

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Мастер академске студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Лаке конструкције

Број индекса: 331/2016

Јелена Н. Грујић

Прорачун сложено оптерећених танкозидних носача нестандартних попречних пресека према Еурокоду

Мастер рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. **Др Весна Марјановић, ванредни професор –ментор**

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

Оквирни садржај мастер рада:

- Увод
- Примена теорије еластичности на танкозидне попречне пресеке
- Гранична стања носивости и употребљивости танкозидних попречних пресека при различитим оптерећењима
- Сложено оптерећење
- Примена софтвера за решавање проблема лаких конструкција
- Аналитички део задатка
- Упоредивање добијених резултата
- Закључак

Препоручена литература:

[1] Марковић З.: Гранична стања челичних конструкција према еврокоду, Грађевински факултет Универзитета у Београду, Београд 2014.

[2] Марјановић В., Николић Р., Вељковић Ј.: Металне конструкције – збирка решених задатака, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац 2013.

[3] Марјановић В., Николић Р.: Металне конструкције – приручник за прорачуне, Машински факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац 1998

Крагујевац,
Септембар, 2018

Предметни наставник:
Др Весна Марјановић, ванредни професор

САДРЖАЈ

УВОД	2
1. Прорачун танкозидних носача према теорији еластичности	4
1.1 Основне претпоставке и померање тачака	7
1.2 Померање	7
1.3 Центар смицања	11
1.4 Напони и силе у пресецима.....	14
1.5 Услови равнотеже.....	16
1.6 Веза између деформација и сила у пресеку	17
1.7 Веза између сила и померања.....	19
1.8 Бимомент.....	19
1.9 Торзиони момент кривљења	20
1.10 Диференцијална једначина деформације при спреченој торзији	21
1.11 Гранични услови – услови ослањања.....	23
2. Гранична стања носивости и употребљивости нестандартних попречних пресека при различитим оптерећењима	24
2.1 Аксијално напрезање	24
2.1.1 Затезање.....	24
2.1.2 Притисак	26
2.2 Савијање.....	27
2.3 Смицање	29
2.4 Торзија	30
2.5 Комбинована напрезања.....	32
2.5.1 Савијање и смицање	32
2.5.1.1 Пластична анализа – попречни пресеци класе 1 и 2.....	32
2.5.1.2 Еластична анализа – попречни пресеци 3 и 4	33
2.5.2 Савијање и аксијална сила.....	33
2.5.2.1 Пластична анализа – пресеци класе 1 и 2	33
2.5.2.2 Еластична анализа – пресеци класе 3 и 4.....	34
2.5.3 Косо савијање.....	35
2.5.4 Савијање, смицање и аксијална сила.....	35
2.5.5 Смицање и торзија	36
2.5.6 Савијање, смицање и торзија.....	37
3. Савремени софтвери за решавање проблема лаких конструкција	38
3.1 Autodesk Robot Structural Analysis.....	38
3.2 Примена софтвера за 3D моделирање.....	45
4. Аналитичка анализа проблема.....	47

Списак слика

Слика 1. Зависност нормалног напона и релативног истезања [5].....	4
Слика 2. Врсте напрезања: а) аксијално (затезање и притисак); б) смицање;	5
Слика 3. Штап отвореног профила произвољног попречног пресека [3].....	7
Слика 4. Померање тачке у равни [3].	8
Слика 5. Веза померања ξ и η у правцу осе x и y и померања v и w у правцу z и s осе [3].	8
Слика 6. Одређивање угла α [3].	9
Слика 7. Сектор на основу кога се прорачунава секторска координата [3].....	10
Слика 8. Дијаграм секторске координате [3].	11
Слика 9. Веза секторске координате за два различита	12
Слика 10. Ток смицајног напона [3].	14
Слика 11. Попречни пресек са правцима сила које делују у њему [3].	14
Слика 12. Торзиони момент [3].....	15
Слика 13. Цев за одређивање услова равнотеже [3].	16
Слика 14. Танкозидни штап [3].....	17
Слика 15. Напрезање попречног пресека изложеног аксијалном напрезању [1].....	24
Слика 16. Различите фазе попречног пресека оптерећеног моментом савијања [1]....	27
Слика 17. Дијаграм момента савијања [1].	28
Слика 18. Врсте торзија [1].....	30
Слика 19. Прозор за одабир конструкције Robot Structural Analysis софтвера.	39
Слика 20. Попречни пресек у Robot Structural Analysis софтверу.	39
Слика 21. График промене координате.....	40
Слика 22. График главне секторске координате.....	41
Слика 23. Дијаграм промене по контури пресека секторског статичког момента.	41
Слика 24. Графички приказ статичких дијаграма.	43
Слика 25. Графички приказ резултата [7].	43
Слика 26. Промена нормалног напона по контури пресека.	44
Слика 27. Приказ деформације у софтверском пакету Inventor [8].	46
Слика 28. Напони у софтверском пакету Inventor [8].....	46

Списак табела

Табела 1. Положај тачака попречног пресека	40
Табела 2. Табеларни приказ добијених вредности.....	41
Табела 3. Табеларни приказ резултата	43
Табела 4. Табеларни приказ резултата	43
Табела 5. Табеларни приказ вредности напона.	44
Табела 6. Вредности добијене прорачуном изведених израза.	49
Табела 7. Вредности напона добијени приликом прорачуна.	49

РЕЗИМЕ

У овом раду акценат је бачен на решавање задатог проблема уз помоћ одговарајућих софтвера. Вршено је тестирање Robot structural analysis софтвера, како би се доказало да је он један од најадекватнијих софтвера за решавање проблема танкозидних профила, како једноставних тако и сложених попречних пресека. Доказало се да програм замењује потребу коришћења великог броја како емпиријских тако и неемпиријских формула, па самим тим омогућава лакшу израду задатка. Упоредивањем резултата, показано је и да се резултати добијени аналитички, према теорији еластичности, затим према препорукама Еврокода и најзад помоћу софтвера Robot structural analysis који користи Еврокод 3 стандард слажу готово у потпуности. Програмски пакети Inventor и CATIA дају нешто мало другачије резултате.

Кључне речи: Танкозидни профил, Еврокод 3, Софтвери, Robot structural analysis.

ABSTRACT

In this paper, the emphasis is on solving the given problem with the help of the corresponding software. Robot structural analysis software has been tested to prove that it is one of the most suitable software for thin-walled profile problems, both simple and complex cross-sections. It has been proven that the program replaces the need to use a large number of both empirical and non-empirical formulas, thus enabling easier task creation. By comparing the results, it was also shown that the obtained analytical results, according to the theory of elasticity, then according to the recommendations of Eurocodes and, finally, Robot structural analysis using the Eurocode 3 standard, agree almost completely. The Inventor and CATIA software packages give slightly different results.

Key words: thin-walled profile, Eurocode 3, Software, Robot structural analysis.

УВОД

Временом је човек развијао своје способности да осмисли начине који ће му олакшати живот. Током давнина, постојали су само алати које је човек користио како би вршио одређене функције и завршавао одређене послове. Током данашњице, човек се развио толико да је то довело до развијања различитих система, машина или уређаја који могу олакшати живот. Неки од тих уређаја су рачунари, машине за различите делатности, аутомобили, разни системи и софтвери који обављају послове на много бржи, једноставнији и прецизнији начин.

Развитком свих тих система и машина долази се до потребе за софтверима који су способни да прорачунавају или моделирају што сложеније проблеме. Током развитка софтверских пакета у машинству, уочљива је подела на једноставније софтвере и оне мало сложеније софтвере. Са повећањем сложености софтвера, долази до пораста његове цене.

У данашње време многи људи се баве стварањем различитих типова софтвера, који су све више заступљени у разним сферама наших живота. Разноврсне конструкције су временом постајале како сложеније и захтевније тако и иновативније, па је посао инжењера постао незамислив без примене рачунара и разноврсних софтверских пакета који постоје. Примена софтвера омогућава додатни простор и више времена за побољшање самог прорачуна и узаступног понављања и мењања истог, док се не дође до потребног решења, односно задовољења појединих услова. Софтвери су развијени на том нивоу да могу вршити анализе конструкција које још нису осмишљене, што наравно не представља проблем када је реч о већ осмишљеним конструкцијама. Помоћу одређених софтвера, могуће је вршити проверу изводљивости конструкције, што инжењерима олакшава посао у сваком смислу.

У овом раду, акценат је прво на примени теорије еластичности код танкозидних носача и на аналитички прорачун, затим на решавање проблема, који се јављају у теорији еластичности при анализи граничних стања носивости и употребљивости при различитим оптерећењима а према препорукама Еврокодових стандарда. Најзад је пример једног носача урађен помоћу два софтвера и аналитчки.

Теорија еластичности представља науку која се бави проучавањем утицаја спољашњих сила, облика тела и врсте материјала на унутрашње силе (напоне) и деформације тела. Деформације зависе посебно од врсте оптерећења којим је тело напрегнуто. На основу статике, три основна елемента међусобног деловања тела су сила, момент силе и спрег силе.

Лаке конструкције представљају конструкције са танким зидовима. Под танким зидовима се подразумевају тела код којих су све три димензије величине различитих редова, односно дужина је много већа (десет пута и више) у односу на ширину попречног пресека, док је та иста ширина много већа у односу на саму дебљину зида.

Дуги низ година прописи за прорачун металних конструкција били су засновани на концепту допуштених напона. Савремени начини прорачуна који се постепено уводе и у нашој земљи а увелико су заживели у Европској Унији задњих тридесетак година, засновани су на теорији граничних стања, коју прописују најнојвији европски стандарди—ЕВРОКОДОВИ. Ове промене настале су пре свега због тежње конструктора да се приближе реалном понашању челичних конструкција и искористе пост-еластичне резерве које челик као изразито еласто-пластичан материјал поседује. Граничним стањима се називају она стања конструкције чијим достизањем, односно прекорачењем,

конструкција престаје да испуњава прописане услове носивости или употребљивости, и могу се поделити на две суштински различите групе: гранична стања носивости (ULS - Ultimate Limit State) и гранична стања употребљивости (SLS - Serviceability Limit State)

Еврокод прописује другачија правила и за анализу танкозидних носача. Поред препорука за прорачун граничних стања при основним напрезањима (аксијално - притисак и затезање, увијање, савијање..) у овом раду дате су препоруке и за сложена напрезања (комбинација више основних) као што су: савијање и притисак, смицање и савијање, притисак, смицање и савијање, смицање и торзија.

У овом раду пример једног нестандардног танкозидног носача оптерећеног на неуниформну (спречену) торзију је урађен помоћу два софтвера из Autodesk компаније, а то су *Robot Structural Analysis* и *Inventor*. Добијени резултати уз помоћ ових софтвера на крају су упоређени са резултатима аналитичког прорачуна.

1. Прорачун танкозидних носача према теорији еластичности

Теорија еластичности представља науку која се бави проучавањем зависности између спољашњих сила, облика тела и врсте материјала са унутрашњим силама (напонима) и деформацијом тела. Способност материјала да се након престанка деловања спољашњег оптерећења врати у првобитно стање, назива се еластичност. Напон представља однос између унутрашњих сила и површине на коју те силе делују. Промена облика и величине тела, или промена облика или величине тела, након оптерећења истог, између почетног или недеформисаног облика и тренутног или деформисаног облика назива се деформација.

Енглески физичар, Роберт Хук, посматрајући понашање челичних опруга под различитим оптерећењима, развио је закон који се односи на везу између напона и деформације при линеарном стању напона. Хуков закон представља директну пропорционалност релативне деформације еластичних тела, у одређеним границама, и напона који на та тела делује.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1.1)$$

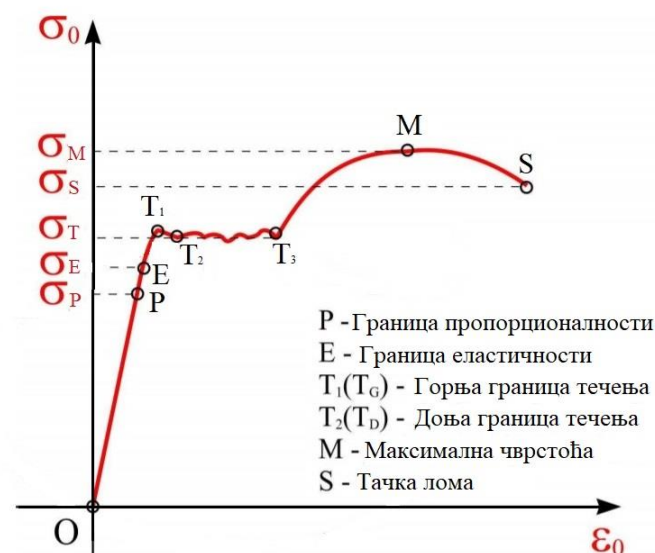
Где је:

σ – Нормални напон при напрезању,

ε – Дилатација (издужење) при оптерећењу,

E – Јунгов модул еластичности (коэффициент пропорционалности између напона и дилатације).

Испитивања која су довела до Хуковог закона, вршена су на опругама, жицама и дрвеним конзолама при затезању, на чему се заснива теорија еластичности. Веза између напона и деформације је представљена дијаграмом на слици 1.

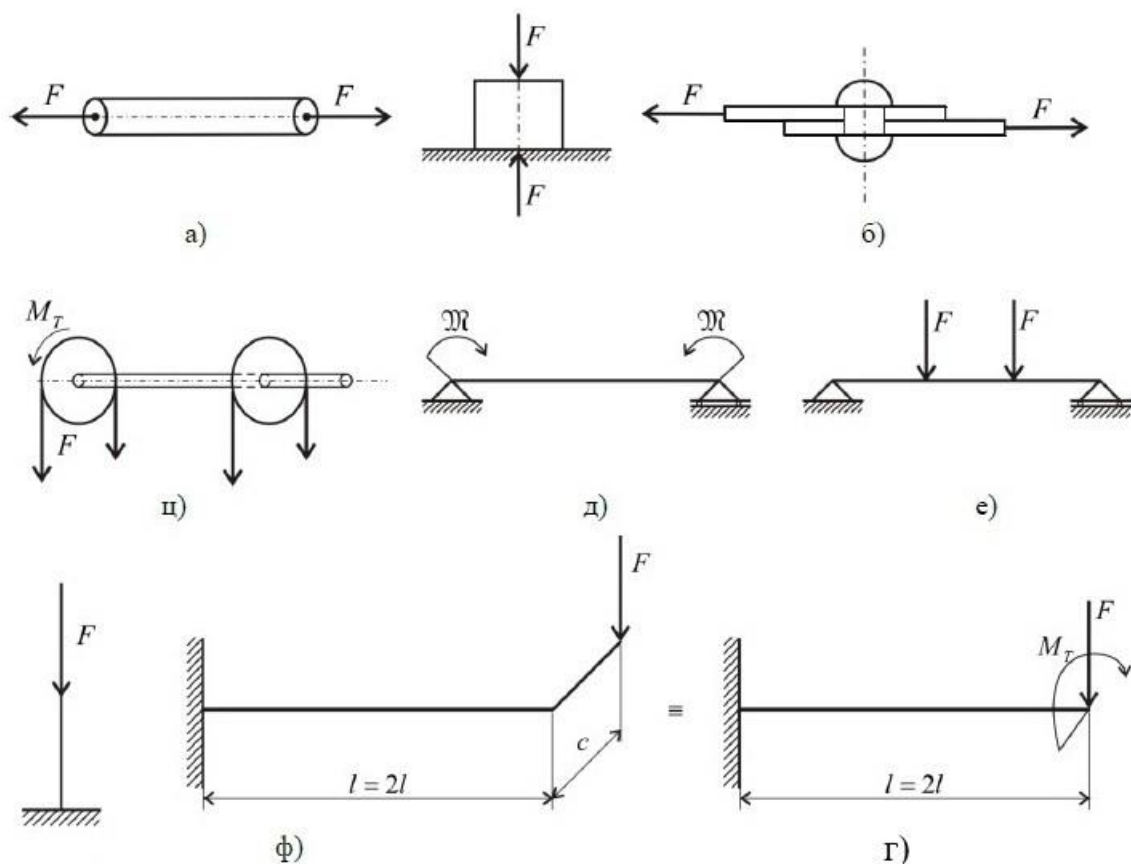


Слика 1. Зависност нормалног напона и релативног истезања [5].

Хуков закон важи само до границе пропорционалности која је означена словом Р на претходном дијаграму. [5]

Појмови као што су напони и деформације, проучавани су кроз различита оптерећења. Односно, врста деформације, зависи од врсте оптерећења којим је тело напрегнуто. На основу статике, три основна елемента међусобног деловања тела су сила, момент силе и спрег силе. Сила и спрег силе у телу изазивају различита дејства, односно различита кретања, према којима се разликују пет основних врсти напрезања: аксијално напрезање, смицање, савијање, увијање и извијање. Сила изазива транслаторно кретање, спрег изазива обртно, док момент силе има двојачко дејство, као сила и као спрег, односно може изазвати и транслацију у ротацију.

На основу ових статичких елемената, при дејству спољашњих сила, настаје напонско-деформационо стање, чија је анализа веома сложена и тај проблем изучава теорија еластичности. Одређивање напонско-деформационог стања поједностављује се коришћењем хипотеза и принципа уз помоћ којих се посебно анализирају врсте напрезања. На слици 2 су представљене основне врсте напрезања, као и могућа сложена напрезања.



Слика 2. Врсте напрезања: а) аксијално (затезање и притисак); б) смицање; в) увијање; д) чисто савијање; е) попречно савијање; ф) извијање; г) сложено напрезање [5].

Код аксијалног напрезања силе делује у правцу уздужне осе штапа (Слика 2.а) и теже да издуже или скрате штап, па се деформација јавља у виду издужења или скраћења, односно настаје дилатација ϵ и нормални напон у попречном пресеку.

Код смицања силе делују у равни попречног пресека штапа што доводи до мењања облик и настанка деформација у облику клизања γ (Слика 2.б), а притом настају и тангенцијални (смицајни) напон. [5]

Увијање штапа изазивају спрегови који дејствују у равнима његовог попречног пресека и то су моменти увијања (Слика 2.ц), деформација је клизање γ и у попречном пресеку се јављају тангенцијални (смицајни) напони.

Чисто савијање изазивају спрегови који дејствују у уздужној равни симетрије греде (Слика 2.д), и представљају такозвано чисто савијање, тада је укупни напон у попречном пресеку одређен само нормалном компонентом, а деформација дилатацијом ϵ .

Код савијања силама, силе изазивају савијање јер се редукују на трансверзалну силу и нападни момент. Трансверзална сила изазива смицање, а нападни момент савијање (Слика 2.е). У овом случају, укупни напон у попречном пресеку је одређен и нормалном и тангенцијалном компонентом, а деформација дилатацијом и клизањем. Ово напрезање је сложено и зове се попречно савијање или савијање силама.

Ако је штап оптерећен аксијалним силама притиска, а попречни пресек је мали у односу на његову дужину, односно ако је витак штап оптерећен критичном аксијалном силом може да настане губитак еластичне стабилности, да се подужна оса штапа деформише тако да се извије и да настане извијање као специјалан случај аксијалног напрезања на притисак (Слика 2.ф).

У пракси се често јавља комбинација основних напрезања и она тада изазивају сложена напрезања (Слика 2.г). И поред тога, укупни напон има компонентне напоне у облику нормалног σ и тангенцијалног (смицајног) τ напона, а деформација може да буде у облику дилатације ϵ и клизања γ .

