



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Мастер академске студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Компјутерска анализа конструкција

Број индекса: 352/2012

Милош М. Зувић

Анализа динамичке стабилности вратила
мастер рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. **Др Зорица Ђорђевић - ментор**

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог мастер рада кандидат треба да:

- да основне напомене о конструкцији и начину прорачуна вратила са посебним освртом на прорачун динамичке стабилности вратила,
- изврши потребан прорачун аналитичким путем како би имао могућност поређења са резултатима добијеним нумеричким путем,
- изабере одговарајућу нумеричку методу за анализу сопствених фреквенција вратила и формира нумерички модел који одговара реалном,
- изврши анализу утицаја геометријских и других карактеристика на стабилност вратила.

Препоручена литература:

- [1] Николић, В., „Машински елементи“, Машински факултет у Крагујевцу, 2004.
- [2] Николић, В., „Механичка анализа елемената зупчастих преносника“, Монографија, Машински факултет у Крагујевцу, 1999.
- [3] Ђорђевић, З., „Динамичко понашање вратила од композитних материјала“, Докторска дисертација, Крагујевац, 2008.

Крагујевац, 2014

ментор:

Зорица Ђорђевић, ванр.проф

Резиме:

У раду је извршена анализа утицаја димензија, облика и карактеристика материјала на динамичку стабилност вратила. У првом делу рада су приказани основни појмови везани за вратило, описане су аналитичка и нумеричка метода прорачуна вратила. Такође, урађена је упоредна анализа резултата сопствених фреквенција вратила аналитичким и нумеричким путем. За формирање нумеричког модела, као и анализу сопствених фреквенција вратила примењен је програмски пакет „Autodesk INVENTOR“. На крају рада су изнети закључци о оптималним димензијама, облику као и врсти материјала вратила по питању вредности сопствених фреквенција.

Кључне речи: *вратило, динамичка стабилност, сопствене фреквенције, метода коначних елемената*

Abstract:

The paper is analyzed the impact of dimensions, shape and and material properties on dynamic stability shaft. In the first part presents the basic concepts related to the shaft, described as analytical and numerical calculation methods shaft. Also conducted a comparative analysis of natural frequencies shaft by analytical and numerical means. For the formation numerical model as well as analyze natural frequencies shaft applied is a software package "Autodesk Inventor". At the end of the work are set out conclusions of for optimal dimensions, shape and type of materials shaft in terms of the value of natural frequencies.

Keywords: *shaft, dynamic stability, natural frequency, finite element method*

САДРЖАЈ:

1. Увод	1
2. Улога и конструкциони облици вратила	2
2.1 Појам и функција вратила	2
2.2 Конструкциони облици и класификација вратила	3
2.2.1 Права вратила	3
2.2.2 Брегаста вратила	4
2.2.3 Коленаста вратила	5
2.2.4 Карданска вратила	6
2.2.5 Гипка вратила	6
2.3 Материјали за израду вратила	7
3. Оптерећење и концентрација напона вратила	9
3.1 Оптерећење вратила	9
3.2 Нападна оптерећења вратила	10
3.2.1 Аксијалне силе	11
3.2.2 Трансверзалне силе	11
3.2.3 Момент савијања	11
3.2.4 Момент увијања	11
3.3 Концентрација напона код вратила	12
4. Критеријуми за прорачун вратила	13
4.1 Прорачун чврстоће вратила	14
4.1.1 Радни напон	14
4.1.2 Критични напон	14
4.2 Прорачун крутости вратила	15
4.2.1 Одређивање деформација при савијању	15
4.2.2 Одређивање деформација при увијању	16
4.2.3 Критичне и дозвољене деформације	17
4.3 Прорачун динамичке стабилности вратила	18
4.3.1 Одређивање критичног броја обртаја при савијању вратила	19
4.3.2 Одређивање критичног броја обртаја при увијању вратила	22

4.3.3 Степен сигурности са аспекта динамичке стабилности вратила	24
5. Примена нумеричких метода за прорачун и анализу вратила	25
5.1 Метода коначних елемената	26
5.1.1 Историјски развој МКЕ	26
5.1.2 Улога компјутера у МКЕ	27
5.1.3 Основни принципи МКЕ	29
5.1.4 Основни кораци у МКЕ	29
5.1.5 Поступак избора типа КЕ	31
5.1.6 Појам крутости КЕ	32
5.1.7 Типови оптерећења	33
5.1.8 Ограничења	33
5.2 Основне једначине у МКЕ	34
6. Прорачун динамичке стабилности вратила	35
6.1 Пример аналитичког прорачуна вратила	35
6.2 Пример нумеричког прорачуна вратила	36
6.3 Анализа резултата	40
7. Анализа утицајних фактора на динамичку стабилност вратила	41
7.1 Утицај врсте материјала на вредност сопствених фреквенција вратила	41
7.2 Утицај дужине вратила на вредност сопствених фреквенција	42
7.3 Утицај спољашњег пречника вратила на вредност сопствених фреквенција	44
7.4 Утицај дебљине зида вратила на вредност сопствених фреквенција	45
7.5 Утицај дужине на вредност сопствених фреквенција вратила од различитог материјала	47
7.6 Утицај облика вратила на вредност сопствених фреквенција	51
7.7 Анализа резултата	52
8. Закључак	59
9. Литература	62
10. Додатак	64

1. Увод

Једно од најзаступљенијих кретања код свих врста машина јесте обртно: основно кретање код свих погонских машина је обртно, сва транспортна средства се заснивају на обртном кретању. Због претходних примена елементи за обртно кретање представљају веома значајне елементе сваког система. Машински елементи који најчешће обављају ову врсту кретања су вратила.

Вратила представљају носаче обртних машинских делова и служе за преношење обртних момената и снаге дуж осе обртања.

Како се од вратила захтева велика поузданост при раду, примењују се разне врсте прорачуна како не би дошло до непредвиђених отказа.

На вратилима се налазе елементи за пренос снаге (зупчаници, ланчаници, каишници, спојнице, фрикциони точкови и др.). Вратила омогућавају обртно кретање ових делова, њихово спајање са елементима за пренос снаге који се налазе на другим вратилима, а тиме и преношење обртног момента. Услед узајамног дејства обртних делова са једног и другог вратила и саме тежине обртних делова, јављају се уздужне и попречне силе, као и обртни моменти који оптерећују вратила на савијање, увијање, истезање и притисак [2]. Последица основног задатка вратила проузрокује да ови елементи буду у тесној вези са елементима за пренос снаге.

При избору материјала за вратила потребно је, осим карактеристика чврстоће, узети у обзир и отпорност материјала на концентрацију напона, као и отпорност на корозију.

Услед динамичке нестабилности, критично стање вратила праћено изразитим повећањем амплитуде осцилација, настаје у случају када је вратило изложено периодично променљивим радијалним и аксијалним силама и обртним моментима.

Ова оптерећења изазивају периодично променљиве деформације, односно осцилације целог система, које доводе до стања у коме се учестаност промене побудних оптерећења поклопи са учестаношћу слободних (сопствених) осцилација вратила. Тада амплитуде постају бесконачно велике. Поклапањем учестаности (фреквенција) слободних и принудних осцилација, амплитуде неограничено расту. У том случају релативно мала сила може произвести велике амплитуде. Ова значајна појава назива се резонанца, а одговарајућа учестаност резонантна учестаност.

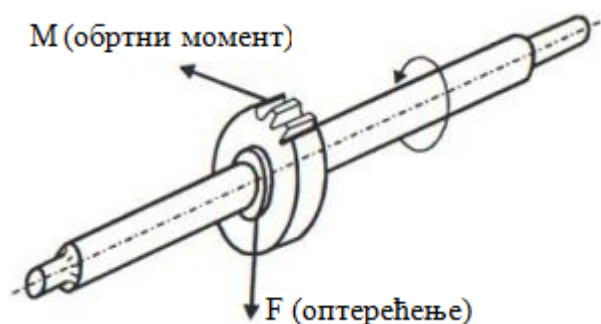
Због претходног, код вратила се врши провера односа критичне угаоне брзине или учестаности обртања при којима настаје резонанца са радном угаоном брзином односно учестаношћу обртања. При томе највећи утицај имају радијалне и торзионе осцилације, док је утицај аксијалних осцилација по правилу занемарљив.

2. Улога и конструкциони облици вратила

2.1 Појам и функција вратила

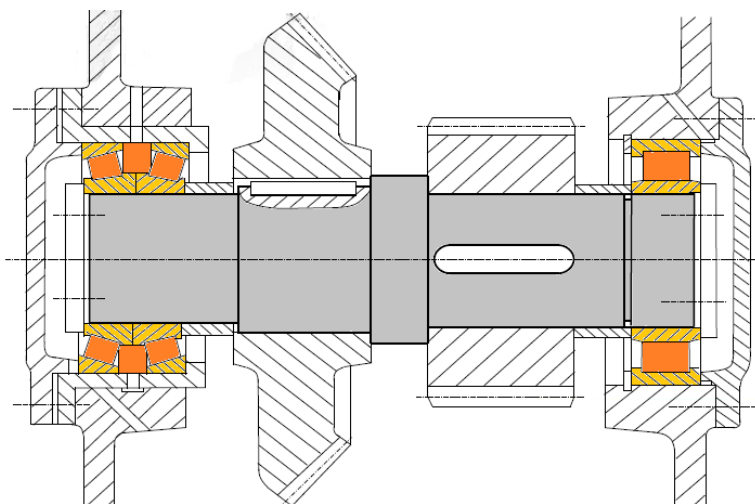
Обртно кретање постоји скоро код свих врста машина. Код свих погонских машина основно кретање је обртно. Сва транспортна средства базирају се на обртном кретању. Због тога елементи за обртно кретање имају врло важну улогу [9].

Вратила су елементи обртног кретања. Њихов задатак је да омогуће обртно кретање и преношење сила и обртних момената (слика 2.1). Због тога су ови елементи у тесној вези са елементима за пренос снаге.



Слика 2.1 Вратило

Вратила морају увек бити преко лежајева повезана са носећом конструкцијом (слика 2.2), док се два вратила међусобно повезују спојницом.

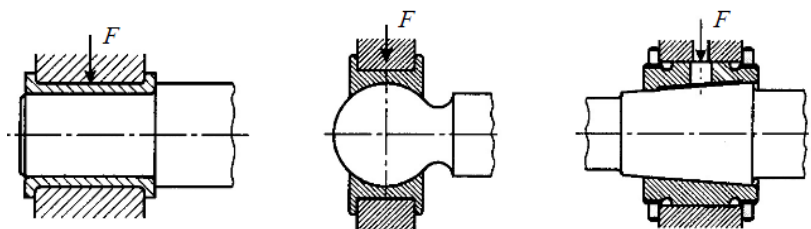


Слика 2.2 Вратило преко лежајева повезано са носећом конструкцијом

Такође, вратила представљају носаче обртних машинских делова као што су: зупчаници, каишници, ланчаници, фриксиони точкови, спојнице и други елементи. За разлику од осовина стално се okreћу и при томе преносе обртне моменте. Због тога су вратила изложена сложенем напрезању [1].

Делови вратила преко којих се остварује веза са лежиштима називају се рукавци (слика 2.3), а делови преко којих се остварује веза са обртним деловима који се на њима налазе називају се подглавци [9].

Вратила се најчешће изводе са два ослоња, односно са два рукавца. Дугачка и јаче оптерећена вратила могу бити и са већим бројем рукаваца.



Слика 2.3 Облици рукавца

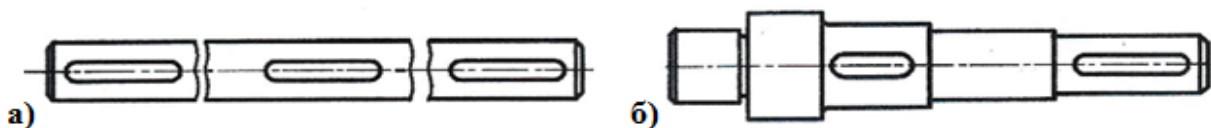
2.2 Конструкциони облици и класификација вратила

Према облику, вратила могу бити:

- Права,
- Брегаста,
- Коленаста,
- Карданска,
- Гипка (савитљива).

2.2.1 Права вратила

Вратило електромотора је типичан пример правог вратила. Поред стандардног кружног попречног пресека, вратила могу бити и троугаоног, елипсастог, ожлебљеног или другог профилисаног облика. Такође, попречни пресек вратила може бити константан по целој дужини (глатко вратило), или степенаста, односно са променљивим попречном пресеком по дужини (слика 2.4 а), б)).

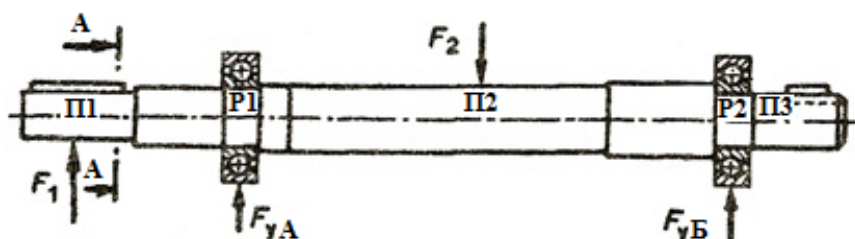


Слика 2.4 Права вратила а) константног попречног пресека, б) степенасто вратило

Ако је потребно смањити масу вратила попречни пресек уместо пуног може бити прстенастог облика. Смањење масе шупљег у односу на пуно вратило износи и до 23% [10].

При томе, израда шупљих вратила је компликованија и скупља. Шупља вратила се израђују и у случајевима када кроз њих треба провући друго вратило или осовину.

Геометријска оса вратила код правих вратила је права линија. Промена попречних пресека вратила је на прелазима између поглавака (П) и рукавца (Р) како би се исправно могла извршити монтажа ротора (П2), лежајева (Р1 и Р2), точка вентилатора (П3) и обода спојнице, односно елемента за пренос снаге на излазу вратила (П1) (слика 2.5).



Слика 2.5 Врати́ло електромотора

Ожлебљена вратила се примењују у градњи машина алатки, трактора, аутомобилских и авионских мотора и уређаја. Имају примену код већих оптерећења и аксијалног померања дуж вратила. Применом вратила троугаоног профила ублажава се концентрација напона присутна код вратила. Таква вратила имају примену, такође, код машина алтаки.

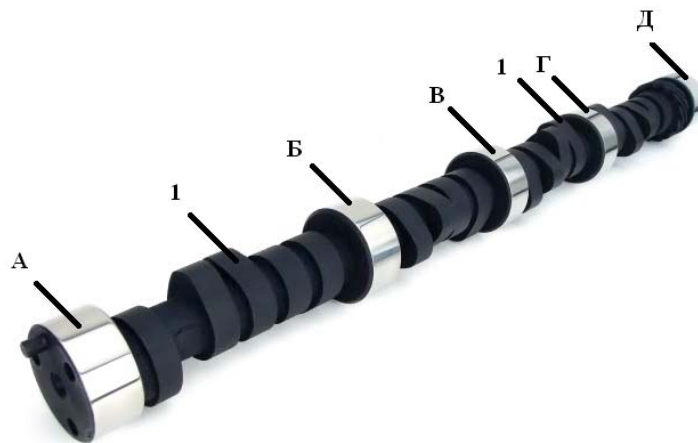
2.2.2 Брегаста вратила

Брегасто вратило је посебног облика (слика 2.6). Пример примене ове врсте вратила је за отварање и затварање вентила мотора са унутрашњим сагоревањем. Због тога се на вратилу израђују брегови (1), који служе за подизање вентила (2). Вратило добија обртно кретање од ланчаника или каишника (3).



Слика 2.6 Брегасто вратило

Брегасто вратило, као и сва друга вратила чији је број ослањања већи од два спадају у статички неодређена вратила (А, Б, В, Г, Д - слика 2.7).



Слика 2.7 Статички неодређено вратило

2.2.3 Коленаста вратила

Коленаста вратила имају примену код мотора са унутрашњим сагоревањем, клипних компресора, ексцентар преса (слика 2.8) [6]. Коленаста вратила имају испрекидану, односно, изломљену геометријску осу.



Слика 2.8 Коленасто вратило код СУС мотора

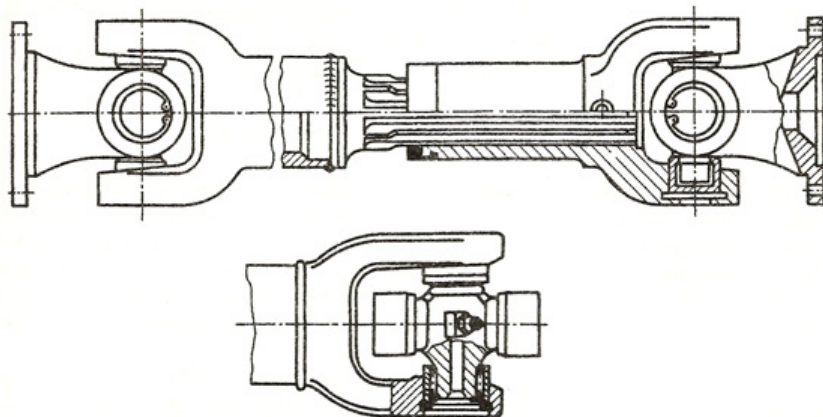
Основни захтеви:

- велика чврстоћа, крутост и отпорност на хабање,
- висока геометријска тачност обраде и финоћа обраде рукаваца,
- статичка и динамичка уравнотеженост – растерећење ослоначких лежишта од центрифугалних сила.

2.2.4 Карданска вратила

Пре више од 2000 година, иако нису знали елементе универзалног зглоба, Кинези су га први изумели и користили. Значајан напредак у развоју карданских зглобова се десио када је италијански математичар и проналазач *Girolamo Cardano* (1501.-1576.), кинеске карданске прстенове 1545. године детаљно описао и наговестио могућност преноса [11].

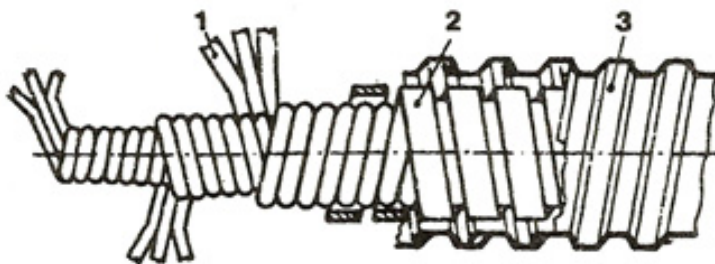
Карданска вратила (слика 2.9) имају значајну улогу при преносу механичке снаге и кретања између вратила која мењају положај оса у процесу експлоатације или су постављена под извесним углом. Примењују се код аутомобила, камиона, трактора.



Слика 2.9 Карданско вратило

2.2.5 Гипка (савитљива) вратила

Гипка вратила (слика 2.10) служе за преношење обртног момента када је потребно да геометријска оса вратила мења свој просторни положај [6]. Примењују се за погон контролних инструмената, а најмасовније за регистровање брзине, пређеног пута и времена рада, путем брзиномера, тахографа и обртометра, уређаја за чишћење одводних цеви, у зуботехници за бушење и друго.



Слика 2.10 Гипко вратило: 1- намотана жица, 2- челична трака, 3- заштитни омотач

Гипка вратила се састоје од једне или више жица увијених у виду завојних опруга чији се завојци додирују.

У зависности од примене савитљива вратила се деле на:

- Савитљива вратила за пренос обртних кретања,
- Савитљива вратила за пренос снаге.

2.3 Материјали за израду вратила

Материјал за израду вратила мора да задовољи економске и техничке услове. Најважнији технички услов је услов радне способности. Вратила, дакле, морају бити конструисана тако да прописану функцију обављају исправно и поуздано, што значи да имају довољну чврстоћу и крутост, да би у току рада издржали сва оптерећења без штетних деформација, разарања и опасних осцилација [10].

Као материјали за вратила најчешће се користе:

- обични конструкциони челици,
- челици за побољшање и
- челици за цементацију.

Нормално оптерећена вратила најчешће се израђују од Č0445(R st 44-2) и Č0545(E295), а за јача оптерећења користи се и Č0645(E335). Издржљивост, чврстоћа и тврдоћа ових челика је мања у односу на друге челике, али им је зато обрадљивост резањем добра, а цена нижа. При томе се добијају нешто веће димензије вратила што повећава њихову крутост, односно смањују еластичне деформације при истом спољашњем оптерећењу [10].

Високо оптерећена вратила, која се примењују код возила, мотора, тешких алатних машина, преносника снаге, турбина итд., израђују се од челика за побољшање. Ови челици су веће чврстоће и издржљивости, а уз одговарајућу термичку обраду и велике тврдоће. Овде се најчешће користе угљенични челици Č1430(C35) и Č1530(C45) који су предвиђени за израду осовина шинских возила, [10] као и за вратила сложеног облика која се израђују изједна са зупчаницима или пужем.

Легирани челици употребљавају се за израду вратила која су изложена јаким динамичким оптерећењима, хабању или корозији, као и када је од посебног интереса да димензије вратила буду мале. Од легираних челика примењују се Č3230(37MnSi5), Č4131(41Cr4), Č4730(25CrMo4), Č4731(34CrMo4), Č4732(42CrMo4) и Č4734(30CrMoV9).

Брзохода вратила улежиштена у клизне лежаје захтевају велику тврдоћу рукаваца, да би коефицијент трења клизања био мањи, па се ова вратила израђују од челика за цементацију. Исто важи и за вратила која су израђена изједна са другим деловима (цементирани зупчаници). Овде се користе цементирани и каљени угљенични челици

Č1121(C10E), Č1221(C15E), као и легирани челици Č4320(17MnCr5), Č4321(19MnCr5), Č5421(18CrNi8) и Č4721(20CrMo5) [10].

Поступцима обраде метала резањем на стругу након чега следи обрада брушењем, најчешће се израђују права вратила. За мање оптерећена вратила се примењују поступци хладног извлачења.

Ковањем се израђују вратила сложеног облика. Завршна обрада врши се стругањем, брушењем (рукавци) и глодањем (жлебови). Рукавци за клизна лежишта и зупци зупчаника (уколико су зупчаници израђени изједна са вратилом) обично се кале и накнадно брусе. Посебну пажњу треба посветити изради жлебова за клинове јер је на местима жлебова, по правилу, највећа концентрација напона, одакле произлази да је ту и најмањи степен сигурности.

Како би се умањила концентрација напона значајно је да заобљење буде што веће, а дубина жлеба што мања, као и постепен излаз из жлеба (најповољнији су жлебови израђени тањирастим глодалом).

У неким случајевима најбољи резултати постижу се применом комбинације композита са традиционалним металним материјалима, применом се између осталог обезбеђује уштеда у маси. Узрок све мање примене је такође и висока цена сировина [7].

У скорије време све већу примену при изради вратила имају композитни материјали. Развој композитних вратила отпочео је још шездесетих година прошлог века. Године 1962. *Spicer Universal Joint Division Of Dana Corporation* је направио своју прву верзију композитног вратила. Истраживања су настављена 1975. и 1983. године *Spicer Universal Joint Division Of Dana Corporation* је према пројекту *Strongwella* направио графит-алуминијумску цев за *Ford econoline* модел. *Strongwell* користи нову опрему и технологију за прорачун и производњу вратила. Композити од стаклених влакана, графита и специјалних смола су били урађени околу алуминијумске цеви [8].

