

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Примењена механика и аутоматско управљање

Предмет: Механика 1

Број индекса: 161/2014

Никола Б. Јовић

**РАЗВОЈ АЛГОРИТМА ЗА ИМПЛИЦИТНУ ИНТЕГРАЦИЈУ
НАПОНА ПРИМЕНОМ ДРАКЕР-ПРАГЕР КОНСТИТУТИВНОГ
МОДЕЛА ПРИ РАВНОМ СТАЊУ ДЕФОРМАЦИЈЕ**

завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Др Драган Ракић, доцент - ментор
2. _____
3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

Резиме

У специјалним случајевима геометрије модела, као и оптерећења која на њега делују, модел се идентично деформише у паралелним пресецима. На основу тога, јавља се идеја за развој алгоритма при раванском стању деформације. У раду су дате основне теоријске поставке везане за појам тензора напона и тензора деформације, као и основне теорије пластичности. Иза тога су постављени услови на основу којих је извршен развој алгоритма за имплицитну интеграцију конститутивних релација при раванском стању деформације. Након тога извршена је модификација тензора напона и деформације као и еластичне конститутивне матрице при раванском стању деформације. Након дате теоријске поставке извршен је развој, а затим и имплементација развијеног алгоритма у софтверски пакет ПАК. Верификација развијеног алгоритма је дата кроз примере из литературе, где је извршено поређење резултата добијених за модел креиран помоћу 3D коначних елемената са моделом који је креиран помоћу 2D коначних елемената.

Кључне речи: тензор, напон, деформација, конститутивне релације

Abstract

In special cases of the model geometry, as well as the loads on it, the model is deformed identically in parallel cross-sections. Based on this, there is an idea for the development of algorithms in the plane state of deformation. Theoretical bases related to the stress and strain tensors are presented as well as the bases of plasticity theory. After that conditions were laid on the basis of which the development of an algorithm for the implicit integration of constituent relations at the plane state of deformation. After that, the modification of stress and strain tensors as well as the elastic constituent matrix in the plane state of the deformation. The method of theoretical setting was developed, and then the implementation of the developed algorithm in the software package PAK. Verification of the developed algorithm is given through examples from literature, where a comparison of the results obtained for the model was created using 3D finite elements with a model created using 2D finite elements.

Key words: tensor, stress, strain, constitutive relations

Садржај:

1	Увод	3
2	Напон и деформација	4
2.1	Напон	4
2.1.1	Кошијева формула	7
2.1.2	Главни напон	8
2.1.3	Средњи напон	9
2.1.4	Девиијатор напона	10
2.1.5	Конвенција о знаку напона	12
2.2	Деформације	12
2.2.1	Линијска деформација	12
2.2.2	Угаона деформација	14
3	Конститутивне релације	17
4	Интеграција напона за равно стање деформација	19
5	Површ течења и површ пластичног потенцијала	21
5.1	Површ пластичног потенцијала	21
5.2	Услов конзистентности	22
5.3	Конститутивна матрица еласто-пластичности	23
6	Дракер-Прагер материјални модел	26
6.1	Алгоритам за интеграцију напона Дракер-Прагер модела	28
7	Верификација развијеног алгоритма	30
7.1	Еласто-пластична анализа пешчаног калупа	30
7.2	Једноосни притисак (Вишеструко оптерећење)	34
7.3	Тест директног смицања	38
7.4	Одређивање стабилности косине	42
8	Закључак	46
	Литература	47
	Додатак	48

1 Увод

Многи инжењерски материјали до одређеног нивоа напрезања показују линеарну зависност између напона и деформације. Овај феномен је описан Хуковим законом. Материјал тла у општем случају не задовољава овај закон или га задовољава до веома малих вредности напрезања.

Математичка релација која описује везу између напона и деформације неког материјала назива се материјални или конститутивни модел. За прецизно описивање механичког понашања тла неопходна је примена теорије пластичности, односно коришћење еласто-пластичних материјалних модела. Пошто не постоји универзални материјални модел којим је могуће описати механичко понашање тла, за различите врсте материјала тла неопходно је коришћење различитих материјалних модела. Циљ овог рада је развој алгоритма који ће у случају раванских стања деформација, омогућити креирање геометрије модела уместо 3D помоћу 2D коначних елемената. На тај начин извршено је упрошћење модела, а самим тим и скраћење времена потребног рачунару за обраду резултата.

У уводним разматрањима су дате основе везане за напоне, деформације, дефиниција тензора напона, тензора деформације, као и основне инваријанте напона.

У трећем поглављу дате су конститутивне релације при еластичном деформисању материјала.

Четврто поглавље представља централну тему овог рада, у коме су описани услови под којим је извршен развој алгоритма за имплицитну интеграцију напона применом Дракер-Прагер материјалног модела.

У петом поглављу овог рада дефинисани су појмови као што су површ течења и површ пластичног потенцијала, такође је дат услов конзистентности који представља математички услов по коме напонска тачка мора бити унутар или на површи течења. На крају овог одељка извршено је детаљно извођење еласто-пластичне конститутивне матрице применом Методе водећег параметра (GPM).

Шесто поглавље овог рада, садржи основне теоријске поставке Дракер-Прагер материјалног модела, изведене су одређене релације које су неопходне за одређивање еласто-пластичне матрице. На крају овог дела развијен је алгоритам за поједине области модела применом Методе водећег параметра.

У седмом поглављу извршена је верификација Дракер-Прагер материјалног модела. Извршена је анализа четири једноставна примера, при чему су модели креирани помоћу коначних 2D елемената. Резултати су добијени у програмском пакету ПАК коришћењем инкременталне теорије пластичности и методе водећег параметра. Идентични примери су моделирани помоћу коначних 3D елемената и при истим условима извршена је анализа у програму Adina, а затим је извршено упоређивање резултата.

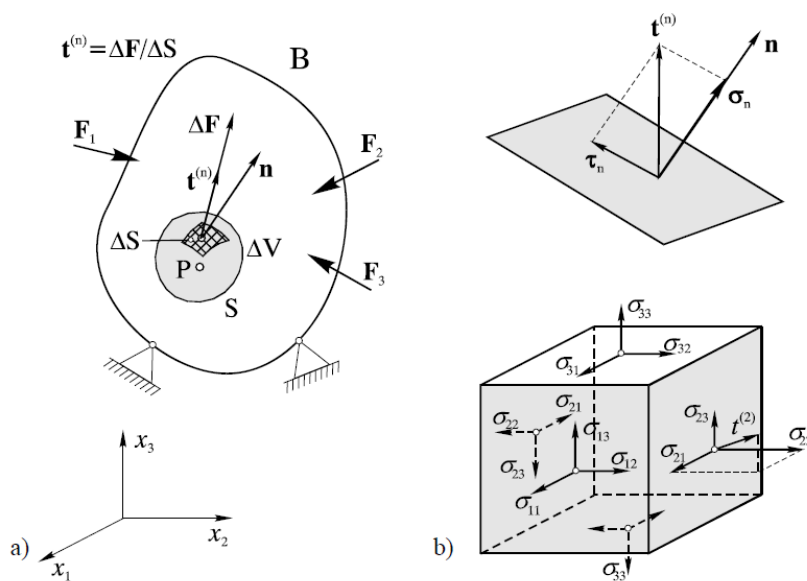
2 Напон и деформација

2.1 Напон

У оквиру рада посматраћемо деформабилно тело код кога су материјалне тачке континуално распоређене. Описивање континуума као што се чини у механици непрекидних средина, представља поједностављено разматрање јер се не улази у молекуларни састав материје, а простор који материја испуњава сматра се континуално попуњеним, без празнина. Механичке величине које се овде користе су континуалне функције положаја тачака. Најчешћи задатак механике континуума је одређивање напонског поља у материјалу као поља механичке величине којим се представља стање унутрашњих сила. Пошто напон зависи од стања деформисаности у тачки, да би одредили поље напона потребно је познавати стање деформисаности материјала, које је описано пољем механичке величине која се назива деформација.

У овом делу дефинисаћемо напон као механичку величину, а затим извести основне релације у вези са напоном као што су Кошијева формула, главни напони, девијатор напона.

Како напон у општем случају није униформно расподељен на површини тела, потребно је дати дефиницију напона на елементарној површини (површина блиска нули).



Слика 2.1 Напони у 3D простору

Када на неко тело делује уравнотежен систем спољашњих сила материјални делићи међусобно делују силама, које представљају унутрашње силе континуума и чине напонско поље. На слици 2.1 је приказано тело на које делује систем спољашњих сила. Ако на површини тела издвојимо елементарну површину ΔS у околини тачке P на коју делује сила ΔF , можемо дефинисати средњи напон као:

$$t_{sr}^n = \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (2.1)$$

Смањивањем елементарне површине мења се и сила која на њу делује, па можемо дефинисати гранични однос као:

$$\vec{t}_{(n)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} \quad (2.2)$$

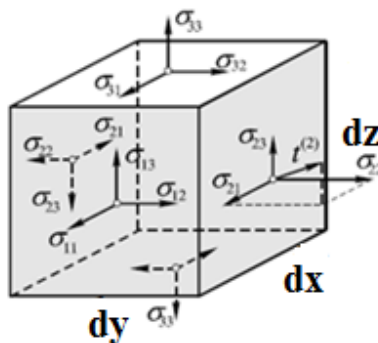
Једначина (2.2) представља вектор напона у посматраној тачки.

Вектор $\mathbf{t}(n)$ се може разложити на две компоненте. Једна компонента напона је управна на површину и представља нормални напон $\sigma(n)$, а друга компонента се налази у равни и назива се тангенцијални напон $\tau(n)$, што може бити написано као:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \sigma_n + \tau_n \quad (2.3)$$

Из изложеног можемо закључити да је напон векторска величина и за његово представљање је потребно познавати оријентацију површине на коју се он односи.

Напонско стање се не може у потпуности описати претходно дефинисаним вектором напона јер се кроз било коју тачку у напрегнутом стању може повући бесконачно различито оријентисаних равни, тако да се у свакој од тачака појављује бесконачно различитих смичућих и нормалних напона који заједно одређују напонско стање у посматраној тачки. Одавде произилази да напонско стање није ни векторска ни скаларна величина, већ је тензорска.



Слика 2.2 Дефиниција напона у тачки материјала

На слици 2.2 издвојена је елементарна запремина око тачке Р призматичног тела. У општем случају на страницама посматраног паралелопипеда делују различити напони (t^1, t^2, t^3) . Нормални напони $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})$ делују управно на равни, а тангенцијални напони делују у равнима и могу се разложити на две компоненте у правцу одговарајућих оса.

Стање напона у било којој тачки тела, према Кошију се може представити у потпуности помоћу девет компоненти напона. Девет компонената напона за било коју тачку представљају тензор напона σ , што може бити написано у следећем облику:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Код компоненти напона σ_{ij} први индекс (i) означава правац нормале на раван дејства напона, а други индекс (j) означава правац деловања компоненте. Индекси могу имати вредности 1,2 или 3 што одговара осама x, y, z респективно.

Према принципу угаоног момента, да би тело било у равнотежи збир свих момента у одређеној тачки мора бити једнак нули, тако да у случају изотропног материјала тензор напона је симетричан и садржи шест независних компонената напона. Напонско стање елементарне запремине одређено је са шест компоненти тензора напона: три нормалне компоненте ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$) и шест смичућих компоненти напона ($\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{21}, \sigma_{32}, \sigma_{13}$). Да би постојала равнотежа сила у посматраној тачки Р (тј. да се елемент не би окретао око осе z), потребно је задовољити моментну једначину:

$$\sum M_z = 0 \quad (2.5)$$

$$(\sigma_{12} dy dz) dx - (\sigma_{21} dx dz) dy = 0 \quad (2.6)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (2.7)$$

Постављањем моментних једначина за преостале две осе добијамо:

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} \quad (2.8)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$

При постављању моментних једначина, претпоставља се да са супротне стране паралелопипеда делује исти нормални напон, тако да се утицај њихових момента за осу међусобно потиру. Између нормалних напона који делују на супротним странама паралелопипеда постоје мале диференцијалне разлике, али када се оне помноже са диференцијално малим растојањем од осе добијају се бесконачо мале вредности које се могу занемарити.

Тензор напона је симетричан у односу на главну дијагоналу, тј. садржи 6 независних компонената па га можемо написати у облику вектора, односно користећи једноиндексну нотацију на следећи начин:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6] \quad (2.9)$$

где компоненте вектора напона одговарају следећим компонентама тензора напона:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma_{11} \\
\sigma_2 &= \sigma_{22} \\
\sigma_3 &= \sigma_{33} \\
\sigma_4 &= \sigma_{12} \\
\sigma_5 &= \sigma_{23} \\
\sigma_6 &= \sigma_{31}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Треба нагласити да при оваквом начину писања σ_1 , σ_2 и σ_3 не представљају главне напоне.

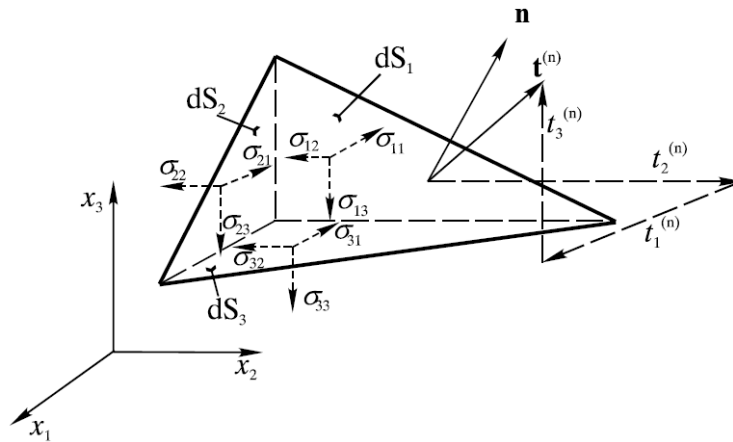
2.1.1 Кошијева формула

Кошијева формула показује да се напон на било којој равни може изразити ако су познате компоненте тензора напона σ_{ij} . На слици 2.3 је приказан елементарни тетраедар, при чему су напони на његовим странама (које су паралелне са координатним равнима) $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{33}$. Главни напон $\mathbf{t}^{(n)}$ је разложен на три компоненте t_i ($i=1,2,3$) у правцу координатних оса. Величине површина страна тетраедра (dS_1, dS_2, dS_3) одређени су пројекцијом површине чија је нормала $\mathbf{n}$ на одговарајуће равни: $dS_1 = n_1 dS$, $dS_2 = n_2 dS$, $dS_3 = n_3 dS$, где је dS површина чија је нормала $\mathbf{n}$, док су са n_1, n_2, n_3 назначене пројекције нормале $\mathbf{n}$ на осе координатног система. Запремина елементарног тетраедра је $dV = hdS/3$, док су пројекције запреминске силе на осе координатног система F_1^v, F_2^v, F_3^v . Услов равнотеже у правцу осе x_1 је:

$$-\sigma_{11}dS_1 - \sigma_{21}dS_2 - \sigma_{31}dS_3 + t_1^{(n)}dS + F_1^v dV = 0 \tag{2.11}$$

Заменом одговарајућих вредности у претходној једначини и занемаривањем утицаја запреминске силе, једначина (2.11) се своди на следећи облик:

$$t_1^{(n)} = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 \tag{2.12}$$



Слика 2.3 Напон на произвољној равни

Аналогно претходном услову, потребно је поставити равнотежне једначине за преостале две осе, тако да се уопштено може писати:

$$\mathbf{t}_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j \quad (2.13)$$

Једначина (2.13) представља Кошијеву формулу и налази велику примену у наредном тексту при извођењу одређених релација.