Код сложених оптерећења, потребно је у односу на стање напона одредити еквивалентни напон, који при аксијалном оптерећењу треба упоредити са дозвољеним напоном. Да би се одредио еквивалентни напон, примењују се хипотезе о разарању материјала, односно теорија чврстоће. Постављене су шест хипотезе, од којих је најбитнија шеста из које произилази начин прорачуна вон Мисесових напона.

Прва хипотеза је хипотеза највећег нормалног напона, сматра се најстаријом хипотезом и веома ретко се примењује. Друга хипотеза је хипотеза највеће линеарне деформације. Трећа хипотеза је хипотеза највећег напона смицања, дефинисао је Кулон и код пластичних материјала има добру сагласност са експериментима. Четврта хипотеза је Морова хипотеза. Пета хипотеза је хипотеза највећег специфичног деформацијског рада, није подвргнута експерименталним доказивањима па се из тих разлога не примењује. Шеста хипотеза је хипотеза највећег специфичног деформацијског рада утрошеног на промену облика, ова хипотеза има добру сагласност са експериментима и практично је потиснула хипотезу највећег специфичног рада.

Извесне претпоставке о својствима материјала, карактеру деформације и оптерећења и разне друге, уводе се да би се упростили принципи решавања појединих проблема. Најважније претпоставке су да је материјала непрекидан, хомоген, изотропан и апсолутно еластичан, померања су линеарно зависна од оптерећења и та померања су мала у поређењу са димензијама тела, а у неоптерећеном елементу нема напона, и поред свега овога да важе принципи независности деловања сила и Сен – Венанов принцип.

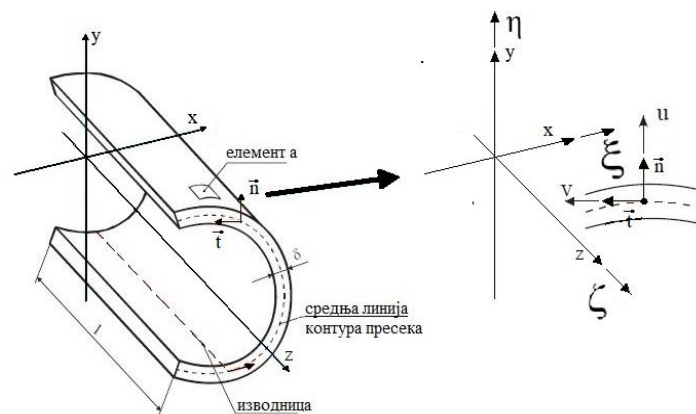
Најбитније претпоставке при прорачуну проблема у теорији еластичности јесу недеформабилност, односно немогућност деформисања попречног пресека, и занемаривање клизања у средњој површини.

Принцип Сен – Венан гласи: „У тачкама тела довољно удаљеним од места дејства оптерећења, величина унутрашњих сила, односно напона не зависи од начина дејства тог оптерећења.“

Лаке конструкције представљају конструкције са танким зидовима. Под танким зидовима се подразумевају тела код којих су све три димензије величина различитих редова, односно дужина је много већа у односу на ширину попречног пресека, док је та иста ширина много већа у односу на саму дебљину зида. У односу на Сен-Венанову теорију, где се сви обрасци односе на место довољно удаљено од места дејства силе или ослонаца, код танкозидних профила обрасци важе дуж целог профила. Разлика се може приметити код слободне и спречене торзије. Униформна (слободна) торзија по Сен-Венановом принципу нема депланацију, односно излажење попречног пресека из једне равни. У овом случају елементи нису изложени савијању (нема нормалних напона у попречном пресеку), већ само увијању (само смицање). Док у случају ограничене торзије, односно када је један крај профила укљештен, осим увијања, јавља се и савијање профила. Јавља се велики нормални напон у поречном пресеку и деформација која се зове депланација. [5]

1.1 Основне претпоставке и померање тачака

Како би се разјаснило померање тачака профила, посматра се штап отвореног профила, произвољног пресека, у координатном систему (x, y, z) који је представљен на слици 3.



Слика 3. Штап отвореног профила произвољног попречног пресека [3].

Основне претпоставке које се користе да би се одредило померање:

- I: попречни пресек је недеформабилан.
- II: клизање у средњој површини се занемарује. [3]

1.2 Померање

У случају када попречни пресек мења свој облик, ова теорија тада не важи, већ се користи теорија љуски. Да би ова теорија важила, разним попречним укрућењима се обезбеђује да попречни пресек не мења свој облик. Друга претпоставка важи само у случају слободне торзије. Са слике 3 се види да је у правцу:

- нормале $\vec{n}$ померање u ;
- тангенте $\vec{t}$ померање v ;
- осе z померање w ;
- главне осе симетрије, осе x померање ξ ;
- главне осе симетрије, осе y померање η ;

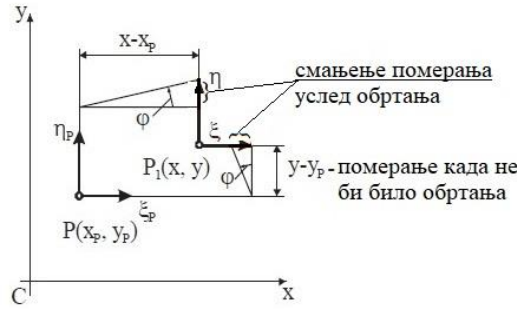
Са претходне слике (Слика 3.) се посматра елемент који се налази на контури цеви, и означен је словом a . Клизање за средњу површ се рачуна уз помоћ израза:

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad (1.2)$$

У случају, ако је интеграциона функција $W_{o(z)}$, померање је:

$$w_{(z,s)} = - \int_0^s \frac{\partial v}{\partial z} ds + W_{o(z)} \quad (1.3)$$

На слици 4 се види померање тачке P у равни xSy . На основу ове слике, долази се до извођења једначина померања, односно начина одређивања положаја тачке.



Слика 4. Померање тачке у равни [3].

За тачку P_1 са слике су позната померања тачке P и то су:

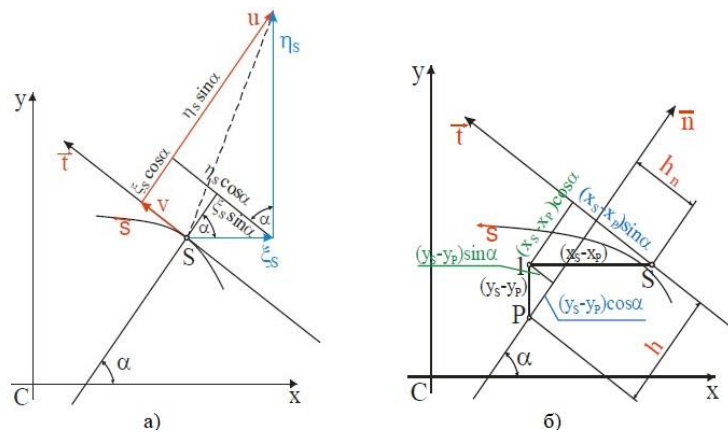
$$\begin{aligned} \xi &= \xi_P - (y - y_P) \cdot \varphi \\ \eta &= \eta_P + (x - x_P) \cdot \varphi \end{aligned} \quad (1.4)$$

Потребно је наћи тачку која је непомична у односу на систем xSy и то је у овом случају тачка $D(x_D, y_D)$. Из једначине (1.4) следи:

$$\begin{aligned} \xi = 0 \quad \xi_P &= (y_D - y_P) \cdot \varphi \Rightarrow \underline{y_D = y_P + \frac{\xi_P}{\varphi}} \\ \eta = 0 \quad \eta_P &= (x_D - x_P) \cdot \varphi \Rightarrow \underline{x_D = x_P - \frac{\eta_P}{\varphi}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\bar{D} \left(x_D = x_P - \frac{\eta_P}{\varphi}, y_D = y_P + \frac{\xi_P}{\varphi} \right)$$

Да би се одредила секторска координата, потребно је посматрати везу између померања ξ и η у правцу осе x и y , као и померања v и w у правцу z и s са слике 5.



Слика 5. Веза померања ξ и η у правцу осе x и y и померања v и w у правцу z и s осе [3].

Са слике 5.а) види се да су померања ξ_S и η_S позната, на основу њих траже се u и v померања:

$$u_{(z,s)} = \eta_S \cdot \sin \alpha + \xi_S \cdot \cos \alpha \quad (1.6)$$

$$v_{(z,s)} = \eta_S \cdot \cos \alpha - \xi_S \cdot \sin \alpha$$

Заменом израза (1.4) у изразе (1.6), и уместо x и y , узима се x_S и y_S , добија се:

$$u_{(z,s)} = \eta_S \cdot \sin \alpha + \xi_S \cdot \cos \alpha + \varphi \cdot [(x_S - x_P) \cdot \sin \alpha - (y_S - y_P) \cdot \cos \alpha] \quad (1.7)$$

$$v_{(z,s)} = \eta_S \cdot \cos \alpha - \xi_S \cdot \sin \alpha + \varphi \cdot [(x_S - x_P) \cdot \cos \alpha + (y_S - y_P) \cdot \sin \alpha]$$

Изрази који се налазе у угластим заградама у једначинама (1.7) се читавају са слике 5.б). Односно на овој слици се виде одговарајућа пројектовања правих које се користе у овим изразима. Са те исте слике, очигледно је да су:

$$h_n = (x_S - x_P) \cdot \sin \alpha - (y_S - y_P) \cdot \cos \alpha \quad (1.8)$$

$$h = (x_S - x_P) \cdot \cos \alpha + (y_S - y_P) \cdot \sin \alpha$$

Када се једначине (1.8) унесу у једначине (1.7), добија се:

$$u_{(z,s)} = \eta_S \cdot \sin \alpha + \xi_S \cdot \cos \alpha + \varphi \cdot h_n \quad (1.9)$$

$$v_{(z,s)} = \eta_S \cdot \cos \alpha - \xi_S \cdot \sin \alpha + \varphi \cdot h$$

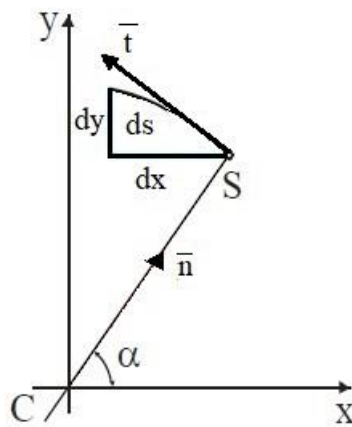
Диференцирањем померања v по оси z добија се:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \eta'_p \cdot \cos \alpha - \underbrace{\eta_p \cdot \sin \alpha}_{=0 \text{ јер је } \alpha = \text{const.}} - \underbrace{\xi'_p \cdot \sin \alpha + \xi_p \cdot \cos \alpha}_{=0 \text{ јер је } \alpha = \text{const.}} + \varphi' \cdot h \quad (1.10)$$

Заменом једначине (1.10) у једначину (1.3), добија се:

$$w_{(z,s)} = - \int_0^s \frac{\partial v}{\partial z} ds + W_{o(z)} = - \int_0^s \eta'_p \cdot \cos \alpha - \xi'_p \cdot \sin \alpha + \varphi' \cdot h + W_{o(z)} \quad (1.11)$$

На слици 6 је приказана вредност синуса и косинуса угла α , односно са слике се читавају уопштене формуле уз чију помоћ се при прорачуну одређују ови углови.



Слика 6. Одређивање угла α [3].

На основу претходне слике:

$$\sin \alpha = -\frac{dx}{ds}; \cos \alpha = \frac{dy}{ds} \quad (1.12)$$

Заменом ових углова из једначина (1.12) у израз (1.11) и интеграљењем такве једначине, добија се:

$$w_{(z,s)} = W_{o(z)} - \eta'_p \cdot y - \xi_p \cdot x - \varphi' \omega_p \quad (1.13)$$

Где је ω_p секторска координата, односно јединично кривљење, и прорачунава се на следећи начин:

$$\omega_p = \int_0^s h \cdot ds \quad (1.14)$$

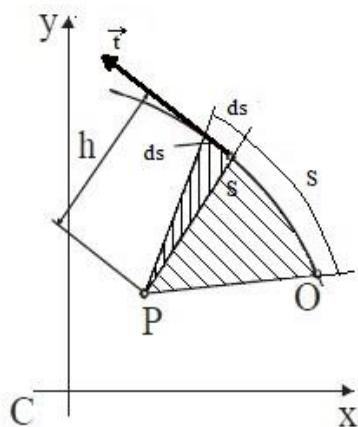
Анализом изрази (1.13), померање тачке састоји се из следећих компоненти:

- $W_{o(z)}$ – померање попречног пресека дуж осе z као круте плоче – транслација;
- $\eta'_p \cdot y$ – компонента померања услед ротације пресека као круте плоче око x осе;
- $\xi_p \cdot x$ – компонента померања услед ротације пресека као круте плоче око y осе;
- $\varphi' \omega_p$ – померање услед кривљења – депланација, витоперење попречног пресека.

У случају када је $\varphi' = 1$, све остало у једначини (1.13) једнако је нули, што значи да је померање у овом случају изједначено са секторском координатом. У овом случају, секторска координата представља јединично кривљење.

Секторска координата зависи од тренутног пола P и од нулте тачке $O_1(x_o, y_o)$. Ова координата се назива секторском из разлога што у обзир узима одређени сектор површине. Величина секторске координате је исто што и x и y у ранијим теоријама, она служи за израчунавање секторских карактеристика попречног пресека као што су статички момент инерције и моменти инерције за танкозидне штапове.

На слици 7 је приказан пример једног сектора, на основу кога је приказан начин решавања секторске координате за тај сектор.



$$dA = \frac{h_p \cdot ds}{2} \Rightarrow 2 \cdot dA = h \cdot ds$$

$$d\omega_p = 2 \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot A = \int_0^s h \cdot ds = \omega_p$$

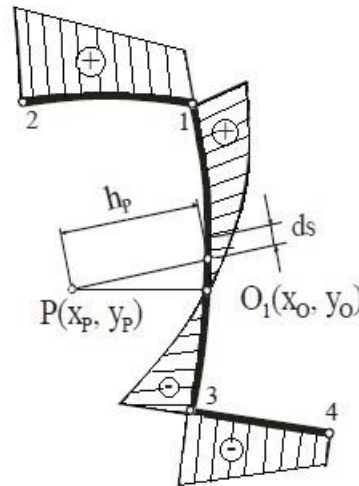
$$\omega_p = \int_0^s h \cdot ds = 2 \cdot A$$

Слика 7. Сектор на основу кога се прорачунава секторска координата [3].

ω_p представља двоструку површину оивичену потезима повученим из тачке P (PO и PS) и луком OS .

Секторска координата се на дијаграму уноси у правцу који је управан на тангенту. Позитивна је у случају када расте у смеру супротном од казаљке на сату, а негативна ако расте у смеру који се поклапа са смером казаљке на сату. Што значи да је вредност секторске координате позитивна, у случају када оријентисани елемент d_s има смер обртања око пола у супротном смеру од кретање казаљке на сату. За нулту тачку је секторска координата једнака нули, јер је оријентисани елемент једнак нули.

На слици 8 приказан је пример дијаграма секторске координате у случају нестандардног попречног пресека.



Слика 8. Дијаграм секторске координате [3].

Са слике 8 се види да је за нулту тачку секторска координата једнака нули, јер је оријентисани елемент једнак нули. Такође, се види претходно објашњен предзнак у зависности од кретања казаљке на сату, као и тачке за које се вредности секторске координате прорачунавају.

1.3 Центар смицања

Центар смицања, је уствари тачка у пресеку која задовољава следеће услове:

Први услов је $S_{\omega p} = 0$, - секторски статички момент;

Други услов је $I_{y\omega p} = 0$, - секторски центрифугални момент за осу у;

Трећи услов је $I_{x\omega p} = 0$, - секторски центрифугални момент за осу х.

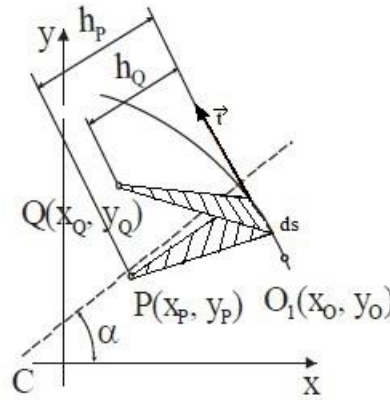
Први услов зависи од избора нулте тачке O , од ове тачке се рачуна координата. Други и трећи услов зависе од избора пола. Центар смицања представља пол који испуњава други и трећи услов. Дефиниција центра смицања је:

„Центар смицања је тачка, односно пол за коју су секторски центрифугални моменти једнаки нули“.

$$I_{y\omega D} = 0, I_{x\omega D} = 0, D(X_D, Y_D). \quad (1.15)$$

Центар смицања представља тачка у којој нема смицања.

Да би се нашао центар смицања, потребно је знати секторске координате за неки пол $Q(X_Q, Y_Q)$. Да би се одредио центар смицања, потребно је одредити секторске координате за два различита пола при истој нултој тачки. На слици 9 је приказан однос x и y координате на основу кога се врши извођење овог израза.



Слика 9. Веза секторске координате за два различита пола при истој нултој тачки [3].

$$d\omega_p = h_p \cdot ds \quad (1.16)$$

$$d\omega_q = h_q \cdot ds$$

На основу слике одређују се висине и оријентисани елемент:

$$h_p = (x - x_p) \cos \alpha + (y - y_p) \sin \alpha \quad (1.17)$$

$$h_q = (x - x_q) \cos \alpha + (y - y_q) \sin \alpha$$

$$ds \cdot \sin \alpha = -dx \quad (1.18)$$

$$ds \cdot \cos \alpha = dy$$

Када се једначине (1.17) и (1.18) замене у једначине (1.16) добијају се:

$$d\omega_p = (x - x_p)dy - (y - y_p)dx \quad (1.19)$$

$$d\omega_q = (x - x_q)dy - (y - y_q)dx$$

Да би се одредио центар смицања потребно је одредити разлику (1.19) израза (прираштаја).

$$\begin{aligned} d\omega_p - d\omega_q &= (x - x_p)dy - (y - y_p)dx + (x - x_q)dy - (y - y_q)dx = \\ &= (y_p - y_q)dx - (x_p - x_q)dy \end{aligned} \quad (1.20)$$

Када се изврши интеграљење (1.20) израза добија се:

$$\omega_p - \omega_q = \int_0^{xy} (y_p - y_q)dx - (x_p - x_q)dy = (y_p - y_q)x - (x_p - x_q)y + C \quad (1.21)$$

C представља константу интеграције која се одређује на основу услова да мора да прође кроз нулту тачку $O_1(x_0, y_0)$ без обзира на пол секторске координате.

На основу овог услова добија се следеће:

$$\omega_p(O_1) = 0, \omega_Q(O_1) = 0, \omega_p(O_1) - \omega_Q(O_1) = 0$$

$$0 = (y_p - y_Q)x - (x_p - x_Q)y + C \Rightarrow C = -(y_p - y_Q)x_o + (x_p - x_Q)y_o \quad (1.22)$$

Када се једначина (1.22) замени у (1.21), добија се:

$$\omega_p = \omega_Q + (y_p - y_Q) \cdot (x - x_o) - (x_p - x_Q)(y - y_o) \quad (1.23)$$

Израз (1.23) представља везу између секторских координата за два различита пола при истој нултој тачки.