Искуства са композитним материјалима су показала да треба наћи компромисна решења између тежње да се добије минимална маса конструкције са максималним механичким карактеристикама и трошкова организације њихове производње.

Најчешће се за израду вратила користе карбонска влакна ојачана пластичном структуром или хибридне конструкције од карбонских и стаклених влакана. Такође, погодна је и комбинација стаклених или графитних влакана и полиестерске смоле. Због своје велике отпорности, носивости и специфичне крутости као идеални за израду вратила показали су се и ламинати добијени комбинацијом метал-матрица-композит [8].

Испитивањем у лабораторији ВАС (*Burkett Advanced Composite Tehnologies Ltd.*) је утврђено да композитна вратила имају мању масу и знатно већу торзиону отпорност у поређењу са класичним челичним вратилом, или са алуминијумским вратилом.

3. Оптерећење и концентрација напона вратила

3.1 Оптерећења вратила

Вратила су оптерећена:

- Просторним системима сила и спрегова које преноси са делова које носи на непомичне ослободитеље. То су силе у спрегама зубаца зупчаника, обртни моменти који се посредством вратила преносе од једне главчине до друге и слична оптерећења,
- сопственом тежином вратила и делова, као и
- инерцијалним силама услед неуравнотежености маса.

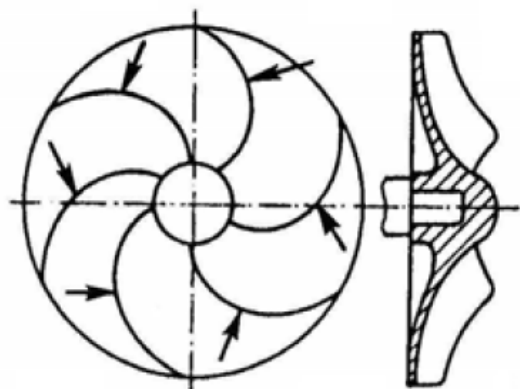
Доминантна оптерећења вратила су силе и спрегови, односно моменти савијања и увијања [10].

Оптерећења вратила од сопствене тежине по правилу изазивају врло мале напоне у односу на напоне од спољашњих оптерећења, па се најчешће могу занемарити.

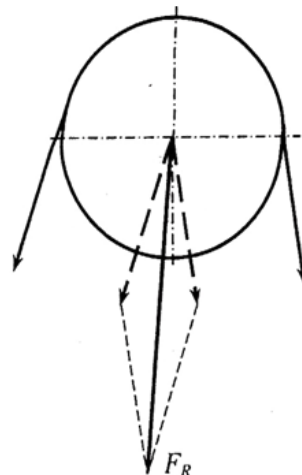
При мањим учестаностима обртања попречне инерцијалне силе услед неуравнотежености маса обртних делова који се налазе на њима, сударања обртних делова и др., могу се такође занемарити. При већим учестаностима обртања ове силе се јако повећавају. Оне могу бити и много веће од спољашњих оптерећења односно сила на зупчаницама, каишницима, ланчаницама итд. [10].

Према карактеру оптерећења које остварују, обртни делови који се ослањају на вратило, могу се поделити у три групе.

- Прву групу чине они обртни делови који оптерећење преносе целим својим обимом (слика 3.1). То су радна кола турбомашина (пумпи, турбина, вентилатора и слично), као и све врсте спојница и ротори мешалица. Радијалне силе код ових и других сличних делова и склопова, се уравнотеже и не преносе се на вратило. Они стварају обртни момент који делује на вратило, а постоји могућност да се на вратило пренесе евентуално и аксијална сила.
- Другу групу чине они делови који снагу преносе једним делом свог обима, као што су каишни и ланчани парови, ужад за подизање терета и слично. Резултујућа сила од затезања и од радног оптерећења преноси се на вратило (слика 3.2).

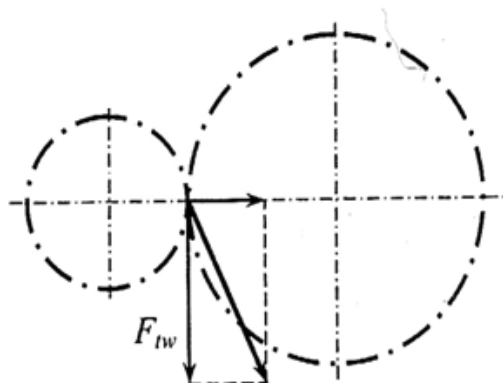


Слика 3.1 Пример преношења оптерећења целим обимом



Слика 3.2 Пример преношења оптерећења делом обима [12]

- Трећу групу чине обртни делови који снагу преносе додиром, теоријски у једној тачки на обиму (слика 3.3). То су у првом реду зупчаници и фрикциони парови код којих се међусобним притиском индукују силе у сва три правца у простору. Ове се силе преносе на вратило остварујући интензивно попречно и уздужно дејство. Осим тога, вратило је изложено дејству инерцијалних сила услед неуравнотежених маса, сударања обртних делова и др. Утицај сопствене тежине делова је, такође присутан ако су масе ових делова значајне [12].



Слика 3.3 Пример преношења оптерећења тачкастим додиром [12]

3.2 Нападна оптерећења вратила

Оптерећење која напада било који пресек вратила назива се нападно оптерећење [10].

Нападно оптерећење вратила потиче од:

- сила које оптерећују вратило-спољашње силе;

- отпора ослонаца, који у односу на вратило представљају спољашње оптерећење.

После одређивања нападног оптерећења у било ком пресеку вратила треба утврдити коју врсту напрезања изазива дато оптерећење. Може се закључити да:

- Савијање и смицање вратила изазивају попречне силе и спрегови,
- Аксијалне силе доводе до истезања односно сабијања вратила,
- Увијања вратила настаје услед обртних момената.

Пожељно је нацртати дијаграме момената увијања, момената савијања, аксијалних сила и трансверзалних (попречних) сила. Ови дијаграми могу се одредити графичким или рачунским путем.

3.2.1 Аксијалне силе

Помоћу дијаграма аксијалних сила могуће је приказати коликом аксијалном силом је оптерећен сваки попречни пресек вратила.

3.2.2 Трансверзалне силе

На основу трансверзалних сила F_x у правцу x-осе, односно F_y у правцу y-осе добија се резултујућа трансверзална сила према, [10]:

$$F_r = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (3.1)$$

С обзиром на претпоставку да оптерећења делују концентрисано, на дијаграму се уочавају скокови момената савијања и аксијалних сила [10].

По правилу, најважнија оптерећење вратила су нападни моменти услед увијања и савијања, док је утицај аксијалних и радијалних сила секундаран.

3.2.3 Момент савијања

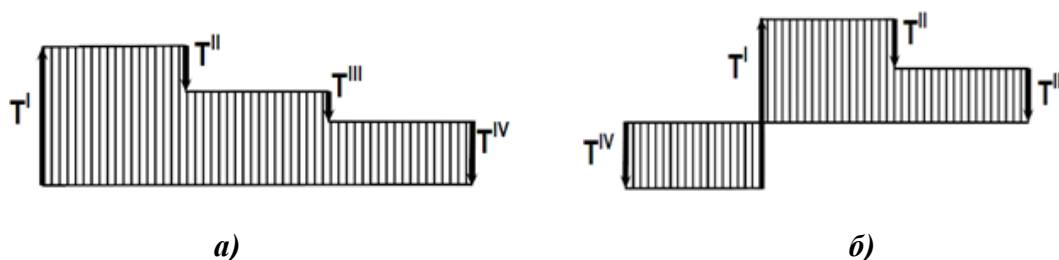
На основу момената савијања M_y за x-z раван и M_x за y-z раван добија се резултујући нападни момент савијања према [10]:

$$M_r = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad (3.2)$$

3.2.4 Момент увијања

Дијаграм обртних момената – момената увијања, показује како се обртни моменти преносе дуж вратила односно коликим моментом увијања је напрегнут сваки пресек вратила.

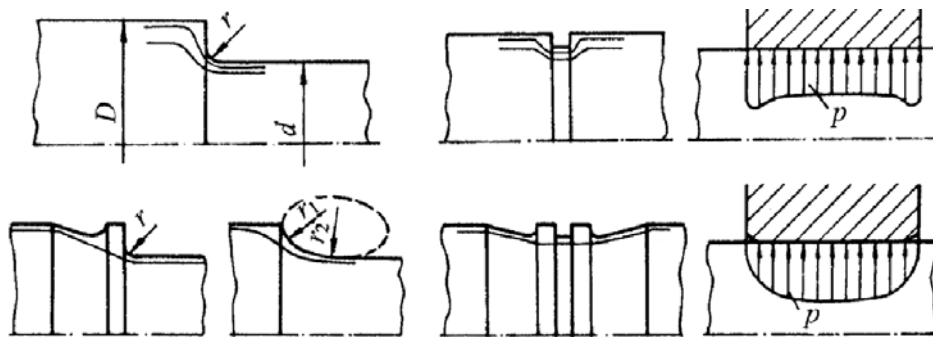
Ако се на вратилу налази више делова који предају (преносе) доведени обртни момент, онда се дуж вратила врши преношење (развођење) до одговарајућих гоњених делова на спрегнутим вратилима – зупчаника, ланчаника, спојница итд. На слици 3.4. приказана су два могућа принципа преношења – развођења обртног момента дуж вратила. У првом се обртни момент T^I доводи на једном крају вратила, а затим преко више делова предаје (T^{II} , T^{III} , T^{IV}). Збир предатих момената мора бити једнак примљеном ($T^I = T^{II} + T^{III} + T^{IV}$). У другом случају, обртни момент се на вратило доводи преко неког од средњих обртних делова T^I . Одавде се обртни момент дели на леву и десну страну сходно преносном односу [10].



Слика 3.4 Дијаграм момента увијања: **а)** обртни момент се доводи на крају вратила, **б)** обртни момент се доводи унутар вратила

3.3 Концентрација напона код вратила

Вратило је машински део са изразитим дисконтинуитетима у величини попречног пресека, са уздужним и попречним жлебовима, навојима, отворима, чврстим, неизвесним и лабавим налегањима и др. (слика 3.5), који су потребни за наслањање и спајање делова као и за преношење оптерећења.



Слика 3.5 Различити дисконтинуитети на вратилу

Извори концентрације напона су:

- Нагле промене пречника вратила изазване потребом за наслањањем главчина и лежаја;
- Налегања вратила, главчина и лежаја. Чврста налегања изазивају врло интензивну концентрацију напона док је код лабавих она мања;
- Жлебови (уздужни и попречни) који су потребни за остваривање спојева са вратилом.

4. Критеријуми за прорачун вратила

Димензионисање вратила се мора извршити тако да се спољашња оптерећења током рада пренесу без критичних појава, као што су велике (недозвољене) еластичне деформације, пластичне деформације, статичко разарање-кидање, динамичко разарање-лом услед замора и слично.

Помоћу анализа оптерећења вратила показује се да су вратила изложена сложеним напрезањима, и то:

- савијању – услед сила и спрегова који делују у равнима кроз осу вратила;
- увијању – услед спрегова у равнима управним на осу вратила;
- затезању или притискивању – услед аксијалних сила;
- површинском притиску – на површинама по којима се вратило додирује са деловима који су учвршћени на њему или са елементима на које је вратило ослоњено и
- смицању – услед попречних сила које се због врло малог утицаја занемарује.

У погледу променљивости оптерећења током времена треба имати у виду да попречне силе које оптерећују вратило и када имају константан правац у односу на непокретни координатни систем, у односу на координатни систем везан за вратило, имају правац који се у сваком тренутку мења, са обртањем вратила. Попречне силе једног тренутка ће у неким влакнима вратила изазвати затежуће напоне, а у другим притискајуће. Према томе, у погледу савијања, код вратила, увек се ради о наизменично променљивом оптерећењу [10].

При увијању, моменти увијања мењају се у зависности од начина рада погонске и радне машине.

Константно оптерећење које савија вратило било би оно оптерећење које би се кретало заједно са вратилом, што је случај са центрифугалном силом услед неуравнотежености масе неког од делова на вратилу.

Површински притисак на додирним површинама вратила и делова на њему, нарочито је велики у случају када је веза између главчине и вратила остварена преклопом.

Последица делујућих напона су одговарајуће деформације вратила. Услед напона од савијања оса вратила добија облик који одговара просторној еластичној линији, а услед напона од увијања долази до увијања вратила. Ово за последицу има промену геометријских односа обртних делова на вратилу. Они заузимају положај који одговара угибу, нагибу и углу увијања вратила на местима налегања, што може имати пресудан утицај на њихов рад.

Дакле, поред задовољавајуће чврстоће вратила треба да имају и одговарајућу крутост.

Периодичне промене интензитета обртног момента изазивају периодично променљиве деформације, односно доводи до осциловања целог система [10].

Уколико се учестаност промене обртног момента поклопи са учестаношћу слободних осцилација вратила у односу на увијање долази до критичног стања, односно резонанце.

До критичног стања међутим може доћи и без промене интензитета спољашњег оптерећења.

Неуравнотеженост маса на вратилу доводи до појаве инерцијалних сила чија учестаност одговара учестаности обртања вратила. Уколико се учестаност обртања поклопи са сопственом учестаношћу вратила у односу на савијање настаје такође критично стање односно резонанца. Због тога радно подручје бројева обртаја треба да буде изван критичног, што треба проверити при прорачуну вратила [10].

На основу тога могу се дефинисати следећи критеријуми за прорачун вратила и осовина:

- прорачун чврстоће вратила и осовина;
- прорачун крутости вратила и осовина;
- прорачун динамичке стабилности вратила и осовина.

4.1 Прорачун чврстоће вратила

4.1.1 Радни напон

Као последица деловања спољашњих оптерећења у појединим пресецима вратила настају следећи радни напони:

➤ Услед савијања: $\sigma_s = \frac{M}{W}$ (4.1)

➤ Услед затезања- притиска: $\sigma_z = \frac{F_a}{A_z}$ (4.2)

➤ Услед смицања: $\tau_s = \frac{F_T}{A_s}$ (4.3)

➤ Услед увијања: $\tau_t = \frac{T_t}{W_p}$ (4.4)

4.1.2 Критични напон

Критични напони вратила и осовина у опасним пресецима одређују се по правилу на основу одговарајућих карактеристика чврстоће (издржљивости) стандардне епрувете, узимајући при томе у обзир утицај концентрације напона и све друге утицаје који узрокују разлику између ове две чврстоће (издржљивости).

4.2 Прорачун крутости вратила

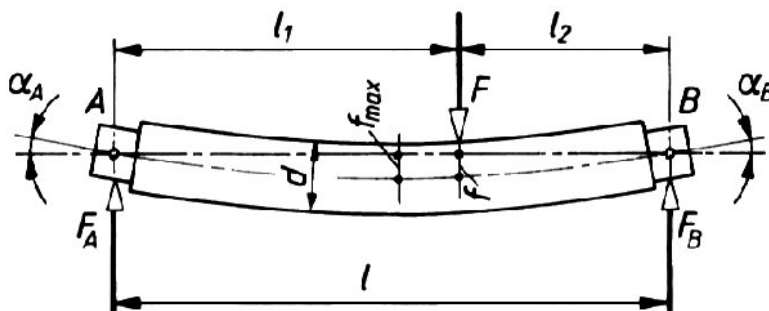
Крутост односно деформације вратила представљају важан критеријум при прорачуну и конструисању вратила. У извесним случајевима, поред прорачуна чврстоће вратила, обавезно треба спровести и прорачун крутости односно деформација вратила.

Услед присутних напрезања вратила се деформишу. Крутост вратила зависи од величине попречног пресека, модула еластичности материјала вратила, као и распона ослонаца.

4.2.1 Одређивање деформације при савијању

Дејством сила и момента савијања вратила су изложена на савијање. Настале деформације узрокују одступања стварног положаја делова који се налазе на вратилу у односу на геометријски тачан положај. Ово има за последицу промену геометријских односа делова који се налазе на вратилу што може имати пресудан утицај на њихов рад. То се нарочито односи на зупчанике, лежаје, роторе неких турбо машина, итд.

Због претходних одступања потребно је у критичним случајевима проверити угиб (f) и нагиб вратила (α). Прорачуни угиба и нагиба вратила се изводе по методама из отпорности материјала. На слици 4.1, приказан је пример деформације вратила на које дејствује само једна сила [1].



Слика 4.1 Угиб и нагиб вратила [1]

За глатке конзолне носаче дужине „ l “ и оптерећене силом „ F “ (слика 4.2), угиб и нагиб је:

$$f = \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I} \quad (4.5)$$

$$\alpha = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad (4.6)$$

Ако је глатко вратило оптерећено аксијалном силом на растојању „ r “ од осе вратила, слика 4.3, угиб и нагиб слободног краја је:

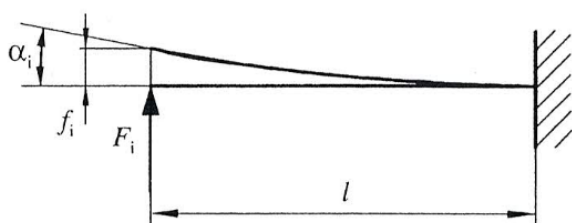
$$f = \frac{F \cdot r \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I} \quad (4.7)$$

$$\alpha = \frac{F \cdot r \cdot l}{E \cdot I} \quad (4.8)$$

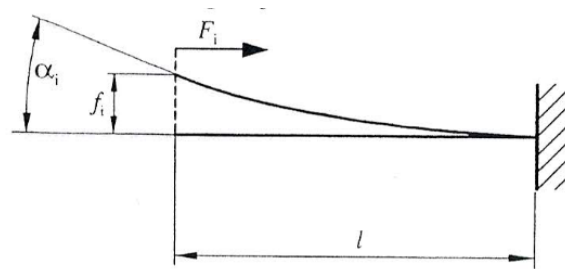
У претходним изразима је:

E - модул еластичности материјала N/mm^2 ,

I - аксијални момент инерције.



Слика 4.2 Конзола оптерећена силом



Слика 4.3 Конзола оптерећена аксијалном силом

Код степенастих вратила примењује се упрошћена метода. Када је вратило оптерећено једном концентрисаном силом, да би се одредио угиб на месту дејства силе, полази се од претпоставке да је вратило уклештено у том пресеку. Тиме се вратило расчлађава на два конзолна носача, оптерећена на крајевима реакцијама од концентрисане силе.

4.2.2 Одређивање деформације при увијању

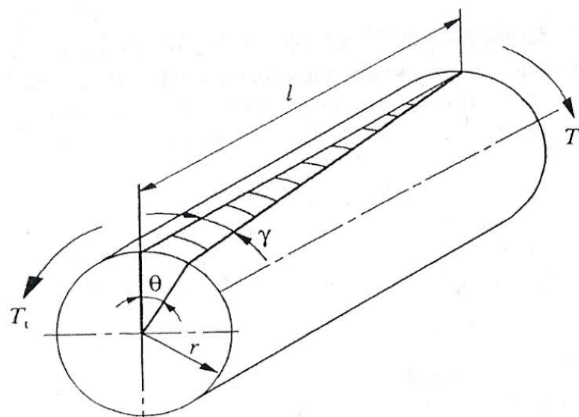
Услед увијања вратила настаје угаоно одступање положаја обртних делова који се на њему налазе, промена кинематских односа и неравномерна расподела притиска на спојевима вратила и делова на њему.

Деловањем момента увијања „ T_t “ долази до међусобног заокретања (увијања) попречних пресека вратила који се налазе на растојању „ l_i “ (слика 4.4).

Код вратила чији је попречни пресек константан по целој дужини „ l “, и оптерећено константним моментом увијања „ T_t “, угао увијања у радијанима се може израчунати као:

$$\theta = \frac{T_t \cdot l}{G \cdot I_p} \quad (4.9)$$

Дозвољени угао увијања по дужном метру вратила је : $\theta = (0,004 \dots 0,009) \text{ rad/m}$, односно $\theta = (0,25^\circ \dots 0,5^\circ)$ по дужном метру [1].



Слика 4.4 Увијање вратила константног попречног пресека [1]

Код вратила степенастог попречног пресека угао увијања у радијанима је:

$$\theta = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n \frac{T_{ti} \cdot l_i}{I_{pi}} \quad (4.10)$$

При чему је:

G - модул клизања материјала вратила N/mm^2 ,

T_{ti} - момент увијања у посматраном пресеку Nmm ,

I_{pi} - момент инерције попречних пресека појединих делова вратила дужине $l_i \text{ mm}^4$.

4.2.3 Критичне и дозвољене деформације

Сувише велике деформације вратила доводе до критичног стања делова на вратилу у погледу њихове функције, односно њихове кинематике, динамике и чврстоће. Због тога се намеће потреба да се за сваки део изврши одговарајућа анализа и одреде граничне вредности деформација у оквиру којих оно може успешно да остварује своју функцију [9].

Дозвољене деформације одређују се на основу детаљног прорачуна или на основу искуства за сваки део посебно. Код делова компликованијег облика ово може понекад да представља врло велики проблем.

За случај да се не располаже тачнијим вредностима дозвољених деформација вратила и осовина, могу се користити следеће граничне вредности нагиба вратила:

- $\tan \alpha \approx 0,001$ - крути котрљајни и подесиви клизни лежај,
- $\tan \alpha \approx 0,0003$ - неподесиви клизни лежај,
- $\tan \alpha \approx 0,00015$ - несиметрично улежештени зупчаници,
- $\tan \alpha \approx 0,0001$ - зупчаници на препусту.

Угиб вратила се креће у границама $f_d = (0,3 \dots 0,5) \cdot 10^{-3} \cdot l$. Мање вредности се бирају при броју обртаја $n > 1500 \text{ min}^{-1}$.

4.3 Прорачун динамичке стабилности вратила

Вратила заједно са масама елемената на њима представљају осцилаторни систем. Као пример може се приказати конзолни штап (слика 4.5) оптерећен силом F (флексионе осцилације), односно моментом увијања T на слободном крају (слика 4.6) (торзионе осцилације) [1].

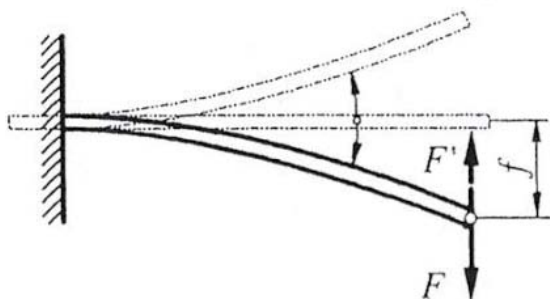
Осцилаторно кретање настаје када се на штап (слика 4.5) делује силом F . Тада долази до угиба слободног краја за величину f . Након престанка дејства силе F , сила F тежи да врати штап у првобитни положај, али због инерције штап се тада не зауставља у положају равнотеже.