У векторској нотацији ова формула се пише као:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.14)$$

Напоменимо да облик (2.14) важи у сваком координатном систему.

2.1.2 Главни напон

На основу Кошијеве формуле (2.13) можемо закључити да напон у некој равни у посматраној тачки зависи од компонената тензора напона σ_{ij} као и од вредности пројекција нормале равни на осе координатног система n_j [1]. Циљ одређивања главних напона је наћи правац (или више правца) за који су смичуће компоненте тензора напона једнаке нули. Као што је приказано у једначини (2.3), вектор напона можемо разложити на нормални и тангенцијални напон. Из претходног услова задатака следи да је укупан напон колинеаран са нормалом, што се може написати као:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \sigma_n \mathbf{n} \quad (2.15)$$

или

$$t_i^n = \sigma_n n_i = \sigma_n \delta_{ij} n_j \quad (2.16)$$

где је δ_{ij} - Кронеков δ - симбол (има вредности нула за $i \neq j$).

На основу једначина (2.13) и (2.16) можемо писати једнакост:

$$(\sigma_{ji} - \sigma_n \delta_{ji}) n_j = 0 \quad (2.17)$$

Ово је систем хомогених линеарних једначина по n_j који има нетривијално решење, само ако је детерминанта система (2.18) једнака нули.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{vmatrix} = 0 \quad (2.18)$$

На тај начин долазимо до једначине помоћу које можемо представити напонско стање било које тачке у простору. Добијена једначина је трећег степена и може бити изражена применом главних напона:

$$-\sigma_n^3 + I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n + I_3 = 0 \quad (2.19)$$

У претходној једначини са I_1, I_2, I_3 означе су инваријанте тензора напона које могу бити израчунате применом компоненти напона применом следећих једначина:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 &= \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{31}\sigma_{11}) \\ I_3 &= \det \boldsymbol{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - (\sigma_{11}\sigma_{23}^2 + \sigma_{22}\sigma_{31}^2 + \sigma_{33}\sigma_{12}^2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Инваријанте напона су скаларне величине и имају исте вредности за било који координатни систем.

Компоненте главних напона које ћемо означавати са $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и уз претпоставку да је $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, представљају решења једначине (2.19), коју можемо написати у облику:

$$(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) = 0 \quad (2.21)$$

Величине главних напона су међусобно независне величине, што значи могу бити различитих вредности са истим или различитим предзнаком.

Упоређивањем коефицијената који стоје уз σ_n из претходне једначине и једначине (2.19), долази се до следећих једнакости:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ означава траг напона $\boldsymbol{\sigma}$. У овом случају инваријанте напона су изражене преко главних напона.

Напоменимо да пластично деформисање не би било могуће уколико су главни напони истог знака.

2.1.3 Средњи напон

Средњи напон у некој тачки представља средњу вредност нормалног напона у сва три правца и изражава се као [2].

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}I_1 \quad (2.23)$$

Средњи напон је инваријантна величина независна од оријентације оса координатног система, може се поистоветити са хидростатичким притиском.

Ако се претпостави да су главни напони једнаки средњем напону σ_m , може се дефинисати сферни тензор напона у следећем облику:

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} = \sigma_m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Овакав случај би наступио при стварном хидростатичком притиску, при том би напонско стање било окарактерисано сферним тензором чије би компоненте биле:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m$$

2.1.4 Девијатор напона

Сваки тензор напона можемо представити помоћу сферног и девијаторског тензора напона [3].

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \mathbf{m}\sigma_m \quad (2.25)$$

где је $\mathbf{s}$ -девијатор напона, а $\mathbf{m}$ јединична дијагонална матрица.

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

што може бити записано и у следећем облику:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (2.27)$$

Напонско стање у некој тачки може се представити као свестрано затезање или притисак, чији је напон σ_m коме је још додат напон који је одређен девијатором напона. Девијатор напона представља меру одступања напонског стања од равномерно свестраног истоврсног напрезања.

Средњи напон σ_m тежи да промени запремину елемента при чему би се јавиле само еластичне деформације, док компоненте девијатора напона утичу на промене облика напрегнутог елемента.

Инваријанте девијатора напона одређене су следећим релацијама [4]:

$$\begin{aligned} J_{1D} &= (\sigma_{11} - \sigma_m) + (\sigma_{22} - \sigma_m) + (\sigma_{33} - \sigma_m) = 0 \\ J_{2D} &= \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \\ J_{3D} &= \frac{1}{27} (2I_1^3 + 9I_1I_2 + 27I_3) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Највећу примену у геомеханици имају друга и трећа инваријанта девијатора напона. У физичком смислу друга инваријанта девијатора напона представља ефекат смичућег напона, а трећа инваријанта девијатора напона представља правац смичућег напона.

Коришћењем инваријанти девијатора напона, могуће је израчунати главне напоне помоћу следећих једначина [5]:

$$\sigma_1 = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_{2D}} \sin(\theta_1 + 120^\circ) \quad (2.29)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_{2D}} \sin(\theta_1) \quad (2.30)$$

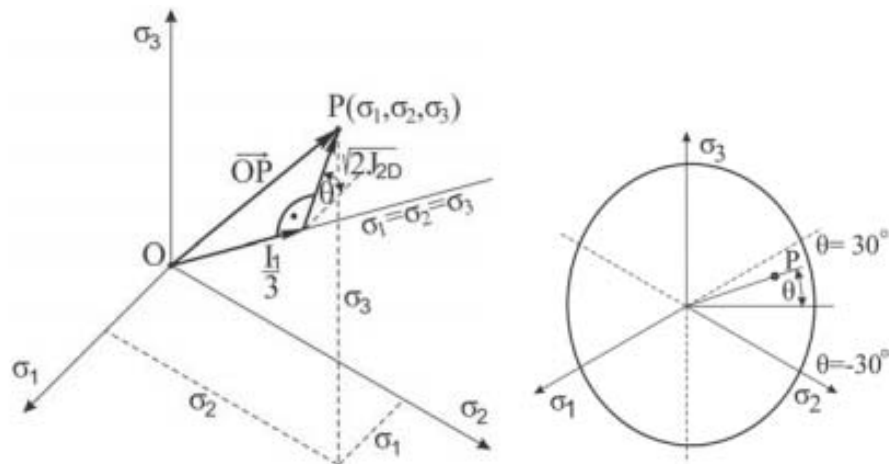
$$\sigma_3 = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_{2D}} \sin(\theta_1 - 120^\circ) \quad (2.31)$$

При израчунавању главних напона користи се Ладеов угао (*Lode's angle*). Овај угао се може израчунати коришћењем инваријанти девијатора напона према:

$$\theta_1 = -\frac{1}{3} \sin^{-1} \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{J_{3D}}{J_{2D}^{3/2}} \right) \right] \quad (2.32)$$

Помоћу Ладеовог угла може се дефинисати положај напонске тачке у девијаторској равни у правцу осе највећег напона σ_1 или најмањег напона σ_3 .

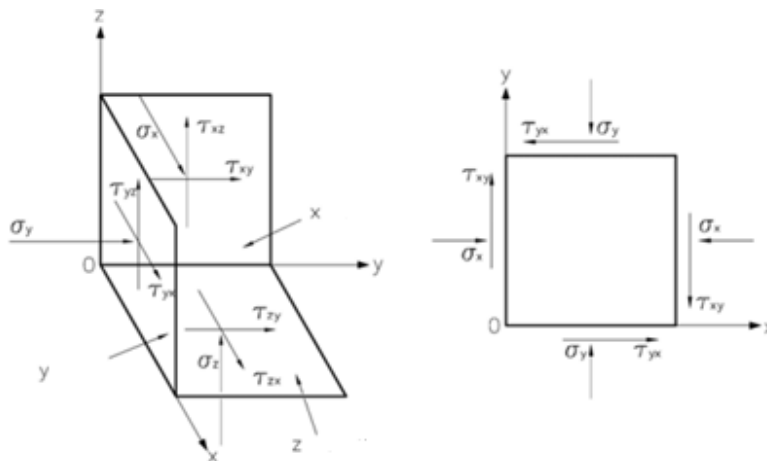
Уколико су главни напони међусобно једнаки $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ и уколико се напонска тачка не налази на правцу хидростатичке осе, потребно је поставити раван која садржи тачку, а притом је управна на правац хидростатичке осе. Положај напонске тачке у односу на правац хидростатичке осе зависи од друге инваријанте девијатора напона, док је њен положај у односу на правце напона σ_1 и σ_3 одређен Ладеовим углом, што је приказано на слици 2.4.



Слика 2.4 Интерпретација инваријанти напона у простору главних напона

2.1.5 Конвенција о знаку напона

У отпорности материјала и генерално у техничкој механици, усвојена је конвенција да су затежући напони позитивни. У механици тла ова конвенција није прихваћена због тога што тло практично не може да прими напоне затезања. У циљу избегавања честог коришћења негативног предзнака, у механици тла је усвојено да су напони притиска позитивни [6]. На слици 2.5 је приказана интерпретација позитивних компоненти тензора напона.



Слика 2.5 Интерпретација позитивних компоненти тензора напона

2.2 Деформације

Деформација је геометријска величина која се дефинише исто за сваку непрекидну средину, тј. не узима у обзир врсту материјала. Какво ће напонско поље у материјалу да настане при датој деформацији, зависи од карактеристика материјала који се деформише.

Поделу деформација по својој природи можемо извршити на: нормалне (линијске) и смичуће (угаоне) деформације.

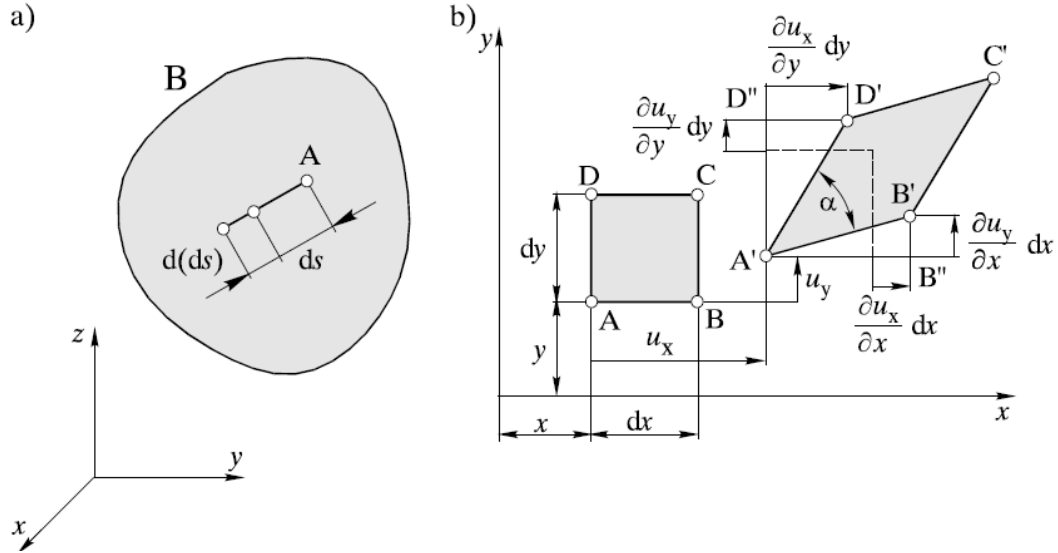
2.2.1 Линијска деформација

Линијску деформацију можемо дефинисати као однос прираштаја дужине правог линијског елемента према његовој почетној дужини. Ако посматрамо нормалну деформацију у правцу осе x у тачки А материјала Слика 2.6, нормалну деформацију у правцу осе x , сагласно дефиницији можемо изразити на следећи начин:

$$e_{xx} = \frac{d(d_x)}{d_x} \quad (2.33)$$

Скуп свих нормалних деформација у некој тачки карактерише издужење (скраћење). Да би се изразиле компоненте деформација у односу на Декартов координатни систем, потребно је познавати поље померања. Ако су позната померања $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и

$w(x,y,z)$ у правцу оса x, y и z респективно, могу се извести релације помоћу којих се израчунавају компоненте деформације.



Слика 2.6 Мале деформације хомогеног материјала

Замислимо да смо у околини тачке А (Слика 2.6) издвојили елементарни паралелопипед са дужином ивица dx, dy и dz , тако да су све ивице паралелне координатним осама. Издвојени паралелопипед је пројектован на раван Oxy , тако да се добија површ $ABCD$. Претпоставља се да се након деформисања пројекција налази у истој равни. Након деформисања, тачке А, В, С и D ће прећи у нове положаје A', B', C' и D' . Померање тачке В можемо изразити преко померања тачке А. Померање тачке В се разликује од померања тачке А у правцу осе x за износ прираштаја функције u на дужини dx по координати x .

Израз за померање тачке В је:

$$\begin{aligned} u_B &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ v_B &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (2.34)$$

Дужина линијског елемента АВ након деформисања износи ($A'B'$):

$$(A'B')^2 = (A'B'')^2 + (B'B'')^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2 \quad (2.35)$$

Прираштај дужине правог линијског елемента износи:

$$A'B' - AB = A'B' - dx \quad (2.36)$$

За овако дефинисан прираштај деформације сагласно дефиницији нормалне деформације, можемо одредити компоненту тензора деформације у правцу x осе као:

$$e_{xx} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B' - dx}{dx} \quad (2.37)$$

Из једначине (2.38) можемо одредити дужину између тачака А и В након деформисања.

$$A'B' = (1 + e_{xx}) dx \quad (2.39)$$

Изједначавањем израза за дужину линијског елемента након деформисања (2.35) и (2.39), добијамо:

$$\begin{aligned} (1 + e_{xx})^2 dx^2 &= dx^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} dx dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx^2 \\ (1 + 2e_{xx} + e_{xx}^2) dx^2 &= (1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2) dx^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Дељењем претходне једначине са dx^2 , добијамо:

$$2e_{xx} + e_{xx}^2 = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \quad (2.41)$$

Занемаривањем квадратних чланова, добијамо израз за деформацију e_{xx} :

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.42)$$

Аналогним поступком добијају се изрази за нормалне компоненте деформације у правцу оса y и z .

$$\begin{aligned} e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.43)$$

2.2.2 Угаона деформација

Угаона деформација по дефиницији представља промену угла између два почетно управна линијска елемента. Угаона деформација која одговара осама x и y је:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (2.44)$$

Скуп свих смичућих деформација у посматраној тачки карактерише кривљење и промену облика материјала.