Да би се одредио центар смицања, креће се од израза (1.21). Потребно је да се тај израз замени у услове:

$$I_{y\omega_D} = \int_A y \cdot \omega_D \cdot dA \quad (1.24)$$

$$= \int_A \underbrace{y \cdot \omega_Q \cdot dA}_{I_{y\omega_Q}} + \underbrace{(y_D - y_Q) \int_A x \cdot y \cdot dA}_{=0 \text{ јер су } x \text{ и } y \text{ тежишне осе}} - \underbrace{(x_D - x_Q) \int_A y^2 \cdot dA}_{I_x} + C \underbrace{\int_A y \cdot dA}_{=0 \text{ јер је } y \text{ тежишна оса}} = 0$$

$$I_{x\omega_D} = \int_A x \cdot \omega_D \cdot dA \quad (1.25)$$

$$= \int_A \underbrace{x \cdot \omega_Q \cdot dA}_{I_{x\omega_Q}} + \underbrace{(y_D - y_Q) \int_A x^2 \cdot dA}_{I_y} - \underbrace{(x_D - x_Q) \int_A x \cdot y \cdot dA}_{=0 \text{ јер су } x \text{ и } y \text{ тежишне осе}} + C \underbrace{\int_A x \cdot dA}_{=0 \text{ јер је } x \text{ тежишна оса}} = 0$$

Када се све замени, изрази (1.24) и (1.25) добијају свој коначан облик:

$$I_{y\omega_D} = I_{y\omega_Q} - (x_D - x_Q) \cdot I_x = 0 \quad (1.24')$$

$$I_{x\omega_D} = I_{x\omega_Q} + (y_D - y_Q) \cdot I_y = 0 \quad (1.25')$$

Након овог извођена, долазимо до коначних израза који се користе за одређивање центра смицања:

$$X_D = X_Q + \frac{I_{y\omega_Q}}{I_x} \quad (1.26)$$

$$Y_D = Y_Q - \frac{I_{x\omega_Q}}{I_y}$$

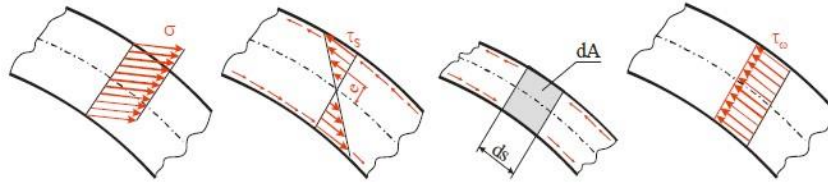
Изразом (1.26) се одређују координате центра смицања, изражене преко произвољно изабраног пола Q.

1.4 Напони и силе у пресецима

Што се тиче напона, постоје одређене претпоставке које олакшавају његово одређивање. Претпоставке настају у односу на распоред нормалних и смичућих напона.

Прва претпоставка: Нормални напон је непроменљив (константан) по дебљини зида.

На слици 10 је приказан однос нормалних и смичућих напона.



Слика 10. Ток смицајног напона [3].

Друга претпоставка је: $\vec{\tau} = \vec{\tau}_s + \vec{\tau}_\omega$.

Смицајни напони се састоје од две компоненте:

$\tau_s = \frac{M_s}{I_t} \cdot \delta$ – максимална вредност напона услед слободне торзије;

$\tau_s(e) = 2 \cdot \frac{M_s}{I_t} \cdot e$ – напон услед слободне торзије на месту e ;

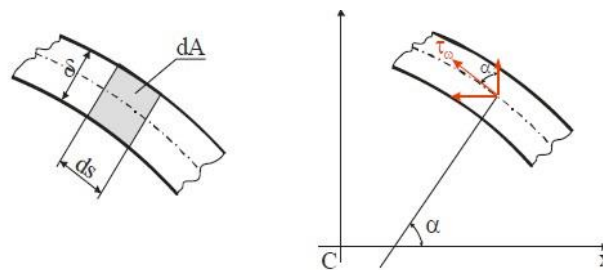
τ_ω – напон услед спречене торзије;

I_t – торзиони момент инерције, који се одређује на следећи начин:

$$I_t = \frac{\eta}{3} \sum_{i=1}^n \delta_i^3 \cdot s_i.$$

У претходном изразу, η представља поправни коефицијент, чије се вредности читају из одређене табеле, и овај коефицијент узима у обзир да место сучељавања не може да се раздвоји у правоугаоник.

Силе које делују у попречним пресецима су нормална сила (N), која представља резултанту свих сила које су резултат нормалних напона, и трансвензалне силе (Q). На слици 11 је приказан попречни пресек на основу кога ће се у наставку одредити моменти савијања и правци деловања сила.



Слика 11. Попречни пресек са правцима сила које делују у њему [3].

Моменти савијања се добијају извођењем уз помоћ претходне слике:

$$dA = \delta ds \Rightarrow N = \int_A \sigma dA \Rightarrow N = \int_s \sigma \delta ds \quad (1.27)$$

$$M_x = \int_A \sigma_y dA = \int_s \sigma_y \delta ds \quad (1.28)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x dA = \int_s \sigma_x \delta ds$$

Смицајни напони слободне торзије, могу се свести на торзиони момент, а смицајни напони спречене торзије се своде на трансвензалну силу.

$$Q_x = \int_A \tau_\omega \sin \alpha dA \quad (1.29)$$

Са слике 11 се види:

$$dA = \delta ds \quad ; \quad ds \sin \alpha = -dx$$

$$Q_x = \int_s \tau_\omega \delta dx$$

$$Q_y = \int_A \tau_\omega \cos \alpha dA \quad (1.29.a)$$

Са слике 11 се види:

$$dA = \delta ds \quad ; \quad ds \sin \alpha = dy$$

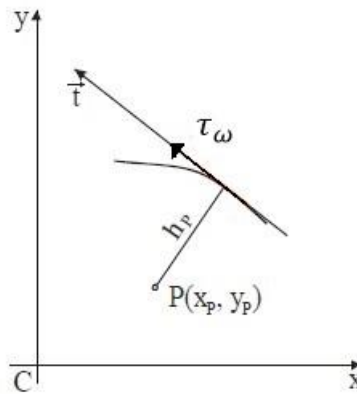
$$Q_y = \int_s \tau_\omega \delta dy \quad (1.29.b)$$

Ток смицајног напона се представља једначином:

$$\tau_\omega \delta = q \quad (1.30)$$

$$Q_x = \int_s q dy \quad ; \quad Q_y = \int_s q dx \quad (1.31)$$

Момент око осе z је торзиони момент. Са слике 12 се може одредити његова величина.



Слика 12. Торзиони момент [3].

Са слике се не посматра момент који пролази кроз тачку C око тежишне осе, већ се посматра онај око осе паралелне оси z која пролази кроз тачку P, момент $M_{p.и}$

$$M_t = M_{zp} = M_p = \underbrace{M_s}_{\text{момент при слободној торзији}} + \underbrace{\int_A \tau_\omega h_p dA}_{\substack{\tau_\omega dA \text{ укупна} \\ \text{сила}}} = M_s + \underbrace{\int_s \tau_\omega h_p \delta ds}_{\substack{h_p \delta ds = d\omega_p \\ \tau_\omega \delta = q}} = M_s + \int_s q d\omega_p$$

$$M_t = M_s + M_{\omega_p} \quad (1.32)$$

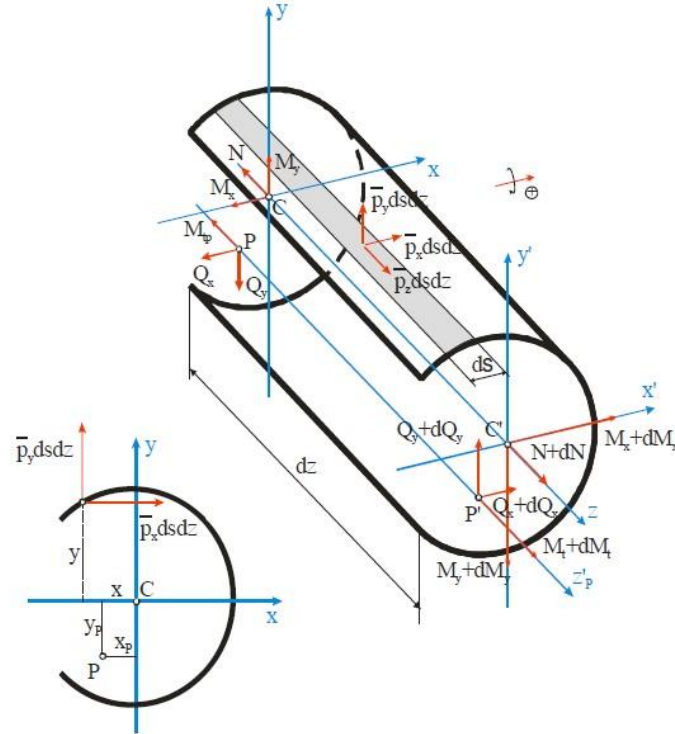
Торзиони момент има две компоненте, као што се и види у претходном изразу, то су компоненте слободне торзије и компоненте ограничене торзије.

$$M_{\omega_p} = \int_s q d\omega_p = \int_s \tau_\omega \delta d\omega_p = \int_s \tau_\omega h_p \delta ds = \int_A \tau_\omega h_p dA$$

$$M_t = M_{zp} = M_s + M_{\omega_p} \quad (1.33)$$

1.5 Услови равнотеже

На слици 13 је приказан попречни пресек цеви, на основу кога се одређују услови равнотеже, где је C тежиште, p_z сила по јединици површине, M_x , M_y , N , Q_x , Q_y , M_t су унутрашње силе. Услов је да силе p_x и p_y делују на половини цеви.



Слика 13. Цев за одређивање услова равнотеже [3].

Услови равнотеже:

$$(1) \sum X = 0 \quad (1.34)$$

$$(2) \sum Y = 0 \quad (1.35)$$

$$(3) \sum Z = 0 \quad (1.36)$$

$$(4) \sum M_x = 0 \quad (1.37)$$

$$(5) \sum M_y = 0 \quad (1.38)$$

$$(6) \sum M_z = 0 \quad (1.39)$$

Односно:

$$(1) \sum X = 0 \Rightarrow (Q_x + dQ_x) - Q_x + \int_s \bar{p}_x dsdz = 0$$

$$(2) \sum Y = 0 \Rightarrow (Q_y + dQ_y) - Q_y + \int_s \bar{p}_y dsdz = 0$$

$$(3) \sum Z = 0 \Rightarrow (N + dN) - N + \int_s \bar{p}_z dsdz = 0$$

$$(4) \sum M_x = 0 \Rightarrow (M_x + dM_x) - M_x - (Q_y + dQ_y)dz + \int_s \bar{p}_z y dsdz - \int_s \bar{p}_y \frac{dz}{2} dsdz = 0$$

$$(5) \sum M_y = 0 \Rightarrow (M_y + dM_y) - M_y - (Q_x + dQ_x)dz + \int_s \bar{p}_z x dsdz - \int_s \bar{p}_x \frac{dz}{2} dsdz = 0$$

$$(6) \sum M_z = 0 \Rightarrow (M_{tp} + dM_{tp}) - M_{tp} - \int_s \bar{p}_x (y + y_p) dsdz - \int_s \bar{p}_y (x - x_p) dsdz = 0$$

Због секторске координате, шести услов равнотеже се узима кроз тачку P .

- (1) $dQ_x + \int_s \overline{p_x} ds dz = 0$
- (2) $dQ_y + \int_s \overline{p_y} ds dz = 0$
- (3) $dN + \int_s \overline{p_z} ds dz = 0$
- (4) $dM_x - Q_y dz + dz \int_s \overline{p_z} y ds = 0, dQ_y dz \sim 0$
- (5) $-dM_y + Q_x dz + dz \int_s \overline{p_z} x ds = 0, dQ_x dz \sim 0$
- (6) $dM_{tp} - dz \int_s [\overline{p_x}(y + y_p) + \overline{p_y}(x + x_p)] ds = 0$

Када се уведу следеће ознаке, промениће се и услови равнотеже:

$P_x = \int_s \overline{p_x} ds, \int_s \overline{p_y} ds, \int_s \overline{p_z} ds$ – резултанте површинског оптерећења

$\mathfrak{M}_x = \int_s \overline{p_z} y ds, \mathfrak{M}_y = \int_s \overline{p_z} x ds, \mathfrak{M}_z = \int_s [\overline{p_x}(y + y_p) + \overline{p_y}(x + x_p)] ds$

$Q'_x = \frac{dQ_x}{dz}, Q'_y = \frac{dQ_y}{dz}, N' = \frac{dN}{dz}, M'_x = \frac{dM_x}{dz}, M'_y = \frac{dM_y}{dz}, M'_{tp} = \frac{dM_{tp}}{dz}$

- (1) $Q'_x = -P_x$
- (2) $Q'_y = -P_y$
- (3) $N' = -P_z$
- (4) $M'_x = Q_y - \mathfrak{M}_x$
- (5) $M'_y = Q_x + \mathfrak{M}_y$
- (6) $M'_{tp} = \mathfrak{M}_{xp}$

1.6 Веза између деформација и сила у пресеку

Померање: $w = w_0 - \eta'_p y - \xi'_p x - \varphi' \omega_p$;

Депланација у правцу z осе: $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = w'_0 - \eta''_p y - \xi''_p x - \varphi'' \omega_p$;

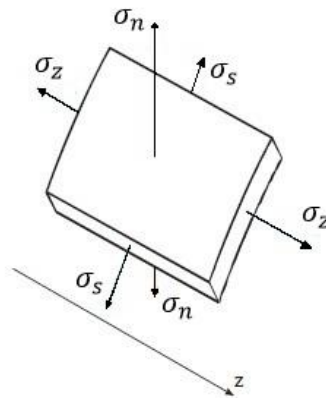
Депланација у правцу тангенте: $\varepsilon_s = 0$;

Депланација у правцу нормале: $\varepsilon_n = 0$;

Промена дебљине зида се занемарује, а промена средње линије по облику не постоји.

Веза између напона и депланације у три ортогонална правца

Да би се одредила веза између деформације и сила у пресеку, на слици 14 је приказан танкозидни штап који ће помоћи у томе.



Слика 14. Танкозидни штап [3].

Посматра се елемент танкозидног штапа који је приказан на слици и на основу њега се одређују одређене једначине.

На основу претходне слике:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\varepsilon_z - \mu \left(\varepsilon_n + \varepsilon_s \right) \right] \\ \sigma_n &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\varepsilon_n - \mu \left(\varepsilon_z + \varepsilon_s \right) \right] \\ \sigma_s &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\varepsilon_s - \mu \left(\varepsilon_z + \varepsilon_n \right) \right]\end{aligned}\tag{1.40a}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{E}{1-\mu^2} \varepsilon_z \\ \sigma_n &= \frac{E}{1-\mu^2} (-\mu \varepsilon_z) = -\mu \sigma_z \\ \sigma_s &= \frac{E}{1-\mu^2} (-\mu \varepsilon_z) = -\mu \sigma_z\end{aligned}\tag{1.40b}$$

E_1 представља редуковани модул еластичности и он се дефинише на следећи начин:

$$E_1 = \frac{E}{1-\mu^2}\tag{1.41}$$

На основу овог израза, односно заменом израза (1.41) у израз (1.40b), изрази гласе:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E_1 \varepsilon_z \\ \sigma_n &= -\mu \sigma_z \\ \sigma_s &= -\mu \sigma_z\end{aligned}$$

Нормални напон је најзначајнији и он се највише изучава, дефинише се као:

$$\sigma = \sigma_z = E_1 \varepsilon_z = E_1 (w_0' - \eta_p'' y - \xi_p'' x - \varphi'' \omega_p)\tag{1.42}$$

Поред нормалног напона, потребно је напоменути и смицајни напон, који се одређује на следећи начин.

$$\varphi' = \frac{M_s}{GI_t}, \text{ угао обртања је извод ове формуле}\tag{1.43}$$

$$M_s = GI_t \varphi'\tag{1.44}$$

$$I_t = \frac{\eta}{3} \sum b_i \delta_i^3\tag{1.45}$$

$$\tau_s = 2 \frac{M_s}{I_t} e\tag{1.46}$$

$$\text{за } e = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{M_s}{I_t} \delta$$

Из разлога што је $\tau_\omega = const.$ Не може се одредити из померања, већ из услова равнотеже. Па је смицајни напон:

$$\tau_s = 2Ge\varphi', \tau_{max} = G\delta\varphi'\tag{1.47}$$

1.7 Веза између сила и померања

$$N = \int_A \sigma dA = E_1 \int_A \varepsilon_z dA = E_1 [w'_0 \int_A dA - \eta''_p \int_A y dA - \xi''_p \int_A x dA - \varphi'' \int_A \omega_p dA] \quad (1.48)$$

$$M_x = \int_A \sigma y dA = E_1 \int_A \varepsilon_z y dA = E_1 [w'_0 \int_A y dA - \eta''_p \int_A y^2 dA - \xi''_p \int_A x y dA - \varphi'' \int_A y \omega_p dA]$$

$$M_y = \int_A \sigma x dA = E_1 \int_A \varepsilon_z x dA = E_1 [w'_0 \int_A x dA - \eta''_p \int_A x y dA - \xi''_p \int_A x^2 dA - \varphi'' \int_A x \omega_p dA]$$

Где је:

$$\int_A dA = A, \int_A y^2 dA = I_x, \int_A x^2 dA = I_y, \int_A x dA = S_y = 0, \int_A y dA = S_x = 0,$$

$$\int_A \omega_p dA = S_{\omega p}, \int_A x \omega_p dA = I_{x \omega p}, \int_A y \omega_p dA = I_{y \omega p}.$$

Изрази за везу између сила и померања могу се упростити ако су сви чланови поред φ'' једнаки нули, односно да важе услови за центар смицања. Заменом претходних параметара, изрази добијају облик:

$$N = E_1 A w'_0$$

$$M_x = -E_1 I_x \eta''_p \quad (1.49)$$

$$M_y = -E_1 I_y \xi''_p$$

1.8 Бимомент

Момент који се добија условом да је $S_{\omega p} = 0$, овај услов задовољава нормирана секторска координата, представља бимомент. Бимомент се прорачунава помоћу израза:

$$B = \int_A \sigma \Omega dA \quad (1.50)$$

На основу израза (1.49), добија се:

$$w'_0 = \frac{N}{E_1 A}, \eta''_p = -\frac{M_x}{E_1 I_x}, \xi''_p = -\frac{M_y}{E_1 I_y}$$

Када се ови изрази унесу у израз (1.42), добија се нормални напон:

$$\begin{aligned} \sigma &= E_1 (w'_0 - \eta''_p y - \xi''_p x - \varphi'' \omega_p) = E_1 \left[\frac{N}{E_1 A} - \left(-\frac{M_x}{E_1 I_x} \right) y - \left(-\frac{M_y}{E_1 I_y} \right) x - \varphi'' \Omega \right] \\ &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x - E_1 \varphi'' \Omega \end{aligned}$$

Када се овај израз за нормални напон унесе у израз за бимомент, добија се:

$$B = \int_A \sigma \Omega dA = \underbrace{\frac{N}{A} \int_A \Omega dA}_{=0} + \underbrace{\frac{M_x}{I_x} \int_A y \Omega dA}_{=0} + \underbrace{\frac{M_y}{I_y} \int_A x \Omega dA}_{=0} - E_1 \varphi'' \int_A \Omega^2 dA \quad (1.51)$$

Ω —нормирана секторска координата

$$B = -E_1 \varphi'' \int_A \Omega^2 dA = -E_1 \varphi'' I_\Omega \quad (1.52)$$

Где је I_Ω секторски момент инерције за нормирану секторску координату.