Фреквенција осциловања представља број осцилација у јединици времена, пропорционална је еластичности тела, а обрнуто пропорционална маси тела. Вредност амплитуде осциловања зависи од силе F . Под дејством побудне силе настају побудне осцилације које се разликују од сопствених осцилација. Резонанца настаје при поклапању сопствених и побудних осцилација.

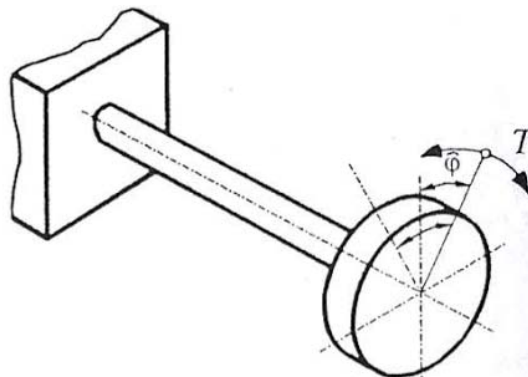
У техничкој пракси је од посебног значаја утврђивање броја обртаја вратила при којој настаје појава резонанце [3].

Као што је познато, при повећањима броја обртаја, вратила могу постати динамички нестабилна због појаве великих амплитуда осциловања проузрокованих резонанцом.

Стога се код вратила врши провера односа критичне угаоне брзине или учестаности обртања при којима настаје резонанца са радном угаоном брзином односно учестаности обртања. При томе највећи утицај имају флексионе (слика 4.5) и торзионе (слика 4.6) осцилације.



*Слика 4.5 Флексионе осцилације
уклештеног штапа*



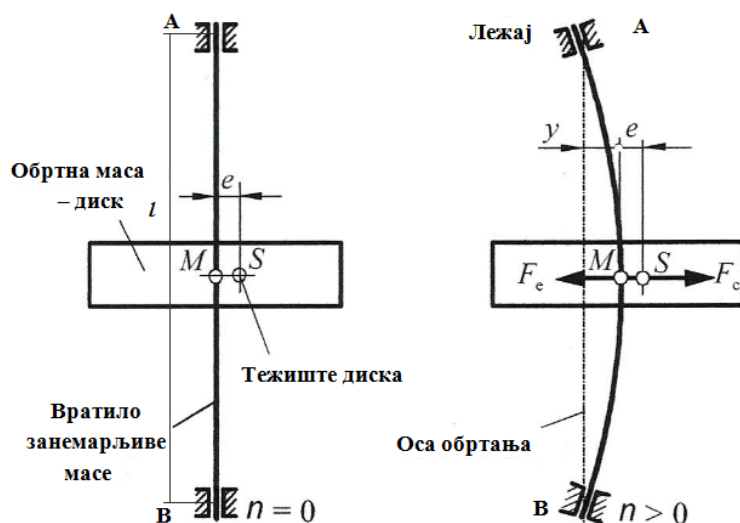
*Слика 4.6 Торзионе осцилације
уклештеног штапа*

4.3.1 Одређивање критичног броја обртаја при савијању вратила

Делови одређених маса су смештени на вратилу. Маса осцилује под дејством спољашњих сила. Као побудне силе јављају се силе услед неуравнотежености маса обртних делова као и услед неуравнотежености самог вратила. Тежишта обртних делова услед еластичних деформација не поклапају се са осом обртања вратила, тако да се при окретању вратила јавља центрифугална сила F_c као побудна сила. Центрифугалне силе су пропорционалне угаоној брзини вратила. Пројекција ове силе на осну раван вратила је хармонијски променљива величина чија је учестаност једнака учестаности обртања вратила.

За одређивање критичног броја обртаја биће разматрана три случаја:

- **Први случај:** Вратило са једном обртном масом (диск масе $m=G/g$, kg), (слика 4.7).



Слика 4.7 Флексионе осцилације вратила

На средини штапа AB, дужине l , налази се диск чије се тежиште S налази на растојању e од осе обртања вратила M. При обртању вратила угаоном брзином ω , у тежишту диска дејствује центрифугална сила која изазива угиб вратила за величину y . Такође, при обртању се центрифугална сила уравнотежава са силом еластичности вратила $F_e = c \cdot y$, где је c крутост вратила. Па је:

$$F_c = m(y + e) \cdot \omega^2 \quad (4.11)$$

$$F_c - F_e = 0 \quad (4.12)$$

Заменом израза F_c и F_e у једначину (4.12) одређује се израз за угиб вратила:

$$m(y + e) \cdot \omega^2 - c \cdot y = 0 \Rightarrow m \cdot e \cdot \omega^2 - y \cdot (c - m \cdot \omega^2) = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{m \cdot e \cdot \omega^2}{c - m \cdot \omega^2} = \frac{e}{(c/m \cdot \omega^2) - 1} \quad (4.13)$$

Угиб постаје бесконачно велики $y = \infty$, када је $\omega^2 = c/m$, тј. када је угаона брзина једнака сопственој кружној фреквенцији, тада долази и до резонанце [4]. Резонантна угаона брзина је критична угаона брзина, а одговарајући број обртаја је критични број обртаја:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (4.14)$$

односно:

$$n_k = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (4.15)$$

За $m=G/g$ и $c=G/f$, критична угаона брзина је:

$$\omega_k = 99 \sqrt{\frac{1}{f}} \quad (4.16)$$

односно критични број обртаја:

$$n_k = 946 \sqrt{\frac{1}{f}} \quad (4.17)$$

Начин улежиштења вратила односно осовине се узима у обзир преко фактора улежиштења k :

$$n_k = k \cdot 946 \sqrt{\frac{1}{f}} \quad (4.18)$$

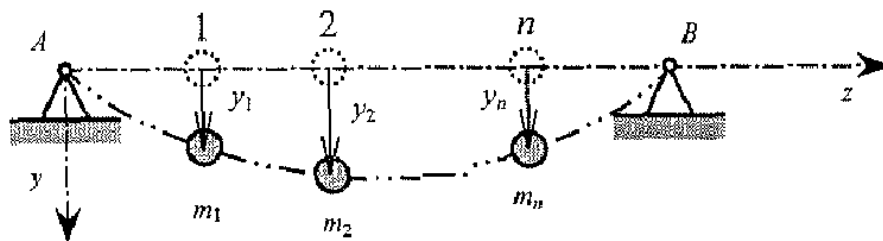
Где f представља угиб вратила изазван тежином диска у mm, а фактор улежиштења износи:

- $k=1$ – за слободно обртна вратила у лежајима,
- $k=1,3$ – за вратила обострано учвршћена и
- $k=0,9$ – за конзолно улежиштена вратила.
- **Други случај:** Вратило са више дискова (слика 4.8)

У случају вратила са више дискова потребно је, према претходно датим изразима, одредити критични број обртаја или критичну угаону брзину за сваки диск појединачно укључујући и масе одговарајућих делова вратила. Критични број обртаја, односно критична угаона брзина је [1]:

$$\frac{1}{n_{kv}^2} = \frac{1}{n_{k1}^2} + \frac{1}{n_{k2}^2} + \frac{1}{n_{k3}^2} + \dots + \frac{1}{n_{kn}^2} \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{\omega_{kv}^2} = \frac{1}{\omega_{k1}^2} + \frac{1}{\omega_{k2}^2} + \frac{1}{\omega_{k3}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{kn}^2} \quad (4.20)$$



Слика 4.8 Флексионе осцилације вратила са више дискова

➤ **Трећи случај:** Глатко вратило без дискова

Из претходног случаја се уочава да за један систем са n маса добија се, такође n различитих бројева обртаја. У случају глатког вратила постоји само сопствена маса вратила равномерно распоређена по дужини вратила. Код глатког вратила се јавља безброј критичних бројева обртаја, јер је оно састављено из безброј малих сопствених маса. У већини случајева интересантан је само најмањи број обртаја (основна фреквенција) [1].

За практичне случајеве, у недостатку математичких модела, критичан број обртаја за глатка челична вратила се усваја у зависности од врсте улежиштења, пречника d и дужине вратила l у mm, према следећем:

- Вратила слободно обртна у лежајима (на пример, подесиви куглични лежај)
 $n_{k1} = 122,5 \cdot 10^6 \cdot d/l^2$; $n_{k2} = 4 \cdot n_{k1}$; $n_{k3} = 9 \cdot n_{k2}$; $n_{k4} = 16 \cdot n_{k1}$ итд.
- Обострано уклештена вратила (на пример веома крути лежаји)
 $n_{k1} = 277,7 \cdot 10^6 \cdot d/l^2$; $n_{k2} = 2,8 \cdot n_{k1}$; $n_{k3} = 5,49 \cdot n_{k2}$; $n_{k4} = 8,9 \cdot n_{k1}$ итд.
- Вратила уклештена на једном крају, док је други крај слободан
 $n_{k1} = 43,6 \cdot 10^6 \cdot d/l^2$; $n_{k2} = 6,276 \cdot n_{k1}$; $n_{k3} = 17,55 \cdot n_{k2}$; $n_{k4} = 34,41 \cdot n_{k1}$ итд.

Радно подручје бројева обртаја за све претходне случајеве је за $\pm 30\%$ удаљено од критичног. Вратило велике крутости прецизним балансирањем може да ради и у критичном подручју.

Ако је критични број обртаја мањи од погонског, потребно је при пуштању у рад, брзо прећи преко критичног подручја, јер у наткритичном подручју броја обртаја брзо долази до стабилизовања рада и смањења осциловања, односно вратило је поново у динамички стабилном стању [1].

4.3.2 Одређивање критичног броја обртаја при увијању вратила

Са масама делова који се налазе на вратилу, оно се понаша као торзиона опруга. Такође, вратило се посматра као торзиони осцилаторни систем, где амплитуда осциловања представља угао увијања вратила. Динамичка нестабилност настаје када се сопствена торзиона фреквенција вратила поклопи са фреквенцијом промене обртног момента, односно тада настаје резонанца. Када је погонска машина клипни мотор промене обртног момента су значајно изражене. Један од практичних примера је код моторних возила. Побудна фреквенција код мотора са унутрашњим сагоревањем зависи од броја цилиндра мотора. Као пример може да се наведе најчешћи четвороцилиндрични мотор, где је побудна фреквенција једнака $4n, 8n, 12n$, итд. где је n број обртаја вратила [1].

Разликују се три случаја:

- **Први случај:** У случају вратила са једним диском (слика 4.6), критична угаона брзина је:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{c_t}{J}} \quad (4.21)$$

где су c_t , Nm торзиона крутост, а J , kgm^2 момент инерције обртне масе за пуни диск, и дати су изразима:

$$c_t = \frac{I_p \cdot G}{l} \quad (4.22)$$

$$J = \frac{1}{8} \cdot m \cdot d^2 \quad (4.23)$$

где је I_p , m^4 поларни момент инерције, G , N/m^2 модул клизања, l , m дужина вратила.

Код степенастих вратила, за познате крутости $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ појединих сегмената вратила, еквивалентна крутост c је:

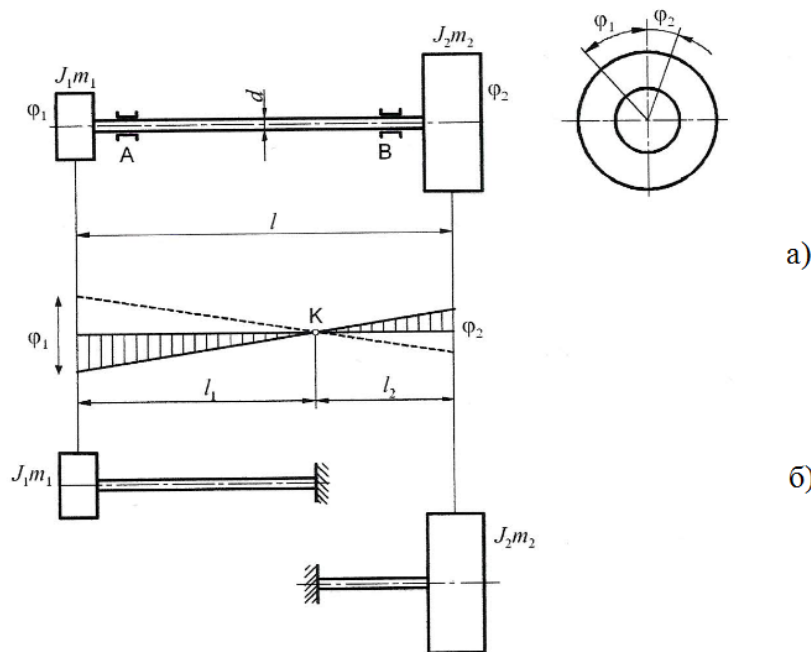
$$\frac{1}{c_t} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \dots + \frac{1}{c_n} \quad (4.24)$$

Како је $\omega_k = (\pi/30) \cdot n_k$; $c_t = T_t/\varphi$; $\varphi = (\pi/180^\circ)\varphi^\circ \approx \varphi^\circ/57,3^\circ$, критични број обртаја вратила је дат у min^{-1} , и износи:

$$n_k = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{c_t}{J}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{T_t}{\varphi \cdot J}} \approx 72,3 \sqrt{\frac{T_t}{\varphi^\circ \cdot J}} \quad (4.25)$$

где су T_t , Nm – торзиони обртни момент на вратилу, φ , rad – угао увијања вратила.

➤ **Други случај:** Вратило са две масе, односно два диска, (слика 4.9)



Слика 4.9 Вратило са два диска, [1]

Пошто се посматра вратило са два диска, следи да је оптерећено двема масама m_1 и m_2 , као и моментима инерције J_1 и J_2 , а критична угаона брзина је:

$$\omega_k = \sqrt{c_t \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)} \quad (4.26)$$

Критични број обртаја вратила је:

$$n_k = \frac{30}{\pi} \sqrt{c_t \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{T_t}{\varphi} \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)} \approx 72,3 \sqrt{\frac{T_t}{\varphi^\circ} \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)} \quad (4.27)$$

Углови увијања φ_1 и φ_2 представљају амплитуде осциловања и пропорционални су моментима инерције дискова. Тачка K представља тачку уклештења вратила дужина l_1 и l_2 .

$J_1 l_1 = J_2 l_2$ и $\varphi_1 / l_1 = \varphi_2 / l_2$, важи из разлога што вратила дужина l_1 и l_2 у тачки K имају исту сопствену фреквенцију, као и вратило са два диска. На страни веће масе је мања амплитуда и мање одстојање за чворове осциловања.

➤ **Трећи случај:** Вратило са више обртних маса.

Представља систем са више сопствених торзионих фреквенција. Вратило са n дискова има, на пример $n-1$ одсечака вратила, односно $n-1$ критичних бројева обртаја [1].

4.3.3 Степен сигурности са аспекта динамичке стабилности вратила

Степен сигурности са аспекта динамичке стабилности вратила представља однос одговарајућих учестаности обртања и то:

1. Вратила велике крутости, вратила која раде са учестаношћу обртања мањим од критичних:

$$S = \omega_k / \omega \geq 1,25; \quad S = n_k / n \geq 1,25; \quad (4.28)$$

2. Еластична вратила која раде са учестаностима обртања већим од критичних:

$$S = \omega / \omega_k \geq 1,3; \quad S = n / n_k \geq 1,3; \quad (4.29)$$

Провера динамичке стабилности вратила врши се, углавном, код вратила која раде са великим учестаностима обртања. У ову групу спадају вратила турбокомпресора, турбопреносника, парних и гасних турбина, неких алатних машина, као и коленаста вратила клипних машина. Највећи број машина има доста крута вратила која раде са малим угаоним брзинама тако да ова провера није потребна [10].

5. Примена нумеричких метода за прорачун и анализу вратила

У савременом приступу пројектовања машинских елемената, подржаним рачунаром, коришћењем симулације на различитим нивоима процеса пројектовања, може се проверити функција у реалним условима, напрезање делова и способност ношења оптерећења, судар делова при кретању и оптимизација саставних делова чиме се утиче на убрзање процеса пројектовања [13].

Приликом решавања инжењерских проблема користе се разне методе, које се могу поделити на:

- аналитичке,
- нумеричке,
- експерименталне.

Све већи број реалних проблема у свим областима живота данас се решава математичким моделирањем, захваљујући пре свега интензивном развоју рачунарске технике. Уместо да се врши велики број експеримената, што је често дуг и скуп пут, формира се математички модел којим се симулира одређени процес или појава. Модел се обично састоји од скупа једначина којима треба да су описане све важније појаве или процеси значајни за постављени проблем. Карактеристике средине или објекта изражене су кроз коефицијенте једначина [5].

У зависности од врсте проблема који се решава, у примени су разне нумеричке методе као што су:

- МКР – метода коначних разлика,
- МКЕ – метода коначних елемената,
- МКЗ – метода коначних запремина,
- МГЕ – метода граничних елемената.

Структурна анализа је поступак којим се, при моделирању неке структуре, долази до физичких резултата, као што су: напони, померање, термичко понашање, осциловање,... Она подразумева статичку и динамичку анализу, анализу вибрација, анализу увијања, анализу спреге, електричну и друге.

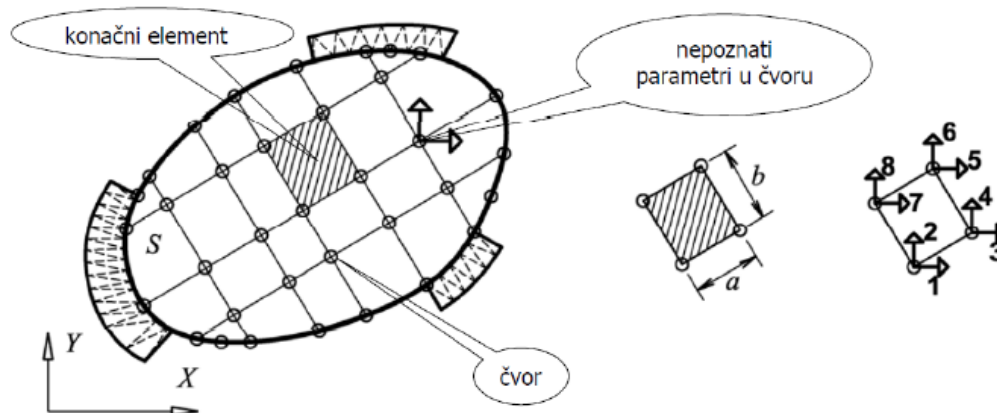
Дискретизација простора, односно упрошћавање структуре, је један од незаобилазних фактора за сваку нумеричку методу.

Како би се одредила најоптималнија конструкција, у погледу димензија и облика моделираног вратила, користи се МКЕ као најпримењеније решење у нумеричкој анализи.

5.1 Метода коначних елемената

Метода коначних елемената представља нумерички поступак решавања инжењерских проблема и проблема математичке физике. Могу да га користе све врсте инжењера, дизајнери и менаџери. Методом коначних елемената врши се анализа структура, рачунају температурна поља, ток флуида, транспорт маса итд. [14].

Основна идеја МКЕ методе је физичка дискретизација стварног модела. То подразумева поделу неке структуре на коначан број елемената малих димензија. Дакле, простор континуума се дели на међусобно повезане непреклапајуће геометријске форме тј., елементе. Ти елементи малих димензија називају се коначни елементи. Мрежа коначних елемената је међусобно повезана карактеристичним тачкама које се називају чворови и у којима фигурише коначан број непознатих прорачунских величина. Савремени софтвери дозвољавају варијацију различитих облика елемената на континууму [15].



Слика 5.1 Дискретизација МКЕ, [16]

5.1.1 Историјски развој МКЕ

Први радови из подручја метода коначних елемената појавили су се четрдесетих година прошлог века. *Hrenikoff* је 1941. решавао проблеме у области структурне анализе и напонске анализе чврстог тела. Због потребе дискретизације модела на коначне елементе даљи развој се кретао у правцу развоја топологије и геометријских особина. Након застоја почела је примена методе коначних елемената у авионској индустрији. Увођењем матрица у прорачун применом методе сила и методе деформације, схватило се да је овакав начин рачунања веома погодан и за примену на рачунарима [14].

Утемељивачи метода су *Clough*, *Martin*, *Topp* и *Turner* који су и направили основни концепт МКЕ. Претходне радове на матричном концепту објавили су *Argyris* и сарадници. Радови су штампани 1960 године у књизи у којој је први пут поменуто име коначни елемент. Сва позната сазнања у подручју МКЕ су тада сумирана на конференцији „US Air

Force“. Тада је договорено да се направи и први софтвер под именом *NASTRAN* (Nasa Structural Analysis). Након овог развијен је и *SAP* (Structural Analysis Program) на „*Berkley University*“ од стране сарадника професора *Clough* [14].

Први универзитетски уџбеник у области МКЕ написао је *Cook* 1974. године, у време када је метода већ била прихваћена.

Посебан значај у развоју МКЕ имали су варијациони принципи механике континуума. Даљи развој МКЕ одвија се у правцу раванских елемената. *Saurant* је решавајући граничне проблеме торзије предложио и користио троугаоне елементе, а решење добио помоћу варијационе методе *Ritz-a*. Тек 1960. године постављен је директни тј. статички приступ МКЕ. Половином шездесетих *White* и *Fridrich* решавају парцијалне диференцијалне једначине користећи мрежу троугаоних коначних елемената и варијационе принципе.

Након тога уводи се појам доње и горње границе апроксимације по МКЕ. *Hellinger* и *Reissner* постављају мешовити модел коначних елемената у коме се комбиновано јављају силе и деформације као непознате величине. Да би нашао ширу примену развој МКЕ иде у правцу тачности апроксимације и конвергенције решења.

МКЕ методом мора се остварити континуитет између елемената и поддомена у мрежи елемената. То је постигнуто увођењем интерполационих функција. Интерполационе функције се претпостављају у облику полинома чиме се обезбеђује континуитет између елемената. Математичари су седамдесетих година коначно генерализирали теорију, тако је *Oden* увео низ генерализација и проширио примену на вишедимензионално подручје. Од тада се МКЕ развија са развојем рачунара. Они су омогућили решавање великих проблема сложене геометрије и оптерећења. До деведесетих година није била могућа визуализација проблема. Са данашњим могућностима рачунара могуће је добити потпуну слику напонског, деформационог, термичког поља или неког другог проблема [14].

5.1.2 Улога компјутера у МКЕ

У модерном конструкционом машинству користе се различити компјутерски софтвери *CAE* (Computer Aided Engineering) како би се оценила конструкција у сваком кораку у процесу дизајнирања. *CAE* алати се користе за анализе кинематичких или динамичких карактеристика конструкције. На тржишту постоји низ моћних *CAD* (Computer Aided Design) софтвер алата. Први програми нису имали могућност визуализације и даље су се развијали и добили нове верзије: *NASTRAN*, *SAP* до *ANSYS*, *IDEAS*, *FLOW*. *CATIA* итд. Софтвери су се развијали зависно од подручја за које су намењени или за универзалну примену (статичку, динамичку, термичку анализу). Предност коришћења *CAD* софтвера за анализу коначним елементима је у једноставном моделирању и изменама модела [14].