Израз за смичућу компоненту деформације за осе x и y износи:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.45)$$

На основу претходних релација, могуће је написати изразе за све нормалне и смичуће деформације које одговарају координатном систему x, y, z .

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Компоненте деформације могу бити приказане као тензор деформације:

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Тензор деформације као и тензор напона у случају изотропног материјала има шест независних компоненти, па може бити написан у облику вектора:

$$\mathbf{e}^T = [e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6] \quad (2.48)$$

при чему су:

$$\begin{aligned} e_1 &= e_{11} \\ e_2 &= e_{22} \\ e_3 &= e_{33} \\ e_4 &= e_{12} \\ e_5 &= e_{23} \\ e_6 &= e_{31} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Често се у литератури користе ознаке за смичуће деформације облика $e_{xy} = \gamma_{xy} / 2$, $e_{yz} = \gamma_{yz} / 2$, $e_{zx} = \gamma_{zx} / 2$, тако да користећи индексну нотацију може се писати:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.50)$$

Компоненте γ_{ij} се такође зову и инжењерске смичуће деформације, а e_{ij} - тензорске. [1]

3 Конститутивне релације

Механичке величине као што су напони и деформације које се користе за описивање унутрашњих сила и стања деформисаности материјала, имају исто значење за све континуално распоређене материјале, али оне не садрже информацију о карактеристикама материјала. Ниво унутрашњих сила и степен деформисаности материјала, дефинисати су пољима напона и деформација респективно:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_k) \quad (3.1)$$

$$e_{ij} = e_{ij}(x_k) \quad (3.2)$$

Да би се одредио степен деформисаности неког континуума потребно је познавати карактеристике материјала, тако да основне карактеристике материјала које повезују напоне и деформације називају се конститутивним релацијама.

Најједноставније линеарне конститутивне релације су облика:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (3.3)$$

Линеарне конститутивне релације у случају једноосног напонског стања су најједноставније, где се у том случају релација (3.3) своди на линеарну везу.

$$\sigma = E e \quad (3.4)$$

где је E - Јангов модул еластичности, e - деформација у правцу деловања концентрисане силе.

На основу дефиниција (2.9) и (2.48) можемо да напишемо конститутивне релације (3.3) у матричном облику као:

$$\sigma = C^E e \quad (3.5)$$

или у индексној нотацији,

$$\sigma_i = C_{ij} e_j \quad (3.6)$$

где је C^E еластична конститутивна матрица реда 6×6 и према [1] можемо је написати у облику:

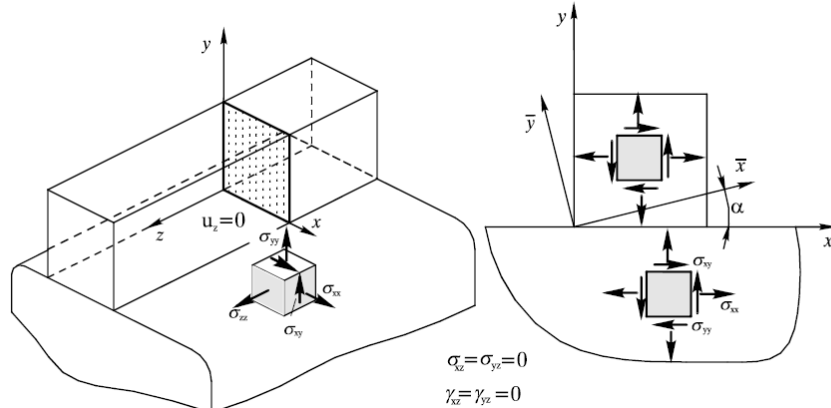
$$\mathbf{C}^E = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

где је ν Поасонов коефицијент.

4 Интеграција напона за равно стање деформација

У пракси веома често се анализирају стања напона у две димензије. Уколико је тело које се разматра релативно дуго у правцу осе z са непроменљивом геометријом у равни xy дуж осе z и уколико су оптерећења непроменљива, реч је о равном стању деформација.

Пример равног стања деформације, приказан је на слици 4.1.



Слика 4.1 Равно стање деформације

Под претходно дефинисаним условима тело се деформише идентично у свим равнима паралелним са равни xy , тако да су померања дуж осе z (4.1) занемарена, ($z = const.$) па је:

$$e_{zz} = 0 \quad (4.2)$$

Такође и смичуће компоненте деформације γ_{xz} и γ_{yz} су једнаке нули.

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (4.3)$$

Користећи једначине (4.2) и (4.3), тензор деформације (2.47) се своди на следећи облик:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & 0 \\ e_{yx} & e_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

или у векторском облику:

$$\mathbf{e} = [e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad 0] \quad (4.5)$$

где је $e_3 = e_{xy}$.

Тензор напона за разлику од тензора деформација при описаним условима оптерећења има четири компоненте, где нормални напони у правцу оса x и y (σ_{xx} и σ_{yy})

одговарају деформацијама e_{xx} и e_{yy} респективно. Смичућа компонента напона σ_{xy} одговара угаоној деформацији e_{xy} .

Нормални напон σ_{zz} за случај еластичног деформисања материјала постоји и рачуна се на основу израчунатих вредности нормалних напона σ_{xx} и σ_{yy} према једначини:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (4.6)$$

Смичуће компоненте напона σ_{xz} и σ_{yz} , су једнаки нули.

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= 0 \\ \sigma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Коришћењем једначина (4.7), тензор напона за 3D напонско стање елемената (2.4) се своди на тензор напона за раванско стање деформација облика:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

или у облику вектора напона као:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4] \quad (4.9)$$

где је $\sigma_4 = \sigma_{zz}$.

У случају раванских деформација, конститутивна матрица еластичности (3.7) редукује се на следећи облик:

$$\mathbf{C}^E = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

У односу на матрицу (4.11) овде су замењена места трећој и четвртој врсти као и трећој и четвртој колони.

Пошто је напонска слика идентична у равнима паралелним равни xu , проблем одређивања напона и деформација у телу своди се на одређивање напона и деформација у равни xu .

5 Површ течења и површ пластичног потенцијала

Експерименталним испитивањем реалних материјала, установљено је да у тродимензионалном простору главних напона, постоји домен који дефинише подручје стања напона. Функција, која одваја подручја могућих и немогућих стања напона, назива се површ течења. Математички опис функције течења није сасвим једноставан, али у општем случају представља функцију која зависи од главних напона и коефицијента ојачања материјала.

$$f = f(\sigma, k) \quad (5.1)$$

Површ течења има врх који се налази у координатном почетку и дефинисан је у првом октанту координатног система, јер тло углавном не може да поприми напоне затезања. По облику подсећа на купу, са осом која се поклапа са главном дијагоналом $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ [6].

У случају да се напонска тачка налази унутар области дефинисане једначином (5.1) у материјалу ће доћи до појаве чисто еластичних деформација. Уколико напон достигне површ течења јављају се пластичне деформације. Напонска стања изван ове површи нису могућа.

Коефицијент k је унутрашњи параметар, који може бити константа или може зависити од пластичне деформације. У зависности од тога да ли је константа или не, разликујемо површ течења од површи лома. У случају да је коефицијент k константа, уколико напон достигне површ течења долази до лома. Међутим уколико коефицијент k није константа ради се о материјалу са ојачањем, па када напон достигне површ течења неће доћи до лома материјала већ до пластичног течења.

Коришћењем инваријанти тензора напона и инваријанти девијатора напона могуће је изразити функцију површи течења у облику:

$$f = f(I_1, J_{2D}, J_{3D}, k) \quad (5.2)$$

Услов течења пре свега зависи од начина оптерећења материјала. Нпр. код чисто једноосног оптерећења, услов течења је дефинисан вредношћу напона изнад кога долази до пластичног деформисања. Код раванских 2D оптерећења, до пластичног течења ће доћи када комбинација оптерећења достигне криву течења. Код 3D оптерећења до пластичног течења долази када комбинација оптерећења у сва три правца достигне *Површ течења*.

5.1 Површ пластичног потенцијала

За успостављање везе између прираштаја пластичних деформација de^p и прираштаја напона, користи се хипотеза према којој је инкремент пластичних деформација директно пропорционалан градијенту напона:

$$d\mathbf{e}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.3)$$

Фактор $d\lambda$ представља зависност између прираштаја пластичне деформације и градијента пластичног потенцијала. Вредност овог скалара је непознат и потребно га је израчунати. Фактор $d\lambda$ је од кључне важности при израчунавању напона и деформација и често се назива водећим параметром.

Једначина (5.3) представља закон течења, који успоставља везу између правца вектора пластичних деформација и функције пластичног потенцијала. Инкремент пластичне деформације је управан на површ пластичног потенцијала, односно лежи дуж правца спољашње нормале на ову површ.

Површ пластичног потенцијала одређена је функцијом облика:

$$g = g(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \quad (5.4)$$

Површ пластичног потенцијала се може поклапати са површи течења и тада је реч о асоцијативном услову течења. Уколико не долази до поклапања двеју површи, говоримо о неасоцијативном услову течења. Уколико се напонска тачка налази унутар области површи течења, јављају се само еластичне деформације које нестају приликом престанка дејства оптерећења. У случају када напонска тачка достигне површ течења, јављају се пластичне деформације. При престанку деловања оптерећења оне остају присутне тако да пластичне деформације у некој тачки зависе од историје деформације и једнаке су збиру прираштаја пластичних деформација.

Укупна деформација једнака је збиру еластичне и пластичне деформације и одређена је изразом:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^p + \mathbf{e}^E \quad (5.5)$$

Напон у материјалу изазива само еластични део деформације, који се може израчунати применом генерализованог Хуковог закона:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E \mathbf{e}^E \quad (5.6)$$

где $\mathbf{C}^E$ представља еластичну конститутивну матрицу материјала.

5.2 Услов конзистентности

У зависности од величине оптерећења материјала, напонска тачка као што је и раније речено може бити унутар или на површи течења, док напонска стања изван ове области нису могућа. Математички услов који не дозвољава да се напонска тачка нађе ван области површи течења дефинисана је следећом једначином:

$$f + df = 0 \quad (5.7)$$

и назива се услов конзистентности.

У сваком тренутку важи да је $f < 0$ или $f = 0$. За случај чисто еластичних деформација функција течења може имати вредности $f < 0$, док у случају еласто-пластичних деформација има вредност $f = 0$.

Пошто при појави пластичних деформација функција течења има вредност $f = 0$, једначина (5.7) се своди на следећи облик:

$$df = 0 \quad (5.8)$$

Код модела без ојачања, прираштај функције течења df износи:

$$df = \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} d\sigma \quad (5.9)$$

5.3 Конститутивна матрица еласто-пластичности

У случају еласто-пластичних деформација укупан прираштај деформација одређен је следећом једначином:

$$de = de^E + de^P \quad (5.10)$$

где је de^E део еластичне деформације, а de^P пластичан део деформације.

У случају асоцијативног услова течења ($f = g$) вектор прираштаја пластичног потенцијала је управан и на површ течења, док у случају неасоцијативног услова течења ($f \neq g$) прираштај пластичне деформације је само управан на површ пластичног потенцијала.

У инкременталној теорији пластичности у сваком тренутку важи:

$$f \leq 0, d\lambda > 0 \quad (5.11)$$

$$f \cdot d\lambda = 0 \quad (5.12)$$

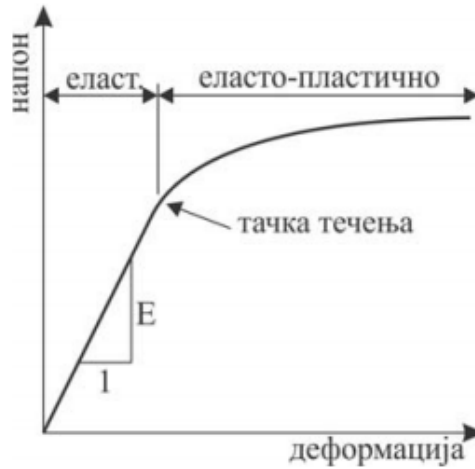
За случај чисто еластичних деформација, важи:

$$\begin{aligned} f &< 0 \\ d\lambda &= 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

У случају када се напонска тачка нађе на површи течења, односно када се јаве пластичне деформације, важи:

$$d\lambda > 0 \quad (5.14)$$

На слици 5.1 је приказана зависност напона и деформације. До тачке течења постоји линеарна зависност између напона и деформације, након чега се јављају пластичне деформације и долази до нелинеарне зависности.



Слика 5.1 Еласто-пластично деформисање материјала

Напон у материјалу изазива само еластични део деформације. Прираштај напона при појави еластичних деформација одређен је следећим изразом:

$$d\sigma = C^E de^E \quad (5.15)$$

где C^E представља еластичну конститутивну матрицу.

Применом (5.10) и (5.16), добија се:

$$d\sigma = C^E (de - de^P) \quad (5.17)$$

Укупан прираштај напона се може написати као:

$$d\sigma = C^{EP} de \quad (5.18)$$

где C^{EP} представља еласто-пластичну конститутивну матрицу коју треба одредити.

У случају материјалног модела без ојачања површ течења је функција која зависи само од тензора напона. Коришћењем услова конзистентности (5.7) када је $f = 0$, добија се:

$$df = \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} d\sigma = 0 \quad (5.19)$$

У случају равног стања деформације извод функције течења по компонентама напона $\frac{\partial f^T}{\partial \sigma}$ износи:

$$\frac{\partial f^T}{\partial \sigma} = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_4} \right] \quad (5.20)$$

док $d\sigma$ представља прираштај напона који се може записати у векторском облику као:

$$d\boldsymbol{\sigma}^T = [d\sigma_1 \quad d\sigma_2 \quad d\sigma_3 \quad d\sigma_4] \quad (5.21)$$

Користећи једначине (5.3) и (5.17) једначина (5.19) се своди на:

$$df = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{C}^E d\mathbf{e} - \mathbf{C}^E d\lambda \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}) = 0 \quad (5.22)$$

Из једначине (5.22) може се израчунати скалар $d\lambda$ као:

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (5.23)$$

Заменом скалара $d\lambda$ у једначину (5.3), добија се израз за прираштај пластичне деформације чијом заменом у (5.24), добијамо израз за прираштај напона:

$$d\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{C}^E - \frac{\mathbf{C}^E \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E}{\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}) d\mathbf{e} \quad (5.25)$$

Упоредивањем једначина (5.18) и (5.25) следи да је

$$\mathbf{C}^{EP} = (\mathbf{C}^E - \frac{\mathbf{C}^E \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E}{\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}) \quad (5.26)$$

што представља еласто-пластичну конститутивну матрицу [7].