Из израза (1.52) следи да је $\varphi'' = -\frac{B}{E_1 I_\Omega}$, када се овај израз унесе у израз (1.42), добија се нормални напон услед спречене торзије:

$$\sigma = \underbrace{\frac{N}{A}}_{\text{централно}} + \underbrace{\frac{M_x}{I_x} y}_{\text{савијање}} + \underbrace{\frac{M_y}{I_y} x}_{\text{савијање}} - \underbrace{\frac{B}{I_\Omega} \Omega}_{\text{normirani naapon}} \quad (1.53)$$

затезање око осе x око осе y usled deplanacije

1.9 Торзиони момент кривљења

Из услова равнотеже, $\sum Z = 0$:

$$\int_s \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) \delta ds - \int_s \sigma \delta ds + \int_s \bar{p}_z ds dz + q dz = 0$$

$$q = \int_s \delta \frac{\partial \sigma}{\partial z} ds - \int_s \bar{p}_z ds \quad (1.54)$$

Из израза (1.53) се нађе $\frac{\partial \sigma}{\partial z}$ и унесе се у израз (1.54):

$$q = -\frac{dN}{dz} \frac{1}{A} \int_s \underbrace{\delta ds}_{=A} - \frac{dM_x}{dz} \frac{1}{I_x} \int_s \underbrace{y \delta ds}_{S_x} - \frac{dM_y}{dz} \frac{1}{I_y} \int_s \underbrace{x \delta ds}_{S_y} + \frac{dB}{dz} \frac{1}{I_\Omega} \int_s \underbrace{\Omega \delta ds}_{S_\Omega} - \int_s \bar{p}_z ds \quad (1.55)$$

Када се у обзир узму услови равнотеже:

$$\frac{dN}{dz} = N' = -p_z; \frac{dM_x}{dz} = M'_x = Q_x - \mathfrak{M}_x; \frac{dM_y}{dz} = M'_y = Q_y + \mathfrak{M}_y; \frac{dB}{dz} = B'$$

Заменом ових услова у једначину (1.55), добија се:

$$q = \left(\underbrace{p_z \frac{\bar{A}}{A}}_{\text{линијско оптерећење}} - \underbrace{\int_s \bar{p}_z ds}_{\text{површинско оптерећење}} \right) - \frac{\bar{S}_x}{I_x} M'_x - \frac{\bar{S}_y}{I_y} M'_y - \frac{B'}{I_\Omega} \bar{S}_\Omega \quad (1.56)$$

Пошто је $p_z = 0$, биће коначно:

$$q = -\frac{\bar{S}_x}{I_x} M'_x - \frac{\bar{S}_y}{I_y} M'_y - \frac{B'}{I_\Omega} \bar{S}_\Omega \quad (1.57)$$

Како је:

$$M_x = -E_1 I_x \eta''; M_y = -E_1 I_y \xi''; B = -E_1 I_\Omega \varphi''$$

Када се одради извод ових израза, добија се:

$$M'_x = -E_1 I_x \eta'''; M'_y = -E_1 I_y \xi'''; B' = -E_1 I_\Omega \varphi''' \quad (1.58)$$

Када се изрази (1.58) замене у израз (1.57), добија се:

$$q = E_1 [\bar{S}_x \eta''' + \bar{S}_y \xi''' + \bar{S}_\Omega \varphi''']$$

Па израз за смицајни напон гласи:

$$\tau_\omega = \frac{q}{\delta} = \frac{E_1}{\delta} [\bar{S}_x \eta''' + \bar{S}_y \xi''' + \bar{S}_\Omega \varphi'''] \quad (1.59)$$

Торзиони момент кривљења по целој контури гласи:

$$M_{t\omega} = \int_s q d\Omega = \int_s \delta \tau_\omega d\Omega = \frac{E_1}{\delta} \left[\eta''' \underbrace{\int_s \bar{S}_x d\Omega}_{=0} + \xi''' \underbrace{\int_s \bar{S}_y d\Omega}_{=0} + \varphi''' \int_s \bar{S}_\Omega d\Omega \right] \quad (1.60)$$

$\int_s \bar{S}_x d\Omega$ и $\int_s \bar{S}_y d\Omega$ су једнаке нули, у случају када је $s=0$ јер је површина једнака нули, а када је $s=s_k$ јер је x тежишна оса. Поред овога потребно је напоменути да је и центрифугални секторски момент једнак нули, из разлога што је нормирана секторска координата Ω .

Торзиони момент кривљења је $M_{t\omega} = -E_1 I_\Omega \varphi'''$, како је $M_{ts} = G I_t \varphi'$, укупни торзиони момент је:

$$M_{t\omega} = M_{ts} + M_{t\omega} = G I_t \varphi' - E_1 I_\Omega \varphi''' \quad (1.61)$$

Под условом да нема спољашњег површинског оптерећења, из израза (1.58) следи:

$$-\frac{Q_y}{E_1 I_x} = \eta'''$$

$$-\frac{Q_x}{E_1 I_y} = \xi'''$$

$$-\frac{B}{E_1 I_\Omega} = -E_1 I_\Omega \varphi'''$$

Када се замене претходни изрази у израз за смицајни напон (1.59), добија се:

$$\tau_\omega = -\frac{Q}{I_x} \frac{\bar{s}_x}{\delta} - \frac{Q}{I_y} \frac{\bar{s}_y}{\delta} - \frac{B}{I_\Omega} \frac{\bar{s}_\Omega}{\delta} \quad (1.62)$$

1.10 Диференцијална једначина деформације при спреченој торзији

Укупни торзионни момент је представљен изразом:

$$M_t = M_{ts} + M_{t\omega} = M_s + M_\Omega \quad (1.63)$$

$$M_t = G I_t \varphi' - E_1 I_\Omega \varphi''' \quad (1.63')$$

$$\frac{dM_t}{dz} = \frac{dM_s}{dz} + \frac{dM_\Omega}{dz} \quad (1.64)$$

$$-\mathfrak{M}_D = M'_s + M'_\Omega - \text{момент од спољашњег оптерећења за тренутни пол } D. \quad (1.64')$$

$$G I_t \varphi' - E_1 I_\Omega \varphi^{IV} = -\frac{\mathfrak{M}_D}{(-E_1 I_\Omega)} \neq 0$$

$$\varphi^{IV} - \frac{G I_t}{E_1 I_\Omega} \varphi'' = \frac{\mathfrak{M}_D}{(E_1 I_\Omega)} \quad (1.65)$$

Диференцијална једначина где је $k^2 = \frac{G I_t}{E_1 I_\Omega}$, а $f(z) = \frac{\mathfrak{M}_D}{(E_1 I_\Omega)}$,

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = f(z) \quad (1.66)$$

Решење ове диференцијалне једначине (1.66) је збир хомогеног решења и партикуларног решења.

$$\varphi = \varphi_h + \varphi_p \quad (1.67)$$

Решење хомогене једначине (1.66) је облика:

$$\varphi = k e^{\lambda z} \quad (1.68)$$

Карактеристична једначина је:

$$\lambda^4 - k^2 \varphi'' = 0$$

$$\lambda^2(\lambda^2 - k^2) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm k, \lambda_{3,4} = 0$$

$$\varphi_h = D_1 e^{\lambda_1 z} + D_2 e^{\lambda_2 z} + D_3 z + D_4$$

$$\varphi_h = D_1 e^{kz} + D_2 e^{-kz} + D_3 z + D_4$$

$$e^{kz} = \cosh kz + \sinh kz = ch kz + sh kz \quad (1.69)$$

$$e^{-kz} = \cosh kz - \sinh kz = ch kz - sh kz$$

$$\varphi_h = (D_1 + D_2) ch kz + (D_1 - D_2) sh kz + D_3 z + D_4$$

Решење хомогене једначине:

$$\varphi_h = C_1 chkz + C_2 shkz + C_3 z + C_4 \quad (1.70)$$

У случају када има два решења једнака нули, партикуларно решење се тражи на следећи начин:

$$\varphi_p = z^2 \Phi(z) \quad (1.71)$$

Где је $\Phi(z)$ непознато, али је истог реда као и позната функција:

$$f(z) = \overline{A_0} + \overline{A_1}z + \overline{A_2}z^2 + \dots + \overline{A_{n-1}}z^{n-1} + \overline{A_n}z^n \quad (1.72)$$

$$\Phi(z) = \overline{A_0} + \overline{A_1}z + \overline{A_2}z^2 + \dots + \overline{A_{n-1}}z^{n-1} + \overline{A_n}z^n$$

Опште решење диференцијалне једначине:

$$\varphi(z) = \varphi_h + \varphi_p = C_1 chkz + C_2 shkz + C_3 z + C_4 + \varphi_p \quad (1.73)$$

$$chkz = \frac{e^{kz} + e^{-kz}}{2}, shkz = \frac{e^{kz} - e^{-kz}}{2}, (chkz)' = kshkz, (shkz)' = kchkz$$

$$\varphi'(z) = C_1 kshkz + C_2 kchkz + C_3 + \varphi'_p$$

$$\varphi''(z) = C_1 k^2 chkz + C_2 k^2 shkz + \varphi''_p$$

$$\varphi'''(z) = C_1 k^3 shkz + C_2 k^3 chkz + \varphi'''_p$$

$$\varphi^{IV}(z) = C_1 k^4 chkz + C_2 k^4 shkz + \varphi^{IV}_p$$

Бимомент је:

$$B = -E_1 I_\Omega \varphi'' = -E_1 I_\Omega (C_1 k^2 chkz + C_2 k^2 shkz + \varphi''_p) \quad (1.74)$$

Укупни момент је:

$$M_t = G I_t \varphi' - E_1 I_\Omega \varphi''' \quad (1.75)$$

$$= G I_t (C_1 kshkz + C_2 kchkz + C_3 + \varphi'_p) - E_1 I_\Omega (C_1 k^3 shkz + C_2 k^3 chkz + \varphi'''_p)$$

Константе C_1, C_2, C_3 и C_4 се одређују преко почетних параметара.

Када је $z=0$ ($z=0, chkz=1, shkz=0$)

$$\varphi = \varphi_0, C_1 + C_4 + \varphi_{p0} = \varphi_0 \quad (1.76)$$

$$\varphi' = \varphi'_0, C_2 k + C_3 + \varphi'_{p0} = \varphi'_0 \quad (1.77)$$

$$B = B_0, -E_1 I_\Omega (C_1 k^2 + \varphi''_p) = B_0 \quad (1.78)$$

$$M = M_0, G I_t (C_2 k + C_3 + \varphi'_{p0}) - E_1 I_\Omega (C_2 k^3 + \varphi'''_p) = M_0 \quad (1.79)$$

Где је:

$$\varphi_{p0} = (\varphi_p)_{z=0}, \varphi'_{p0} = (\varphi'_p)_{z=0}, \varphi''_{p0} = (\varphi''_p)_{z=0}, \varphi'''_{p0} = (\varphi'''_p)_{z=0}$$

Када је греда оптерећена само почетним факторима, односно када нема спољашњег оптерећења, тада су сви параметри $\varphi_p = 0$, што значи да су и сви његови изводи једнаки нули.

$$(1) C_1 + C_4 = \varphi_0 \quad (1.80)$$

$$(2) C_2 k + C_3 = \varphi'_0 \quad (1.81)$$

$$(3) -E_1 I_\Omega C_1 k^2 = B_0 \quad (1.82)$$

$$(4) G I_t (C_2 k + C_3) - E_1 I_\Omega C_2 k^3 = M_0 \quad (1.83)$$

Из треће једначине следи:

$$C_1 = -\frac{B_0}{G I_t} \quad (1.84)$$

Из прве једначине и једначине која је изведена из треће, добија се:

$$C_4 = \varphi_0 + \frac{B_0}{G I_t} \quad (1.85)$$

Из друге у четврту једначину, следи:

$$C_2 = -\frac{\varphi'_0}{k} - \frac{M_0}{G I_t k} \quad (1.86)$$

Из друге и горње једначине, следи:

$$C_3 = \frac{M_0}{G I_t} \quad (1.87)$$

На овај начин су добијене све константе које су потребне за израчунавање.

Опште решење диференцијалне једначине гласи:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_h + \varphi_p = C_1 ch kz + C_2 sh kz + C_3 z + C_4 + \varphi_p \\ &= \frac{B_0}{G I_t} ch kz + \left(\frac{\varphi'_0}{k} - \frac{M_0}{G I_t k} \right) sh kz + \frac{M_0}{G I_t} z + \varphi_0 + \frac{B_0}{G I_t} + \varphi_p \\ \varphi(z) &= \varphi_0 + \frac{\varphi'_0}{k} sh kz + \frac{B_0}{G I_t} (1 - ch kz) + \frac{M_0}{G I_t} \left(z - \frac{1}{k} sh kz \right) + \varphi_p \end{aligned} \quad (1.88)$$

$$\varphi'^{(z)} = \varphi'_0 ch kz - \frac{B_0 k}{G I_t} sh kz + \frac{M_0}{G I_t} (1 - ch kz) + \varphi'_p \quad (1.89)$$

$$B(z) = -E_1 I_\Omega \varphi'' = -\varphi'_0 \frac{G I_t}{k} sh kz + B_0 ch kz + \frac{M_0}{k} sh kz + B_p \quad (1.90)$$

$$M_s(z) = G I_t \varphi' = -B_0 k sh kz - (E_1 I_\Omega k^2 \varphi'_0 - M_0) ch kz + M_0 + G I_t \varphi'_p \quad (1.91)$$

$$M_\Omega(z) = -E_1 I_\Omega \varphi''' = B_0 k sh kz - (E_1 I_\Omega k^2 \varphi'_0 - M_0) ch kz - E_1 I_\Omega \varphi_p''' \quad (1.92)$$

$$M_p = G I_t \varphi'_p - E_1 I_\Omega \varphi_p''', M_z = M_0 + M_p \quad (1.93)$$

1.11 Гранични услови – услови ослањања

1. Ослонац (покретни и непокретни) $\varphi = 0, B = 0$;
2. Прислоњен крај $\varphi' = 0, M = 0$ – нема депланација али је могуће окретање;
3. Укљештење $\varphi = 0, \varphi' = 0$;
4. Слободан крај $M = 0, B = 0$ – нема концентрисаног оптерећења и напона. [3]

2. Гранична стања носивости и употребљивости нестандардних попречних пресека при различитим оптерећењима

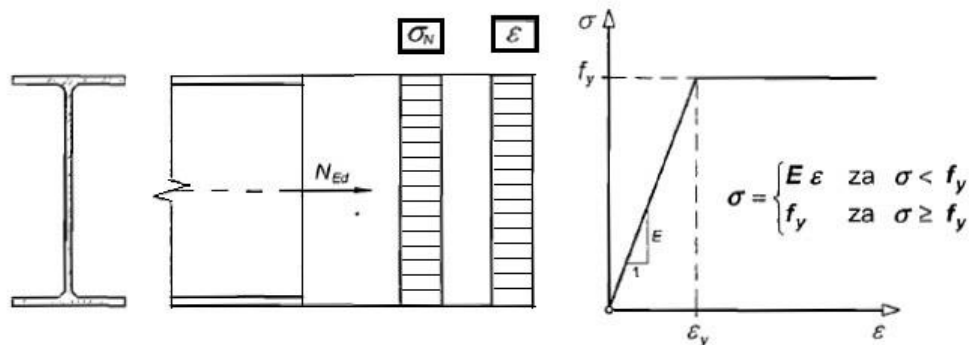
Прорачун носивости попречних пресека елемената челичних конструкција за све врсте основних напрезања као што су: затезање, притисак, савијање, смицање и торзија, дати су у овом делу рада. Поред основних напрезања, дата су и сложена напрезања као што су: савијање и притисак, смицање и савијање, притисак, смицање и савијање, смицање и торзија.

2.1 Аксијално напрезање

Под аксијалним напрезањем, било да је то затезање или притисак, подразумевамо такво напрезање услед кога се у попречним пресецима јављају само унутрашње аксијалне силе, док су све друге (трансфензална сила, момент савијања и момент увијања) једнаке нули, односно не постоје. Такво напрезање се јавља у случају када су спољашње силе колинеарне са осом штапа или када делују под неким углом и секу осу штапа а при томе се прави резултанта која се поклапа са осом истог [1].

2.1.1 Затезање

Аксијално затезање је један од најједноставнијих видова напрезања, искоришћава челик као материјал, имајући у виду његова веома висока механичка својства. Нормални напони су константни дуж читавог попречног пресека, исто важи и за дилатацију, која је у области еластичности директно пропорционална нормалном напону. На слици 15 је приказан дијаграм на коме се и види да су ове вредности константне.



Слика 15. Напрезање попречног пресека изложеног аксијалном напрезању [1].

Површина попречног пресека је у овом случају једина битна геометријска карактеристика која утиче на његово димензионисање. Контрола носивости код ове врсте напрезања је једина контрола граничних стања коју је потребно спровести. Потребно је узети у обзир и сва слабљења која се налазе на овом попречном пресеку, као што су рупе за спојна средства, или неки други отвори уколико они постоје. Приликом затезања конструкција које су динамички оптерећене, делови пресека или пак цео елемент је изузетно осетљив на замор материјала и ламеларно цепање. Носивост на замор материјала се значајно умањује приликом заваривања, па га је потребно избегавати када је год то могуће.

Према Еврокоду 3, у сваком попречном пресеку код елемената који су оптерећени затезањем, потребно је да задовољава следећи услов:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{t,Rd}} \leq 1,0 \quad (2.1)$$

Где је:

N_{Ed} – прорачунска вредност аксијалне силе затезања,

$N_{t,Rd}$ – прорачунска носивост попречног пресека на затезање.

Прорачунска носивост на затезање, за пресеке без слабљења, једнака је пластичној носивости бруто пресека:

$$N_{t,Rd} = N_{pl,Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{MO}} \quad (2.2)$$

Где је:

A – бруто површина попречног пресека,

f_y – граница развлачења,

γ_{MO} – парцијални коефицијент сигурности за носивост попречног пресека.

Према Националном прилогу *SRPS EN 1993-1-1/NA* за конструкцију је усвојена препоручена вредност парцијалног коефицијента која износи 1.

Када су затегнути елементи ослабљени, односно када се на попречном пресеку налазе рупе за спојна средства или неки други отвори, прорачунска носивост попречног пресека на затезање се одређује као мања вредност од пластичне вредности носивости бруто пресека и граничне носивости нето попречног пресека на месту рупа за спојна средства или других отвора.

$$N_{t,Rd} = \min \left\{ \begin{array}{l} N_{pl,Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{MO}} \\ N_{u,Rd} = 0.9 \cdot \frac{A_{net} \cdot f_u}{\gamma_{M2}} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Где је:

A_{net} – нето површина меродавног попречног пресека,

f_u – чврстоћа при затезању,

γ_{M2} – парцијални коефицијент сигурности за носивост попречних пресека на лом затезањем.

Према Националном прилогу *SRPS EN 1993-1-1/NA* за конструкцију је усвојена препоручена вредност парцијалног коефицијента која износи 1.25.

У зависности од броја и распореда завртњева у меродавном пресеку, одређује се површина нето пресека. Када рупе нису смакнуте, укупна површина која се одузима на рупе за спојна средства једнака је збиру површина максималних пресека свих рупа. У другом случају, када су рупе за спојна средства смакнуте (цик-цак распоред) треба да се провери и носивост смакнутог пресека.