Ранија примена МКЕ односила се само на структурну механику да би се касније проширила на решавање проблема преноса топлоте, електростатички потенцијал,

механику флуида, вибрациону анализу и разне друге проблеме у машинству. Данас се развијају софтвери у подручју бризгања пластике који су у могућности да покажу дистрибуцију температурног поља и пуњење калупа течном масом. *MOLDFLOW*, *C-MOLD* су софтвери који симулирају ток течне пластике код бризгања пластике.

Софтвери за анализу МКЕ састоје од три главне компоненте (слика 5.2):

- предпроцесора,
- солвера и
- постпроцесора.



Слика 5.2 Софтвери за МКЕ анализу

5.1.3 Основни принципи МКЕ

Основни принцип на којем се заснива МКЕ, састоји се у подели разматраног подручја на коначан број мањих подручја, односно елемената, тако да се анализом појединих елемената, уз претпоставку да су међусобно повезани, анализира целина [17]. Приступ у анализи, где се од посебног иде ка општем, од индивидуалног ка универзалном, у коме се анализом делова закључује о целини, је познати индуктивни приступ, који има примену у многим подручјима науке. Индуктивни приступ је од посебног значаја код инжењерских и других проблема где се општа решења не могу добити у затвореном облику.

МКЕ се заснива на физичкој дискретизацији разматраног подручја, за разлику од осталих нумеричких метода, које се заснивају на математичкој дискретизацији једначина граничних проблема. Основу за сва проучавања представља део подручја коначних димензија, мање подручје или коначни елемент. Због тога су основне једначине помоћу којих се описује стање у појединим елементима обичне алгебарске, уместо диференцијалних или интегралних.

Разматрано подручје, са становишта физичке интерпретације, као континуум са бесконачно много степени слободе, замењује се дискретним моделом међусобно повезаних коначних елемената, са коначним бројем степени слободе. Основни задатак је да се изабере онај модел који најбоље апроксимира одговарајући гранични проблем, обзиром на то да је број дискретних модела за један гранични проблем неограничено велики.

5.1.4 Основни кораци у МКЕ

У МКЕ се за анализу и решавање проблема из механике континуума скоро увек примењује такозвани процес корак по корак, што има веома велики практични значај за примену рачунара у ефективном прорачуну [17]. Процес који се користи може се приказати као једноставан алгоритам, у оквиру кога су представљена пет корака. Пре описа неопходних корака треба нагласити да се моделирање проблема по МКЕ врши дискретизацијом структуре на одговарајући број коначних елемената, избором врсте, односно, типа елемента који ће се користити у анализи, затим дефинисањем врсте оптерећења, граничних услови или ослонаца.

Основни кораци у МКЕ су:

1. Планирање,
2. Предпроцесирање,
3. Решавање,
4. Постпроцесирање,
5. Анализа резултата.

У оквиру првог корака постоји много питања на које треба одговорити, а нека од њих су: да ли МКЕ може обезбедити жељене резултате, колико тачно модел представља стварни проблем, да ли и како утицајни фактори утичу на крајње резултате, за шта је потребно вршити анализу, која врста анализе је потребна, који тип коначних елемената ће бити коришћен, где ће бити постављена оптерећења и ограничења, да ли је могуће извршити поједностављење модела? Први корак, односно планирање, обезбеђује успешност моделирања, и слободно се може рећи да је много важна фаза целокупног процеса анализе.

У другом кораку, односно предпроцесирању, обухваћено је: дефинисање типа елемената према претходној фази планирања, креирање геометрије дела или структуре која се анализира. Геометријски модел се може креирати у CAD софтверу, а затим се преводити у МКЕ софтвер или директно у предпроцесору МКЕ софтвера. Затим се врши генерисање мреже коначних елемената. Мрежа се може креирати ручно или аутоматски. Следеће је додељивање карактеристика моделу. Карактеристике материјала (механичке, термичке, ...) се обично узимају аутоматски из база у оквиру CAD софтвера. Код модела који нису просторни (једнодимензионални, дводимензионални, љуске, ...) додељују се и карактеристике попречног пресека (дебљина, моменти инерције, ...). Често се дефинишу и елементи са специфичним карактеристикама еластичности, пригушења, трења, зазора, и слично. Након овога се постављају оптерећења (спољашња). Постављање граничних услова је наредна ставка.

Трећи корак, односно трећа фаза у МКЕ, обухвата решавање. У овој фази МКЕ солвер се може поделити у три главна дела:

- пресолвер,
- математичко решавање и
- постсолвер.

У пресолверу је обухваћено учитавање модела креираног у предпроцесору и формулисање математичке репрезентације модела у облику система једначина. Сви параметри дефинисани у фази предпроцесирања се користе у овом кораку, а ако постоје неки недостаци, пресолвер ће најчешће зауставити даљи рад и спречити математичко решавање. Ако је модел исправан, солвер наставља да формира елементе матрице крутости и матрице маса и позива део за математичко решавање, који израчунава резултате. Резултати се враћају у солвер, а постсолвер се користи за израчунавање напона, деформација, брзине, одзиве итд, за сваки чвор коначних елемената континуума. Сви ови резултати се шаљу у фајл резултата који постпроцесор може аутоматски да чита.

Постпроцесирање је обухваћено у четвртном кораку. У овој фази се читају и анализирају резултати анализе. Резултати се могу приказати у облику табела, деформисаних стања дела, различитих облика графичког приказа, облика модела

природних учесталости итд. Код већине постпроцесора постоје и алати за анимацију. Графички прикази обично показују бојама линије, површине или запремине истих вредности израчунатих карактеристика. Код просторних модела могуће је добити и приказ унутрашњости дела коришћењем пресечних равни. Постпроцесори укључују и израчунавање напона и деформација у свим координатним правцима [18].

У последњем кораку је описана анализа резултата. Из много разлога резултати добијени МКЕ могу мање или више одступати од тачних, а могу бити и потпуно погрешни. МКЕ софтверски пакети не могу открити ова неслагања, већ само формалне и/или суштинске грешке у моделима. Из тог разлога је неопходно вршити анализу добијених резултата и донети практичну, инжењерску процену. Поуздана процена се доноси на основу [16]:

- Доброг разумевања суштине решаваног проблема,
- Доброг познавања теорије,
- Доброг познавања методе коначних елемената и коришћеног софтвера,
- Поседовања искуства у моделирању и анализи.

Добра процена добијених резултата се често може направити њиховим поређењем са резултатима добијеним коришћењем другачијих модела за решавање истих или сличних проблема, који су већ потврђени или коришћењем другог МКЕ софтвера са различитим особинама. Најбоља потврда се добија мерењем или тестирањем модела у лабораторијским или реалним експлоатационим условима.

5.1.5 Поступак избора типа КЕ

Карактеристично за све коначне елементе је да је сваки елемент у потпуности дефинисан својим обликом, бројем чворова и међучворова. Избор коначног елемента осим топологије подразумева и избор интерполационе функције. Овим параметрима контролишу се особине елемената, чиме се постиже жељена тачност и конвергенција решења добијеног коначним елементима [19].

Класификација коначних елемената је могућа према:

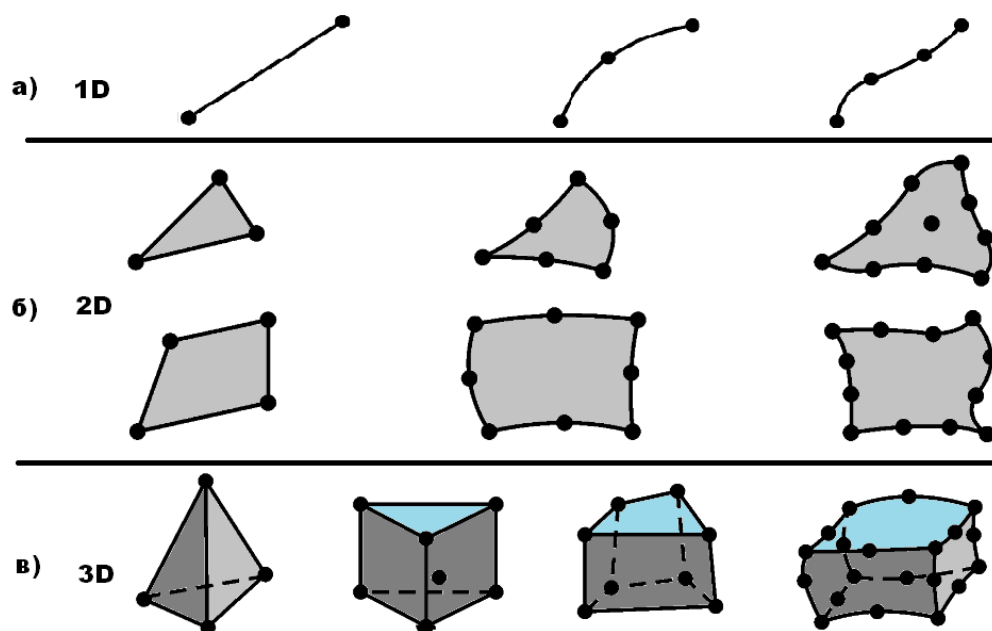
- Димензионалности (1D, 2D, 3D),
- Фамилији - групацији (плоча, греда, љуска),
- Реду интерполационих функција (линеаран, параболичан, кубни),
- Геометрији (троугаони, четвороугаони),
- Физичким особинама (дебела и танка љуска),
- Материјалним својствима (изотропан, анизотропан).

Основни типови коначних елемената одређују се на основу простора који користе (једнодимензиони - 1D, дводимензиони - 2D, тродимензиони - 3D) [19].

Једнодимензиони елементи се користе код геометрије која има једну димензију доминантну у односу на преостале две димензије. Облик 1-D елемента је линија. У једнодимензионе коначне елементе спадају штапови, ужадни елементи, греде, цевни елементи (Слика 5.3 а.)

Дводимензиони елементи се користе за моделирање проблема равнoг стања напона или равнoг стања деформација, као и за осносиметричне проблеме. Историјски гледано прво су развијени троугаони елементи. Тро-чворни линеарни троугаони елемент је најједноставнији дводимензиони елемент. Уопштено гледано 2D елементима се може моделирати 2D континуум. У 2D елементе спадају мембрана, љуска, плоча (Слика 5.3 б.)

Тродимензиони елементи су уобичајено 3D интерпретација 2D елемената. Ови елементи се користе у дискретизацији 3D објеката. Тродимензиони елементи могу бити призматични и осносиметрични. У 3D елементе спадају плоча и дебела љуска, призма, пирамида, осносиметрични елементи као и 3D коначни елементи са ортотропским особинама у којима спадају слојевите форме (Слика 5.3 в.) [15].



Слика 5.3 Типови KE а) 1D, б) 2D, в) 3D

Избор коначног елемента за моделирање зависи од геометријске форме посматраног континуума и процене унутрашње дистрибуције сила и деформација.

5.1.6 Појам крутости KE

Матрица крутости представља фактор пропорционалности између вектора сила и вектора померања проузрокованих силама. Тело постаје круће уколико матрица крутости расте и обрнуто [20].

Крутост зависи од геометрије, материјалних својстава и интерполационих функција. У почетку су се матрице крутости елемената одређивале на основу утицајних коефицијената крутости. Након тога је развијено више метода за одређивање матрице крутости, као што су:

- Директна равнотежна метода,
- Варијациона метода,
- Метода резидуума,
- Метода енергетског баланса.

5.1.7 Типови оптерећења

Оптерећења представљају побуду физичког система и у инжењерским проблемима су то углавном силе, моменти, притисак и слично. Приликом решавања реалних проблема, могу се издвојити више врста оптерећења. Оптерећења која се најчешће могу срести у МКЕ могу се поделити у три групе [17]:

1. Глобална оптерећења: а) Убрзање, б) Брзина, в) Температура.
2. Оптерећења у чворовима: а) Сила/Момент, б) Померање, в) Брзина, г) Температура, д) Извор топлоте (Топлотна енергија/Јединична запремина), ђ) Топлотни флуks (Топлотна енергија/Јединична површина).
3. Оптерећења по елементима: а) Континуално, б) Притисак, в) Температура, г) Извор топлоте (Топлотна енергија), д) Топлотни флуks (Топлотна енергија/Јединична површина), ђ) Конвекција, е) Радијација.

Све три врсте оптерећења се користе за: статичке/стационарне, нелинеарне и динамичке/нестационарне анализе.

На цело тело се примењују глобална оптерећења. Оваква оптерећења се најчешће користе да симулирају утицај гравитације, или да дефинишу температуру околине и тела за термичке прорачуне. Оптерећења у чворовима и оптерећења по елементима су углавном силе, моменти, притисак итд.

5.1.8 Ограничења

Онемогућавање померања по неком од шест степени слободе: translација дуж X, Y и Z, као и ротација око X, Y и Z оса, назива се ограничење [17].

Ограничења се деле на:

- Глобална (она која важе за сваки чвор мреже коначних елемената) и
- Локална ограничења у одређеним чворовима.

Оваквом применом се могу моделирати случајеви уклештења, ослањања, разне везе између тела и сл. Ограничења се могу дефинисати у глобалном координатном систему, где важе у правцима оса глобалног координатног система, али и у локалним координатним системима. На овај начин се олакшава моделирање реалних услова, као и решавање симетричних проблема посматрањем само неких њихових делова.

5.2 Основне једначине у МКЕ

За поуздану процену понашања конструкције изложене динамичким силама пресудан утицај има познавање сопствених кружних учестаности (фреквенција) и сопствених облика осциловања.

Сопствени облици осциловања представљају особину структуре која зависи од њене геометрије, материјала и начина укрућења. Сваки од модова осциловања говори о начину доминантних могућности осциловања којима ће структура бити изложена, ако се за то стекну услови.

Најједноставнији случај је систем без пригушења и дејства спољашњих сила који се може приказати следећом једначином:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0 \quad (5.1)$$

Решење диференцијалне једначине може се приказати у следећем облику:

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} \cdot \sin(\omega t + i) \quad (5.2)$$

где $\bar{\mathbf{q}}$ представља вектор амплитуда, а ω кружну учестаност слободних осцилација система. Хомогени систем алгебарских једначина по непознатим амплитудама $\bar{\mathbf{q}}$ остварује се заменом претходног израза у (5.1):

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \cdot \bar{\mathbf{q}} = 0 \quad (5.3)$$

Услов за нетривијално решење је да детерминанта система буде једнака нули, тј.:

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (5.4)$$

На крају, решење диференцијалне једначине се може приказати као:

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \cdot \bar{\mathbf{q}}_i = 0 \quad (5.5)$$

На понашање конструкција доминантан утицај имају најниже сопствене учестаности па се, у практичној примени МКЕ, одређује само неколико кружних учестаности, а за велике системе и неколико стотина сопствених учестаности.

6. Прорачун динамичке стабилности вратила

Нумеричка метода, својим софтверским пакетима, умногоме олакшава решавање проблема у погледу динамичке стабилности. Применом рачунара знатно се смањују два значајна фактора: трошкови испиривања и време испитивања.

У наредном примеру биће приказана анализа вратила аналитичким путем и уз помоћ рачунара, коришћењем методе коначних елемената (МКЕ).

6.1 Пример аналитичког прорачуна вратила

Полазни подаци:

У раду је анализирано карданско вратило аутомобила са задњом вучом чије су димензије:

$$l = 1,5 \text{ m}, d = 91 \text{ mm} \Rightarrow r = 0,0455 \text{ m}$$

Израз за прорачун критичног броја обртаја има облик:

$$n_{kr} = \frac{30\pi}{l^2} \cdot r \cdot \sqrt{\frac{E}{2\rho}} \quad (6.1)$$

где је: E - модул еластичности, МПа, ρ - густина материјала, kg/m^3 .

За поједине материјале вредности модула еластичности и густине су дате у табели 6.1

Табела 6.1 Основне механичке карактеристике материјала [1]

Материјал	Модул еластичности E , МПа	Густина ρ , kg/m^3
Челик	$(2,1 \div 2,2) \cdot 10^5$	7850
Алуминијум	$(0,69 \div 0,85) \cdot 10^5$	2600 ÷ 300
Сиви лив	$(0,8 \div 1,2) \cdot 10^5$	7400

У случају челичног вратила вредности модула еластичности и густине су: $E = 2,1 \cdot 10^{11} N/m^2$ и $\rho = 7850 kg/m^3$. Заменом полазних података и карактеристика материјала у једначину 6.1, добија се критични број обртаја, односно фреквенција челичног вратила:

$$n_{kr} = \frac{30\pi}{1,5^2} \cdot 0,0455 \cdot \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 7850}} = 7109,57 \text{ min}^{-1}$$

Пошто је добијени резултат у јединицама min^{-1} дељењем са 60 добија се јединица s^{-1} , па критични број обртаја износи $n_{kr} = 118,5 s^{-1}$, односно фреквенција је: **$f=118,5 \text{ Hz}$**

6.2 Пример нумеричког прорачуна вратила

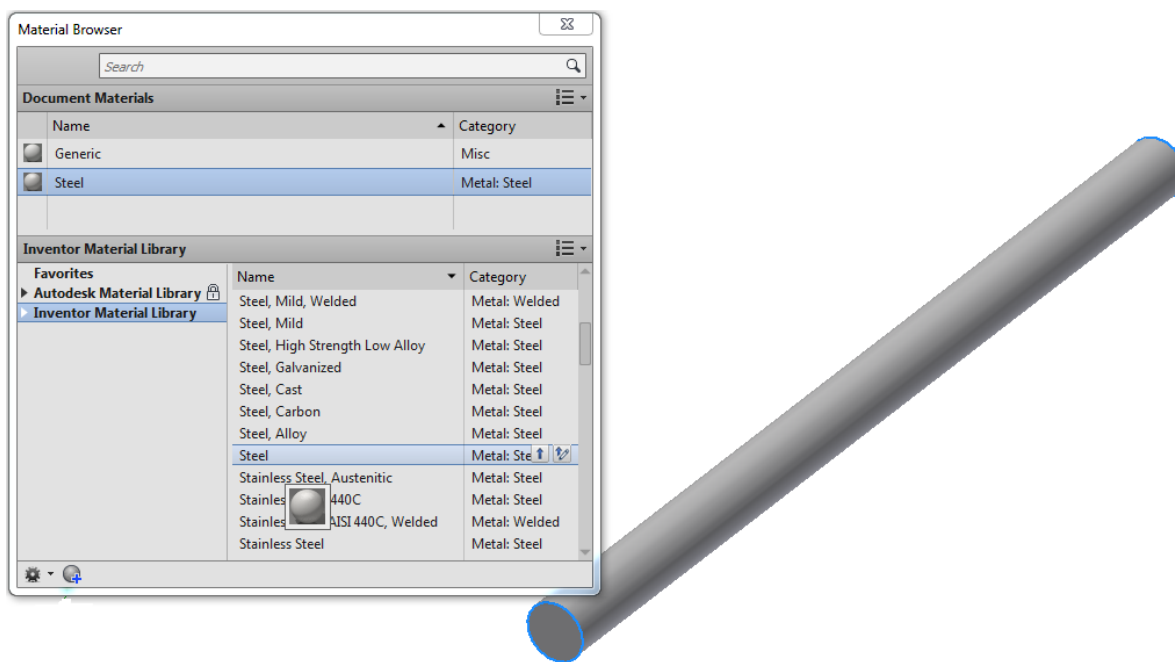
За потребе прорачуна моделирано је право вратило константног попречног пресека у програмском пакету „Autodesk INVENTOR“ (слика 6.1).



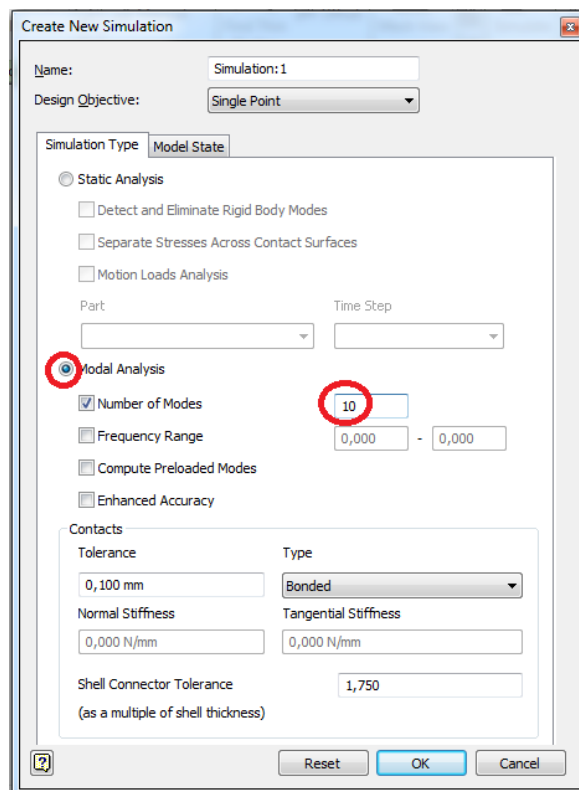
Слика 6.1 3Д модел вратила

Исти софтвериски пакет се може користити и за статичку и за динамичку анализу. Овде је реч о динамичкој анализи с обзиром да се ради о анализи сопствених фреквенција. Траба напоменути, а резултати ће то и потврдити, да вредност сопствених фреквенција зависи од односа модула еластичности и густине материјала.

Након моделирања вратила усваја се материјал. У овом случају из групе метала одабран је челик (Steel), (слика 6.2). За анализу сопствених фреквенција користи се посебан модул у програмском пакету „Autodesk INVENTOR“ (слика 6.3).

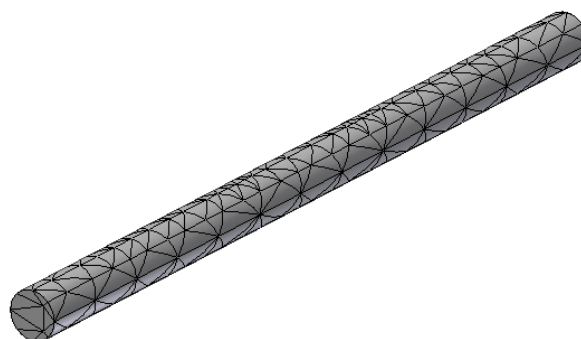
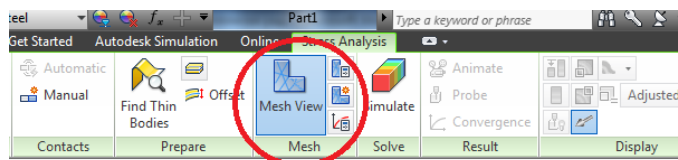


Слика 6.2 Задавање материјала



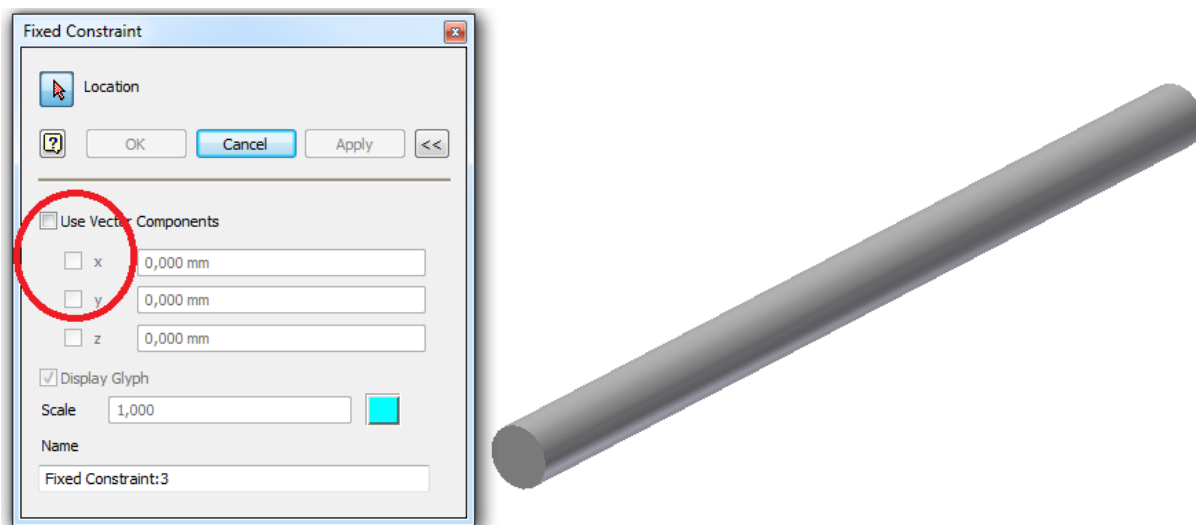
Слика 6.3 Избор фреквентне анализе

Да би се одредиле сопствене фреквенције вратила (фреквенције услед сопствене тежине), неопходно је да се генерише мрежа коначних елемената у палети „Mesh” (слика 6.4), затим се уводе ограничења (слика 6.5), и на крају кликом на иконицу „Simulate” добијају се резултати испитивања (слика 6.6).