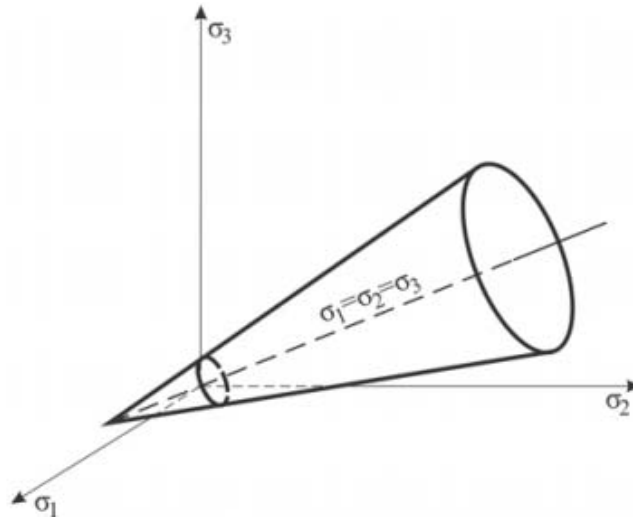
6 Дракер-Прагер материјални модел

Површ течења овог модела одређен једначином (6.1) у напонском простору представља конус, код кога се главна оса поклапа са хидростатичком осом.

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_{2D}} - k \quad (6.1)$$

Површ пластичног потенцијала је дата једначином (6.2).

$$g = \beta I_1 + \sqrt{J_{2D}} \quad (6.2)$$



Слика 6.1 Површ течења Дракер-Прагер материјалног модела

У једначинама (6.1) и (6.2) I_1 представља прву инваријанту тензора напона, J_{2D} представља другу инваријанту девијатора напона. Величине α, β, k представљају материјалне константе.

Да би одредили инкременте пластичне деформације и напона, потребно је одредити еласто-пластичну конститутивну матрицу дефинисану једначином (5.26). Еласто-пластична конститутивна матрица садржи изводе функције течења (6.1) и пластичног потенцијала (6.2) по компонентама тензора напона које треба одредити.

Функција течења f је сложена функција напона па применом правила извода сложене функције, извод функције површи течења по тензору напона гласи:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (6.3)$$

Извод функције површи течења одређеној једначином (6.1) по првој инваријанти тензора напона гласи:

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \frac{\partial(\alpha I_1 + \sqrt{J_{2D}} - \kappa)}{\partial I_1} = \alpha \quad (6.4)$$

док њен извод по другој инваријанти девијатора напона износи:

$$\frac{\partial f}{\partial J_{2D}} = \frac{\partial(\alpha I_1 + \sqrt{J_{2D}} - \kappa)}{\partial J_{2D}} = \frac{1}{2\sqrt{J_{2D}}} \quad (6.5)$$

Извод прве инваријанте напона (2.20) по компонентама тензора напона је:

$$\left(\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \quad (6.6)$$

док извод друге инваријанте девијатора напона (2.28) по тензору напона гласи:

$$\left(\frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T = \left[\frac{1}{3}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \quad \frac{1}{3}(-\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3) \quad \frac{1}{3}(-\sigma_1 - \sigma_2 + 2\sigma_3) \quad 2\sigma_{12} \right] \quad (6.7)$$

Користећи једначине (6.4), (6.5), (6.6) и (6.7), једначина (6.3) се своди на:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \alpha + \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{6\sqrt{J_{2D}}} \\ \alpha + \frac{-\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3}{6\sqrt{J_{2D}}} \\ \alpha + \frac{-\sigma_1 - \sigma_2 + 2\sigma_3}{6\sqrt{J_{2D}}} \\ \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{J_{2D}}} \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

Функција пластичног потенцијала (6.2) је сложена функција напона, коришћењем правила извода сложене функције као код извода функције површи течења, добијамо:

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (6.9)$$

док су изводи функције пластичног потенцијала по инваријантама напона дати следећим изразима:

$$\frac{\partial g}{\partial I_1} = \frac{\partial(\alpha I_1 + \sqrt{J_{2D}} - \kappa)}{\partial I_1} = \beta \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial g}{\partial J_{2D}} = \frac{\partial(\alpha I_1 + \sqrt{J_{2D}} - \kappa)}{\partial J_{2D}} = \frac{1}{2\sqrt{J_{2D}}} \quad (6.11)$$

Користећи једначине (6.6), (6.7), (6.10) и (6.11), једначина (6.9) се своди на:

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \beta + \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{6\sqrt{J_{2D}}} \\ \beta + \frac{-\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3}{6\sqrt{J_{2D}}} \\ \beta + \frac{-\sigma_1 - \sigma_2 + 2\sigma_3}{6\sqrt{J_{2D}}} \\ \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{J_{2D}}} \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

6.1 Алгоритам за интеграцију напона Дракер-Прагер модела

У наставку је дат алгоритам за имплицитну интеграцију напона применом Дракер-Прагер конститутивног модела при равном стању деформације (Табела 6.1). Овај алгоритам је уграђен у програм ПАК, а затим су извршене анализе модела датих у следећем одељку.

Табела 6.1 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона 2D модела

Познате величине: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$, ${}^t\mathbf{e}$, ${}^t\boldsymbol{\sigma}$, ${}^t\mathbf{e}^p$

А. Пробно (еластично) решење:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E = \mathbf{C}^E ({}^{t+\Delta t}\mathbf{e} - {}^t\mathbf{e}) \quad (\text{јед. 5.15})$$

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^t\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}, {}^{t+\Delta t}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{s} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} - m {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}_m \quad (\text{јед. 2.26})$$

Израчунавање инваријанте напона и инваријанте девијатора напона:

$$I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma}) \quad (\text{јед. 2.20a})$$

$$J_{2D} = \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}\mathbf{s} {}^{t+\Delta t}\mathbf{s} \quad (\text{јед. 2.20б})$$

Функција течења:

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_{2D}} - k \quad (\text{јед. 6.1})$$

Функција пластичног потенцијала:

$$g = \beta I_1 + \sqrt{J_{2D}} \quad (\text{јед. 6.2})$$

Б. Провера услова течења:

IF ($f \leq 0$) пробна решења су еластична (GO TO Д)

IF ($f > 0$) еласто-пластична решења (CONTINUE)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} \quad (\text{јед. 6.3})$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} = \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial g}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} \quad (\text{јед. 6.9})$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{\frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \quad (\text{јед. 5.22})$$

В. Корекција $d\lambda$ (локалне интеграције)

$$d\mathbf{e}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (\text{јед. 5.3})$$

$$d\mathbf{e}^E = d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^p \quad (\text{јед. 5.10})$$

$$d\sigma = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E$$

$${}^{t+\Delta t} \sigma = {}^t \sigma + d\sigma$$

Израчунавање нових инваријанти напона и девијатора напона:

$$I_1 = \text{tr}(\sigma), J_{2D} = \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t} \mathbf{s} {}^{t+\Delta t} \mathbf{s}$$

Функција течења:

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_{2D}} - k$$

Г. IF ($ABS(f) \geq TOL$) врати назад на **В** са новим $d\lambda$:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^p = {}^t \mathbf{e}^p + d\mathbf{e}^p$$

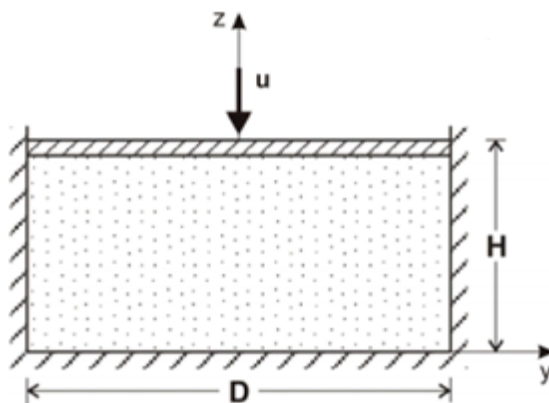
Д. Крај: ${}^{t+\Delta t} \sigma, {}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^p$

7 Верификација развијеног алгоритма

У овом поглављу је извршена верификација Дракер-Прагер материјалног модела без ојачања. Циљ овог рада је доказивање да у специјалним случајевима геометрије модела као и оптерећења која на њега делују (описаних у поглављу 4), могуће уместо коначних 3D елемената, користити 2D елементе за креирање геометрије модела. У овом раду је извршена анализа четири примера. У сваком од примера моделирање је извршено помоћу коначних 2D елемената, а затим је извршена анализа применом програмског пакета ПАК, у коме је имплементирана теорија дата у поглављу 5 и 6, према методи водећег параметра (GPM), као и према методи инкременталне пластичности (IPM). За исте примере креирани су модели који се састоје од 3D коначних елемената, а затим под истим граничним условима и оптерећењима је извршена анализа применом програма ПАК и Adina. Добијени резултати су приказани дијаграмима где се може видети, да за анализиране случајеве имамо потпуно поклапање резултата добијених методом водећег параметра и методом инкременталне пластичности са резултатима програма ПАК и Adina. Ознака FS на дијаграмима зависности $I_1 - \sqrt{J_{2D}}$ означава површ лома (*Failure Surface*).

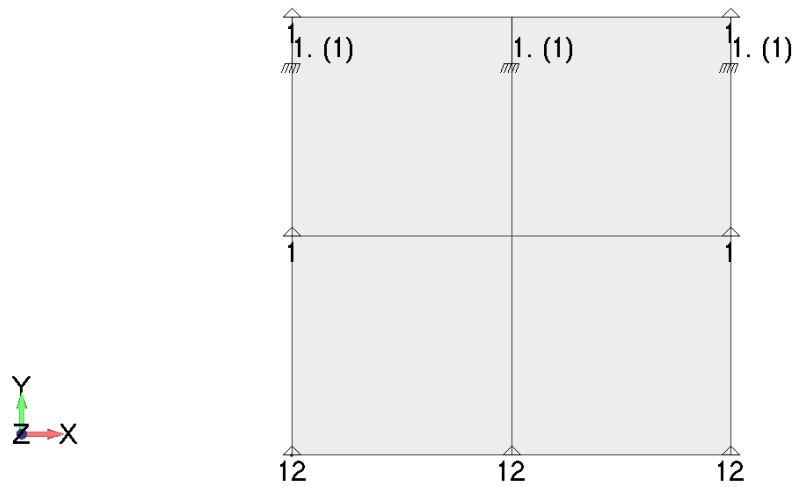
7.1 Еласто-пластична анализа пешчаног калупа

У овом примеру је анализиран пешчани калуп који је оптерећен једноосним притиском. На слици 7.1.1 је приказана шема модела пешчаног калупа са назначеним димензијама.



Слика 7.1.1 Шематски приказ модела пешчаног калупа

На слици 7.1.2 је приказан модел креиран помоћу четири 2D коначна елемента са постављеним ограничењима и оптерећењима. Доња страна модела је потпуно ограничена, док је на бочним страницама модела дозвољено клизање.



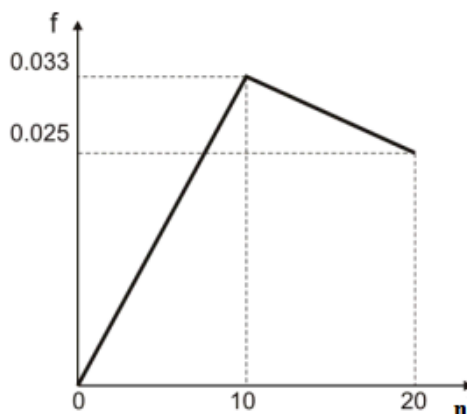
Слика 7.1.2 Геометрија модела

Подаци о материјалу, као и димензије модела преузети су из литературе [8] и дате су у табели 7.1.

Табела 7.1 Материјални подаци и димензије модела пешчаног калупа

Јангов модул	$E=100 \text{ MPa}$
Поасонов коефицијент	$\nu=0.3$
Параметар функције течења	$\alpha=0.05$
Параметар функције течења	$k=0.1$
Дужина модела	$D=1.0 \text{ m}$
Висина модела	$H=0.5 \text{ m}$

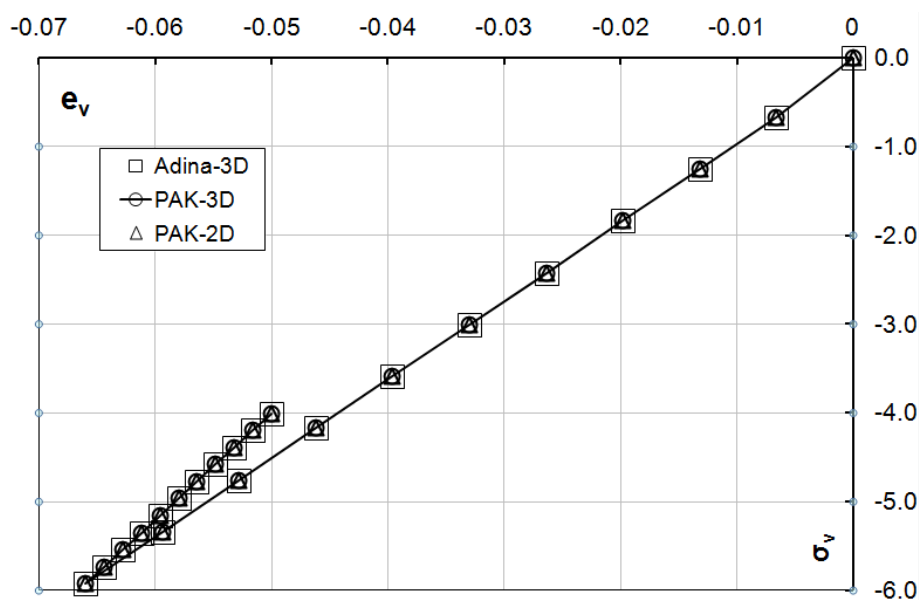
У овом примеру модел је оптерећен једноосним притиском, при чему је прво извршено оптерећење а затим растерећење модела. Померање је задато у 20 корака. Оптерећење модела је извршено у 10 једнаких инкремената са прираштајем померања 3.3×10^{-3} , док је растерећење такође извршено у 10 једнаких корака са прираштајем померања од 0.8×10^{-3} . Функција оптерећења модела је приказана на слици 7.1.3.



Слика 7.1.3 Функција оптерећења модела

Како би се извршила верификација развијеног алгоритма креирана су два модела: коришћењем 3D коначних елемената и коришћењем 2D коначних елемената. Проблем је решаван коришћењем програмског пакета ПАК [9] у коме је имплементиран алгоритам приказан у поглављу 6. Резултати анализе применом 3D и 2D коначних елемената, као и применом програма Adina [10] су приказани на сликама 7.1.4 и 7.1.5.