У овом случају (цик-цак распоред), слабљење се одређује на следећи начин:

$$\Delta A = t \left[n \cdot d_o - \sum \frac{s^2}{4 \cdot p} \right] \quad (2.4)$$

Где је:

s – размак између центара две суседне рупе у низу, мерен паралелно на осу елемента,

p – размак између истих рупа мерен управно на осу елемента,

t – дебљина лима,

n – број рупа на дијагоналној или цика-цак линији потенцијалног лома,

d_o – пречник рупе за спојно средство [1].

2.1.2 Притисак

Носивост попречних пресека који су оптерећени аксијалном силом притиска зависи од класе попречног пресека, односно од тога да ли су попречни пресеци осетљиви на избочавање или не. По Еврокоду 3 носивост за попречне пресеке класе 1, 2 и 3 код којих нема избочавања, разликују се од оне носивости за пресек класе 4. У случају притиска, рупе за спојна средства не узимају се у обзир уколико се у њима налазе одговарајући завртњеве или закивци, из разлога што се притисак преноси директним контактом кроз тело завртња. У случају, када су у питању други отвори као што су рупе у којима се не налазе спојна средства, случајне овалне рупе и рупе са великим зазором, узимају се у обзир одговарајући одбитци, односно слабљења при прорачуну носивости попречног пресека на притисак.

Према Еврокоду 3 прорачунска вредност аксијалне силе притиска у сваком попречном пресеку, мора да буде мања од прорачунске носивости попречног пресека на притисак, односно мора да буде задовољен услов:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{c,Rd}} \leq 1,0 \quad (2.5)$$

Носивост попречног пресека на притисак се одређује на следећи начин:

$$N_{c,Rd} = \min \begin{cases} \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{MO}} - \text{за пресеке класе 1, 2 и 3} \\ \frac{A_{eff} \cdot f_y}{\gamma_{MO}} - \text{за пресеке класе 4} \end{cases} \quad (2.6)$$

Где је:

A – бруто површина попречног пресека,

A_{eff} – површина ефективног попречног пресека,

f_y – граница развлачења,

γ_{MO} – парцијални коефицијент сигурности за носивост попречног пресека

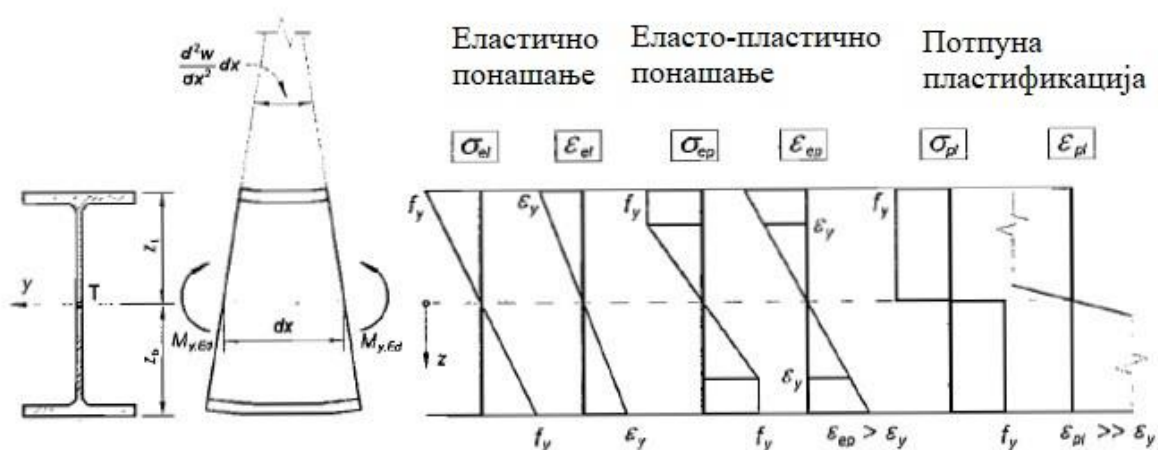
($\gamma_{MO} = 1$)

Код притиснутих елемената, контрола носивости попречног пресека представља потребан, али не и довољан услов за димензионисање. У случају притиснутих елемената, меродаван критеријум за димензионисање је стабилност елемената, а не носивост попречног пресека, па је потребно да се одреди и њихова носивост на извијање [1].

2.2 Савијање

Савијање, као последица, може настати, односно бити изазвано различитим врстама оптерећења, као што су једнако подељено оптерећење, концентрисане силе или моменти на крајевима елемената. У општем случају, у попречним пресецима се јављају моменти савијања M_{Ed} и смичуће (трансверзалне) силе V_{Ed} . Под појмом носивости попречног пресека на савијање, подразумева се носивост самог пресека на дејство момента савијања. Момент савијања изазива нормалне напоне у попречним пресецима. Ови напони се у области еластичности линеарно мењају по висини самог попречног пресека. Максимална вредност нормалних напона се остварује у влакнима који су најудаљенији од тежишта, док су они у самом тежишту једнаки нули. Интеграл нормалног напона по површини попречног пресека једнак је нули, односно резултанте напона притиска и затезања су једнаке.

Достизање границе развлачења у области најудаљенијег влакна попречног пресека представља исцрпљеност носивости, па она представља критеријум за димензионисање попречног пресека на савијање који је приказан на слици 16 на овај начин, достигнута је само еластична исцрпљеност, односно достигнут је еластични момент носивости.



Слика 16. Различите фазе попречног пресека оптерећеног моментом савијања [1].

Интеграл нормалног напона се у овом случају израчунава на следећи начин:

$$M_y = \int_A \sigma \cdot z dA \quad (2.7)$$

Према Еврокоду 3 у свим попречним пресецима елемената оптерећених на савијање, потребно је задовољити услов:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,Rd}} \leq 1 \quad (2.8)$$

Где је:

M_{Ed} – прорачунска вредност момента савијања,

$M_{c,Rd}$ – прорачунска вредност носивости попречног пресека на савијање.

Прорачунска вредност носивости попречног пресека на савијање се одређује на следећи начин:

$$M_{c.Rd} = \begin{cases} M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} \cdot f_y}{\gamma_{MO}} & \text{за пресеке класе 1 и 2} \\ M_{el,Rd} = \frac{W_{el,min} \cdot f_y}{\gamma_{MO}} & \text{за пресеке класе 3} \\ M_{eff,Rd} = \frac{W_{eff,min} \cdot f_y}{\gamma_{MO}} & \text{за пресеке класе 4} \end{cases} \quad (2.9)$$

Где је:

W_{pl} – пластичан отпорни момент попречног пресека,

$W_{el,min}$ – минималан еластични отпорни момент попречног пресека,

$W_{eff,min}$ – минимални еластични отпорни момент ефективног попречног пресека.

Када су у питању симетрични попречни пресеци, еластичне и пластичне неутралне осе се поклапају, па је пластични отпорни момент једнак двостукој вредности статичког момента за тежиште попречног пресека. За друге облике попречних пресека, који су формиран заваривањем, пластичан момент носивости попречног пресека за савијање могу се одредити тако што се интеграл нормалног напона замени сумом:

$$M_{pl,y} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot z_i = \sum_{i=1}^n A_i \cdot f_{y,i} \cdot z_i \quad (2.10)$$

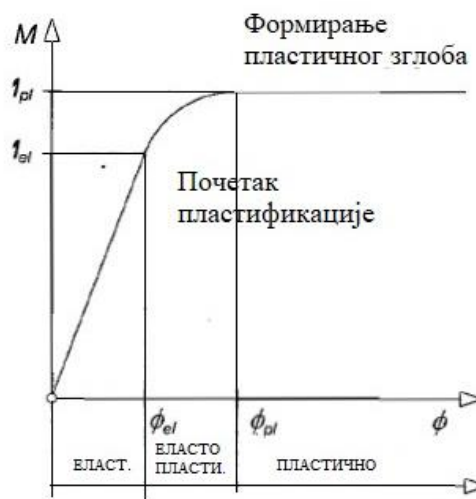
Где је:

A_i – површина и-тог дела попречног пресека,

$f_{y,i}$ – граница развлачења за челик и-тог попречног пресека,

z_i – растојање од тежишта и-тог дела пресека до пластичне неутралне осе.

На слици 17 приказан је дијаграм зависности између момента савијања и одговарајућег обртања попречног пресека, на коме се могу уочити три различите фазе понашања истог и то су еластична, еласто-пластична и пластична.



Слика 17. Дијаграм момента савијања [1].

Однос момента еластичности и момента пластичности представља коефицијент K . Вредност овог коефицијента зависи од геометријских карактеристика попречног пресека, односно од односа пластичног и еластичног отпорног момента за савијање око разматране осе инерције [1].

2.3 Смицање

Услед савијања носача, настаје подужни смичући напон, односно настаје као последица разлике у подужним нормалним напонима услед момента савијања. Код пуних попречних пресека, смичући напони су паралелни са правцем деловања смичуће силе, а интензитет им је константан по ширини попречног пресека. На неком растојању z од тежишта, интензитет смичућег напона се може одредити на следећи начин:

$$T_{xz} = \frac{V_z}{I_y \cdot b_z} \cdot \int_{z_t}^z b(z) dz = \frac{V_z \cdot S'_y}{I_y \cdot b_z} \quad (2.11)$$

Где је:

V_z – вертикална смичућа сила,

I_y – момент инерције попречног пресека око јаче осе,

$b(z)$ – функција ширине попречног пресека,

b_z – ширина попречног пресека на растојању z од тежишта,

S'_y – статички момент инерције за део пресека изнад разматране линије на растојању z од тежишта.

Према Еврокоду 3 у свим попречним пресецима елемената оптерећених на смицање, потребно је задовољити услов:

$$\frac{V_{Ed}}{V_{c,Rd}} \leq 1 \quad (2.12)$$

Где је:

V_{Ed} – прорачунска вредност силе смицања у разматраном правцу,

$V_{c,Rd}$ – одговарајућа прорачунска носивост попречног пресека на смицање.

Носивост попречног пресека на смицање, може се одредити као пластична носивост или према теорији еластичности. Пластична носивост се може одредити на следећи начин:

$$V_{pl,Rd} = \frac{A_v \cdot \left(\frac{f_y}{\sqrt{3}}\right)}{\gamma_{MO}} = \frac{A_v \cdot \tau_y}{\gamma_{MO}} \quad (2.13)$$

Где је:

A_v – површина смицања која генерално представља површину дела или делова попречног пресека који су паралелни са правцем деловања силе смицања,

$\left(\frac{f_y}{\sqrt{3}}\right)$ – граница развлачења при смицању.

Еврокод 3 не дефинише еластичну носивост попречног пресека на смицање, већ се у случају еластичне носивости пресека на смицање препоручује контрола на напонском нивоу:

$$\frac{\tau_{Ed}}{\left(\frac{f_y}{\sqrt{3}}\right)} \leq 1 \quad (2.14)$$

Где је τ_{Ed} максимална прорачунска вредност смичућег напона у посматраном попречном пресеку.

У присуству смичуће силе, смичући напон се може одредити на следећи начин:

$$\tau_{xz,Ed} = \frac{V_{z,Ed} \cdot S_y}{I_y \cdot t_w} \quad (2.15)$$

За стандардне профиле, према Еврокоду 3, допуштена је примена упрошћеног израза за одређивање прорачунског смичућег напона:

$$\tau_{xz,Ed} = \frac{V_{z,Ed}}{A_w} \quad (2.16)$$

Потребно је напоменути да у случају носивости пресека на смицање, прорачун пластичне или еластичне носивости не зависи од класе пресека. Та напомена се не помиње у Еврокоду 3.

У случају стандардних ваљаних профила, код којих је дијаграм еластичних смичућих напона у ребру уједначен, примењује се пластични модел носивости попречног пресека на смицање. Смичући напон у ребрима је уједначен само у случају здепастих ребара. Еластична носивост на смицање може се користити и код виткијих ребара, односно код оних код којих је дијаграм смичућих напона у ребру неуједначен. Дијаграм смичућих напона је неуједначен код попречних пресека T профила или моносиметричних I профила.

Смичући напони се могу јавити и као последица торзије [1].

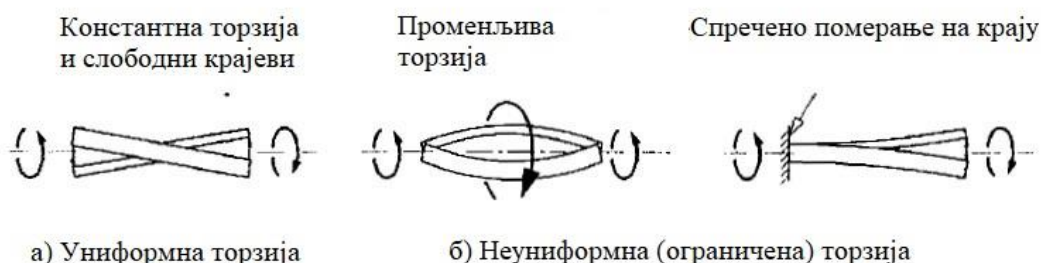
2.4 Торзија

Под увијањем се подразумева напрезање при коме се у сваком попречном пресеку јавља само момент који обрће око осе који представља момент увијања или торзије. У овом случају остале унутрашње силе (аксијална, трансверзална и момент савијања) не постоје, односно једнаке су нули. Узрок настанка оваквог напрезања је спољашњи обртни момент који делује на штап у равнима које су управне на његову осу.

Торзија се у челичним конструкцијама углавном не јавља као самостално напрезање, већ у комбинацији са другим оптерећењима, најчешће савијањем. Торзија настаје на пример као последица деловања ексцентричног оптерећења код мостова или кранских стаза. Носивост елемената који су оптерећени торзијом се у општем случају могу поделити на два суштински различита напрезања:

- Униформну или Сен-Венанову торзију и
- Неуниформну или ограничену торзију.

На слици су приказане врсте ових торзија.



Слика 18. Врсте торзија [1].

У највећем броју случајева ове две торзије се јављају истовремено па представљају такозвану комбиновану торзију. У зависности од попречних пресека услова ослањања и начина деловања спољашњег оптерећења одређује се вид напрезања.

Униформна торзија настаје у случају константних торзионих утицаја код елемената код којих је спречено подужно кривљење на крајевима попречних пресека. Код ове врсте торзије, промена ротације око подужне осе је константна као и деформација подужног кривљења дуж елемента.

Диференцијална једначина која се користи за дефинисање проблема униформне торзије у еластичној области, уз претпоставку да су деформације мале, да је материјал идеално еластичан, да важи Хуков закон и да попречни пресек задржава свој облик, може се представити у следећем облику:

$$\tau_t(x) = G \cdot I_t \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (2.17)$$

Где је:

$\tau_t(x)$ – Сен Венанов момента торзије око подужне осе,

G – модул клизања,

I_t – торзиона константа или торзиони момент инерције попречног пресека.

Производ торзионе константе и модула клизања представља торзиону крутост и искључиво зависи од торзионе константе из разлога што је константа клизања како сама реч каже константна.

Неуниформна торзија настаје у случају променљивог торзионог утицаја или код елемената код којих су спречене подужне деформације кривљења на бар једном крају. У случају неуниформне торзије промена угла ротације дуж елемената није константна, као ни кривљење попречних пресека. Веза између момента торзије и ротације пресека око подужне осе може да се представи на следећи начин:

$$\tau_w(x) = -E \cdot I_w \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \quad (2.18)$$

Да би се одредило преовлађивање утицаја униформне или неуниформне торзије код кобиноване торзије, оно зависи од облика попречног пресека, услова ослањања елемената на крајевима и начина деловања торзионог оптерећења. Доминантну улогу у овом одређивању играју торзиона крутост и крутост на кривљење. Однос ове двеју крутости представљају торзиони параметар уз помоћ којег се може одредити која торзија преовлађује. У случају комбиноване торзије, укупан момент торзије једнак је збиру момената услед униформне и неуниформне торзије, и може да се представи на следећи начин:

$$T_x = T_t(x) + T_w(x) = G \cdot I_t \frac{d\varphi(x)}{dx} - E \cdot I_w \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \quad (2.19)$$

Према Еврокоду 3, које је недоречен у делу који се бави торзијом, елементи оптерећени истом у сваком попречном пресеку требају да задовоље исти услов:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd}} \leq 1 \quad (2.20)$$

Где су:

T_{Ed} – прорачунска вредност укупних торзионих момената који делују на посматрани попречни пресек усле униформне и неуниформне торзије,

T_{Rd} – прорачунска носивост попречног пресека на торзију.

Међутим, у овом Еврокоду није дефинисано на који начин је потребно одредити прорачунску носивост попречног пресека на торзију. Прорачунска носивост попречног пресека се може одредити само у случају униформне торзије, тако се она може написати у следећем облику:

$$T_{Rd} = \frac{w_t \cdot \left(\frac{f_y}{\sqrt{3}}\right)}{\gamma_{MO}} = \frac{w_t \cdot \tau_y}{\gamma_{MO}} \quad (2.21)$$

Где је W_t торзионни отпорни момент за отворене попречне пресека, или за затворене или шупље попречне пресеке. Овакав приступ прорачуну није могућ у случају комбиноване или неуниформне торзије, јер се у тим случајевима јављају и нормални напони и бимоменти и смичући напони услед момента неуниформне торзије, као и смучући напони услед момента униформне торзије. У тим случајевима потребно је одредити уз помоћ формула применом еластичне анализе [1].

2.5 Комбинована напрезања

Ако истовремено, у попречном пресеку делује две или више унутрашњих сила, као што су момент савијања и момент увијања, аксијална сила, момент увијања и момент савијања, и разне друге комбинације, онда таква напрезања називамо сложеним.

2.5.1 Савијање и смицање

Када се у попречном пресеку, као последица одређене комбинације деловања истовремено јављају и момент савијања и смучућа сила, потребно је испитати њихове интеракције. Решавање проблема интеракције између савијања и смицања врши се применом фон Мизесовог услова пластификације у комбинацији са еквивалентним напоном и теоријом еластичности. При пластичној анализи носивости, потребно је редуковање пластичног момента носивости попречног пресека, да би се у обзир узео утицај смицања. За одређивање редукованог пластичног момента носивости примењују се два модела:

Модел 1 заснива се на редукованој граници развлачења за део пресека, односно ребро, који прихвата смичуће напоне и пуној граници развлачења за преостали део пресека који не учествује у преносу смицања, односно ножице.

Модел 2 заснива се на пуној пластичности носивости попречног пресека не узимајући у обзир део ребра на некој одређеној висини уз неутралну осу који је потребан да би се прихватила комплетна сила смицања. Што значи да један део пресека прихвата само смицање, док друго део само момент савијања [1].

2.5.1.1 Пластична анализа – попречни пресеци класе 1 и 2

Према Еврокоду 3 код класе 1 и 2 може се применити пластична анализа носивости у случају интеракције савијања и смицања, неопходно је да се изврши контрола интерактивног дејства:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{V,Rd}} \leq 1 \quad (2.22)$$

Где је:

M_{Ed} – прорачунска вредност момента савијања око осе,

$M_{V,Rd}$ – прорачунска вредност редукованог момента пластичне носивости услед интеракције савијања и смицања за савијање око одговарајуће главне осе.