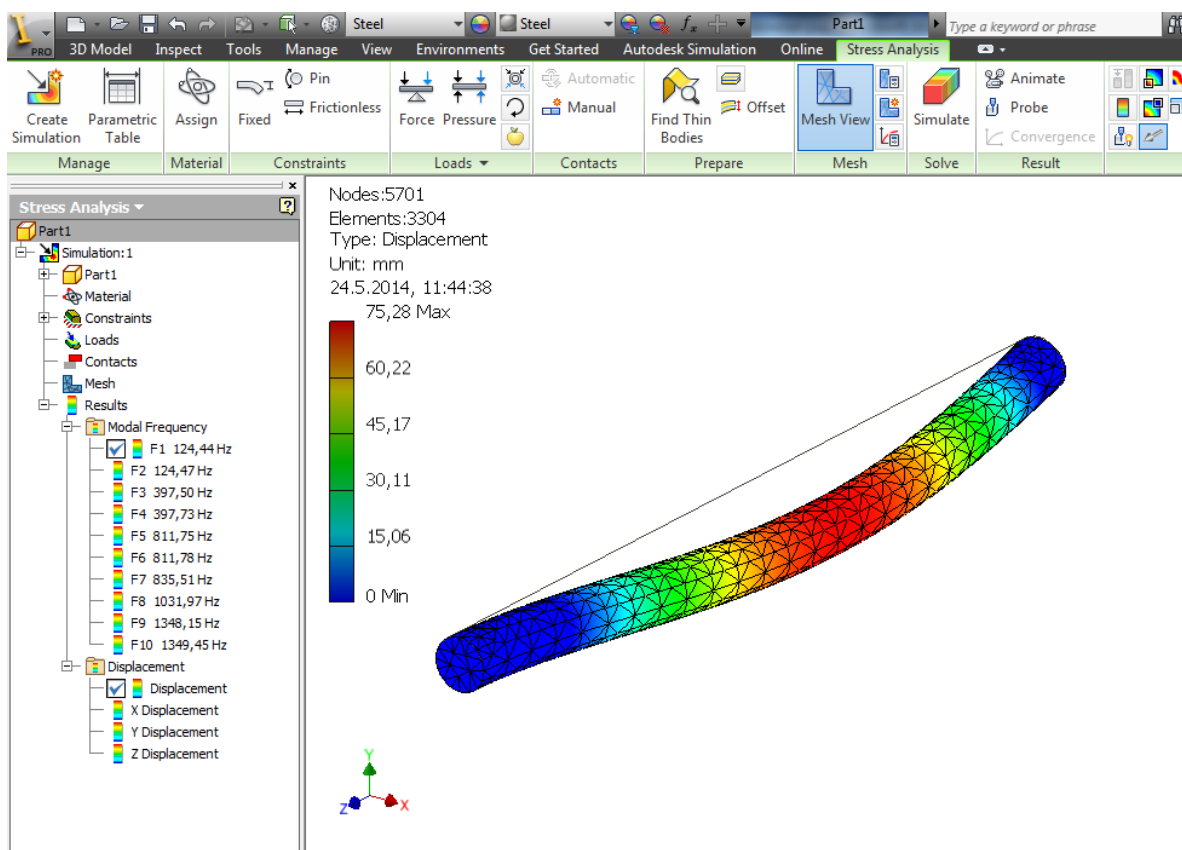


Слика 6.4 Генерисање мреже KE

Пошто је вратило ослоњено на један непокретан и један покретан ослонац, да би се тако анализирано потребно је у палети (слика 6.5) као покретни ослонац чекирати опција „Use Vector Components“ и ту одредити правац померања.

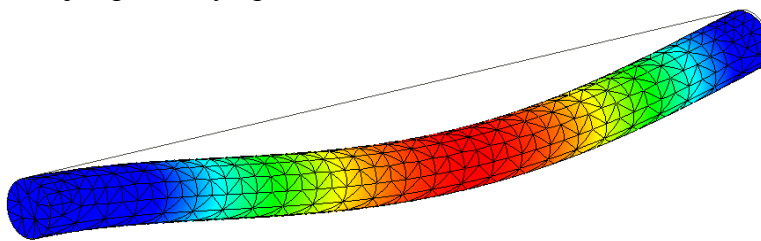


Слика 6.5 Постављање ограничења

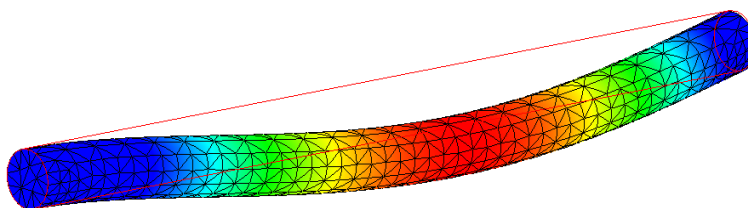


Слика 6.6 Симулирање вратила са задатим ограничењима

При фреквентној анализи коришћено је 10 модова. Као најмеродавнији се користе вредности из прва два мода, јер су резултати најверодостојнији. На сликама 6.7 и 6.8 приказана је симулација вратила у прва два мода.

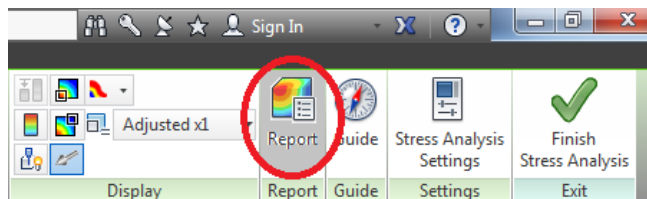


Слика 6.7 Фреквенција у првом моду 123,23 Hz



Слика 6.8 Фреквенција у другом моду 123,38 Hz

Комплетан извештај испитивања може се приказати палетом „Report” (слика 6.9), из које је преузета табела сопствених фреквенција, (слика 6.10.)



Слика 6.9 приказ извештаја испитивања вратила

▣ Results

▣ Frequency Value(s)

F1	123,23 Hz
F2	123,38 Hz
F3	394,32 Hz
F4	394,76 Hz
F5	806,11 Hz
F6	806,81 Hz
F7	829,74 Hz
F8	1042,63 Hz
F9	1341,49 Hz
F10	1342,42 Hz

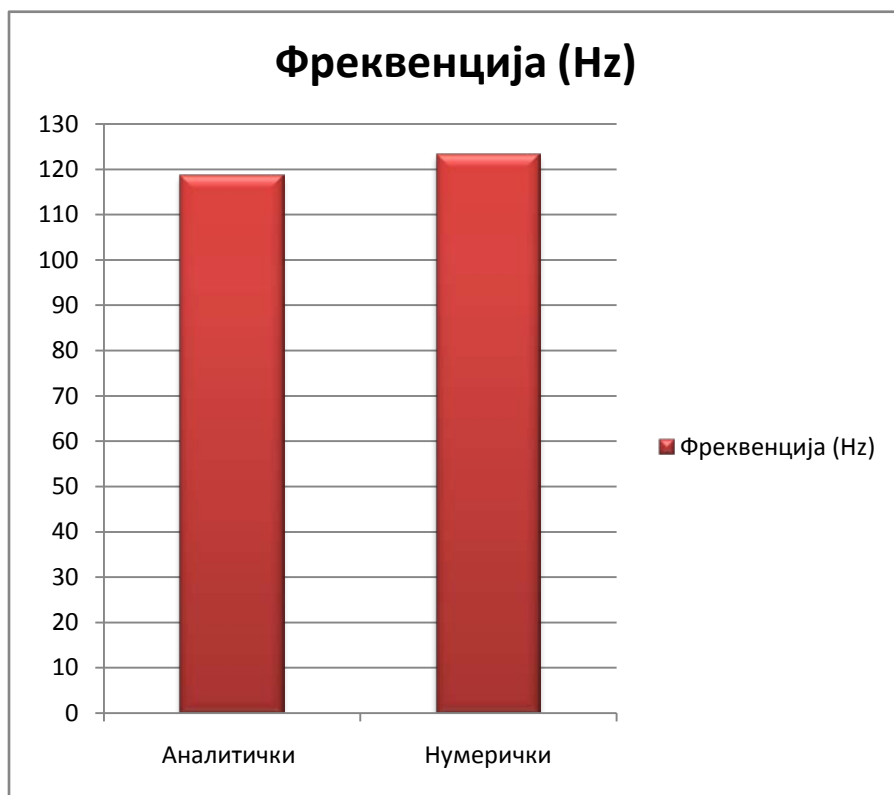
Слика 6.10 Комплетан извештај сопствених фреквенција

6.3 Анализа резултата

Да би се проверила тачност добијених резултата извршено је поређење вредности сопствених фреквенција одређених аналитичким и нумеричким путем. Одступање резултата, зависно од начина анализе, приказано је табелом 6.2, као и графичким приказом (слика 6.11). У табели је приказано и одступање у процентима. Уочава се да процентуално одступање износи 3,91%. Овако добра сагласност резултата је била потврда исправности развијеног модела за нумеричку анализу.

Табела 6.2 Анализа сопствених фреквенција

	Аналитички	Нумерички	Одступање (%)
Фрекв. (Hz)	118,5	123,23	3,91



Слика 6.11 Графички приказ одступања сопствених фреквенција

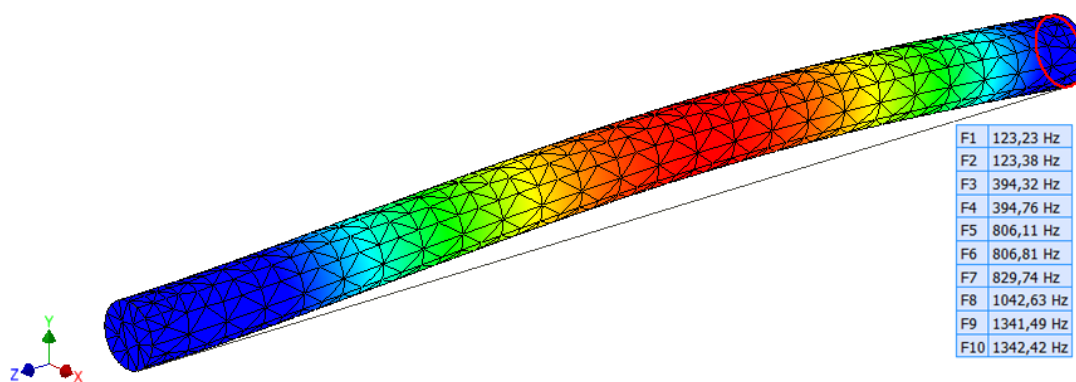
7. Анализа утицајних фактора на динамичку стабилност вратила

Као главни параметар за поређење и анализу понашања вратила, при промени материјала, димензија, облика као и других фактора, посматрано је вратило испитивано у поглављу 6.2. чије су основне мере: дужина 1500 mm и пречник 91 mm.

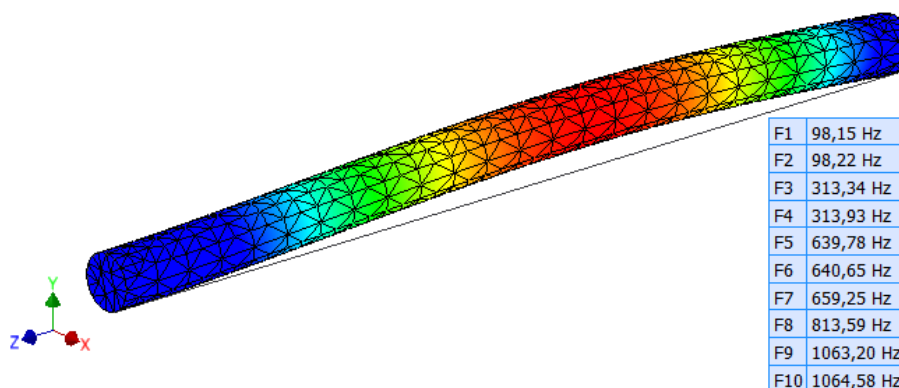
У раду је, у претходном поглављу, поређењем резултата добијених нумеричком и аналитичким путем, потврђена исправност примењене нумеричке методе тако да је она даље у раду коришћена за анализу утицајних параметара.

7.1 Утицај врсте материјала на вредност сопствених фреквенција вратила

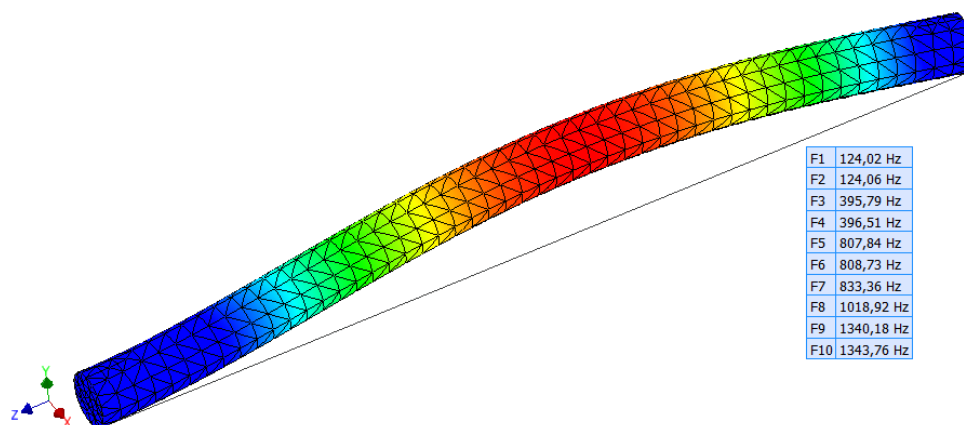
На сликама 7.1÷7.4 приказано је како промена материјала утиче на вредност сопствених фреквенција вратила. Димензије вратила као и сва ограничења су иста за све материјале.



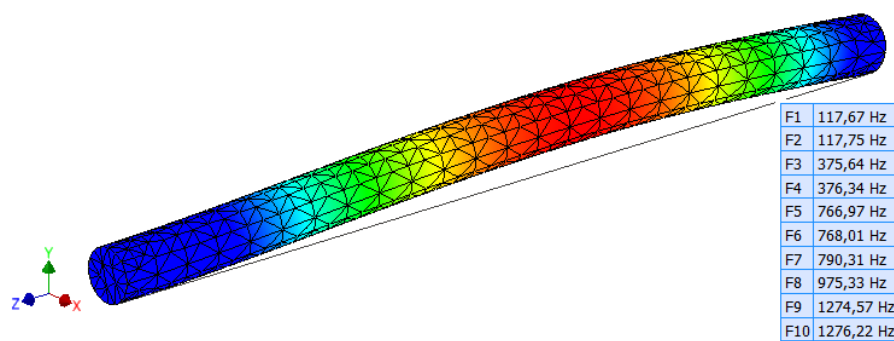
Слика 7.1 Фреквенције челичног вратила, Hz



Слика 7.2 Фреквенције вратила од сивог лива, Hz



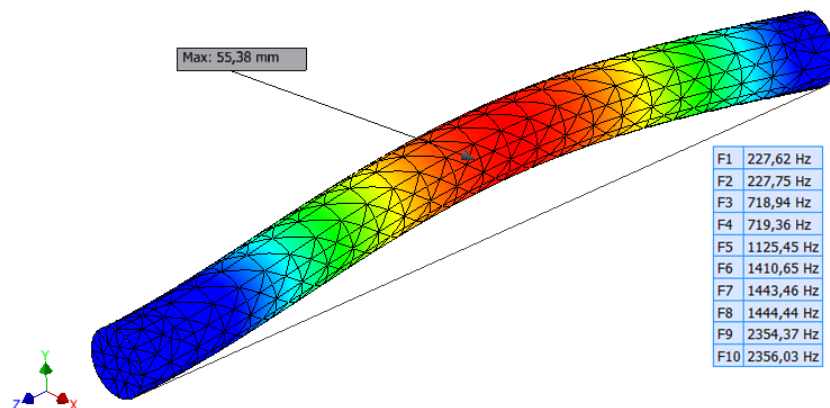
Слика 7.3 Фреквенције вратила од алуминијума, Hz



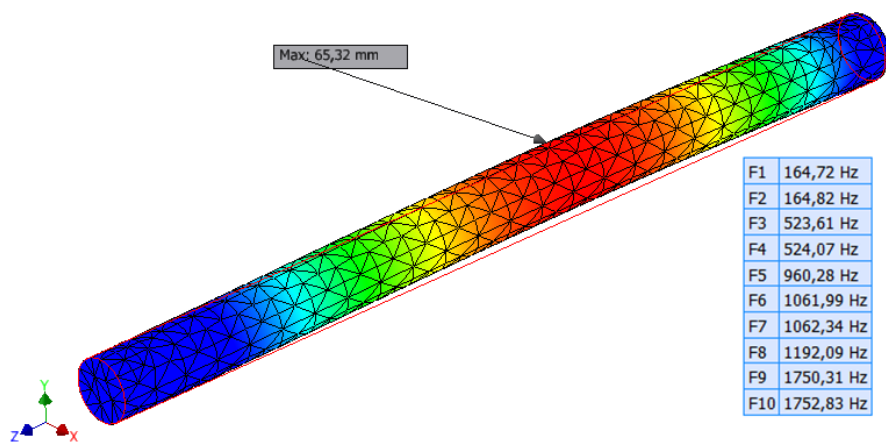
Слика 7.4 Фреквенције вратила од нерђајућег челика, Hz

7.2 Утицај дужине вратила на вредност сопствених фреквенција

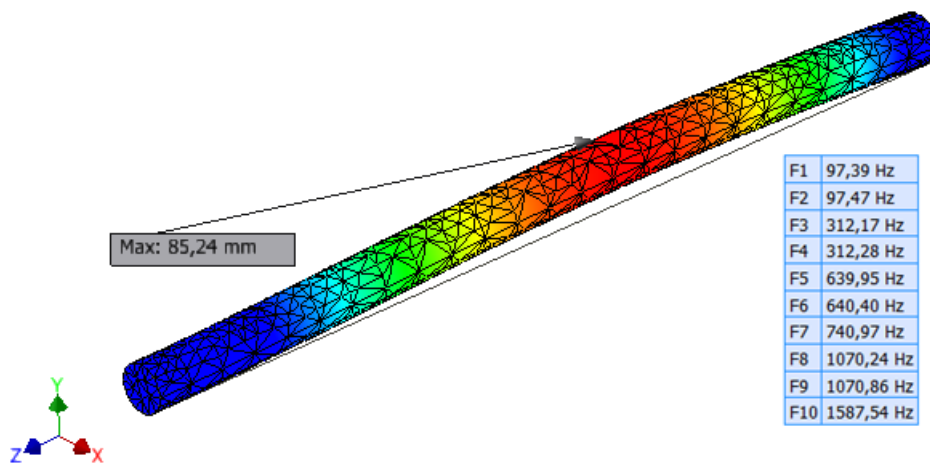
Промена дужине вратила утиче директно на промену вредности сопствених фреквенција. На сликама 7.5 ÷ 7.8 приказана је промена фреквенције и максималног угиба код челичног вратила пуног попречног пресека, за вредности дужине вратила 1100, 1300, 1700 и 1900 mm.