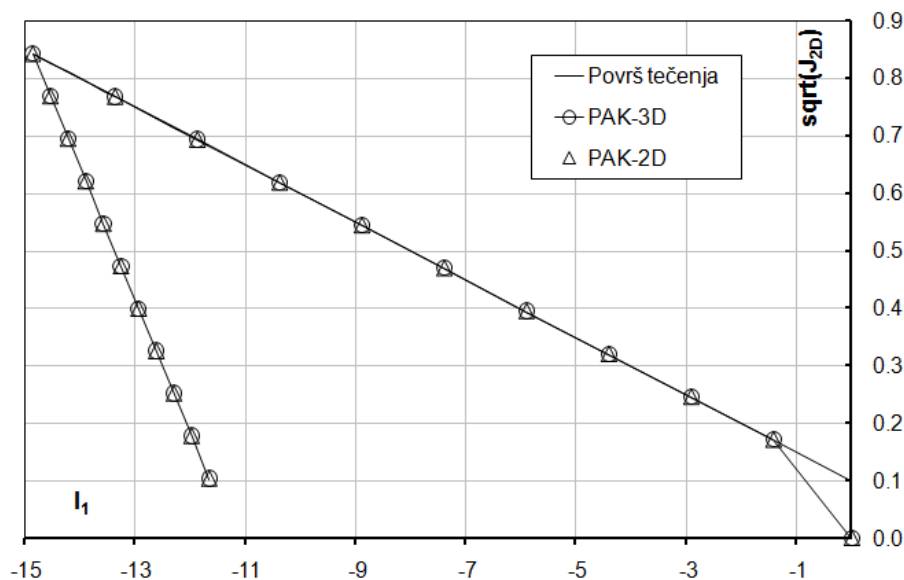
На слици 7.1.4 је приказан дијаграм зависности аксијалног напона од аксијалне деформације, где можемо видети да се добијени резултати за модел креиран помоћу 2D коначних елемената потпуно поклапају са резултатима за модел креиран помоћу 3D коначних елемената.



Слика 7.1.4 Аксијални напон у функцији аксијалне деформације

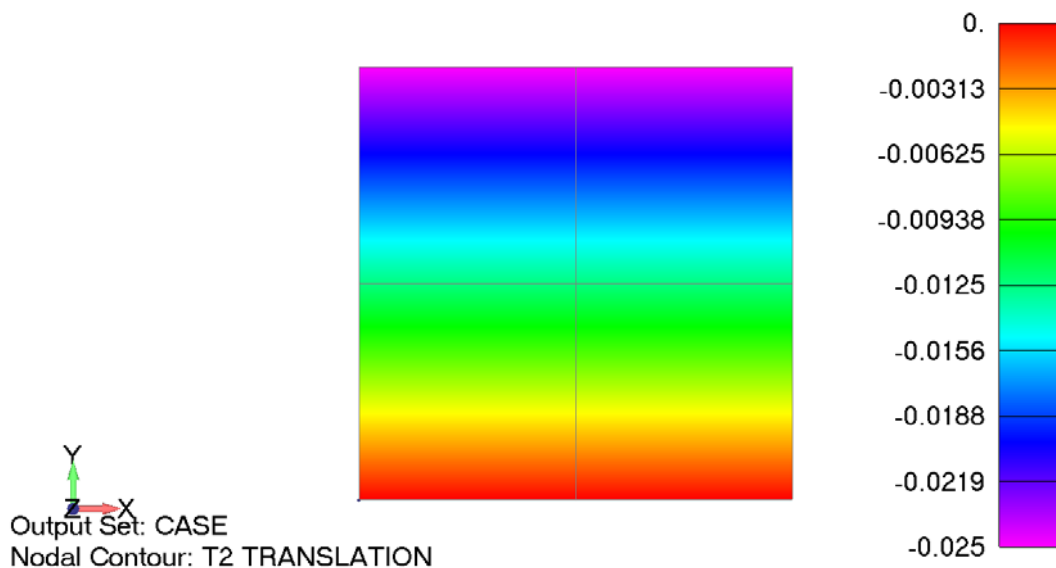
На слици 7.1.5 приказан је дијаграм зависности између нормалног и смичућег напона изражен преко прве инваријанте напона и корена друге инваријанте девијатора напона. За

случај примене Дракер-Прагер материјалног модела у режиму оптерећења, пластично течење се одвија на Дракер-Прагер површи течења, док у режиму растерећења напонска тачка се налази у области еластичности што се може видети на слици 7.1.5.

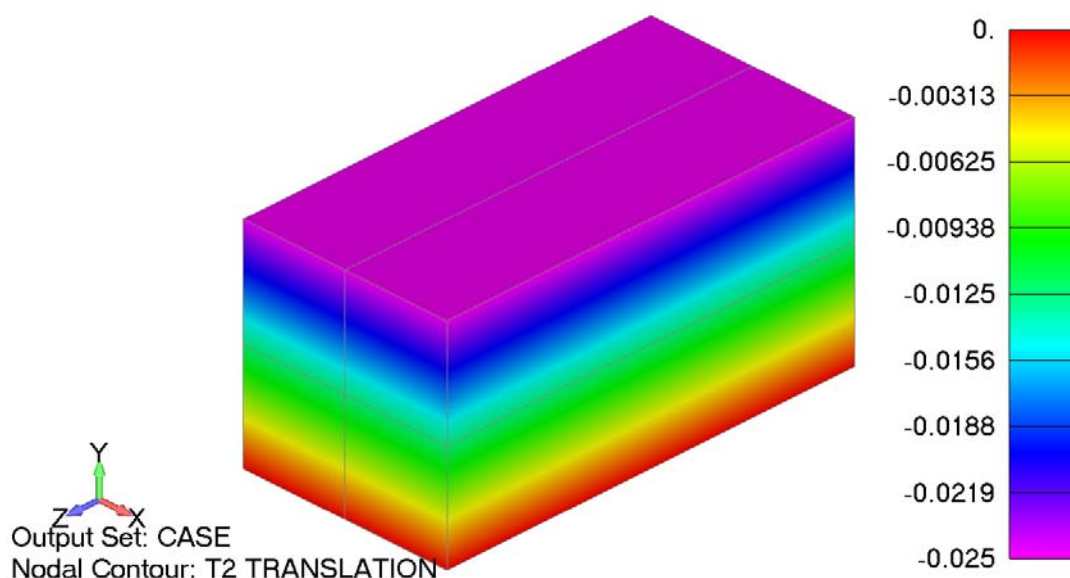


Слика 7.1.5 Друга инваријанта девијатора напона у функцији од прве инваријанте напона за Дракер-Прагер конститутивни модел

На сликама 7.1.6 и 7.1.7 је приказано поље померања модела у правцу деловања притиска у последњем кораку оптерећења, за 2D модел и за 3D модел при раванском стању деформација.



Слика 7.1.6 Поље вертикалног померања код 2D елемента

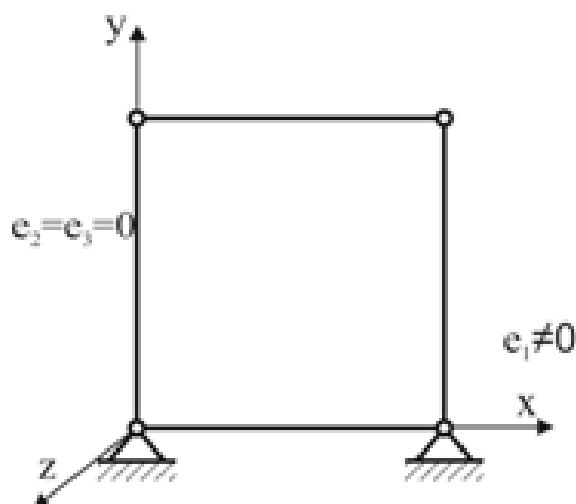


Слика 7.1.7 Поље вертикалног померања код 3D елемента

На основу расподеле померања која су дата на сликама 7.1.6 и 7.1.7, можемо закључити да се резултати добијени за 2D модел у потпуности поклапају са резултатима добијеним за 3D модел при раванском стању деформација.

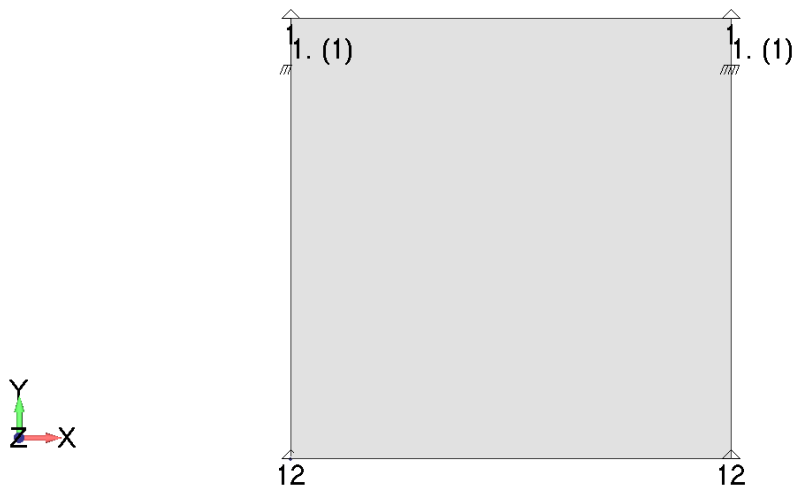
7.2 Једноосни притисак (Вишеструко оптерећење)

У овом примеру је извршена анализа еласто-пластичног материјала, који је оптерећен притиском у правцу једне осе, док су померања модела у бочним правцима спречена (Едометарски тест). На слици 7.2.1 је дат шематски приказ модела.



Слика 7.2.1 Једноосно сабијање модела

На слици 7.2.2 је приказан модел креиран помоћу једног 2D коначног елемента са одговарајућим ограничењима и оптерећењима у програмском пакету Femap [11].



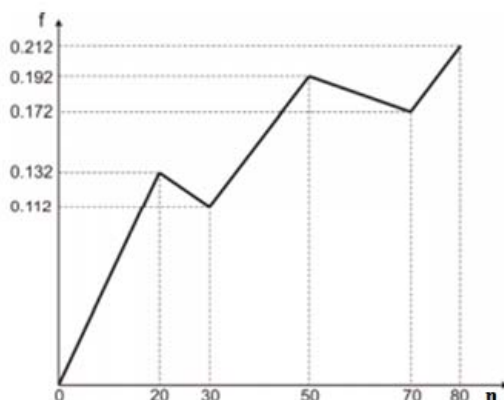
Слика 7.2.2 Геометрија модела са постављеним граничним условима и оптерећењем

Подаци о материјалу су преузети из литературе [12] и дате су у табели 7.2.

Табела 7.2 Материјални подаци и димензије модела

Јангов модул	$E=100 \text{ МПа}$
Поасонов коефицијент	$\nu=0.25$
Параметар функције течења	$\alpha=0.05$
Параметар функције течења	$k=0.25$
Дужина модела	$D=2.0 \text{ m}$
Висина модела	$H=2.0 \text{ m}$

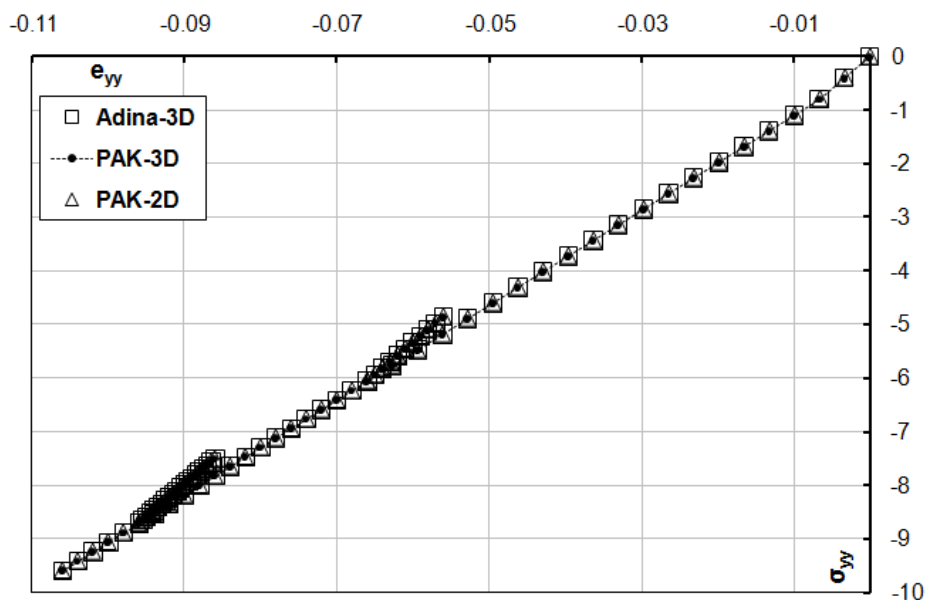
У овом тесту је извршена анализа модела са вишеструким оптерећењем и растерећењем. Оптерећење модела је извршено преко задатих померања, коришћењем функције оптерећења модела која је дата на слици 7.2.3. Померење модела је задато у 80 корака при чему је оптерећење модела извршено у 50 једнаких инкремената са прираштајем померања 4.64×10^{-3} , што укупно износи 232×10^{-3} , док је растерећење извршено у 30 корака и прираштајем померања од 0.66×10^{-3} .



Слика 7.2.3 Функција оптерећења модела

У циљу верификовања развијеног алгоритма извршено је креирање два модела: коришћењем 3D коначних елемената и коришћењем 2D коначних елемената. Анализа је извршена коришћењем програмског пакета ПАК [9] у коме је имплементиран алгоритам приказан у поглављу 6. Резултати анализе применом 3D и 2D коначних елемената, као и применом програма Adina су приказани на сликама 7.2.4 и 7.2.5.

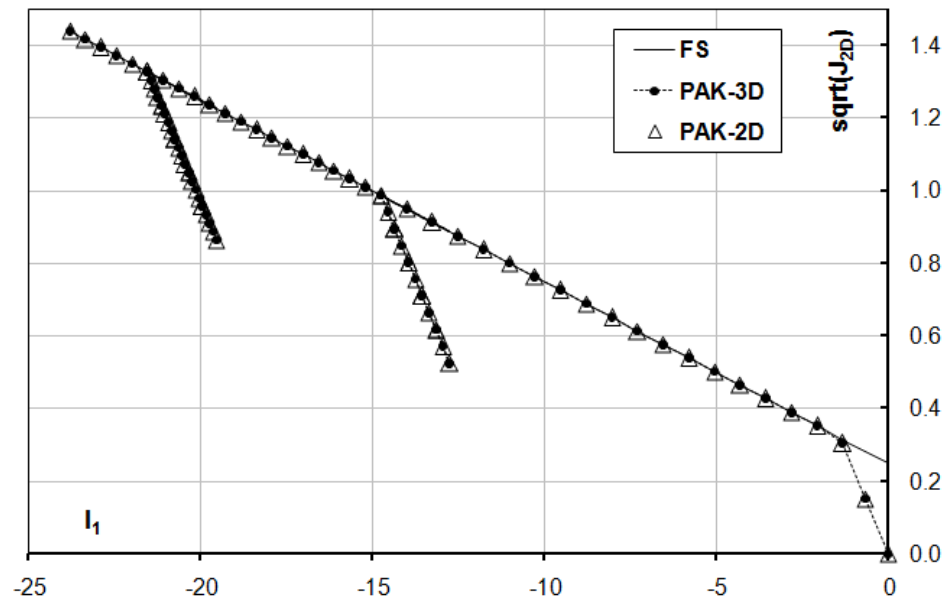
На слици 7.2.4 је приказан дијаграм зависности вертикалног напона од вертикалне деформације, где можемо видети да се добијени резултати за модел креиран помоћу 2D коначних елемената потпуно поклапају са резултатима за модел креиран помоћу 3D коначних елемената.