Потребно је напоменути још и да у Еврокоду 3 постоји критеријум који одређује када интеракције савијања и смицања треба да се узме у обзир а када не. Тај критеријум је представљен изразом:

$$V_{Ed} \leq 0.5V_{pl,Rd} \quad (2.23)$$

Наиме, утицај смицања на смањење момента пластичне носивости не треба да се узима у обзир када је прорачунска вредност силе смицања V_{Ed} мања од 50 % пластичне носивост попречног пресека на смицање $V_{pl,Rd}$. Уколико овај услов није испуњен, прорачунска вредност редукованог момента носивости се одређује у овом случају по првом моделу, а редукована граница развлачења која се примењује на површину смицања, односно ребра, треба да се одреди на основу израза:

$$f_{y,red} = (1 - \rho) \cdot f_y \quad (2.24)$$

Док се коефицијент ρ одређује уз помоћ израза:

$$\rho = \left(\frac{2 \cdot V_{Ed}}{V_{pl,Rd}} - 1 \right)^2 \quad (2.25)$$

2.5.1.2 Еластична анализа – попречни пресеци 3 и 4

Када се носивост одређује уз помоћ еластичне анализе, односно када су у питању попречни пресеци класе 3 и 4, интеракција савијања и смицања се врши на основу фон Мизесовог услова пластичности. Ова интеракција се врши применом општег израза за контролу напона у најоптерћенијој тачки пресека:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{x,Ed}^2 + 3 \cdot \tau_{Ed}^2} \leq \frac{f_y}{\gamma_{MO}} \quad \text{или} \quad (2.26)$$

$$\left(\frac{\sigma_{x,Ed}}{\frac{f_y}{\gamma_{MO}}} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\tau_{Ed}}{\frac{f_y}{\gamma_{MO}}} \right)^2 \leq 1 \quad (2.27)$$

Где су $\sigma_{x,Ed}$ и τ_{Ed} прорачунска вредност нормалног и смичућег напона у карактеристичној тачки попречног пресека. Потребно је обратити пажњу на то да код попречних пресека класе 4 прорачунска вредност нормалног напона треба да се одреди на основу ефективног попречног пресека [1].

2.5.2 Савијање и аксијална сила

Истовремено деловање момента савијања и аксијалне силе (притисак или затезање), може да се анализира применом пластичне или еластичне носивости попречног пресека. У случају еластичне анализе, интеракција момента савијања и аксијалне силе обухвата контролу нормалног напона у најоптерећенијој тачки попречног пресека. У случају пластичне анализе, интеракција момента савијања и аксијалне силе, контрола носивости се спроводи помоћу редукованог пластичног момента.

2.5.2.1 Пластична анализа – пресеци класе 1 и 2

Интеракција између момента савијања и аксијалне силе доводи до смањења носивости попречног пресека. Потребно је показати да је поред појединачних провера носивости на аксијално напрезање и савијање, задовољен и услов:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{N,Rd}} \leq 1 \quad (2.28)$$

Према Еврокоду 3, за стандардне вруће ваљане I или H попречне пресеке и симетричне заварене I пресеке, прецизно је дефинисан критеријум када није потребно контролисати интеракцију савијања и аксијалног напрезања, односно када је аксијална сила нерелевантна на редукцију момента пластичне носивости. Није потребна никаква редукција у случају када је прорачунска вредност аксијалне силе мања од четвртине пластичне носивости попречног пресека и половине пластичне носивости ребра, односно ако су задовољена оба наредна услова:

$$N_{Ed} \leq 0.25N_{pl,Rd} \quad (2.29)$$

$$N_{Ed} \leq 0.5 \cdot \frac{h_W \cdot t_W \cdot f_y}{\gamma_{MO}} = 0.5 \cdot \frac{A_W \cdot f_y}{\gamma_{MO}} \quad (2.30)$$

Где је h_W висина, а t_W дебљина ребра.

2.5.2.2 Еластична анализа – пресеци класе 3 и 4

Интеракција момента савијања и аксијалне силе за класу попречног пресека 3 и 4 своди се на контролу напона на најоптерећенијем делу попречног пресека. За попречне пресеке класе 3, у општем случају потребно је доказати да:

$$\sigma_{x,Ed} = \frac{N_{Ed}}{A} + \frac{M_{y,Ed}}{W_{y,min}} + \frac{M_{z,Ed}}{W_{z,min}} \leq \frac{f_y}{\gamma_{MO}} \quad (2.31)$$

При томе, када су у питању попречни пресеци са ослабљењима, односно рупама за спојна средства, који су оптерећени са аксијалном силом затезања, потребно је водити рачуна о утицају тог ослабљења пресека на смањење саме носивости.

За попречне пресеке класе 4, потрено је узети у обзир и утицај избочавања преко ефективног попречног пресека, као и ексцентричност која настаје услед евентуалног померања положаја тежишта ефективног попречног пресека.

– Аксијалан сила притиска

$$\frac{N_{Ed}}{A_{eff}} + \frac{M_{y,Ed} + N_{Ed} \cdot e_{Ny}}{W_{eff,y,min}} + \frac{M_{z,Ed} + N_{Ed} \cdot e_{Nz}}{W_{eff,z,min}} \leq \frac{f_y}{\gamma_{MO}} \quad (2.32)$$

– Аксијална сила затезања

$$\frac{N_{Ed}}{A \cdot f_y} + \frac{M_{y,Ed}}{W_{eff,y,min}} + \frac{M_{z,Ed}}{W_{eff,z,min}} \leq \frac{f_y}{\gamma_{MO}} \quad (2.33)$$

Где је:

A_{eff} – ефективна површина попречног пресека изложеног само дејству силе притиска,

e_N – померање одговарајуће тежишне осе када је попречни пресек изложен само дејству константног притиска,

$W_{eff,y,min}$ – минимални отпорни момент ефективног попречног пресека који је изложен само дејству момента савијања око разматране осе.

Ако је попречни пресек оптерећен силама затезања, ослабљен рупама за спојна средства, ово ослабљење треба да се узме у обзир исто као када су у питању попречни пресеци класе 3 [1].

2.5.3 Косо савијање

Истовременим деловањем момената савијања око обе главне осе инерције, односно у случају деловања косог савијања, могу се користити и пластична и еластична анализа носивости попречног пресека у зависности од класе истог. Еластична анализа се заснива на критеријуму достизања границе развлачења у најоптерећенијој тачки попречног пресека. Еврокод 3 не даје изразе за носивост попречних пресека класе 3 и 4 на косо савијање, али се по аналогiji могу искористити изрази за случај интеракције момента савијања и аксијалне силе у којима се изоставља компонента аксијалне силе.

– За попречне пресеке класе 3

$$\sigma_{x,Ed} = \frac{M_{y,Ed}}{W_{y,min}} + \frac{M_{z,Ed}}{W_{z,min}} \leq \frac{f_y}{\gamma_{MO}} \quad (2.34)$$

– За попречне пресеке класе 4

$$\sigma_{x,Ed} = \frac{M_{y,Ed}}{W_{eff,y,min}} + \frac{M_{z,Ed}}{W_{eff,z,min}} \leq \frac{f_y}{\gamma_{MO}} \quad (2.35)$$

У Еврокоду 3 дат је само израз за контролу интеракције попречних пресека 1 и 2 услед косог савијања пропраћеног аксијалним напрезањем:

$$\left(\frac{M_{y,Ed}}{M_{N,y,Rd}} \right)^\alpha + \left(\frac{M_{z,Ed}}{M_{N,z,Rd}} \right)^\beta \leq 1 \quad (2.36)$$

Где су $M_{N,y,Rd}$ и $M_{N,z,Rd}$ прорачунска вредност редукованих момената пластичности за савијање, а α и β коефицијенти који зависе од облика попречног пресека и могу се одредити на следећи начин:

– За I и H пресеке	$\alpha = 2 \quad \beta = 5n, \beta \geq 1$
– За шупље профиле правоугаоног пресека	$\alpha = \beta = \frac{1.66}{(1-1.13 \cdot n^2)} \leq 6$
– За шупље профиле кружног пресека	$\alpha = \beta = 2$

Израз (2.36) може да се користи и у случају ако је приметно одсуство аксијалне силе, тако што се уместо редукованих момената пластичне носивости $M_{N,y,Rd}$ и $M_{N,z,Rd}$ користе моменти пластичности $M_{pl,y,Rd}$ и $M_{pl,z,Rd}$, а у изразима за коефицијенте α и β усваја се да је $n=0$, па је:

– За I и H пресеке	$\alpha = 2 \quad \beta = 1$
– За шупље профиле правоугаоног пресека	$\alpha = \beta = 1.66$
– За шупље профиле кружног пресека	$\alpha = \beta = 2$

2.5.4 Савијање, смицање и аксијална сила

Еластична носивост у овом случају сложеног напрезања може се проверити применом фон Мизесовог услова пластификације. Код попречних пресека класе 1 и 2 провера се врши применом концепта редукованог момента пластичности. Уколико је интензитет смичуће силе већи од половине редукованог момента пластичне носивости и ако истовремено прорачунска вредност не испуњава услов дат изразима (2.29) и (2.30), прорачунска вредност редукованог момента носивости се одређује као у случају комбинације савијања и аксијалног напрезања, али са редукованом границом развлачења:

$$f_{y,red} = (1 - \rho) \cdot f_y \quad (2.37)$$

Потребна површина попречног пресека која прима аксијалну силу, може да се одреди преко израза:

$$A_N = \frac{N_{Ed}}{(1-\rho) \cdot f_y} \quad (2.38)$$

Где је ρ коефицијент којим се узима утицај смичућег напона.

Код попречног пресека класе 3 и 4 интеракција напрезања се контролише помоћу еквивалентног – фон Мизесовог напона у ребру носача, на месту где је вредност нормалног напона максимална. Максимални нормални напон се одрђује на основу карактеристика ефективног попречног пресека, када је у питању класа 4 [1].

2.5.5 Смицање и торзија

Како би се у обзир узео торзиони утицај, потребно је редуковати пластичну носивост попречног пресека на смицање, у случају када се у том истом пресеку јавља утицај смицања и торзије. Према Еврокоду 3 носивост попречног пресека на интеракцију смицања и торзије, у случају пластичне анализе, може се одредити на следећи начин:

$$\frac{V_{Ed}}{V_{pl,T,Rd}} \leq 1 \quad (2.39)$$

Где је $V_{pl,T,Rd}$ редукована пластична носивост попречног пресека на смицање, која зависи од врсте и интензитета торзионог утицаја. За различите попречне пресеке прорачун редуковане пластичне носивости на смицање могу се израчунати на различите начине.

– За попречни пресек I или H :

$$V_{pl,T,Rd} = \sqrt{1 - \frac{\tau_{t,Ed}}{1.25 \cdot (f_y/\sqrt{3})/\gamma_{MO}}} \cdot V_{pl,Rd} \quad (2.40)$$

– За попречни пресек U :

$$V_{pl,T,Rd} = \left[\sqrt{1 - \frac{\tau_{t,Ed}}{1.25 \cdot (f_y/\sqrt{3})/\gamma_{MO}}} - \frac{\tau_{w,Ed}}{(f_y/\sqrt{3})/\gamma_{MO}} \right] \cdot V_{pl,Rd} \quad (2.41)$$

– За шупље конструкцијске профиле кружног и прстенастог пресека:

$$V_{pl,T,Rd} = \left[1 - \frac{\tau_{t,Ed}}{(f_y/\sqrt{3})/\gamma_{MO}} \right] \cdot V_{pl,Rd} \quad (2.42)$$

Где су $\tau_{t,Ed}$ и $\tau_{w,Ed}$ прорачунске вредности смичућег напона услед униформне и неуниформне торзије. У случају еластичне анализе попречног пресека при оваквом сложену напрезању, потребно је извршити контролу смичућег напона у најоптерећенијој тачки попречног пресека. Ова контрола у најопштијем случају, може да се формулише на следећи начин:

$$\tau_{tot,Ed} = \tau_{Vz,Ed} + \tau_{Vy,Ed} + \tau_{t,Ed} + \tau_{w,Ed} \leq \frac{f_y}{\gamma_{MO}} \quad (2.43)$$

Где је:

$\tau_{Vz,Ed}, \tau_{Vy,Ed}$ – смичући напон услед смичуће силе, која делује у правцу z и y осе,

$\tau_{t,Ed}$ – смичући напон услед момента униформне торзије,

$\tau_{w,Ed}$ – смичући напон услед неуниформне торзије.

При одређивању максималног смичућег напона, потребно је водити рачуна о томе које наведене компоненте смичућег напона постоје и да ли могу да делују у истој тачки попречног пресека [1].

2.5.6 Савијање, смицање и торзија

У случају кад је попречни пресек оптерећен смичућом силом, моментом савијања и моментом торзије, редуковани момент пластичне носивости попречног пресека, одређује се као и у случају интеракције савијања и смицања, једина разлика је у томе што се коефицијент ρ одређује на основу редуковане пластичне носивости на смицање, према изразу:

$$\rho = \left(\frac{2 \cdot V_{Ed}}{V_{pl,T,Rd}} - 1 \right)^2 \quad (2.44)$$

Критеријум уз помоћ којег се контролише интеракција различитих напрезања, односно онај који служи за редуковање момента носивости у овом случају напрезања, је:

$$V_{Ed} \geq 0.5 V_{pl,T,Rd} \quad (2.45)$$

У случају попречних пресека класе 3 и 4, поред контроле смичућих напона, потребно је извршити и контролу нормалних и упоредних напона. Потребно је доказати да су испуњени следећи услови:

$$\sigma_{tot,Ed} = \sigma_{N,Ed} + \sigma_{My,Ed} + \sigma_{Mz,Ed} + \sigma_{w,Ed} \leq \frac{f_y}{\gamma_{MO}} \quad (2.46)$$

$$\sqrt{\sigma_{tot,1,Ed}^2 + 3 \cdot \tau_{tot,1,Ed}^2} \leq 1.1 \cdot \frac{f_y}{\gamma_{MO}} \quad (2.47)$$

Где је:

$\sigma_{N,Ed}$ – нормални напони услед аксијалне силе,

$\sigma_{My,Ed}$ – нормални напони услед момента савијања око у - у осе,

$\sigma_{Mz,Ed}$ – нормални напони услед момента савијања око z - z осе,

$\sigma_{w,Ed}$ – нормални напони услед бимомента,

$\sigma_{tot,1,Ed}$ – тотални нормални напони у тачки у којој се врши контрола интеракције са смичућим напонима,

$\tau_{tot,1,Ed}$ – тотални смичући напон у тачки у којој се врши контрола интеракције са нормалним напоном.

При одређивању укупног нормалног напона, потребно је водити рачуна о томе која сва напрезања постоје и у којој тачки се јављају максимални утицаји од истовременог дејства појединачних компоненти нормалног напона [1].

3. Савремени софтвери за решавање проблема лаких конструкција

Данас су развијени софтвери са готово неограниченим могућностима у погледу решавања сложених конструкција. Софтвери су развијени на том нивоу да могу вршити анализе конструкција које још нису осмишљене, што наравно не представља проблем када је реч о већ осмишљеним конструкцијама. У случају већ осмишљених конструкција, које се сматрају финансијски и технички неизводљивим, врши се поновна анализа. Помоћу разних софтвера, могуће је вршити проверу изводљивости сваке конструкције.

Повећањем софтверских могућности, сразмерно расте и његова цена, поред тога, расте и потражња за што бољим карактеристикама рачунара. Оптимизација софтвера са циљем да ради на слабијим рачунарима је тешка, па се од рачунара захтева снага да би он могао да обради потребне информације. На овај начин се ограничава број корисника, па су само веће компаније у могућности да купе и користе лиценциране софтвере. Цена софтвера, у зависности од његових могућности, креће се од пар хиљада евра до преко десет хиљада евра. У ову цену потребно је урачунати трошкове и за обуку корисника због изузетне сложености појединих софтвера, као и њиховог широког спектра могућности.

Неки од софтвера који се користе за анализу лаких конструкција су: *ETABS*, *Robot Structural Analysis*(Autodesk), *RFEM*.

Поред ових софтвера, поједини софтвери који се користе за 3D моделирање, могу се користити за решавање оваквих проблема, и то су: *Catia*, *Inventor* (Autodesk), *SolidWorks*.

3.1 Autodesk Robot Structural Analysis

Autodesk компанија настала је 1982. године и у данашње време поседује широк спектар специјализованих софтвера које користе дизајнери, архитекте, машински и грађевински инжењери и многи други. На званичном сајту компаније, извршена је подела софтвера према областима инжењерства и тренутно располажу са 185 различитих софтвера. Током овог рада, акценат је бачен на два софтвера из ове компаније, а то су *Robot Structural Analysis* и софтверски пакет *Inventor* [6].

Robot Structural Analysis је инжењерски софтвер који се примењује приликом израде сложених симулација као и структурних анализа како за једноставне тако и за сложене конструкције. Коришћењем овог софтвера, конструктори могу брже изводити симулације и анализе различитих конструкција са лакшим и бржим радним процесом. Осмишљен је тако да инжењерима пружа алате помоћу којих је могуће разумети понашање конструкције било ког типа и вршити њено испитивање у складу са одговарајућим стандардом.

Главни циљ овог софтвера је дизајнирање стубова, греда, плоча и челичних конструкција према државном стандарду, користећи дизајнерски код. Посебни делови овог софтверског пакета могу се користити за бетонске, армиранобетонске, дрвене и алуминијумске конструкције.

Овај софтвер има широк спектар могућности, неке од основних су: ефикасно обављање анализе конструкције како за челичне, тако и за бетонске, ефикасни рад на оптерећењу конструкције, ефикасан приказ и издвајање добијених резултата, ефикасно користи материјал и стандард према државним правилницима.

При покретању софтвера, отвара се прозор на коме је потребно одабрати пројекат (врсту конструкције) који се анализира. Како има широк спектар могућности, у овом софтверу могуће је вршити следеће пројекте: „*Building Design, Frame 3D Design, Shell Design, Truss 3D Design, Plate Design, Frame 2D Design, Grillage Design, Truss 2D Design, Volumetric Structure Design, Plane Stress Structure Design, Plane Deformation Structure Design, Axsymmetric Structure Design, RC Elements Design, Connection Design, Section Definition, Parametrized StructureDesign*“ [6].

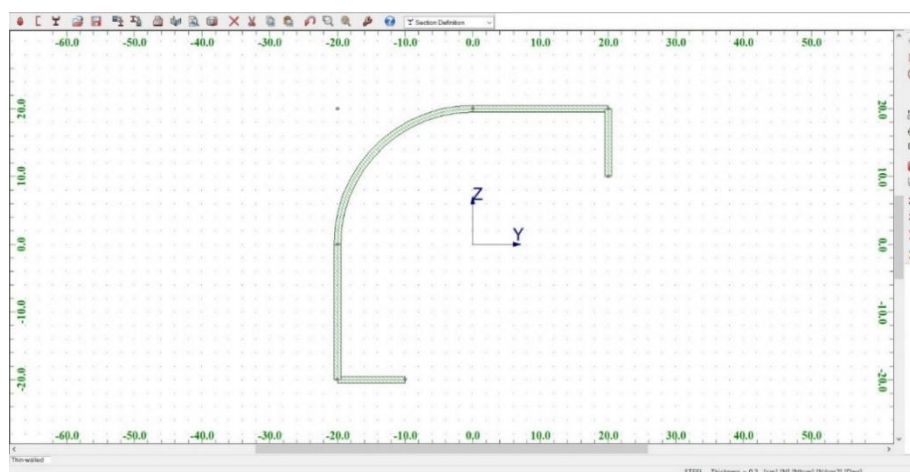
На слици 19 приказан је изглед почетног прозора овог софтвера, као и одабир пројектата у коме ће се вршити решавање задатог проблема.



Слика 19. Прозор за одабир конструкције Robot Structural Analysis софтвера.

Да би се вршила анализа танкозидних профила, бира се *Section Definition* и *Frame 3D Design* као што је приказано на претходној слици.