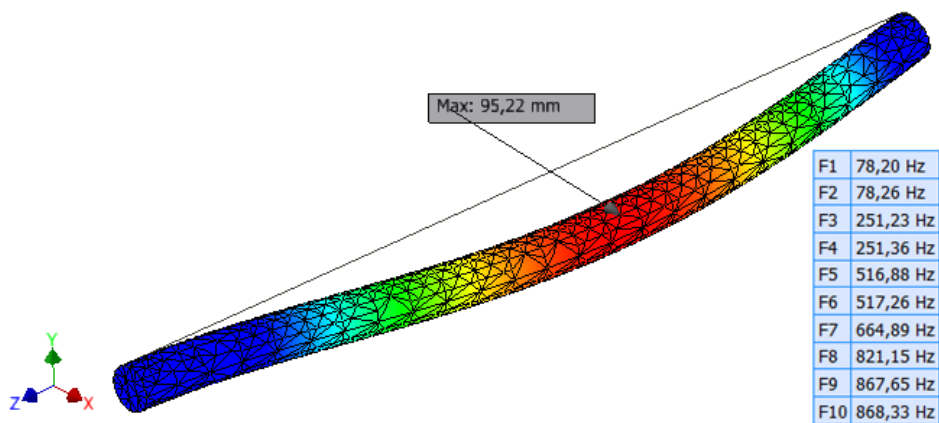
Слика 7.5 Фреквенције и угиб вратила при дужини од 1100 mm



Слика 7.6 Фреквенције и угиб вратила при дужини од 1300 mm



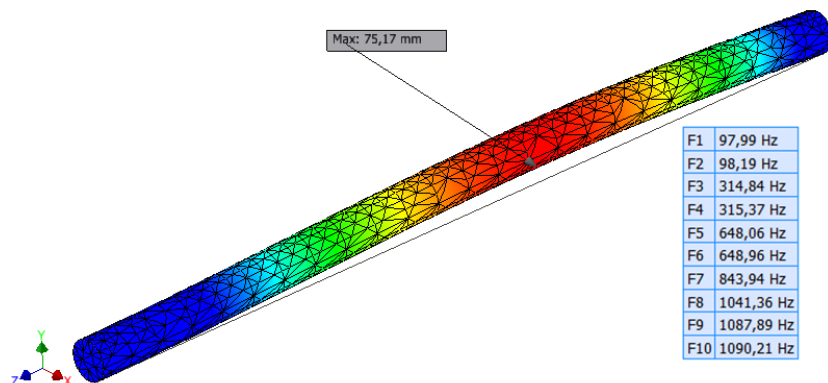
Слика 7.7 Фреквенције и угиб вратила при дужини од 1700 mm



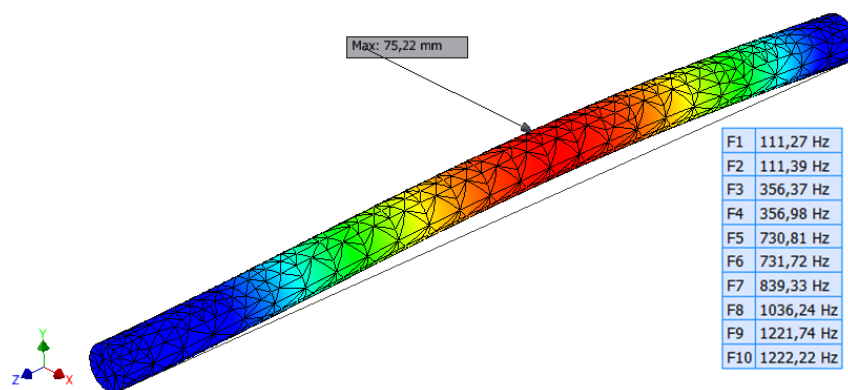
Слика 7.8 Фреквенције и угиб вратила при дужини од 1900 mm

7.3 Утицај спољашњег пречника вратила на вредност сопствених фреквенција

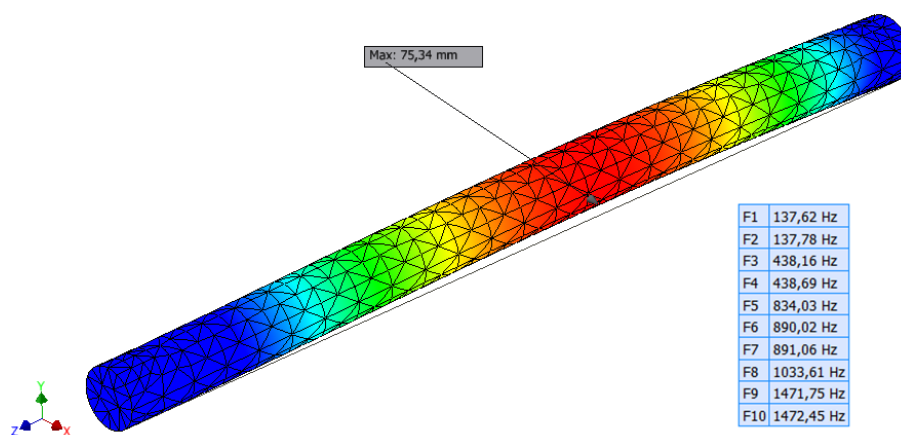
Зависност вредности фреквенција од пречника челичног вратила, приказана је следећим сликама (слике 7.9÷7.12).



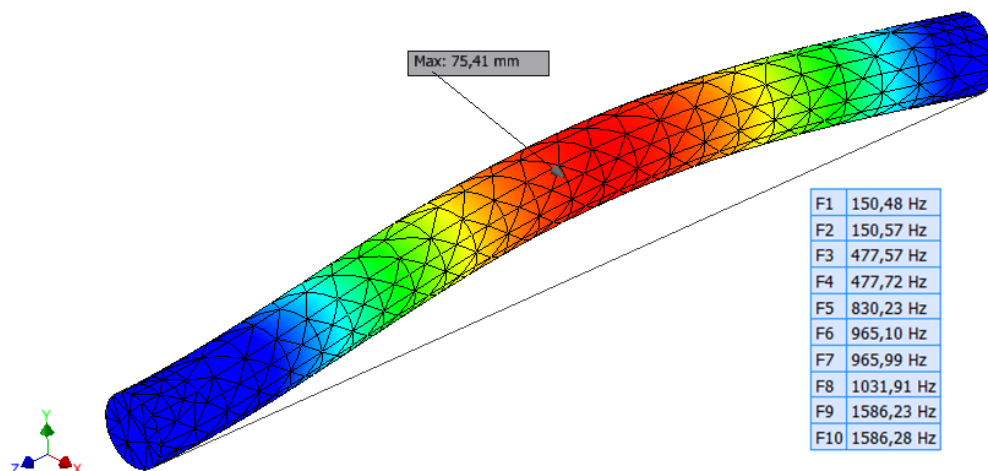
Слика 7.9 Фреквенције и угиб вратила при пречнику од 71 mm



Слика 7.10 Фреквенције и угиб вратила при пречнику од 81 mm



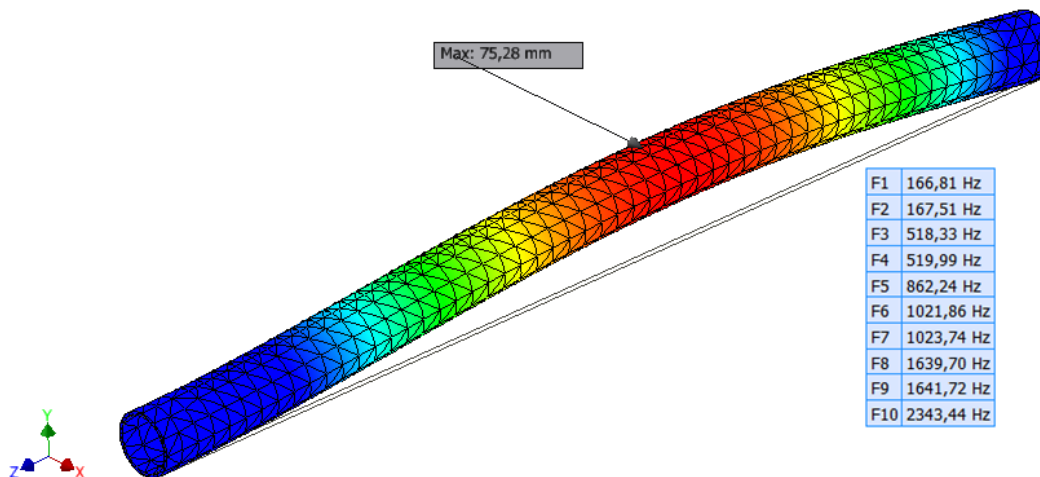
Слика 7.11 Фреквенције и угиб вратила при пречнику од 101 mm



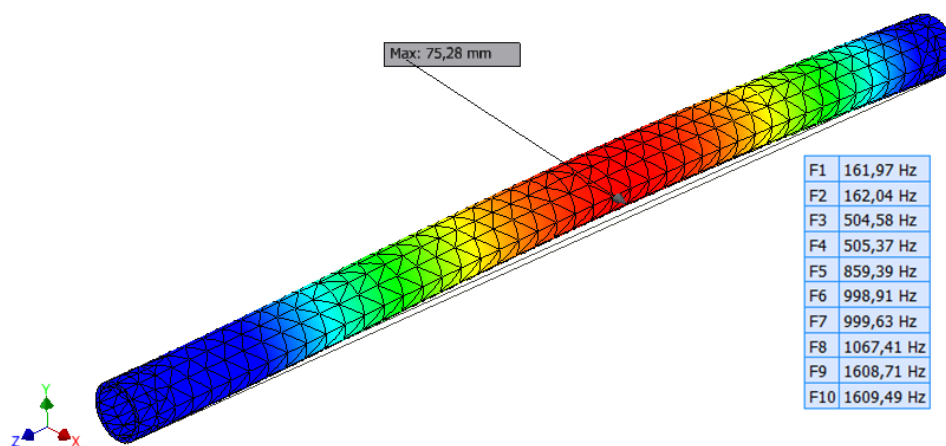
Слика 7.12 Фреквенције и угиб вратила при пречнику од 111 mm

7.4 Утицај дебљине зида вратила на вредност сопствених фреквенција

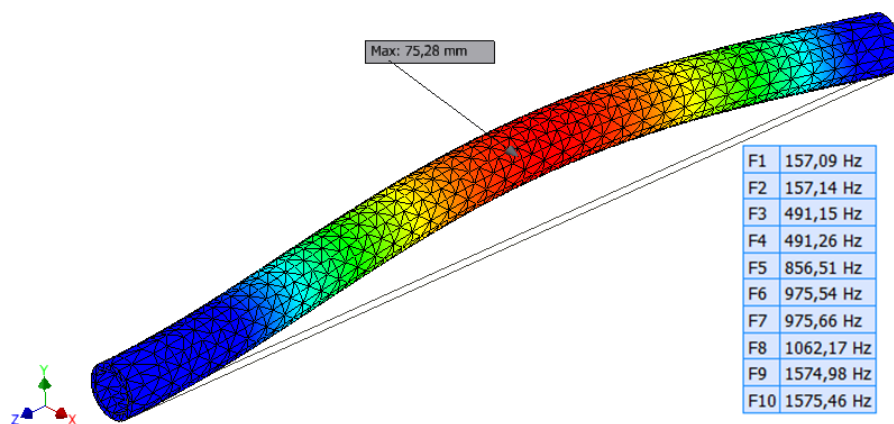
У случају шупљег вратила и дебљина зида попречног пресека профила има утицај на фреквенције вратила. Зависност сопствених фреквенција челичног вратила за вредности дебљине зида 10, 15, 20, 25 и 30 mm је приказана на сликама 7.13÷7.17.



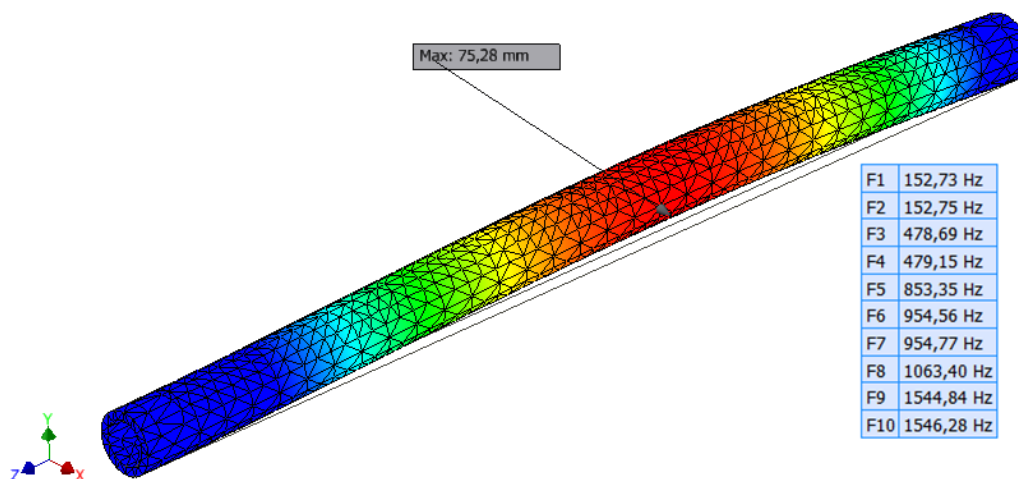
Слика 7.13 Фреквенције и угиб вратила при дебљини попречног пресека од 10 mm



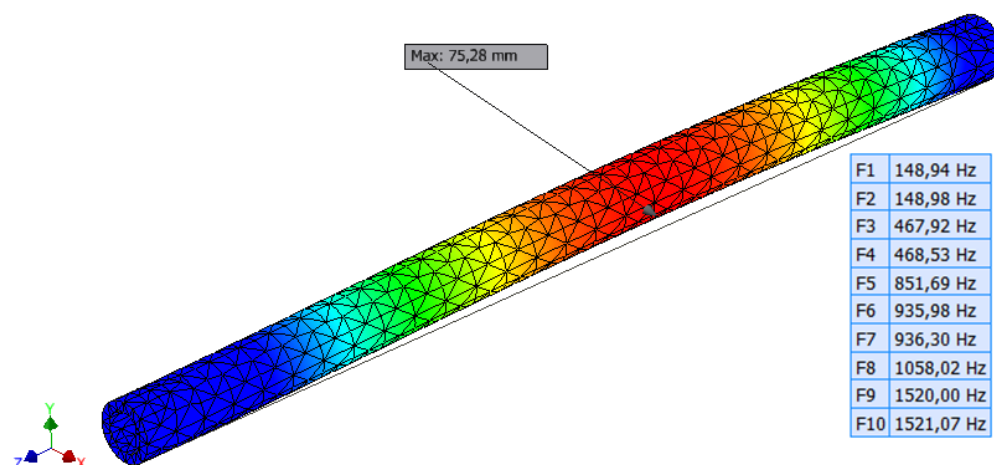
Слика 7.14 Фреквенције и угиб вратила при дебљини попречног пресека од 15 mm



Слика 7.15 Фреквенције и угиб вратила при дебљини попречног пресека од 20 mm



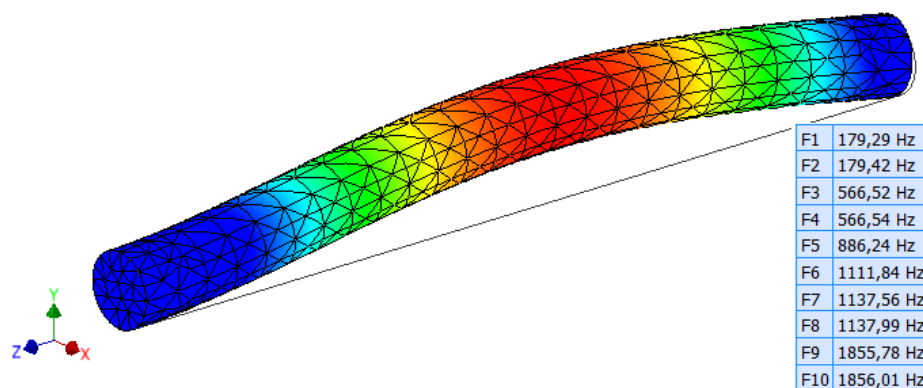
Слика 7.16 Фреквенције и угиб вратила при дебљини попречног пресека од 25 mm



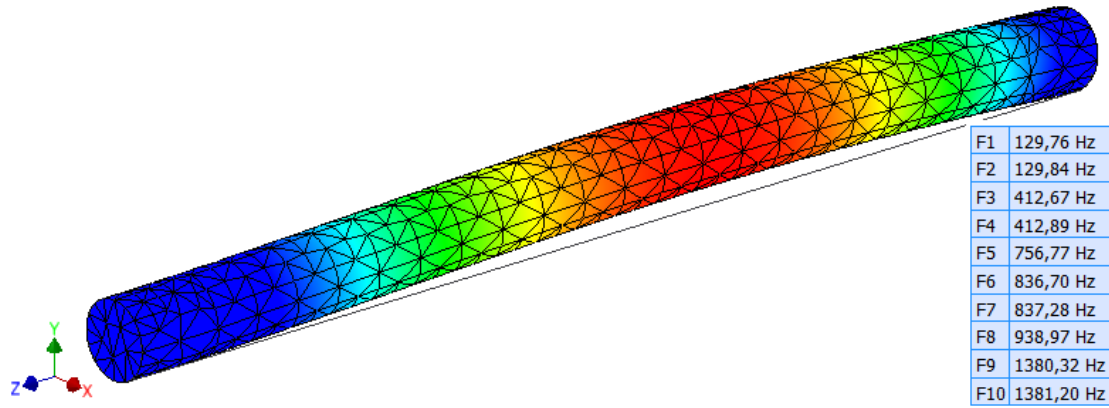
Слика 7.17 Фреквенција и угиб вратила при дебљини попречног пресека од 30 mm

7.5 Утицај дужине на вредност сопствених фреквенција вратила од различитог материјала

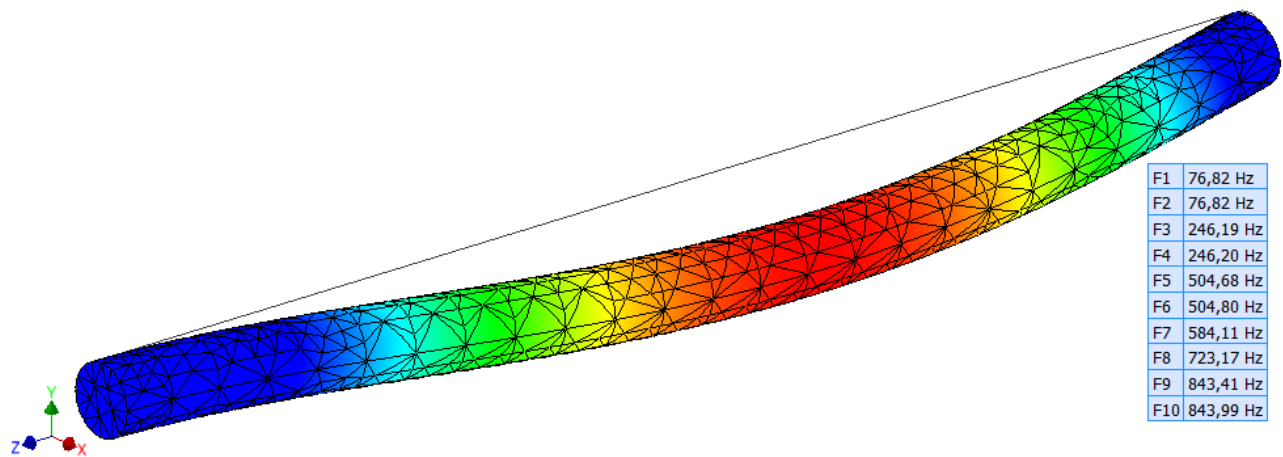
Промена димензије вратила има знатан утицај на вредност сопствених фреквенција. На сликама 7.17÷7.29 је приказана промена фреквенција код вратила од различитог материјала при истим дужинама које су коришћене при анализи челичног вратила, како би се после урадила анализа зависности ових параметара. Прво су приказани резултати испитивања сивог лива, након тога алуминијума и на крају нерђајућег челика.



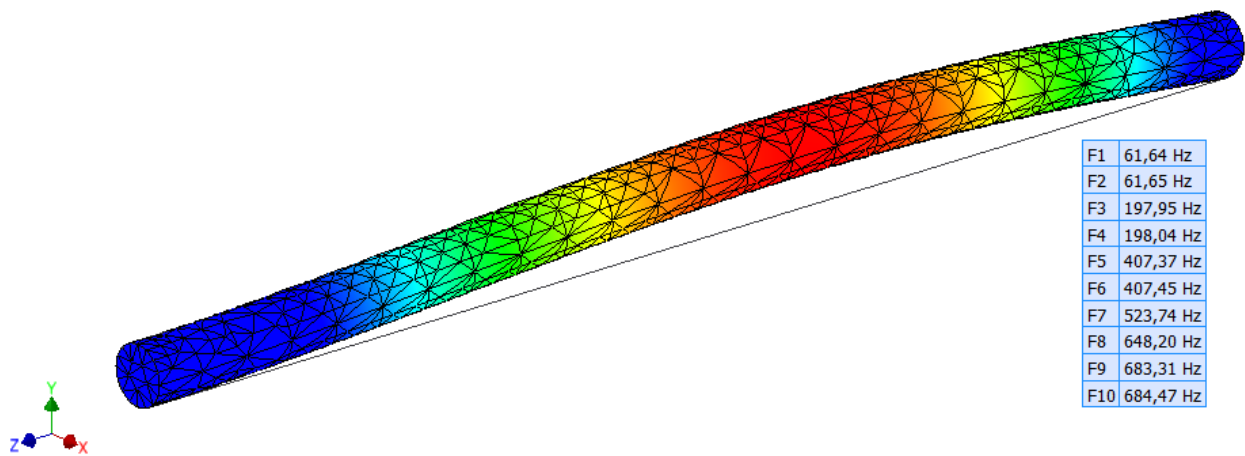
Слика 7.18 Фреквенције вратила од сивог лива при дужини вратила од 1100 mm



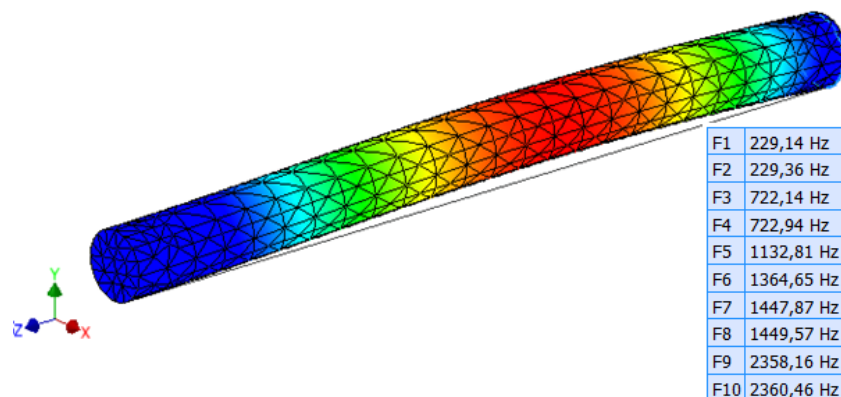
Слика 7.19 Фреквенције вратила од сивог лива при дужини вратила од 1300 mm



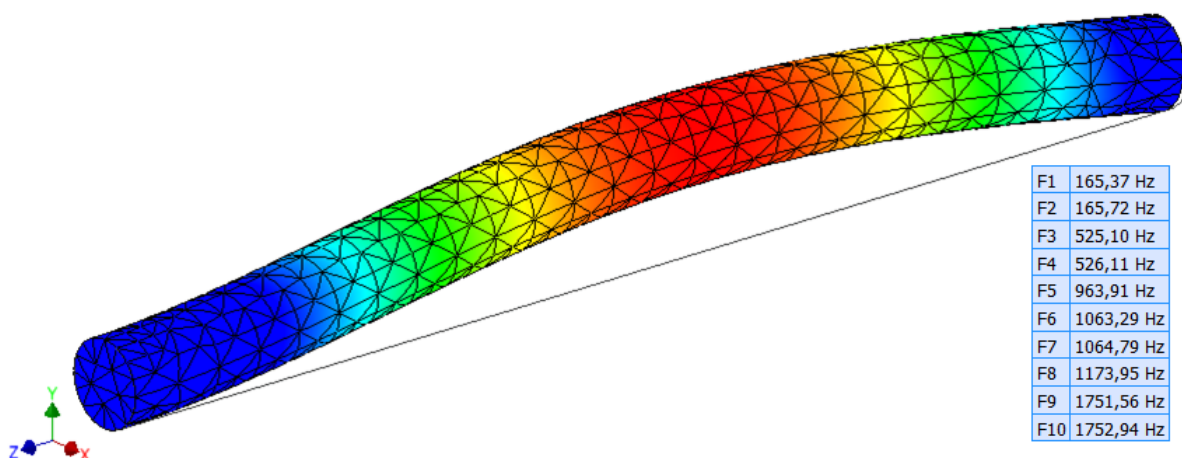
Слика 7.20 Фреквенције вратила од сивог лива при дужини вратила од 1700 mm