Слика 7.2.4 Аксијални напон у функцији аксијалне деформације

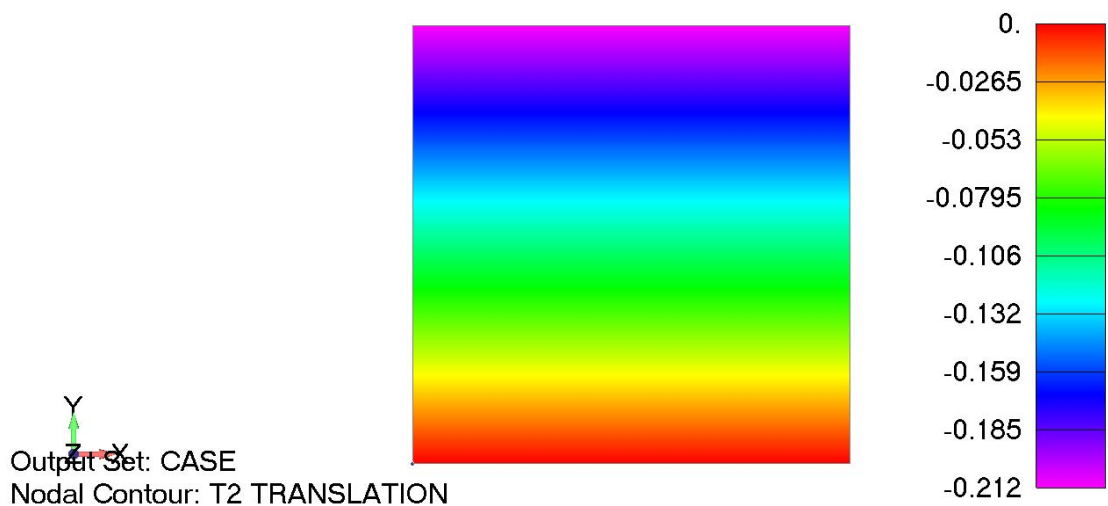
На слици 7.2.5 је приказан дијаграм зависности прве инваријанте напона од друге инваријанте девијатора напона. За случај примене Дракер-Прагер материјалног модела у

режиму оптерећења, пластично течење се одвија на Дракер-Прагер површи течења, док у режиму растерећења напонска тачка се налази у области еластичности што се може видети на слици 7.2.5.

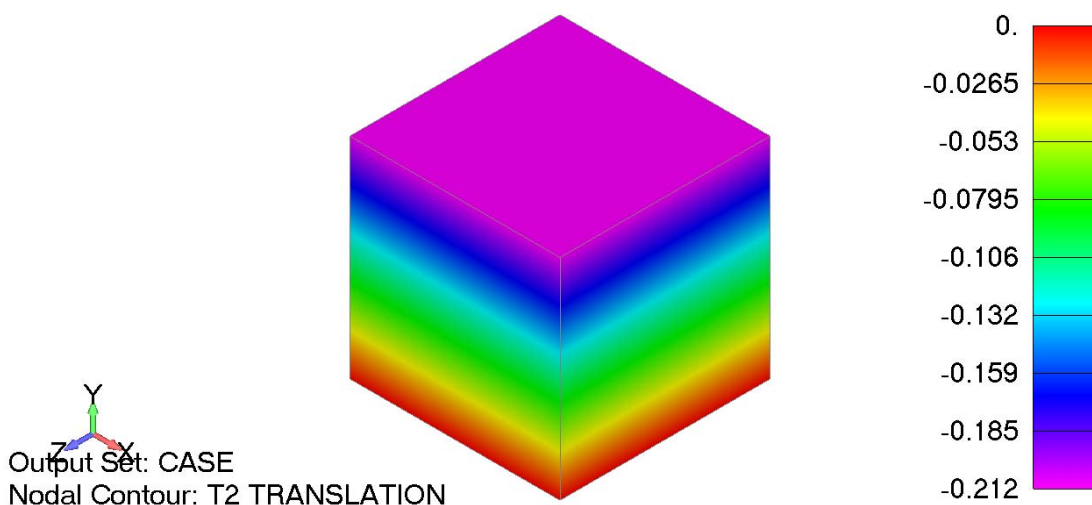


Слика 7.2.5 Друга инваријанта девијатора напона у функцији од прве инваријанте напона за Дракер-Прагер конститутивни модел

На сликама 7.2.6 и 7.2.7 је приказано поље вертикалног померања модела у последњем кораку оптерећења за 2D модел, као и за 3D модел при раванском стању деформација.



Слика 7.2.6 Поље вертикалног померања код 2D модела

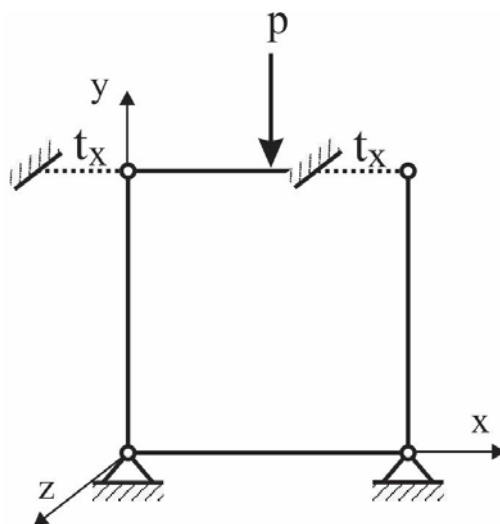


Слика 7.2.7 Поље вертикалног померања код 3D модела

На основу расподеле померања која су дата на сликама 7.2.6 и 7.2.7, можемо закључити да су резултати добијени за 2D модел идентични са резултатима добијеним за 3D модел при раванском стању деформација.

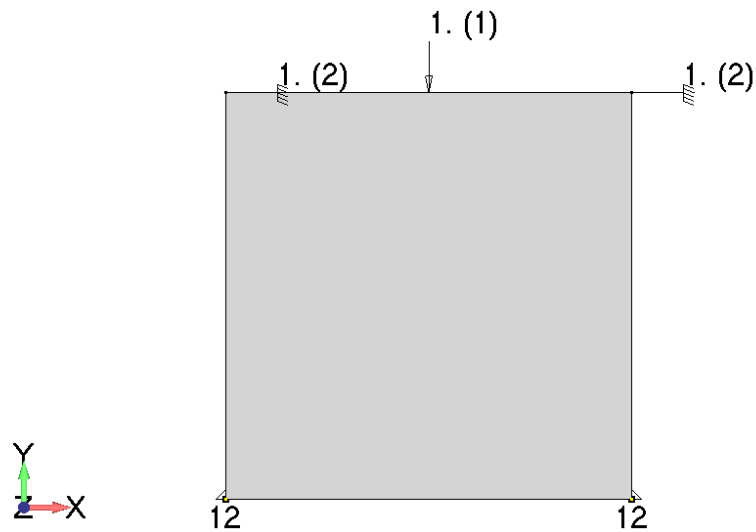
7.3 Тест директног смицања

Верификација развијеног алгоритма за интеграцију напона је извршена и кроз нумеричку симулацију теста директног смицања. Овај релативно једноставни тест често се користи за одређивање карактеристика материјала тла, па је и његова симулација погодна за верификацију материјалних модела. На слици 7.3.1 је дат шематски приказ модела.



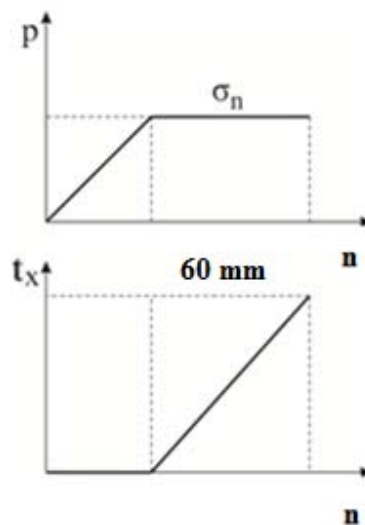
Слика 7.3.1 Модел за симулацију теста директног смицања

На слици 7.3.2 је приказан модел са постављеним ограничењима и оптерећењима.



Слика 7.3.2 Геометрија модела са постављеним ограничењима и оптерећењима

У првој фази оптерећења је задат вертикални притисак до нивоа напона коришћеног у тесту. Након достизања задатог напона, вршено је смицање модела у хоризонталном правцу коришћењем задатих померања. Функције оптерећења модела приказане су на слици 7.3.3.



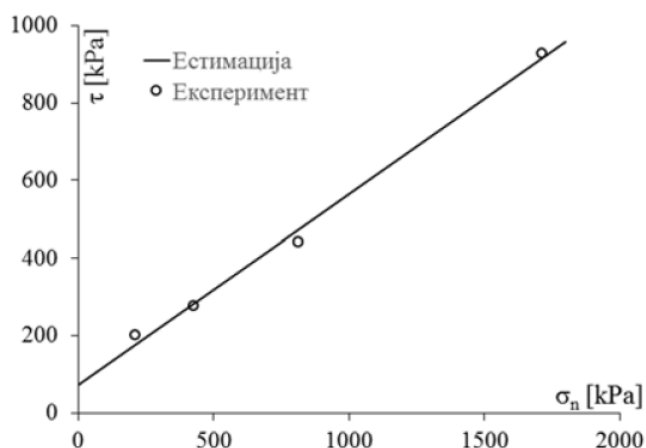
Слика 7.3.3 Функције оптерећења модела

Резултати испитивања анализираног модела су приказани у табели 7.3 и представљају зависност смичућег напона при лому за одговарајуће вредности нормалних напона.

Табела 7.3 Измерене вредности напона при лому

Узорак бр.	σ_n [kPa]	τ [kPa]
1	209	200
2	426	276
3	813	440
4	1713	927

Коришћењем измерених вредности из табеле 7.3, извршена је естимација параметра Дракер-Прагер материјалног модела.



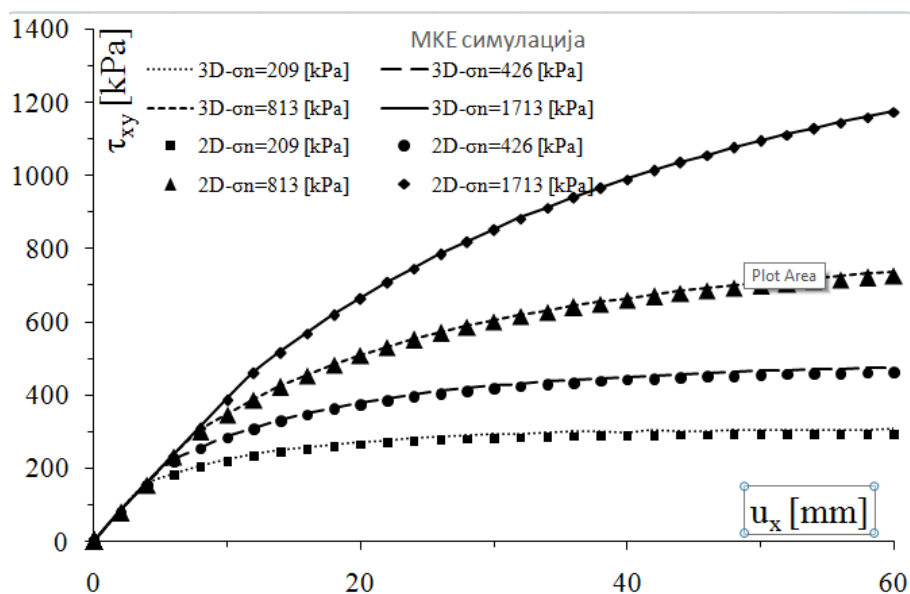
Слика 7.3.4 Естимација параметра материјала Дракер-Прагер модела

Резултат естимације применом Дракер-Прагер материјалног модела је приказана слици 7.3.4, док су параметри модела усвојени након естимације приказане у табели 7.4.

Табела 7.4 Естимирани параметри материјала за Дракер-Прагер модел

Назив параметра	Ознака	Вредност
Модул еластичности	E	100 MN/m ²
Поасонов коефицијент	ν	0.3
Параметар ф-је течења	α	0.260
Параметар ф-је течења	k	31.26 kN/m ²

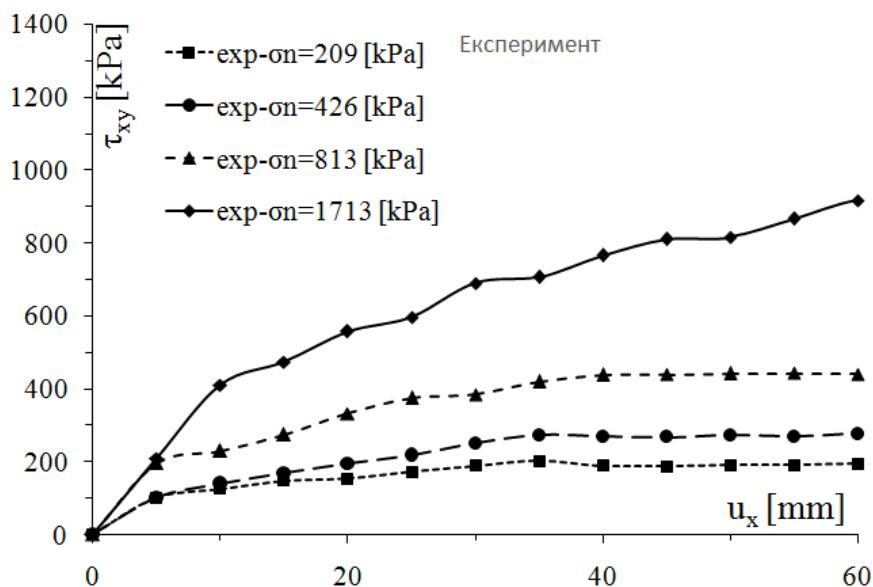
У овом примеру извршена је анализа четири случаја оптерећења. У сваком случају исте су функције оптерећења, али се мења вредност нормалног напона датих у табели 7.3. Добијени симулациони резултати за различите вредности нормалног напона, приказани су на слици 7.3.5 у облику зависности смичућег напона од померања у хоризонталном правцу за 2D и 3D елементе.



Слика 7.3.5 Резултати симулације теста чистог смицања за 3D и 2D коначне елементе

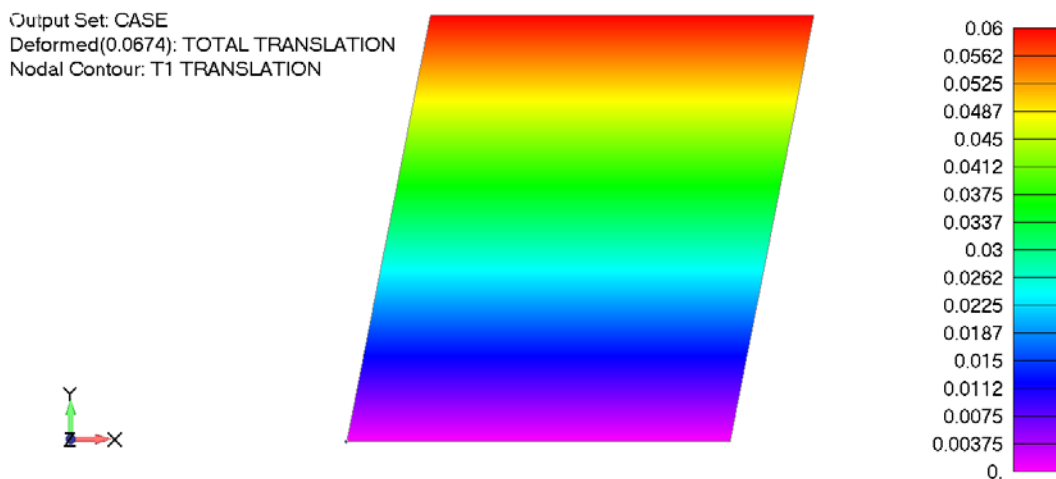
На основу датих дијаграма на слици 7.3.5 можемо закључити да се добијени резултати за 2D коначне елементе поклапају са резултатима за 3D коначне елементе.