Одабиром пројекта који служи за дефинисање попречног пресека, потребно је нацртати попречни пресек који представља проблем чије се решење захтева. На слици 20 је приказан изглед попречног пресека који је нацртан у софтверу, унутар одабраног пројекта, који се испитује у овом случају.



Слика 20. Попречни пресек у Robot Structural Analysis софтверу.

При исцртавању попречног пресека потребно је обратити пажњу на почетну тачку цртања, односно у овом случају је профил нацртан од доњег дела, тако да је прва тачка уствари тачка са координатама (-10, -20).

Након исцртавања попречног пресека, притиском на функцију *Results* и *Graphical Results* добијају се тражени параметри и дијаграми за решавање првог дела проблема. Све геометријске карактеристике попречног пресека могу се добити како табеларно по тачкама тако и у облику дијаграма. Ово је јако корисно за секторске карактеристике које се аналитички, за овако сложен попречни пресек доста тешко и дуго израчунавају. У наставку текста, приказани су резултати који су добијени приликом употребе софтвера *Robot Structural Analysis*.

Положај тачака од прве до девете:

У табели 1 је приказан положај тачака (координате) приликом исцртавања, за које ће се и мерити одређене вредности, као и дебљина танкозидног профила.

Табела 1. Положај тачака попречног пресека

Број тачке	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y [cm]	-10.00	-20.00	-20.00	0.00	20.00	20.00	-18.48	-14.14	-7.65
Z [cm]	-20.00	-20.00	0.00	20.00	20.00	10.00	7.65	14.14	18.48
Дебљина [cm]	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Основни резултати:

Површина: $A = 91.214 \text{ cm}^2$

Тежиште: $Y_c = -5.95 \text{ cm}$

$Z_c = 5.95 \text{ cm}$

Центар смицања: $Y_r = -18.98 \text{ cm}$

$Z_r = 18.98 \text{ cm}$

Основни материјал: **ЧЕЛИК**

$E = 19994802.37 \text{ N/cm}^2$

$den = 0.01 \text{ kg/cm}^3$

$WU = 7.02 \text{ N/cm}$

Основе система:

Угао: $\alpha = -45.0 \text{ Deg}$

момент инерције: $I_x = 28.725 \text{ cm}^4$

$I_y = 33216.037 \text{ cm}^4$

$I_z = 6511.896 \text{ cm}^4$

Секторски момент инерције: $I_{omy} = 38.457 \text{ cm}^5$

$I_{omz} = 38.457 \text{ cm}^5$

$I_{om} = 8936861.12 \text{ cm}^6$

Максимална растојања: $V_y = 15.48 \text{ cm}$

$V_{py} = 11.59 \text{ cm}$

$V_z = 28.28 \text{ cm}$

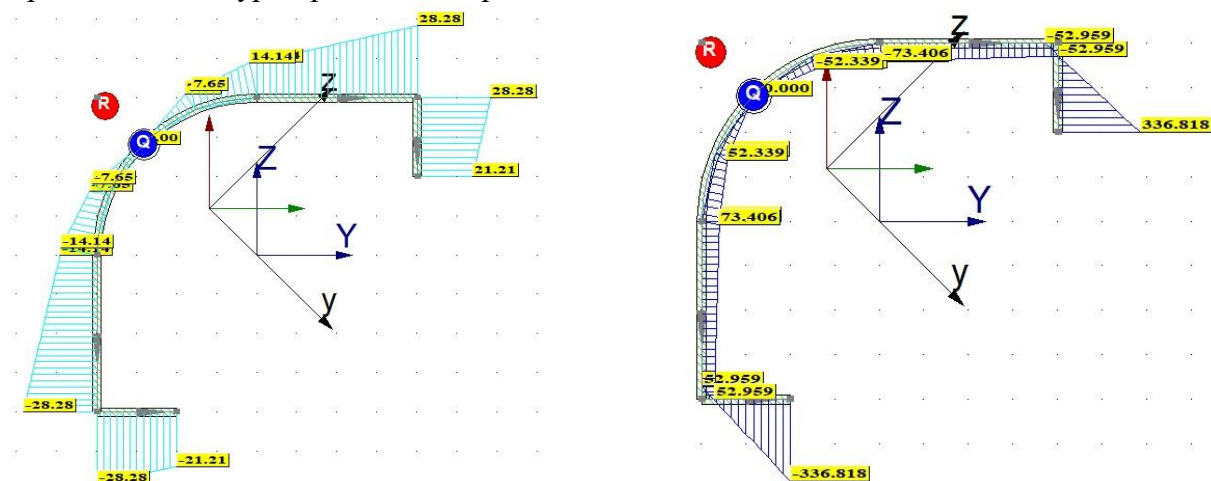
$V_{pz} = 28.28 \text{ cm}$

У табели 2 приказане се одређене вредности потребне за исцртавање дијаграма, које су добијене за 9 карактеристичних тачака овог попречног пресека.

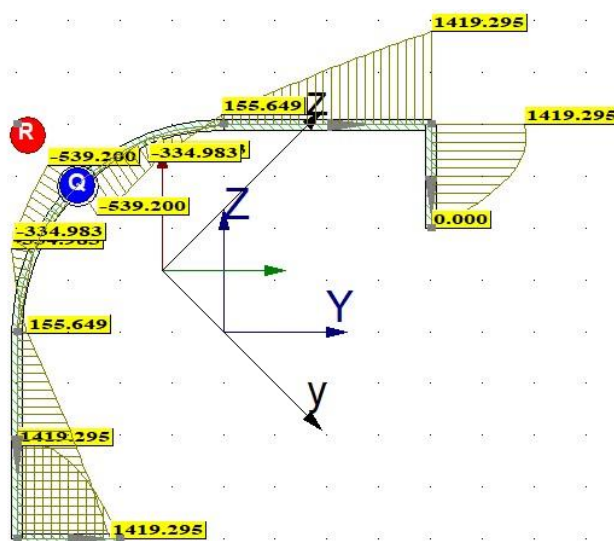
Табела 2. Табеларни приказ добијених вредности

Број тачке	y(s)[cm]	z(s)[cm]	omega(s) [cm ²]	A(s) [cm ²]	Sy(s) [cm ³]	Sz(s) [cm ³]	Som(s) [cm ⁴]
1	15.48	-21.21	-336.818	0.000	0.000	0.000	0.000
2	8.41	-28.28	52.959	-10.000	247.487	-119.437	1419.295
3	-5.73	-14.14	73.406	-30.000	671.751	-146.180	155.649
4	-5.73	14.14	-73.406	30.000	671.751	146.180	155.649
5	8.41	28.28	-52.959	10.000	247.487	119.437	1419.295
6	15.48	21.21	336.818	0.000	0.000	-0.000	0.000
7	-10.07	-7.65	52.339	-37.804	756.794	-84.518	-334.983
8	-11.59	0.00	-0.000	45.607	786.658	-0.000	-539.200
9	-10.07	7.65	-52.339	37.804	756.794	84.518	-334.983

На слици 21 је приказана вредност дијаграма промене координате z, на слици 22 је приказан дијаграм главне секторске координате и на слици 23 је приказан дијаграм промене по контури пресека секторског статичког момента.



Слика 21. График промене координате. **Слика 22.** График главне секторске координате.



Слика 23. Дијаграм промене по контури пресека секторског статичког момента.

Вредности дијаграма на претходним сликама су дате у центиметрима, тачније за дијаграм промене координате у cm , дијаграм главне секторске координате cm^2 , а дијаграм промене по контури пресека секторског статичког момента cm^4 .

Центар смицања:

Момент инерције:

$$I_{yc} = 19863.967 \text{ cm}^4$$

$$I_{zc} = 19863.967 \text{ cm}^4$$

$$I_{yczc} = 13352.071 \text{ cm}^4$$

Максимално растојање:

$$V_{yc} = 25.95 \text{ cm}$$

$$V_{pyc} = 14.05 \text{ cm}$$

$$V_{zc} = 14.05 \text{ cm}$$

$$V_{pzc} = 25.95 \text{ cm}$$

Произвољни систем:

Угао:

$$\alpha = 0.0 \text{ Deg}$$

Момент инерције:

$$I_{y'} = 19863.967 \text{ cm}^4$$

$$I_{z'} = 19863.967 \text{ cm}^4$$

$$I_{y'z'} = 13352.071 \text{ cm}^4$$

Максимално растојање:

$$V_{y'} = 25.95 \text{ cm}$$

$$V_{py'} = 14.05 \text{ cm}$$

$$V_{z'} = 14.05 \text{ cm}$$

$$V_{pz'} = 25.95 \text{ cm}$$

По завршетку прорачуна овог попречног пресека, врши се његово чување у бази попречних пресека из разлога што је анализирани попречни пресек нестандардни па се не налази у већ постојећој бази.

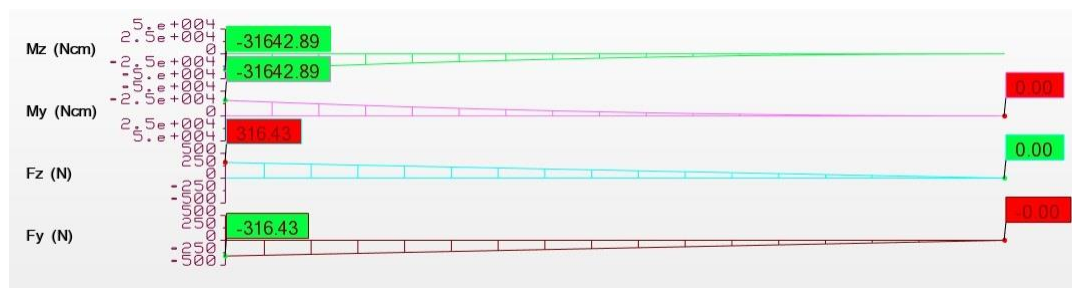
Након одређивања површине, тежишних координата, момената инерције, центра смицања, секторских координата, секторског статичког момента и секторског момента инерције, потребно је одредити дијаграме промене одређених величина као и напоне у попречном пресеку. Овај део задатка се врши уз помоћ пројекта *Frame 3D Design*.

Приликом уласка у овај део софтвера, потребно је прво нацртати греду и одредити њену дужину. Грета се исцртава од координата (0,0,0) до дужине од 2м, што представља координате (200,0,0), пошто су исте изражене у центиметрима. Следећи корак је додељивање попречног пресека који се анализира. У овом случају користи се попречни пресек који је исцртан у претходном пројекту овог софтвер, уноси се директно из базе сачуваних попречних пресека. Затим се додају ослонци, у овом случају је грета укљештена са једне стране.

Када се дефинише попречни пресек, онда је потребно дефинисати оптерећење. Може се дефинисати статичко и динамичко оптерећење. Под статичким оптерећењем подразумевамо сопствену тежину конструкције која не укључује било која друга оптерећења. На самом крају дефинисања конструкције додата су спољашња оптерећења. У овом случају додате су силе истог интензитета ($10000N$) али супротног смера, које делују у правцу x осе, али у тачкама које су измештене у односу на њу. Оне на овај начин симулирају бимомент на крају конзоле.

Када је извршено уношење ових података, онда је могуће извршити прорачун, сада софтвер има прилику да обавести у случају ако је током уношења дошло до неке грешке или ако има неку напомену која нам може олакшати даљи рад.

На слици 24 је графички приказан резултат који је добијен при извршеном прорачуну, резултат се односи на промене сила и момената по осама, момената савијања и увијања (статички дијаграми).



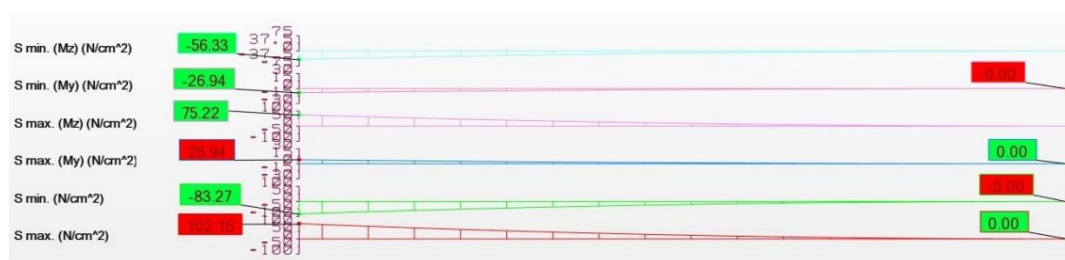
Слика 24. Графички приказ статичких дијаграма.

Табела 3 представља приказ резултата на основу којих су исцртани претходни дијаграми.

Табела 3. Табеларни приказ резултата

Греда	X (cm)	Fx (N)	Fy(N)	Fz (N)	Mx (N)	My(N)	Mz(N)	Ux (cm)	Uy (cm)	Uz (cm)
Тренутна вредност	50	0	-236.75	236.75	0	-17713.55	-17713.55	0	0	0
	100	0	-157.78	157.78	0	-7867.09	-7867.09	0	0	0
	150	0	-78.80	78.80	0	-1962.58	-1962.58	0	0	0
	200	0	0	0	0	0	0	0	0	0

На слици 25 је графички приказан резултат који је добијен при извршеном прорачуну, резултат се односи на промене напона како нормалних тако и смицајних.



Слика 25. Графички приказ резултата.

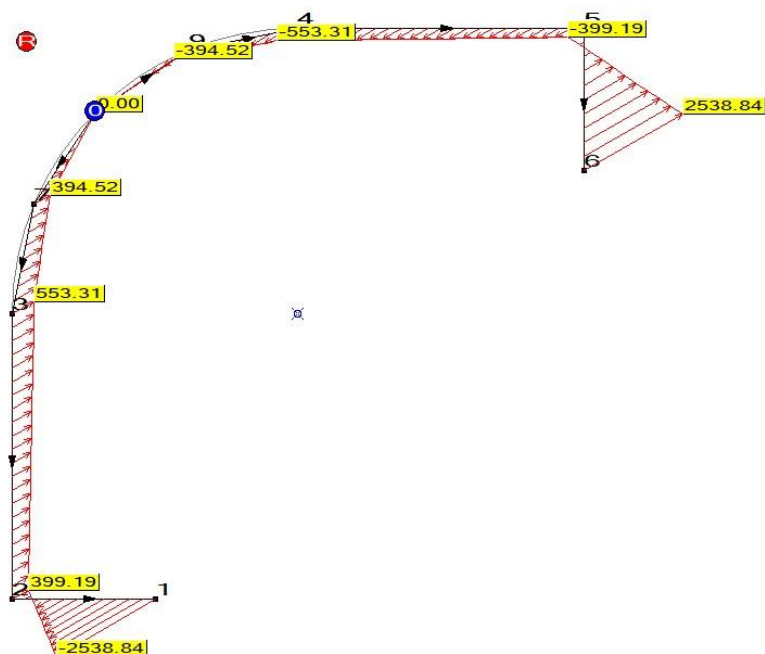
Табела 4 представља приказ резултата на основу којих су исцртани претходни дијаграми.

Табела 4. Табеларни приказ резултата

Греда	X (cm)	Smax (N/cm ²)	Smin (N/cm ²)	Smax (My) (N/cm ²)	Smax (Mz) (N/cm ²)	Smin (My) (N/cm ²)	Smax (Mz) (N/cm ²)
Тренутна вредност	50	180.28	-146.94	47.55	132.73	-47.55	-99.40
	100	80.05	-65.25	21.11	58.94	-21.11	-44.14
	150	20	-16.30	5.28	14.73	-5.28	-11.03
	200	0	0	0	0	0	0

У табели, дате су вредности максималних и минималних напона, као и вредности тих напона у односу на моменте савијања који делују дуж оса.

Даљим прорачуном, односно прегледом добијених резултата представљене су вредности напона. Сликаом 26 је представљен графички приказ нормалних напона на нестандардном попречном пресеку.



Слика 26. Промена нормалног напона по контури пресека.

У наредној табели представљени су сви резултати напона, како смицајних тако и нормалних, на дужини греде од укљештења која износи 1m.

Табела 5. Табеларни приказ вредности напона.

Тачка	Y [cm]	Z [cm]	1 [m]	
			σ [N/cm ²]	τ [N/cm ²]
1	-10.00	-20.00	-2515.11	0.00
2	-20.00	-20.00	416.05	108.91
3	-20.00	0.00	549.74	22.24
4	0.00	20.00	-563.59	-426.72
5	20.00	20.00	-395.73	-257.92
6	20.00	10.00	2552.52	0.00
7	-18.48	7.65	384.17	-98.05
8	-14.14	14.14	-14.00	-236.83
9	-7.65	18.48	-408.49	-357.63

Поред ових резултата, софтвер даје и резултате максималних и минималних вредности нормалних и смицајних напона дуж оптерећене греде, у овом случају те вредности су:

$$\sigma_{max} = 2552.52 \left[\frac{N}{cm^2} \right] \Rightarrow \sigma_{max} = 25.52 [MPa]$$

$$\sigma_{min} = -2515.11 \left[\frac{N}{cm^2} \right] \Rightarrow \sigma_{min} = -25.15 [MPa]$$

$$\tau_{max} = 119.98 \left[\frac{N}{cm^2} \right] \Rightarrow \tau_{max} = 1.1998 [MPa]$$

$$\tau_{min} = -434.68 \left[\frac{N}{cm^2} \right] \Rightarrow \tau_{min} = -4.3468 [MPa]$$

У склопу овог прорачуна, могуће је представити резултате у случају спољашњег оптерећења, као што су ветар, снег, киша и разна друга природна оптерећења. Пошто задатим проблемом није тражено дубље анализирање услед деловања природних оптерећења, овај део задатка није реализован у склопу овог рада.

3.2 Примена софтвера за 3D моделирање

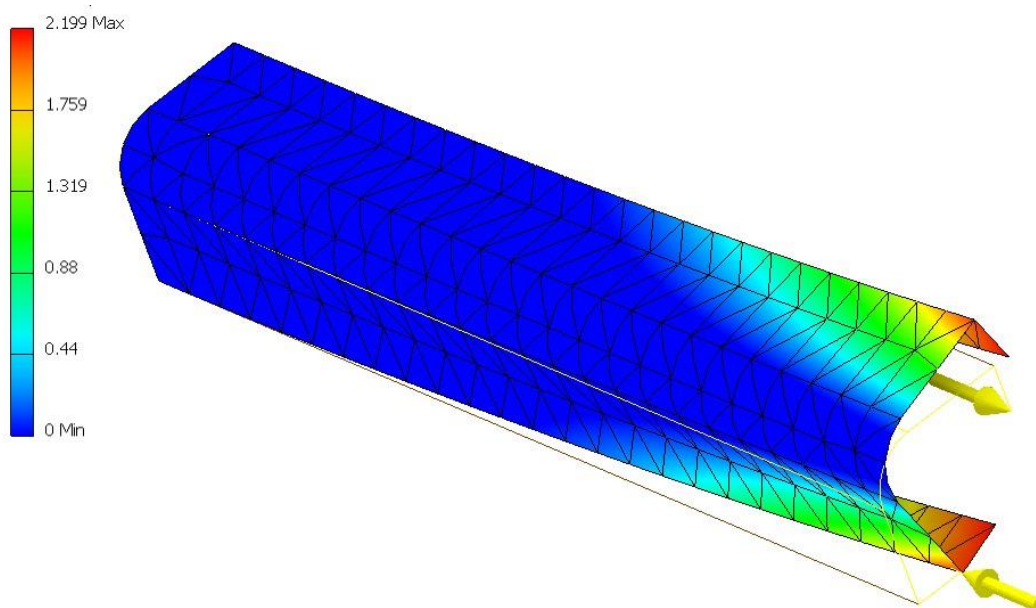
Како је у уводу овог поглавља напоменуто, за решавање овог проблема могуће је користити и неке софтвере који примарну намену имају у 3D моделирању. У склопу ових софтвера није могуће добити сваки део детаљно решен као при примени *Robot Structural Analysis* софтвера, али је могуће добити вредности напона. Као 3D софтвер коришћен је *Inventor*, како би се извршило упоређивање резултата два софтвера исте компаније.