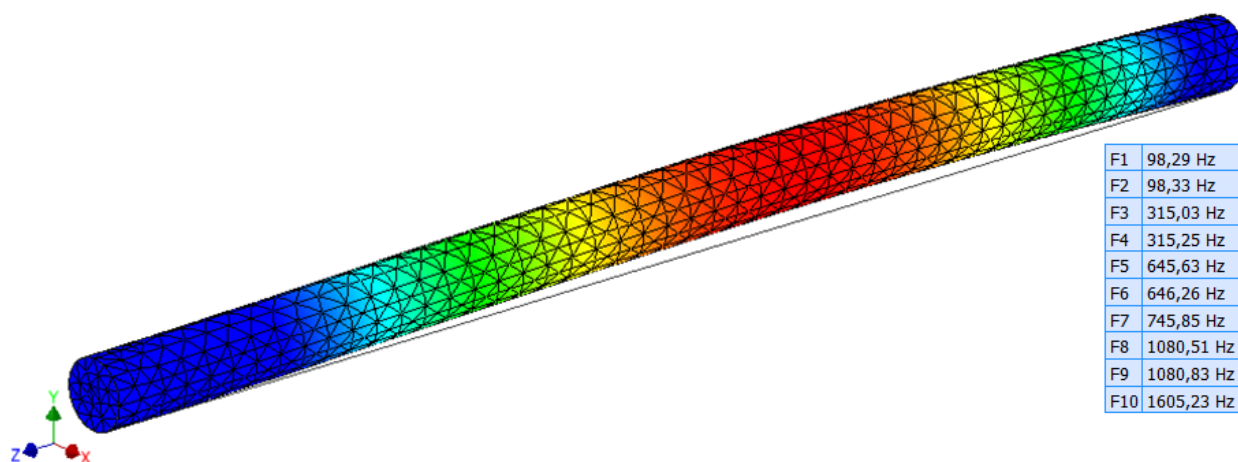
Слика 7.21 Фреквенције вратила од сивог лива при дужини вратила од 1900 mm



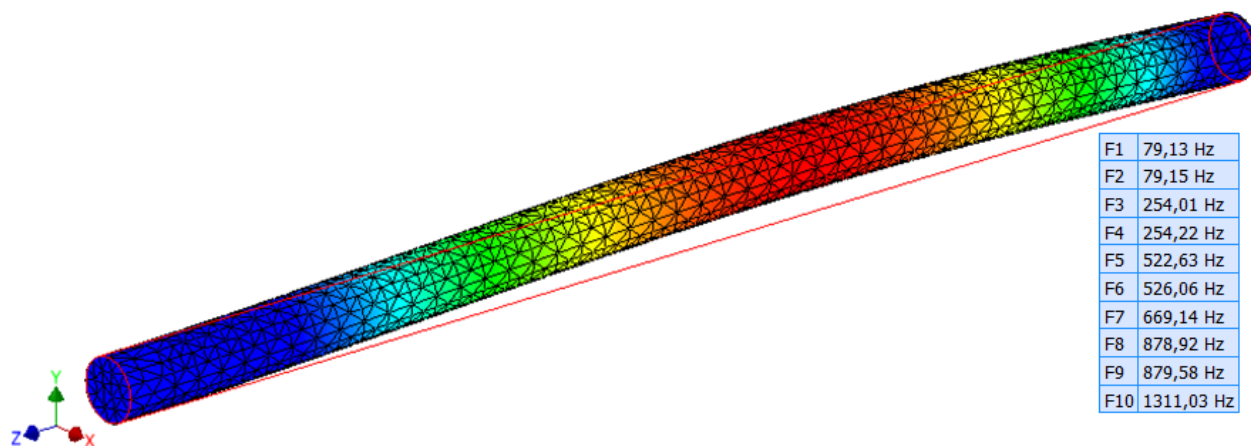
Слика 7.22 Фреквенције вратила од алуминијума при дужини вратила од 1100 mm



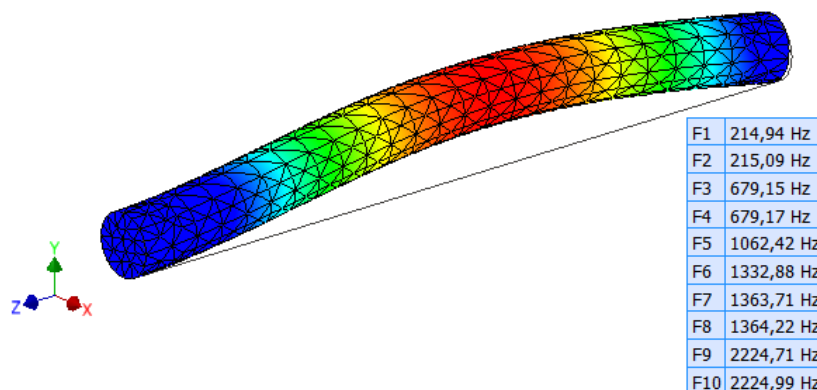
Слика 7.23 Фреквенције вратила од алуминијума при дужини вратила од 1300 mm



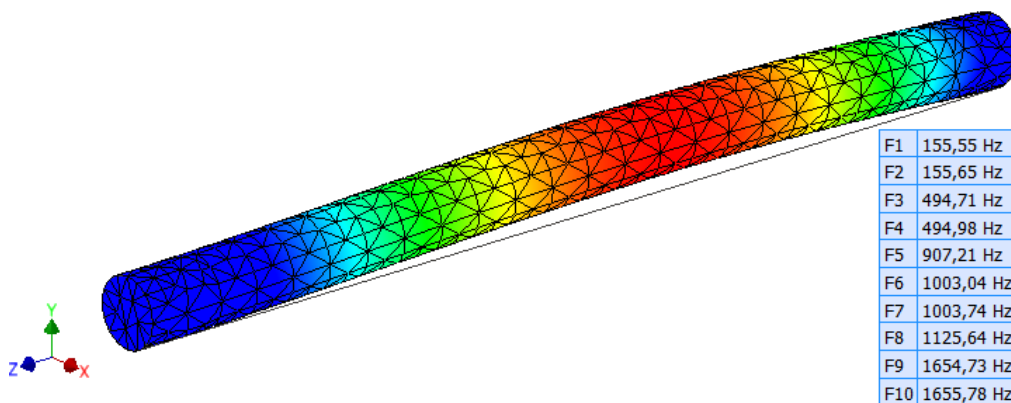
Слика 7.24 Фреквенције вратила од алуминијума при дужини вратила од 1700 mm



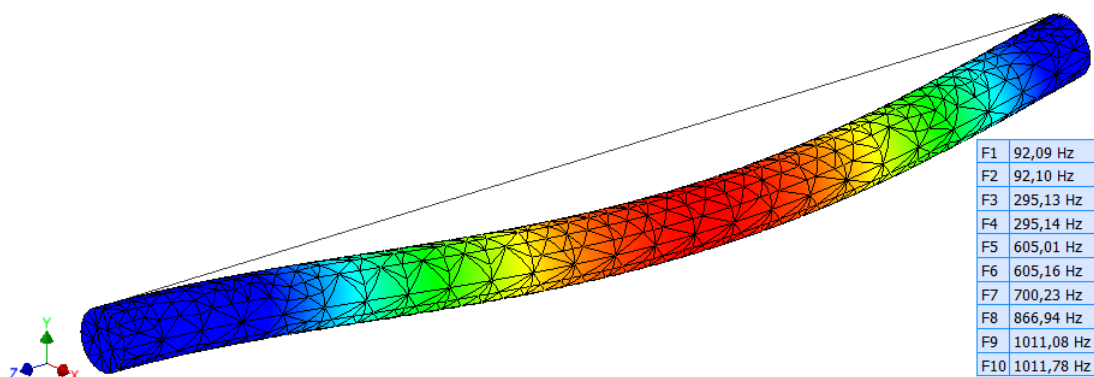
Слика 7.25 Фреквенције вратила од алуминијума при дужини вратила од 1900 mm



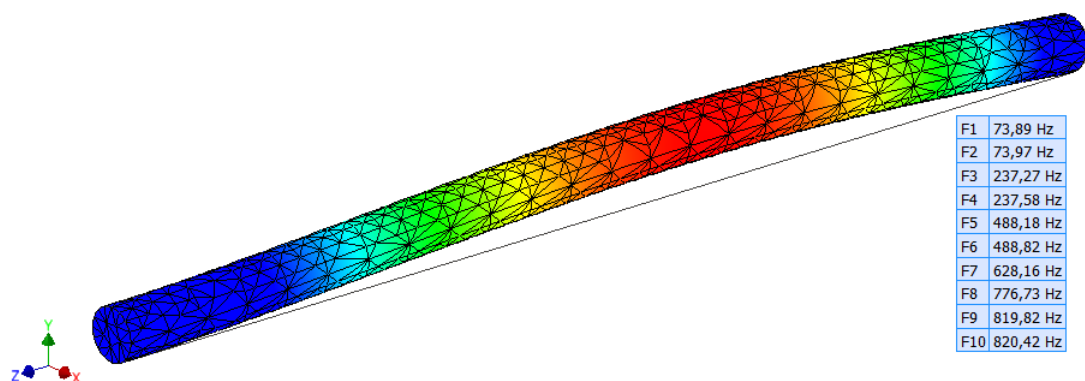
Слика 7.26 Фреквенције вратила од нерђајућег челика при дужини вратила од 1100 mm



Слика 7.27 Фреквенције вратила од нерђајућег челика при дужини вратила од 1300 mm



Слика 7.28 Фреквенције вратила од нерђајућег челика при дужини вратила од 1700 mm



Слика 7.29 Фреквенције вратила од нерђајућег челика при дужини вратила од 1900 mm

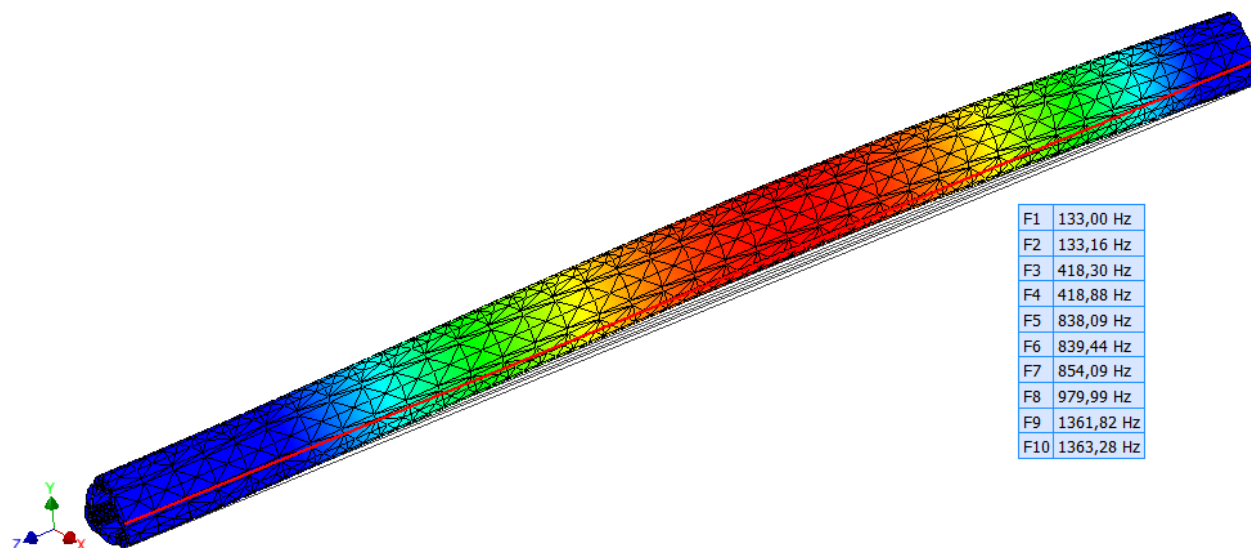
7.6 Утицај облика вратила на вредност сопствених фреквенција

Интересантно је да поред уобичајног пуног и шупљег кружног профила вратила, све већу примену на тржишту налазе и профили специјалног облика, односно облика који одступа од стандардног кружног. Један од таквих произвођача вратила је компанија из Словеније „Cerjak“. Модел вратила је приказан у софтверском пакету „Autodesk INVENTOR“, (слика 7.30).



Слика 7.30 3D модел вратила произвођача „Cerjak“

Вратило произвођача „*Cerjak*“ истих је основних димензија као и стандардно кружно вратило, разлика је само у профилу попречног пресека, који је другачијег облика. Након моделирања вратила и усвајања материјала приступа се модулу „Modal Analysis“ као на слици 6.3 и за тако измоделирано вратило се испитују вредности сопствених фреквенција, (слика 7.31). На крају је упоређено „*Cerjak*“ вратило са вратилом кружног попречног пресека, да би се утврдило које вратило има повољније особине на осцијације.



Слика 7.31 Фреквенције челичног вратила произвођача „*Cerjak*“

7.7 Анализа резултата

Анализа резултата добијених прорачуном је данас готово незамислива без постпроцесора. Иако је процес анализе структуре методом коначних елемената високо аутоматизован, ипак постоји опасност да се у току анализе проузрокују грешке које, у већој или мањој мери, утичу на тачност решења, а у неким фаталним случајевима спречавају добијање било каквог резултата.

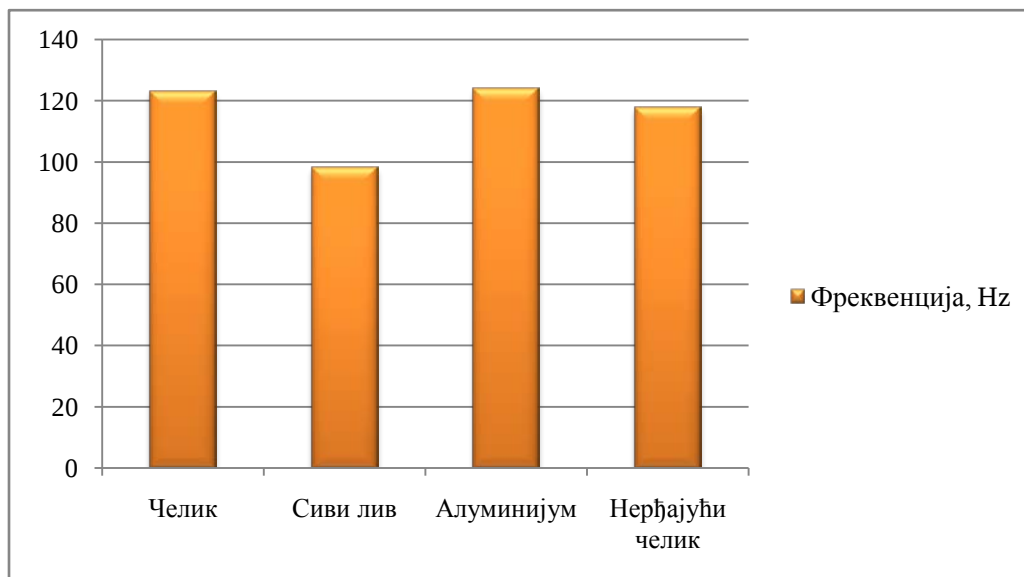
Ако постоји сумња у резултате анализе добијених МКЕ, потребно је проверити:

- Да ли су коришћене одговарајуће јединице за све величине?
- Да ли су задате одговарајуће карактеристике материјала и модела?
- Да ли постављени гранични услови и оптерећења одговарају реалним?

Анализа резултата је неопходна како би се одредило најповољније решење у датим условима. Ова фаза знатно утиче на доношење одлука конструктора.

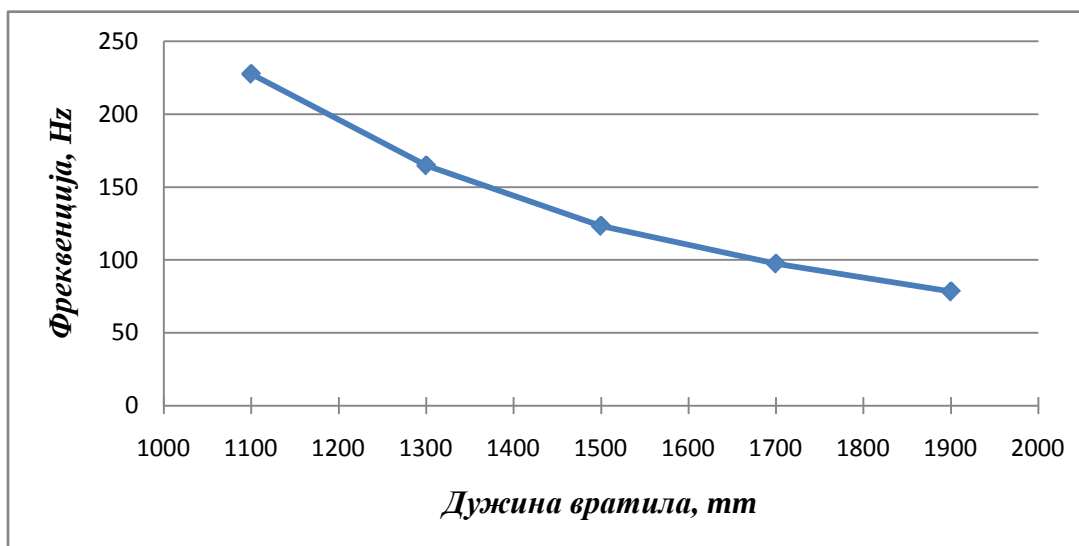
Почетни резултати испитивања нумеричким путем, у претходној тачки, односе се на утицај материјала на вредност сопствених фреквенција. Са слике 7.32 се уочава да највеће вредности сопствених фреквенција има вратило од алуминијума, затим следи челично

вратило, чије се вредности фреквенција врло мало разликују од алуминијумског, док вратило од сивог лива има најниже фреквенције. Ова разлика може да се уочи и на основу табеле 6.1 где су приказане вредности модула еластичности и густине материјала за различите материјале.

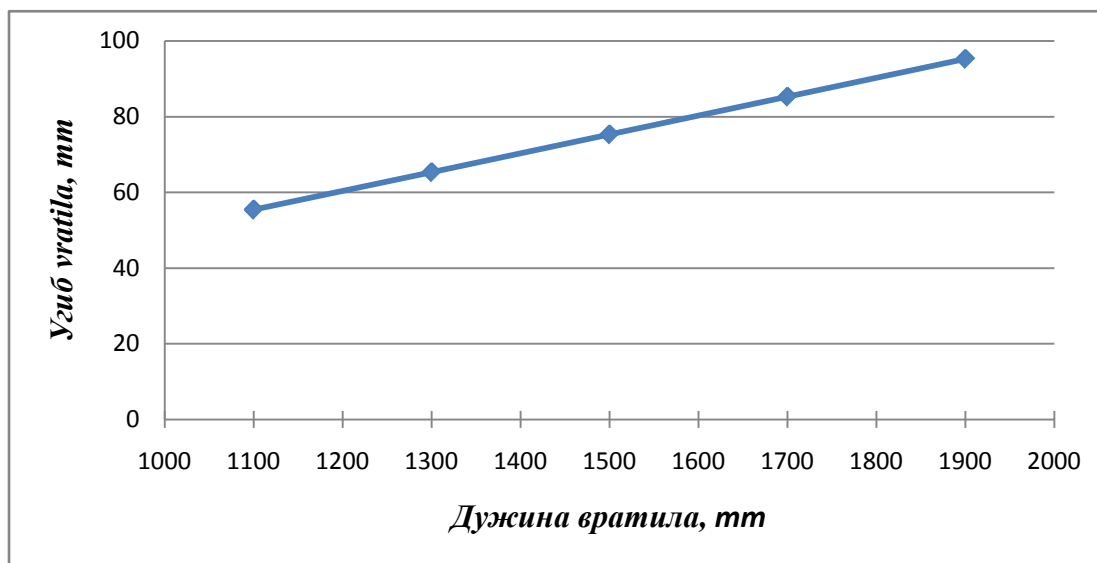


Слика 7.32 Утицај материјала на вредност сопствених фреквенција вратила

Дужина вратила директно утиче на сопствене фреквенције. Са дијаграма, (слика 7.33), уочава се да је зависност скоро линеарно опадајућа, односно са повећањем дужине вратила знатно опадају сопствене фреквенције. На угиб вратила дужина има супротан утицај, односно угиб расте са повећавањем дужине вратила, (слика 7.34).

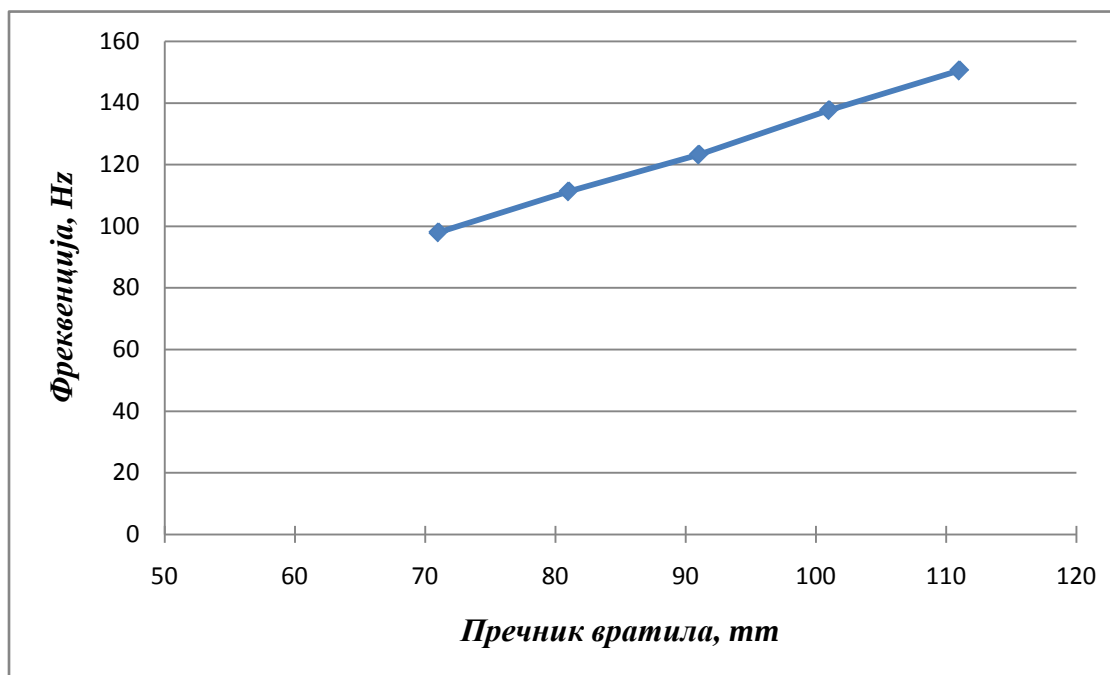


Слика 7.33 Зависност фреквенција од дужине челичног вратила

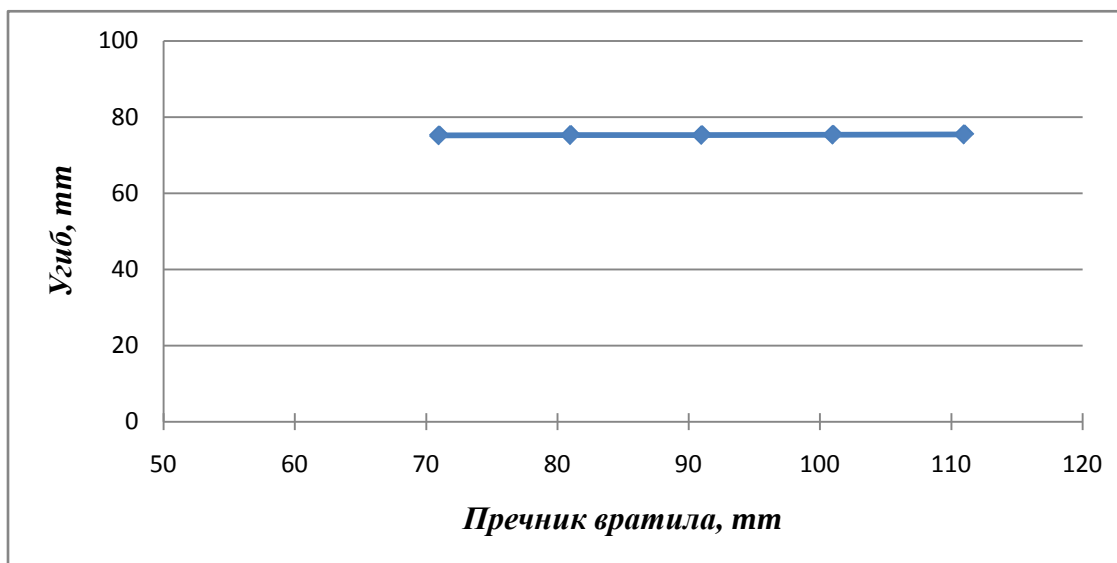


Слика 7.34 Зависност угиба од дужине челичног вратила

Осим дужине вратила и материјала на вредност сопствених фреквенција такође утиче и промена пречника вратила, (слика 7.35). У односу на дужину вратила промене пречника имају знатно мањи утицај на вредност угиба, (слика 7.36). Зависност пречника и фреквенције је пропорционална, односно са повећањем пречника расте и фреквенција. У случају угиба зависност је скоро линеарно константна, тј. са повећањем пречника, угиб се мења за веома малу вредност (ред величине децималног броја).