На слици 7.3.6 су приказани дијаграми зависности померања у хоризонталном правцу од смичућег напона при различитим вредностима нормалних напона добијених експерименталним путем.

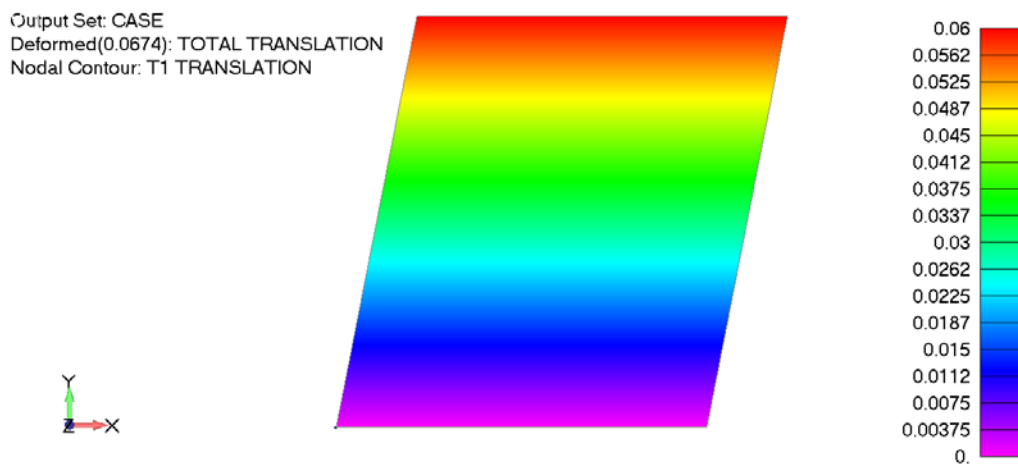


Слика 7.3.6 Резултати експеримента теста чистог смицања

На основу поређења дијаграма закључујемо да се симулациони резултати поклапају са експерименталним резултатима.



Слика 7.3.7 Поље померања 2D модела у хоризонталном правцу



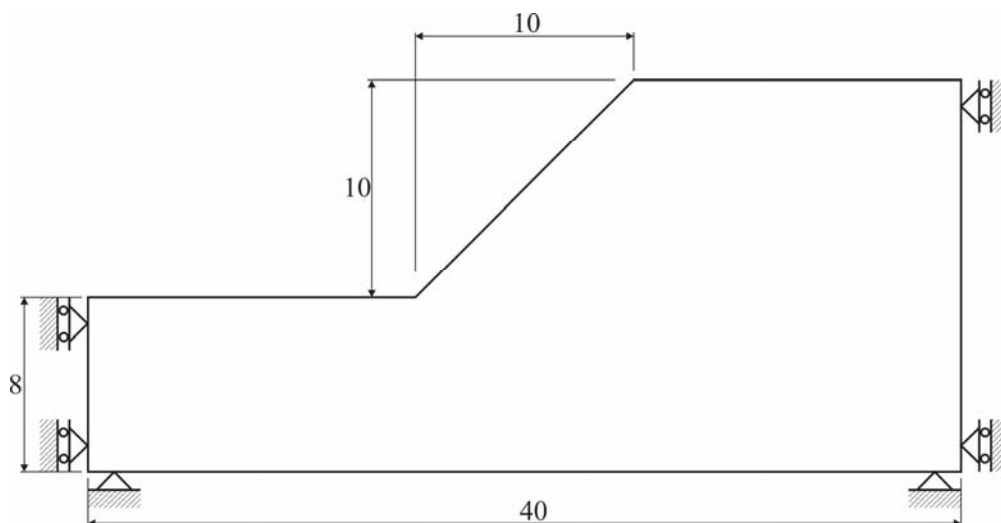
Слика 7.3.8 Поље померања 3D модела у хоризонталном правцу

На сликама 7.3.7 и 7.3.8 је приказано поље хоризонталног померања при деловању нормалног напона $\sigma_n=209$ kPa и хоризонталног померања у последњем кораку оптерећења за 2D и 3D модел респективно. На основу добијених поља померања закључујемо да се резултати добијени коришћењем коначних 2D елемената поклапају са резултатима модела који је креиран помоћу 3D елемената при равном стању деформације.

7.4 Одређивање стабилности косине

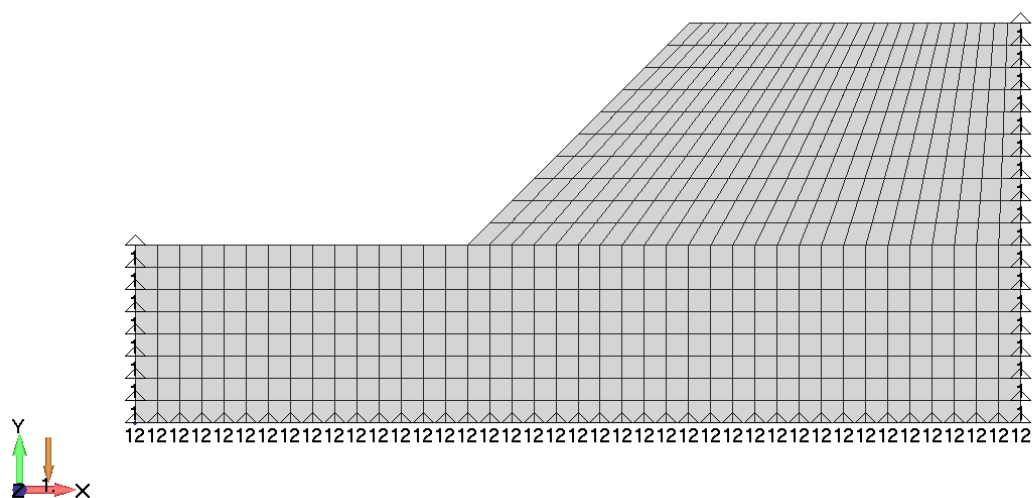
У овом примеру извршена је анализа стабилности косине висине 10 метара, нагиба 45° чији је шематски приказ са назначеним димензијама дат на слици 7.4.1. Како би се извршила верификација развијеног алгоритма креирана су два модела помоћу 2D и 3D

коначних елемената, а затим под истим граничним условима и оптерећењима извршена је анализа модела у програмском пакету ПАК.



Слика 7.4.1 Шематски приказ модела

Модел је оптерећен сопственом тежином и садржи једну геотехничку средину. На слици 7.4.2 је приказан 2D модел, са задатим ограничењима и оптерећењима.



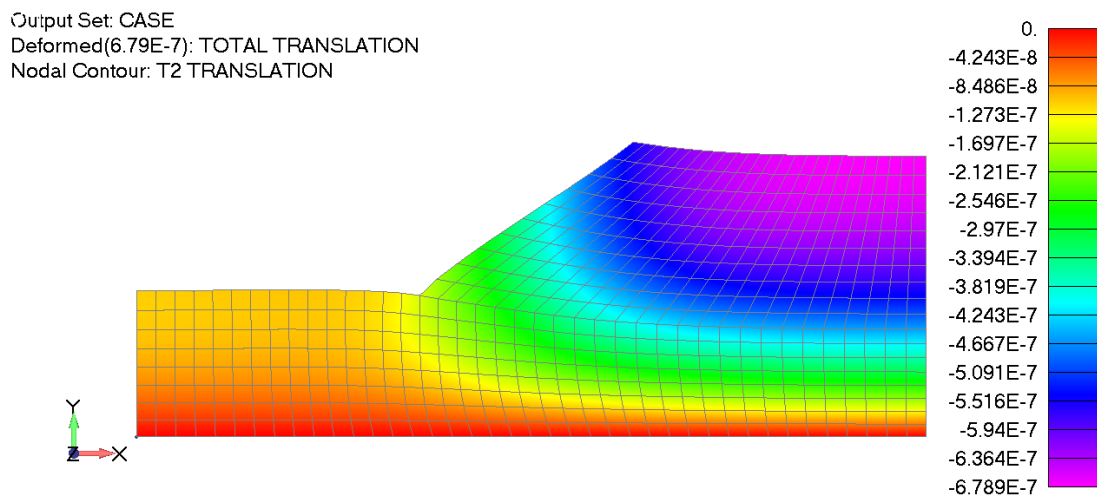
Слика 7.4.2 Изглед модела и гранични услови

Параметри коришћеног Дракер-Прагер материјалног модела приказани су у табели 7.5.

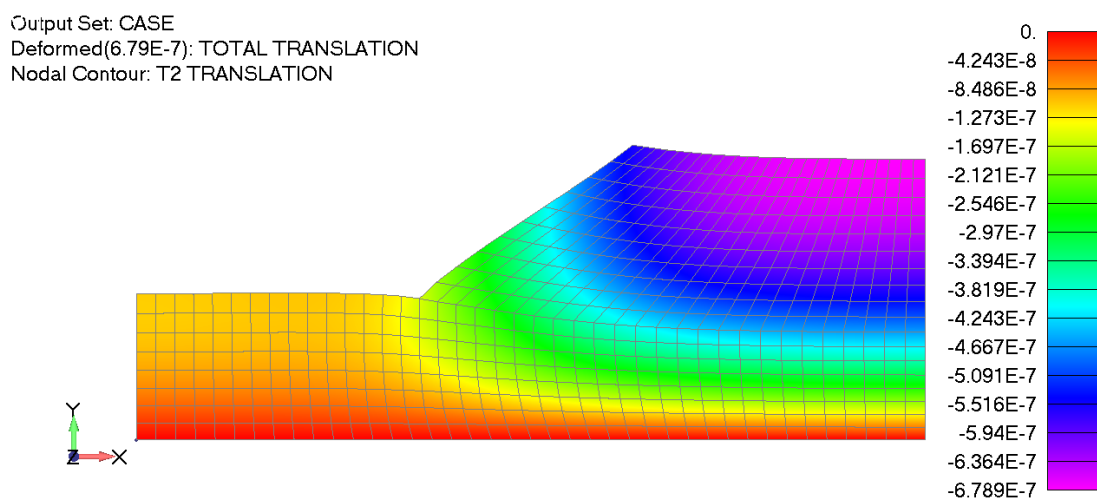
Табела 7.5 Естимирани параметри материјала Дракер-Прагер модела

Назив параметра	Ознака	Вредност
Модул еластичности	E	$5 \times 10^6 \text{ MN/m}^2$
Поасонов коефицијент	ν	0.3
Параметар ϕ -је течења	α	0.0994
Параметар ϕ -је течења	k	25.2035

Такође је извршено креирање модела помоћу 3D осмочворних коначних елемената јединичне дебљине. Пошто је анализирано равно стање деформације, спречена су померања у правцу осе z . Анализа стабилности косине моделиране помоћу 2D и 3D коначних елемената извршена је у програмском пакету ПАК.

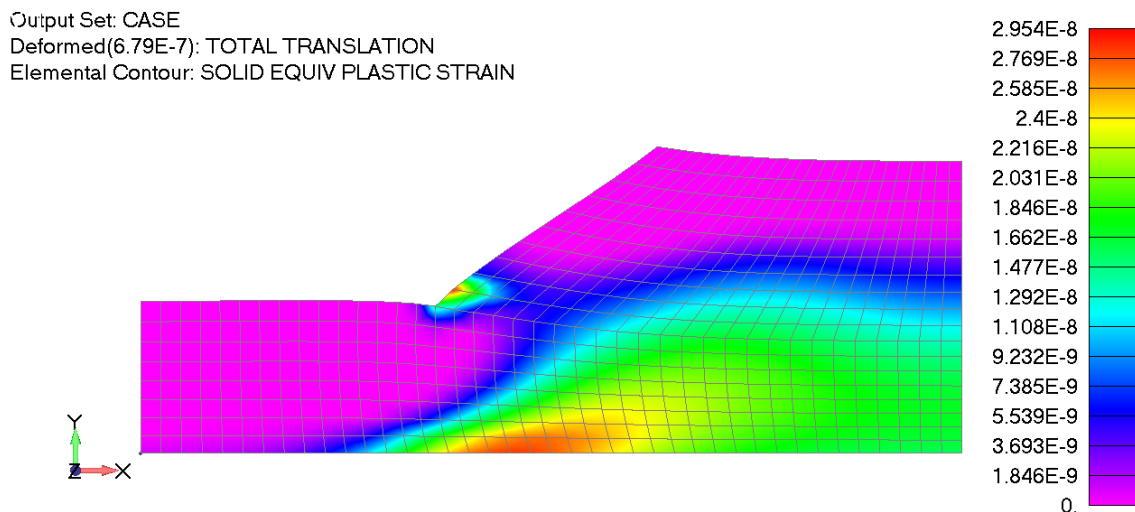


Слика 7.4.3 Поље вертикалног померања за 2D елементе

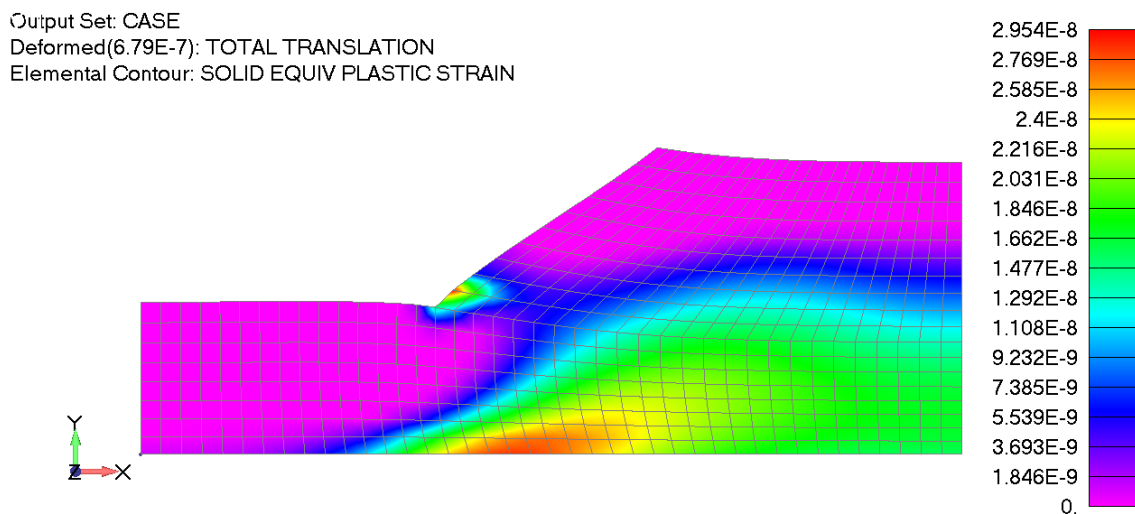


Слика 7.4.4 Поље вертикалног померања за 3D елементе

На сликама 7.4.3 и 7.4.4 је приказано поље померања у вертикалном правцу, услед деловања сопствене тежине. На основу расподеле поља померања закључујемо да се резултати добијени коришћењем коначних 2D елемената поклапају са резултатима модела који је креиран помоћу 3D елемената.