Да би се дошло до тражених решења, потребно је првенствено измоделирати елемент који се оптерећује, креирати симулацију и доделити му материјал од кога је израђен. Пошто је у питању танкозидни профил, у склопу софтвера постоји опција која омогућава конвертовање модела из чврстог тела у површину, како би његов прорачун био могућ. Након моделирања и конвертовања, уносе са ослонци, у овом случају укљештење са једне стране.

Затим се уносе оптерећења, која су у овом случају силе дуж осе на одређеном растојању од исте, истог интензитета, али супротних смерова. И на самом крају се врши прорачун напона и добија се изглед деформације елемента.

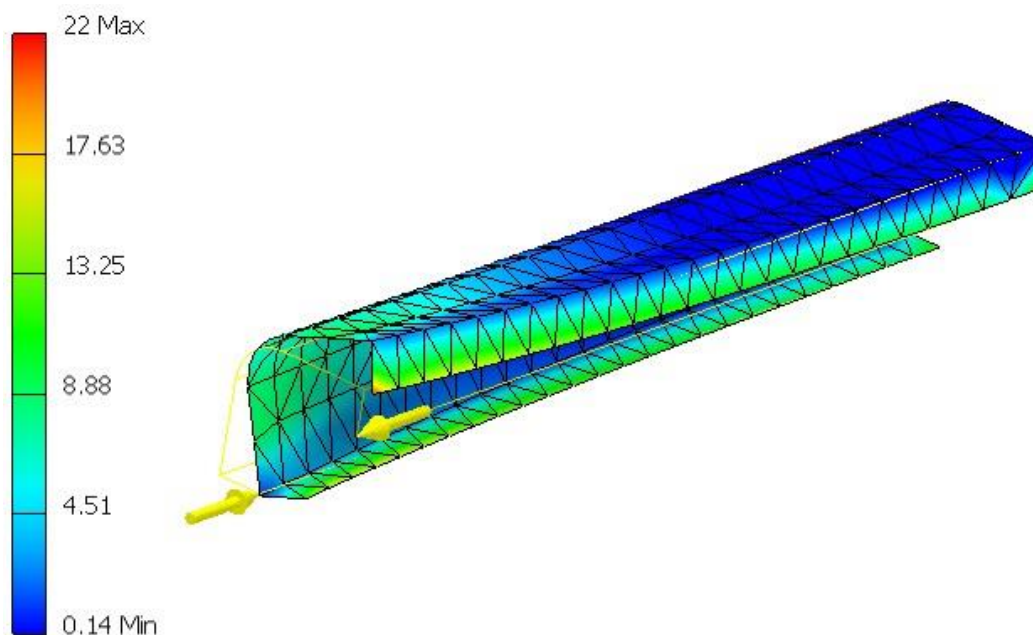
Прилоком коришћења ових софтвера за решавање задатог проблема, оба софтвера су користила Еврокод 3 [6].

На слици 27 приказан је изглед модела конзоле и начин на који је оптерећена, као и деформација до које је дошло при оваквом начину оптерећења.



Слика 27. Приказ деформације у софтверском пакету Inventor.

Након што је добијена деформација, добијени су и напони, као и положај њихових максималних и минималних вредности. Све те вредности су приказане на слици 28.



Слика 28. Напони у софтверском пакету Inventor.

На основу добијених резултата у овом софтверу, закључује се да максимална вредност напона настаје на самим крајевима, односно на местима деловања силе, и минимално се смањује до самог укљештења дуж тог правца.

4. Аналитичка анализа проблема

Како су се софтвери развијали, олакшан је прорачун како сложених тако и оних мање сложених проблема, али у случају вишка времена, повољно би било проверити и свој аналитички прорачун упоређивањем тих врсти резултата. Под претпоставком да је први део задатка у софтверу *Robot structural analysis* тачан, провериће се само део задатка где се прорачунавају напони. Овај део задатка се прорачунава из разлога што је са претходним прорачуном могуће упоредити само вредности напона, како би се добило поређење резултата оба софтвера.

Да би се конкретни проблем прорачунао, потребно је имати одређене почетне податке, ти подаци су:

Дужина профила: $l = 2[\text{m}]$

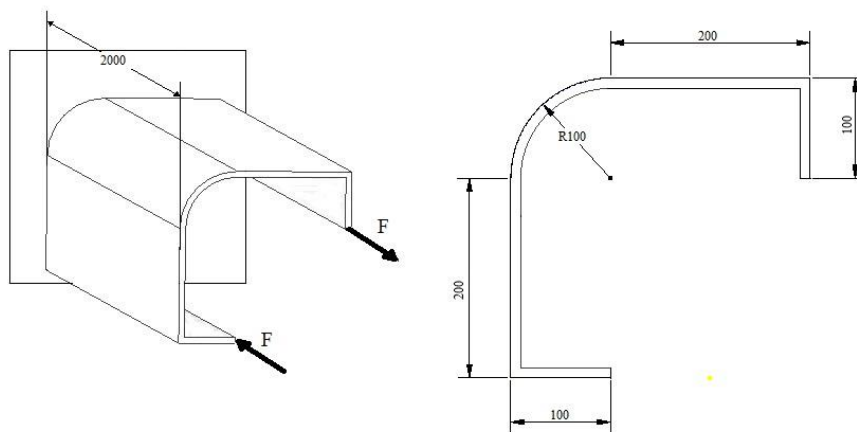
Сила: $F = 10 [\text{kN}]$

Модул еластичности: $E = 2 \cdot 10^5 [\text{MPa}]$

Модул клизања: $0.8 \cdot 10^5 [\text{MPa}]$

Коефицијент : $\mu = 0.3$

Секторски момент инерције: $I_{\Omega} = 893686.112 [\text{cm}^6]$



Бимомент:

$$B = 2 \cdot F \cdot \Omega = 2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 336.818 \cdot 10^{-4} = 673.636 [\text{Nm}^2]$$

За даљи прорачун, потребно је првенствено одредити следеће параметре:

$$E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} = \frac{2 \cdot 10^5}{1 - (0.3)^2} = 2.2 \cdot 10^5 [\text{MPa}]$$

$$I_t = \frac{\eta}{3} \sum \partial_i \cdot \delta^3 = \frac{\eta}{3} (6a + l) \cdot \delta^3 = \frac{1}{3} (60 + 31.42) \cdot 1^3 = 30.47 [\text{cm}^4]$$

$$l = \frac{2 \cdot R \cdot \pi}{4} = \frac{2 \cdot 20 \cdot \pi}{4} = 31.42 [\text{cm}]$$

$$k^2 = \frac{GI_t}{E_1 I_{\Omega}} = \frac{0.8 \cdot 10^5 \cdot 30.47 \cdot 10^{-8}}{2.2 \cdot 10^5 \cdot 893686.112 \cdot 10^{-12}} = \frac{0.0244}{0.19661} = 0.124 \left[\frac{1}{\text{m}^2} \right]$$

$$k = 0.111 \left[\frac{1}{\text{m}} \right]$$

Непознате величине $\varphi_0, \varphi'_0, B_0, M_0$ одређују се из граничних услова [3]. Гранични услови, односно услови ослањања за задати случај су:

- 1) На месту где је греда укљештена, односно где је $z=0 \Rightarrow \varphi_0 = 0, \varphi'_0 = 0$
- 2) На слободном крају греде, односно где је $z=l \Rightarrow M = 0, B = B^*$

$$B^* = ch(kl)B_0 \Rightarrow B_0 = \frac{B^*}{ch(kl)}$$

Претходна једначина је произашла из следећих услова:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 0 \\ \varphi'_0 &= 0 \\ M_0 &= 0\end{aligned}$$

Из таблице 7.6 [2], следи да је:

- 1) $\varphi(z) = \varphi_0 + \frac{\varphi'_0}{k} sh(kz) + \frac{B_0}{GI_t} (1 - ch(kz)) + \frac{M_0}{GI_t} \left(z - \frac{1}{k} sh(kz) \right)$
- 2) $\varphi'(z) = \varphi'_0 ch(kz) - \frac{B_0}{GI_t} ksh(kz) + \frac{M_0}{GI_t} (1 - ch(kz))$
- 3) $\frac{B(z)}{GI_t} = -\frac{\varphi'_0}{k} sh(kz) + \frac{B_0}{GI_t} ch(kz) + \frac{M_0}{kGI_t} sh(kz)$
- $B(z) = -\varphi'_0 sh(kz) \frac{GI_t}{k} + B_0 ch(kz) + \frac{M_0}{k} sh(kz)$
- 4) $\frac{M_0}{GI_t} = \frac{M}{GI_t} \Rightarrow M_0 = M$
- 5) $M_{s(z)} = GI_t \varphi'(z)$
- 6) $M_{\Omega(z)} = -E_1 I_t \varphi'''(z)$

Када се замене сви параметри, добију се следеће једначине:

- 1) $\varphi(z) = \frac{B^*}{ch(kl)GI_t} (1 - ch(kz))$
- 2) $\varphi'(z) = -\frac{B^*}{ch(kl)GI_t} ksh(kz)$
- 3) $B(z) = \frac{B^*}{ch(kl)} ch(kz)$
- 4) $M(z) = M_{s(z)} + M_{\Omega(z)} = 0$
- 5) $M_{s(z)} = GI_t \left(-\frac{B^*}{ch(kl)GI_t} ksh(kz) \right) = -\frac{B^* \cdot k}{ch(kl)} sh(kz)$
- 6) $M_{\Omega(z)} = -E_1 I_t \varphi'''(z) = \frac{B^* \cdot k}{ch(kl)} sh(kz)$

Заменом вредности хиперболичког синуса и косинуса, добијају се:

- 1) $\varphi(z) = \frac{B^*}{ch(kl)GI_t} (1 - ch(kz)) = \frac{673.636}{1.025 \cdot 0.8 \cdot 10^{11} \cdot 30.47 \cdot 10^{-8}} (1 - ch(kz)) = 0.027(1 - ch(kz)) [rad]$
- 2) $\varphi'(z) = -\frac{B^*}{ch(kl)GI_t} ksh(kz) = \frac{673.636 \cdot 0.111}{1.025 \cdot 0.8 \cdot 10^{11} \cdot 30.47 \cdot 10^{-8}} sh(kz) = 0.003 sh(kz) \left[\frac{rad}{m} \right]$
- 3) $B(z) = \frac{B^*}{ch(kl)} ch(kz) = \frac{673.636}{1.025} ch(kz) = 657.21 ch(kz) [kNm^2]$
- 4) $M(z) = 0$
- 5) $M_{s(z)} = -\frac{B^* \cdot k}{ch(kl)} sh(kz) = -\frac{673.636 \cdot 0.111}{1.025} sh(kz) = -72.950 sh(kz) [kNm]$
- 6) $M_{\Omega(z)} = \frac{B^* \cdot k}{ch(kl)} sh(kz) = \frac{673.636 \cdot 0.111}{1.025} sh(kz) = 72.950 sh(kz) [kNm]$

На основу претходних једначина, и прорачуном хиперболичког синуса и косинуса на одређенима растојањима од укљештења, добијају се резултати дати у табели 6.

Табела 6. Вредности добијене прорачуном изведених израза.

Z, m	0	0.5	1	1.5	2
$\varphi(z)$, rad	0.000000	-0.000054	-0.000162	-0.000378	-0.000675
$\varphi'(z)$, rad/m	0.000000	0.000166	0.000334	0.0005018	0.0006714
$B(z)$, Nm ²	657.21	658.524	661.1532	666.4109	673.6402
$M_{s(z)}$, kNm	0.000000	-4.048725	-8.114228	-12.20234	-16.32621
$M_{\Omega(z)}$, kNm	0.000000	4.048725	8.114228	12.20234	16.32621
$M(z)$, kNm	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Пошто се код овог профила смицајни напони могу занемарити, из разлога што су њихове вредности веома мале, прорачунати су само нормални напони аналитичким путем. Напони који су прорачунати су напони услед спреченог увијања изазваног унутрашњим бимоментом.

$$\sigma_{max} = \frac{B}{I_{\Omega}} \cdot \delta = \frac{B_{max}}{I_{\Omega}} \cdot \Omega_{max} = \frac{673.6402 \cdot 10^{-6}}{893686.112 \cdot 10^{-12}} \cdot 336.818 \cdot 10^{-4} = 25.3886 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{min} = \frac{B}{I_{\Omega}} \cdot \delta = \frac{B_{min}}{I_{\Omega}} \cdot \Omega_{min} = \frac{657.21 \cdot 10^{-6}}{893686.112 \cdot 10^{-12}} \cdot (-20) \cdot 10^{-4} = -1.47 \text{ [MPa]}$$

Добијене вредности нормалних напона се скоро у потпуности поклапају са вредностима добијеним у софтверским пакетима *Inventor* и *Robot structural analysis*. На основу тих добијених резултата, сматра се да су ови софтверски пакети меродавни да врше прорачуне ове врсте. Решења смо добили под претпоставком да су добијене вредности првог дела задатка у софтверском пакету *Robot structural analysis*, тачне. Сматра се да је за прорачун тих вредности овај софтвер максимално меродаван.

Након ових прорачуна, извршено је упоређивање резултата који су дати у наредној табели.

Табела 7. Вредности напона добијени приликом прорачуна.

Врста прорачуна	Robot structural analysis	Inventor	Аналитички прорачун
σ_{max} [MPa]	25.52	22	25.3886

На основу ове табеле, види се да су добијени резултати скоро идентични. Радећи овај задатак аналитички и уз помоћ два различита софтвера, доказано је да је софтвер *Robot structural analysis* меродаван за прорачуне ове врсте задатака и не зависи од сложености попречних пресека. Велика корист је могућност добијања свих геометријских карактеристика (табеларно и графички) за јако компликоване облике носача. Посебно је тешко аналитички одредити дијаграме секторске координате и промену секторског статичког момента по контури пресека који садрже кружне делове као пресек у примеру који је рађен. У другом делу задатка при одређивању статичких дијаграма, промене бимомена и угла увијања по дужини греде Еврокод препоручује обрасце који су изведени у Теорији еластичности. Напони се такође врло једноставно добијају и могу се графички приказати њихове промене, како по дужини греде као у *Inventoru*, тако и у било којем попречном пресеку. Ово је нарочито корисно код овог типа носача.

ЗАКЉУЧАК

У данашње време сведоци смо веома брзог развоја науке и технике, па је самим тим потребно да се и образовање развија у корак са тим. Уз помоћ примене сад већ многобројних софтвера, независно да ли су намењени за рачунаре или телефоне, може се на веома лак начин доћи до потребног решења, уз свега неколико потеза. У виду треба имати да сам поступак решавања софтвер не даје на увид, па је у сваком случају потребно елементарно познавање материје како би било једноставније разумевање и употреба добијених решења.

Увођењем разних врста софтвера са различитим могућностима, како у наставама на факултетима, тако и у фирмама, олакшан је рад и повећана је ефикасност. Приликом аналитичких прорачуна, разни софтвери се могу користити као средство за проверу добијених решења.

Главна предност аналитичког прорачуна огледа се у учењу. Приликом исписивања задатака и рачунања, конструктор се едукује и упознаје основе самог проблема који је задат. Када не постоји софтвер у близини, конструктор мора бити спреман да употреби своје знање како би дошао до решења неког проблема, па је увек најбоље првенствено познавати овај начин решавања проблема. Док је главни недостатак овог начина рачунања баш тај недостатак познавања материје проблема, што доводи до некомпетентних решења у неким случајевима.

Главне предности примене разних софтвера огледају се у брзини израде задатака, односно време које је потребно за прорачун, рачунар је преузео на себе и скратио процес решавања на свега неколико минута, колико је потребно да се изврши унос неколико параметара. Исто тако је могуће приликом израде неког прорачуна мењати задате вредности и истог тренутка добити резултате. Те промене можемо вршити све док не задовољимо неке тражене услове, док при прорачуну који је извршен аналитичким путем мора се рачунати све испочетка. При употреби софтвера долазак до бржег решења подпомаже и то што у себи садрже базе стандардних профила, завртањских веза, решеткастих конструкција и разних других елемената који скраћују време које је потребно за њихово цртање или моделирање.

Што се тиче недостатака, главни недостатак софтвера је њихова потреба за јачом конфигурацијом рачунара, као и њихова висока цена. Софтвери ове компаније су развијени до те границе да неких битнијих недостатака при раду немају. Као још један од недостатака може се поменути и потешкоћа око сналажења, али је потребно и нагласити да је то више недостатак самог конструктора, а не софтвера. Недостатак који је битно напоменути код софтверског пакета *Robot structural analysis* је потешкоћа при чувању прорачуна. Дешава се да приликом чувања пројекта, резултати се изгубе, па је потребно при поновном покретању дорађивати пројекат.

У овом раду је извршен прорачун једног задатог проблема на аналитички начин и уз помоћ два софтвера који су дизајнирани од стране исте компаније, у овом случају *Autodesk* софтвери. Софтвер који је истражен или другим речима тестиран у овом раду је *Robot structural analysis*, а софтвер у односу на који се упоређују резултати и који је већ тестиран од стране разних фирми је *Inventor*. Упоређивање резултата који су добијени након прорачуна у овим софтверским пакетима, доводи до закључка да је тестирани софтвер најмеродавнији за прорачун танкозидних конструкција. До овог закључка се дошло на основу аналитичких резултата, јер су они били најприближнији резултатима који су добијени уз помоћ софтвера *Robot structural analysis*. Еврокод 3 је стандард по коме се врши прорачун прилоком коришћења ових софтвера. Еврокод 3 за добијање

промена напона по дужини греде и у попречном пресеку препоручује критеријуме који су коришћени и у аналитичком делу прорачуна према теорији еласичности. Гранична стања носивости и употребљивости могу се на основу ових резултата веома лако израчунати. Након овог тестирања, добијени резултати потврђују да се тестирани софтвер може користити за прорачун како једноставних, тако и сложених конструкција и оптерећења.

Литература

- [1] Марковић З., Грнична стања челичних конструкција према еврокоду, Грађевински факултет Универзитета у Београду, Београд 2014.
- [2] Марјановић В., Николић Р.: Металне конструкције – приручник за прорачуне, Машински факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац 1998.
- [3] Марјановић В., Лаке металне конструкције, Скрипта у електронском облику, Мудле портал, Факултет инжењерских наука, Крагујевац, 2017.
- [4] *Hibbeler R. C.: Mechanics of materials Pearson Prentice Hall, Unnited States of America 2001.*
- [5] Ћировић М.: Отпорност материјала I, Машински факултет Крагујевац, 2008.
- [6] <http://www.autodesk.com/>
- [7] Тимошенко С., Теорија еластичне стабилности, Научна књига, Београд, 1952.
- [8] Рашковић Д, Теорија еластичности, Научна књига, Београд, 1985.
- [9] Петровић З., Металне кострукције у машиноградњи 2, Машински факултет у Београду, Београд, 2005.
- [10] Николић Р., Вељковић Ј., Марјановић В., Металне конструкције – збирка решених задатака, Факултет инжењерских наука, Крагујевац 2013.