слоју за случај непорозне и порозне контуре опструјаваног тела, докторска дисертација, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац 2005.
- [2] Боричић, А., Универзалне методе у истраживању нестационарног раванског ламинарног струјања нестишљивог проводног флуида, у спрегнутим МХД, динамичким, топлотним и дифузионим граничним слојевима, Докторска дисертација, Универзитет у Нишу, Машински факултет у Нишу, Ниш, 2014.
- [3] http://www.raltech.co.uk/Tech_2-BLayers.html, преузето октобра 2018.
- [4] Обровић, Б., Динамика флуида-изабрана поглавља, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 1998.
- [5] https://su2code.github.io/tutorials/Transitional_Flat_Plate/, преузето октобра 2018.
- [6] Вороњец, К., Обрадовић, Н., Механика флуида, Универзитет у Београду, Београд 1979.
- [7] Обровић, Б., Механика флуида, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2007.
- [8] Саљников, В., Динамика вискозног нестишљивог флуида, Машински факултет у Београду, Београд 1969.
- [9] Обровић, Б., Петровић, Р., Савић, С., Динамика вискозног флуида - виши курс, Факултет инжењерских наука, Крагујевац, 2015.
- [10] Savić, S., Obrović, B., Hristov, N., Analysis of the Axisymmetrical Ionized Gas Boundary Layer Adjacent to Porous Contour of the Body of Revolution, Thermal Science, Vol.20, No.2, pp. 529-540, 2016