Слика 7.4.5 Поље пластичне деформације за 2D елементе2



Слика 7.4.6 Поље пластичне деформације за 3D елементе

На сликама 7.4.5 и 7.4.6 су приказана поља пластичне деформације за 2D и 3D елементе.

8 Закључак

При писању овог рада, на самом почетку дефинисане су механичке величине које описују стање унутрашњих сила у материјалу, тј. напони и деформације. Дате су дефиниције тензора напона и тензора деформације, а у наставку су дефинисане напонске инваријанте и дата је конвенција о знаку напона.

Напони и деформације дефинисани у поглављу два користе се за описивање унутрашњих сила и стања деформисаности материјала за све континуално распоређене материјале, али оне не садрже информацију о карактеристикама материјала. Да би се одредио степен деформисаности неког континуума у поглављу три уведене су конститутивне релације које повезују напоне и деформације и садрже карактеристике материјала.

У четвртом поглављу описани су услови на основу којих је развијен алгоритам за имплицитну интеграцију напона при раванском стању деформације, затим је извршена модификација тензора напона и деформације и њихово свођење на вектор напона и вектор деформације. На крају одељка извршена је и модификација еластичне конститутивне матрице.

У петом поглављу овог рада дефинисани су појмови као што су површ течења и површ пластичог потенцијала, а затим је дат математички услов који ограничава положај напонске тачке у тродимензионалном простору главних напона. На крају овог одељка извршено је детаљно извођење еласто-пластичне конститутивне матрице.

Поглавље шест представља централну тему овог рада који садржи основне теоријске поставке Дракер-Прагер материјалног модела, а затим су изведене одређене релације које су неопходне за одређивање еласто-пластичне конститутивне матрице. На основу дате теорије, развијени су алгоритми, како би се ова теорија имплементирала у програмски пакет ПАК.

Седмо поглавље представља верификацију развијеног материјалног модела кроз примере из литературе. У овом делу извршено је креирање геометрије модела помоћу коначних 2D и 3D елемената, а затим под истим условима извршена је нумеричка анализа у програмским пакетима ПАК и Adina, након чега је извршено поређење добијених резултата. На основу приказаних резултата у овом поглављу може се закључити да развијени модел, као и развијени алгоритми, дају добра решења тест примера, са решењима која дају други софтвери.

На основу изнешеног, као даљи развој програмског пакета ПАК могуће је развити алгоритме за интеграцију напона при равном стању деформације за друге материјалне моделе, а затим их имплементирати у програмски пакет ПАК.

Литература

- [1] М. Којић, Р. Славковић, М. Живковић и Н. Грујовић, Метод коначних елемената 1 - Линеарна анализа, Крагујевац: Универзитет у Крагујевцу, Машински факултет, 2010.
- [2] К. Милош, Општи концепт имплицитне интеграције конститутивних релација при нееластичном деформисању материјала, Крагујевац, 1993.
- [3] В. Лубарда, Отпотност материјала (увод у механику деформибилног тела), Подгорица, 1989.
- [4] Д. Ракић, Докторска дисертација, Крагујевац, 2014.
- [5] H.-S. Yu, Plasticity and Geotechnics, Advances in Mechanics and Mathematics, 2006.
- [6] М. Максимовић, Механика тла, Крагујевац, 2005.
- [7] K.J.Bathe, Finite Element Procedures, Massachusetts Institute of Technoogy, 1996.
- [8] Д. Ракић, Нумеричко решавање геомеханичких проблема применом Дракер-Прагер материјалног модела, Магистарска теза, Крагујевац: Универзитет у Крагујевцу, Машински факултет, 2009.
- [9] С. Р. М. Н. Којић М., PAK-finite element program for linear and nonlinear structural analysis and heat transfer, Kragujevac: Faculty for Mechanical Engineering, 1998.
- [10] K.J.Bathe, ADINA System for linear and nonlinear finite element analysis of solids and structures, 1986.
- [11] Siemens, Femap - Finite Element Modeling and PostProcessing Application FEMAP v11.3.2, 2015.
- [12] F. L. X. DiMaggio, Material model for granular soils, Tehran: Elsevier, 1971.

Додатак

Имплементација развијеног алгоритма за интеграцију напона у програмском пакету ПАК

```

C=====
CS  Drucker-Prager materijalni model sa kapom 2D ELEMENT
CE  Drucker-Prager cap model 2D ELEMENT
C=====
CE  SUBROUTINE D2M41
C
    SUBROUTINE D2M41(TAU,DEF,IRAC,LPOCG,LPOC1,IBTC)
        IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C
CE  PROGRAM FOR DEFINITION OF LOCATIONS AT INTEGRATION PIONT LEVEL
C
    include 'paka.inc'
C
    COMMON /ELEMEN/ ELAST(6,6), XJ(3,3), ALFA(6), TEMP0, DET, NLM, KK
    COMMON /ELEIND/ NGAUSX, NGAUSY, NGAUSZ, NCVE, ITERME, MAT, IETYP
    COMMON /REPERM/ MREPER(4)
    COMMON /DUPLAP/ IDVA
    COMMON /CDEBUG/ IDEBUG
C
    DIMENSION TAU(4), DEF(4)
C
    IF(IDEBUG.GT.0) PRINT *, ' D2M41'
C
    LFUN=MREPER(1)
    LNTA=MREPER(2)
    MATE=MREPER(4)
C
    LTAU=LPOCG
    LDEFT=LTAU + 4*IDVA
    LDEFPP=LDEFT + 4*IDVA
    LEMP=LDEFPP + 4*IDVA
    LXT=LEMP + 1*IDVA
C
    LTAU1=LPOC1
    LDEFT1=LTAU1 + 4*IDVA
    LDEFPP1=LDEFT1 + 4*IDVA
    LEMP1=LDEFPP1 + 4*IDVA
    LXTDT=LEMP1 + 1*IDVA
C
    CALL TI2441(A(LTAU),A(LDEFT),A(LDEFPP),A(LEMP),A(LXT),
+      A(LTAU1),A(LDEFT1),A(LDEFPP1),
+      A(LEMP1),A(LXTDT),
+      A(LFUN),A(LNTA),MATE,TAU,DEF,IRAC,IBTC)
C

```

```

      RETURN
      END
C=====
      SUBROUTINE TI2441(TAUT,DEFT,DEFPP,EMP,XT,
+          TAU1,DEF1,DEFP1,EMP1,XTDT,
+          FUN,NTA,MATE,TAU,DEF,IRAC,IBTC)
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C
CS  PODPROGRAM ZA INTEGRACIJU KONSTITUTIVNIH RELACIJA ZA
CS  DRUCKER-PRAGER MODEL
CE  PROGRAM FOR STRESS INTEGRATION FOR DRUCKER-PRAGER MODEL
C
      COMMON /ELEIND/ NGAUSX,NGAUSY,NGAUSZ,NCVE,ITERME,MAT,IETYP
      COMMON /PERKOR/ LNKDT,LDTDT,LVDT,NDT,DT,VREME,KOR
      COMMON /TAUD2/ TAUD(4),DEFDPR(4),DEFDS(4),DDEFP(4),
+          DETAU(4),DDEF(4)
      COMMON /ELEMEN/ ELAST(6,6),XJ(3,3),ALFA(6),TEMP0,DET,NLM,KK
      COMMON /PLASTI/ LPLAST,LPLAS1,LSIGMA
      COMMON /ELEALL/ NETIP,NE,IATYP,NMODM,NGE,ISKNP,LMAX8
      COMMON /ITERAC/ METOD,MAXIT,TOLE,TOLS,TOLM,KONVE,KONVS,KONVM
      COMMON /ITERBR/ ITER
      COMMON /CONMAT/ AE,EP,DVT
      COMMON /MATERb/ korz(100,100,3),evg(100,100,3)
      COMMON /CDEBUG/ IDEBUG
C
      DIMENSION TAUT(4),DEFT(4),DEFPP(4),TAU(4),DEF(4),TAU1(4),DEF1(4),
+          DEFP1(4)
      DIMENSION FUN(11,*),NTA(*),DSIG(4),DEPS(4),DFDS(4),DGDS(4),ALAM(4)
+          ,CP(4,4),POM(4), CEP(4,4),DDEFE(4),dsigp(4)
+          ,DFdDS(4),DFcDS(4),DGdDS(4),DGcDS(4),ALAMd(4),ALAMc(4)
+          ,al1p(4),al2p(4),ddefpd(4),ddefpc(4),taue(4)
c
      IF(IDEBUG.EQ.1) PRINT *, 'TI2441'
c
      IF(IRAC.EQ.2) RETURN
c  basic constants
      toll= 1.d-8
      tol = 1.d-6
      maxt= 500
c=====
c  material constants
      E    = FUN(1,MAT)
      ani  = FUN(2,MAT)
      ak   = FUN(3,MAT)
      alf  = FUN(6,MAT)
c=====
c  elasticity matrix for 2d
      call MEL2el(elast,e,ani)
c

```

```

c  de
  call jednal(deps,def,4)  ! deps(i)=def(i)
  call zbirmm(deps,deft,4) ! deps(i)=deps(i)-deft(i)
c
c  dsigEL
  call clear(dsig,4)
  call mnozm1(dsig,elast,deps,6,1,6) ! dsig(i,j)=elast(i,k)*deps(k,j)
c
c  sigEL
  call zbir2b(tau,tauT,dsig,4)  ! tau(i)=taut(i)+dsig(i)
c
c  I1      (јед.2.20a)
  ai1e=tau(1)+tau(2)+tau(4)      ! I1=sigma1+sigma2+sigma3
c
c  J2de      (јед.2.20б)
  aj2de=1.d0/6.d0*((tau(1)-tau(2))*(tau(1)-tau(2))+
+      (tau(2)-tau(4))*(tau(2)-tau(4))+
+      (tau(4)-tau(1))*(tau(4)-tau(1)))+
+      tau(3)*tau(3))
c
c  sqrt(j2de)
  aj2de=dsqrt(aj2de*aj2de)
  aj2dqe=dsqrt(aj2de)
c
c  tension cutoff limit
  if(ai1e.gt.T) then
    do I=1,4
      tau(I)=T/3.d0
    enddo
    tau(3)=0
    goto 400
  endif
c
c  increment of plastic strain is zero in elastic domain
  ddefp(1)=0.d0
  ddefp(2)=0.d0
  ddefp(3)=0.d0
  ddefp(4)=0.d0
c
c  demp=0.d0
c
c  Drucker-Prager failure surface  (јед.6.1)
  fdpe=alf*ai1e+aj2dqe-ak
  fce=xt-ai1e
  lobl=0
c
c  ai1=ai1e
  call jednal(taue,tau,4)
c
c  domain identification

```

```

    if(fdpe.gt.toll) goto 100
    goto 400
    stop 'Drucker-Prager passed all conditions!!!'
c=====
c    elastic-plastic domain
c    dF/dSgima
100  iobl=1
    dfds(1)=alf+( 2.d0*tau(1)-tau(2)-tau(4))/(6.d0*aj2dqe)
    dfds(2)=alf+(-tau(1)+2.d0*tau(2)-tau(4))/(6.d0*aj2dqe)
    dfds(3)=tau(3)/aj2dqe
    dfds(4)=alf+(-tau(1)-tau(2)+2.d0*tau(4))/(6.d0*aj2dqe)
c
c    dG/dSigma = dF/dSigma
c    call jedna1(dgds,dfds,4)      ! dgds(i)=dfds(i)
c
c    labdaA
c    call clear(alam,4)
c    call mnozt1(alam,dfds,elast,6,6) ! alam(i)=dfds(j)*elast(j,i)
c    fcg=dot(alam,dgds,4)
c    dlam=dot(alam,deps,4)
c    dlam=dlam/fcg
c
c    initialization
c    call jednak(ddefp,dgds,dlam,4)
c    call oduz2b(ddefe,deps,ddefp,4)
c    call clear (dsig,4)
c    call mnozi1(dsig,elast,ddefe,6,6)
c
c    sigma
c    call zbir2b(tau,taut,dsig,4)    ! tau(i)=taut(i)+dsig(i)
c
c    i1
c    ai1=tau(1)+tau(2)+tau(4)
c
c    j2d
c    aj2d=1.d0/6.d0*((tau(1)-tau(2))**2 +
c           (tau(2)-tau(4))**2 +
c           (tau(4)-tau(1))**2)+
c           tau(3)**2
c    sqrt(j2d)
c    aj2d=dsqrt(aj2d*aj2d)
c    aj2dq=dsqrt(aj2d)
c    fdpm=alf*ai1+aj2dq-ak
c
c    I=0
c    dlamp=0.d0
c    dlamm=dlam
c    dx=0.001*dlamm
c    fdp=fdpm
c    fdpp=fdpe

```

```

      af=2.d0
      ib=0
      jp=2
c+++++
110  I = I + 1
      call bisectg (dlam,dlamm,dlamp,dx,fdp,fdpm,fdpp,af,ib,jp)
      call jednak(ddefp,dgds,dlam,4)
      call oduz2b(ddefe,deps,ddefp,4)
      call clear (dsig,4)
      call mnozil(dsig,elast,ddefe,6,6)
c
c      sigma
      call zbir2b(tau,taut,dsig,4)    ! tau(i)=taut(i)+dsig(i)
c
c      I1
      ai1=tau(1)+tau(2)+tau(4)
c
c      j2d
      aj2d=1.d0/6.d0*((tau(1)-tau(2))**2+(tau(2)-tau(4))**2 +(tau(4)-tau(1))**2)+tau(3)**2
c
c      sqrt(j2d)
      aj2d=dsqrt(aj2d*aj2d)
      aj2dQ=dsqrt(aj2d)
c
      demp=(ddefp(1)+ddefp(2)+ddefp(4))/3.d0
      emp1=emp+demp
      evp1=3.d0*emp1
c
c      Drucker-Prager failure surface
      fdp=alf*ai1+aj2dq-ak
c
      if(I.gt.maxt) then
        stop 'Max. num. of iteration in D-P model I'
      endif
      if(dabs(fdp).gt.tol) goto 110
c
      goto 400
c=====
c  updates for next step
400 continue
      call zbir2b(defp1,defpp,ddefp,4)
c=====
c  Corection of values from previous step when convergence is reached
      call jedna1(def1,def,4)
      call jedna1(tau1,tau,4)
      return
      end
c=====

```