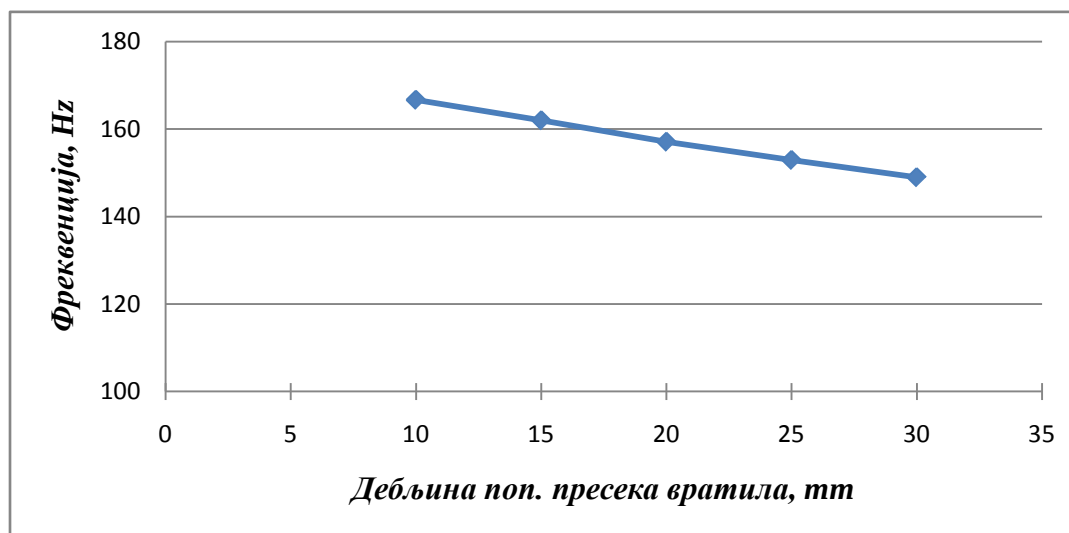


Слика 7.35 Зависност фреквенција од пречника челичног вратила



Слика 7.36 Зависност угиба од пречника челичног вратила

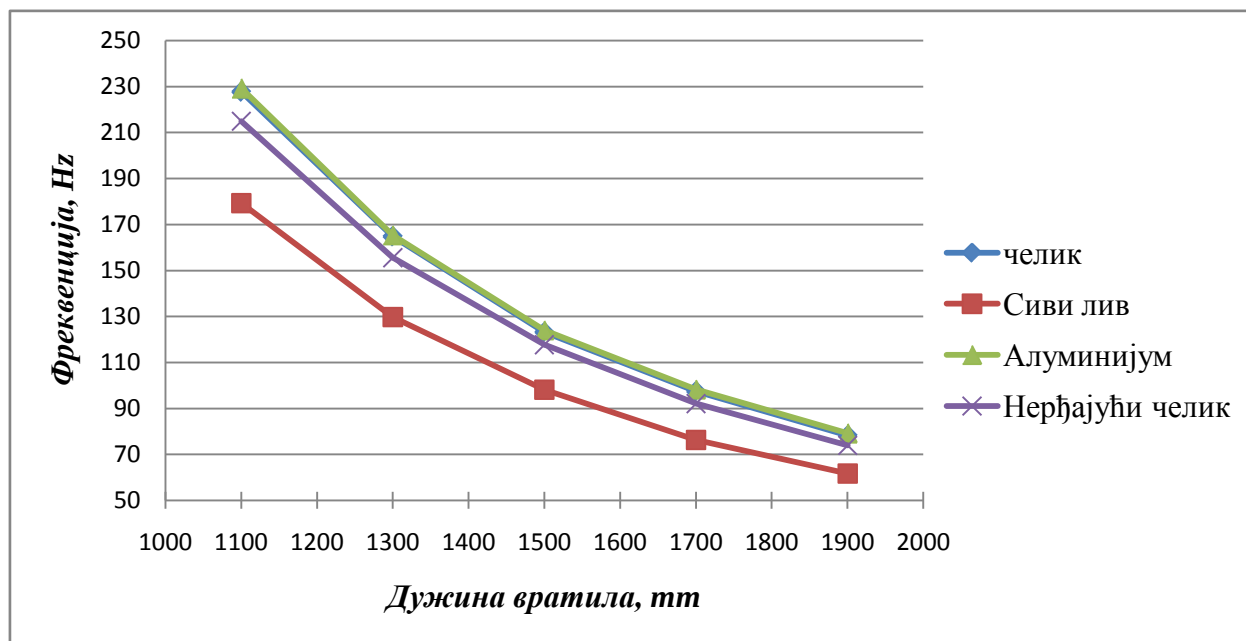
Утицај дебљине зида попречног пресека челичног вратила на вредности сопствених фреквенција приказан је на слици 7.37. Са дијаграма се уочава да дебљина зида попречног пресека вратила је обрнуто пропорционална фреквенцији вратила, односно са повећањем дебљине зида фреквенције опадају. Са слика 7.13÷7.17 (на којима је приказано вратило испитано у „Autodesk INVENTOR“-у) долази се до закључка да дебљина попречног пресека испитиваног вратила нема утицај на угиб, односно, да променом дебљине попречног пресека вратила угиб остаје непромењен.



Слика 7.37 Зависност фреквенција од дебљине зида прстенастог челичног вратила

На слици 7.38, приказан је заједнички утицај материјала и дужине вратила на вредност сопствених фреквенција. Са дијаграма се уочава да алуминијум и челик имају скоро исте

вредности сопствених фреквенција, које су знатно веће у поређењу са осталим материјалима. Одатле се закључује да су челик и алуминијум најпогоднији за израду вратила. Такође се запажа да сиви лив има најмање вредности сопствених фреквенција.



Слика 7.38 Зависност фреквенција вратила од дужине за различите материјале

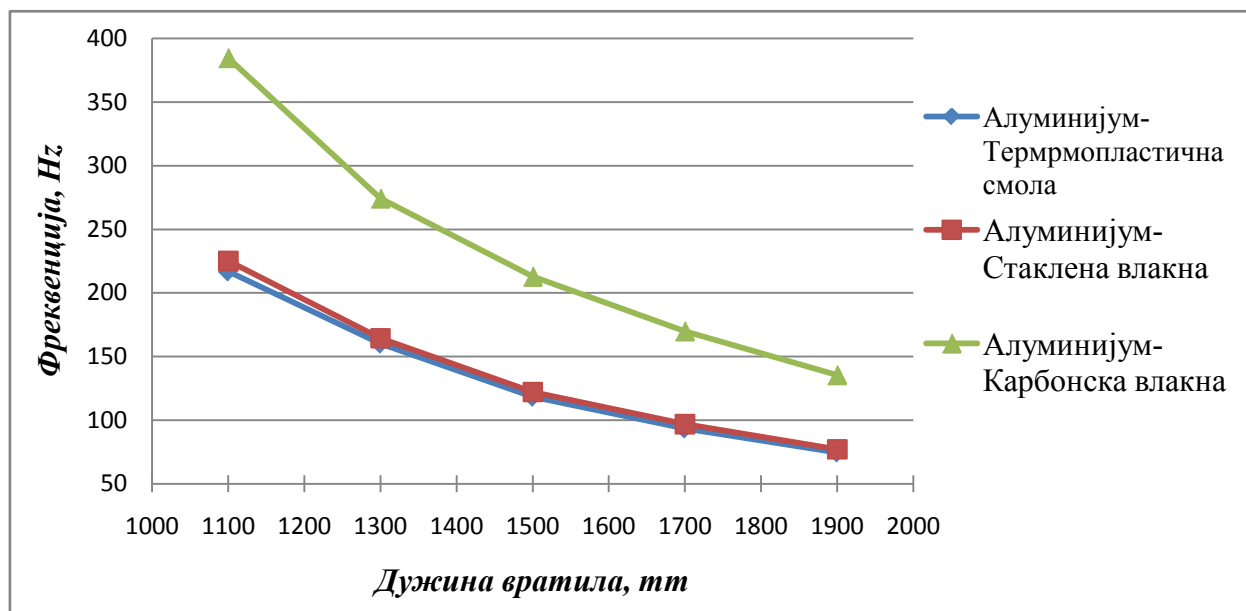
Све већи значај у протеклој деценији се посвећује новим материјалима. Тако комбинација композитних материјала са алуминијумом и челиком даје одличне резултате. Одатле проистиче чињеница да се све захтевније конструкције у новије време израђују од ових материјала.

Комбинација алуминијум / карбонска влакна/епокси смола је погодна јер алуминијум поседује потребну отпорност на увијање, док је улога карбонских влакана/епокси композита повећана отпорност на фреквенције услед савијања.

На дијаграму, слика 7.39, су приказане вредности сопствених фреквенција вратила од композитних материјала. Са дијаграма се оучава да највећу вредност сопствених фреквенција има алуминијумско вратило у комбинацији са карбонским влакнима.

Добијене вредности фреквенција за одређене материјале као и одговарајуће дужине вратила могу се пронаћи у додатку на крају рада.

Досадашња испитивања у оквиру овог рада показују да вратило алуминијум-карбонска влакна даје изванредне резултате у погледу фреквенције у односу на било који други материјал испитан у раду. У погледу фреквенције ово вратило има већу фреквенцију од осталих материјала истих димензија у просеку и до 45 %.

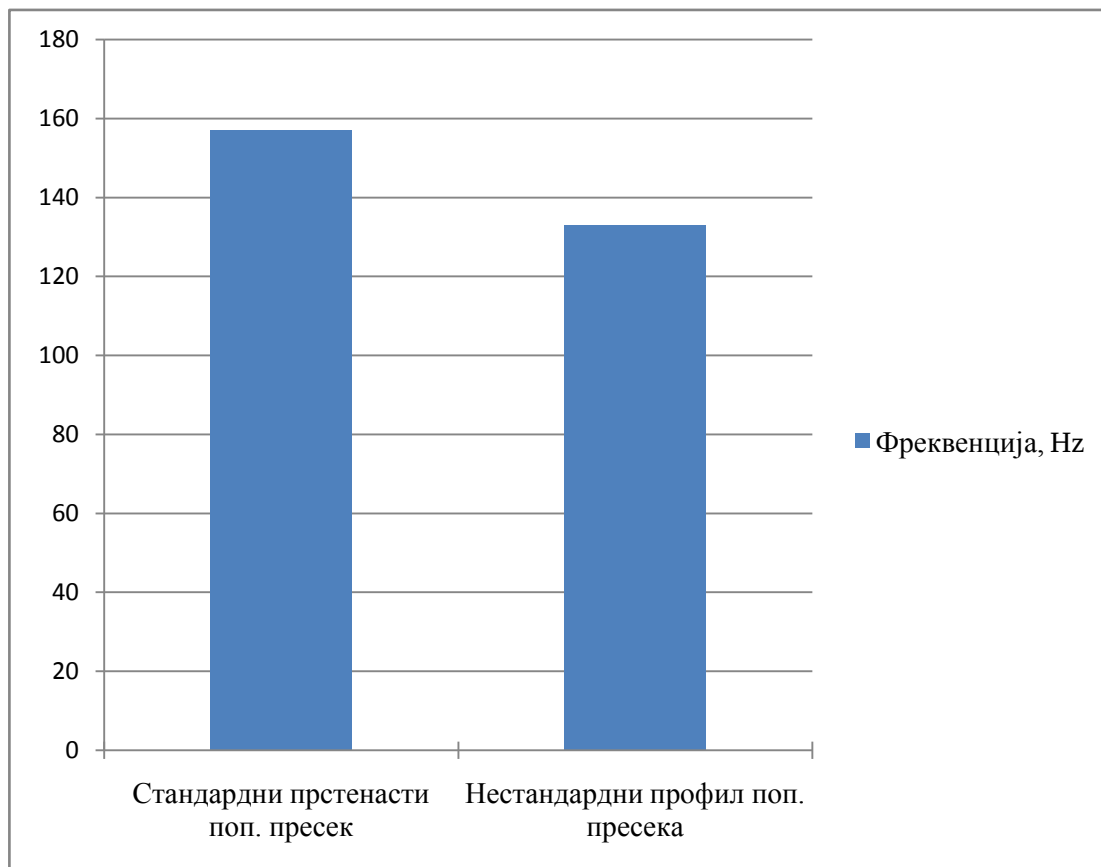


Слика 7.39 Утицај дужине вратила на вредност сопствених фреквенција за различите материјале вратила

На крају, рађена је завршна анализа за челично вратило, чији профил попречног пресека одступа од стандардног кружног облика. Ово вратило, произвођача „Cerjak“ је приказано на слици 7.31. Осим профила попречног пресека, остале карактеристике су у потпуности исте као и код вратила кружног попречног пресека, (слика 7.15). Добијене вредности сопствених фреквенција за оба вратила приказане су у табели 7.1, као и на слици 7.40.

Табела 7.1 Вредност сопствене фреквенције два различита профила попречног пресека

Облик профила поп. пресека	Стандардни прстенасти поп. пресек	Нестандардни профил поп. пресека	Одступање (%)
Фрекв. (Hz)	157,09	133	15,31



Слика 7.40 Вредности сопствених фреквенција за два различита профила попречног пресека вратила

На основу резултата приказаних у табели 7.1 се може закључити да је облик профила попречног пресека битан при избору вратила и да су вредности сопствених фреквенција различите за ова два профила. Стандардни профил више одговара због већих вредности сопствених фреквенција, док се и нестандартни профил може употребити у неким случајевима јер је одступање до 15%.

8. Закључак

Провера динамичке стабилности вратила се, углавном, врши код вратила која раде са великим учестаностима обртања. У ову групу спадају вратила турбопреносника, турбокомпресора, парних и гасних турбина, неких алатних машина, као и коленаста вратила клипних машина. Највећи број машина има доста крута вратила која раде са малим угаоним брзинама тако да ова провера није потребна.

Основни циљ рада је био да се изврши прорачун основних величина које карактеришу динамичку стабилност вратила, где спада и анализа сопствених фреквенција, односно критичног броја обртаја вратила. Такође, извршена је и анализа утицаја неких основних параметара који описују вратило (димензије, материјал, попречни пресек и др.) на стабилност вратила. Како би се проверила веродостојност резултата нумеричке анализе извршено је поређење са аналитичком методом.

Прво поглавље је представљено као увод у тему. У њему су приказани основни појмови везани за вратило, место њихове примене, основне дефиниције, увод у динамику вратила и последице динамичке нестабилности.

У другом поглављу је приказан појам и основна функција вратила, као и положај и повезаност вратила са осталим деловима конструкције. Након тога, истакнути су конструкциони облици вратила који имају примену у већини машинских конструкција, извршена је и класификација вратила у зависности од облика и других карактеристика. На крају другог поглавља анализирани су материјали који се користе за израду вратила. У оквиру материјала приказани су и савремени (композитни) материјали. Анализом најбитнијих карактеристика композитних материјала закључује се да они имају неке карактеристике знатно боље од челичних и алуминијумских материјала.

На основу трећег поглавља закључује се да значајна оптерећења вратила потичу од сила и спрегова, тако да се њима треба посветити велика пажња, док оптерећења од сопствене тежине изазивају веома мале напоне и она се могу занемарити.

Посебно треба бити обазрив на појаву концентрације напона, јер је најчешће она узрок катастрофалних ломова. У оквиру трећег поглавља су представљени извори концентрације напона и указано је на начине да се концентрација смањи.

Четврто поглавље намеће закључак да посебно треба обратити пажњу на три критеријума за прорачун вратила. Задовољење ова три критеријума су поуздан показатељ суграног рада вратила.

Када је реч о крутости, у раду су приказани основни случајеви који имају најчешћу примену у пракси. Закључује се да сувише велике деформације, било услед савијања или увијања, доводе до критичног стања делова на вратилу у погледу извршавања функције.

Знатно већа пажња је посвећена динамичкој стабилности вратила, где је кроз три различита примера објашњен поступак дефинисања динамичких карактеристика вратила. Објашњен је и поступак прорачуна степена сигурности вратила, који је сигуран показатељ поузданости елемената.

У циљу смањења трошкова израде и испитивања, времена испитивања, све већи број реалних проблема се решава математичким моделирањем, захваљујући развоју рачунара.

Постоје различите нумеричке методе, од којих се метода коначних елемената (МКЕ) најчешће користи због следећих предности:

- МКЕ је применљива на било који реалан проблем, било да је то пренос топлоте, динамичка и статичка анализа, магнетно поље, и др.
- Не постоје просторна ограничења, тело које се анализира може бити било ког облика.
- Такође, не постоје ограничења ни у погледу граничних услова и оптерећења.
- Карактеристике материјала нису изотропне, могу се променити зависно од елемената.
- Употреба коначног елемента за симулацију обртних система омогућава да се решавају све компликованији проблеми, а такође је утврђено да се прецизнији резултати могу добити коришћењем за било који степен слободе.

МКЕ метода се заснива на физичкој дискретизацији стварног модела. То је један од незаобилазних процеса при свакој нумеричкој анализи. Ова метода је приказана у оквиру петог поглавља на примеру рада програма „Autodesk INVENTOR“.

Задатак МКЕ је да се најреалније апроксимира одговарајући гранични проблем, с обзиром да је број дискретних модела за одговарајући гранични проблем неограничен.

За методу коначних елемената је веома важно да инжењер схвати принцип рада, разуме суштину проблема, познаје добро примењен софтвер, јер из много разлога резултати МКЕ могу бити нетачни или знатно одступати од тачних. МКЕ софтвери не могу открити ове грешке, већ само суштинске грешке у моделима.

Поглавље шест се бави применом метода објашњених у поглављима четири и пет на анализу практичног примера (у овом случају се ради о испитивању сопствених фреквенција вратила). У закључку су наведена одступања резултата ових двеју метода.

Пре анализе модела вратила нумеричком методом, извршена је анализа вратила применом аналитичке методе, коришћењем једначине из литературе. Упоређивањем

результата уочава се да грешка између аналитички прорачунатих и нумерички одређених вредности сопствених фреквенција износи 3,91%. На основу овако добре сагласности резултата може се закључити да нумеричка метода може заменити аналитичку у многим случајевима, што доноси многе погодности. Овде треба водити рачуна о поступку моделирања и анализи, јер у супротном резултати могу бити потпуно погрешни.

На крају рада, приказано је како поједини параметри вратила утичу на вредност сопствених фреквенција. Анализирани су фактори као што су дужина, пречник, дебљина попречног пресека код прстенастиг вратила, профил, материјал, као и зависност дужине и материјала. Закључак је да повећање дужине вратила као и повећање дебљине зидова, у случају вратила прстенастиг пресека, доводи до пада сопствених фреквенција вратила. Међутим, са повећањем пречника вратила расту вредности сопствених фреквенција и та зависност је готово линеарна.

Анализом утицаја материјала на вредност сопствених фреквенција закључује се да највеће вредности сопствених фреквенција има вратило од алуминијума, сличне вредности има и челично вратило док вратило од сивог лива има најниже вредности и не препоручује се његова примена у пракси када се ради о вратилима већих дужина.

Такође, протеклих неколико година се велика пажња посвећује комбинацији алуминијума и композитних материјала, зато је сам крај рада посвећен утицају ових материјала на стабилност вратила. Анализирана су карбонска, стаклена влакна и термопластична смола. На основу резултата у раду најбоље карактеристике, у погледу динамичке стабилности и критичног броја обртаја, имају карбонска валакна.

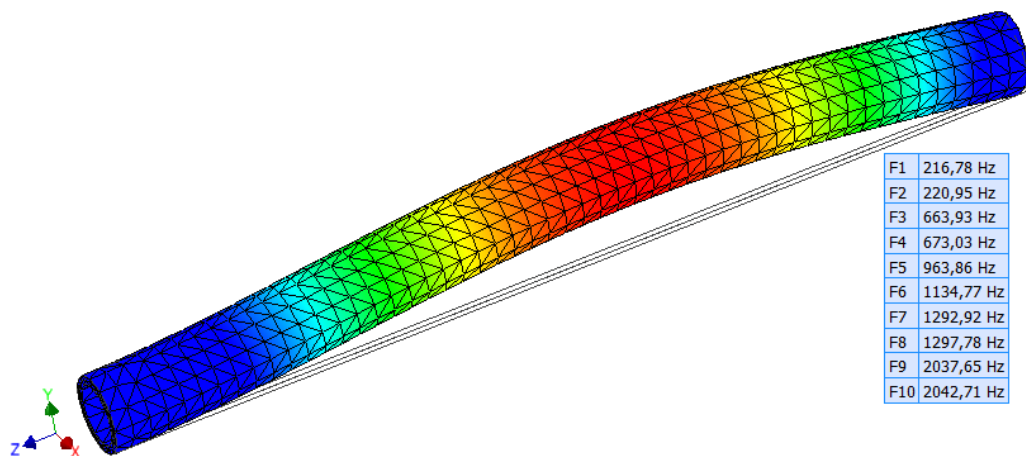
Анализом вратила „*Cerjak*“ се закључује да и нестандартни профили могу наћи примену у пракси, јер је одступање вредности сопствених фреквенција од стандардног профила око 15%, тако да се у будућности може посветити пажња налажењу профила који ће одступати од стандардних, а имати сличне, чак и боље карактеристике.

9. Литература

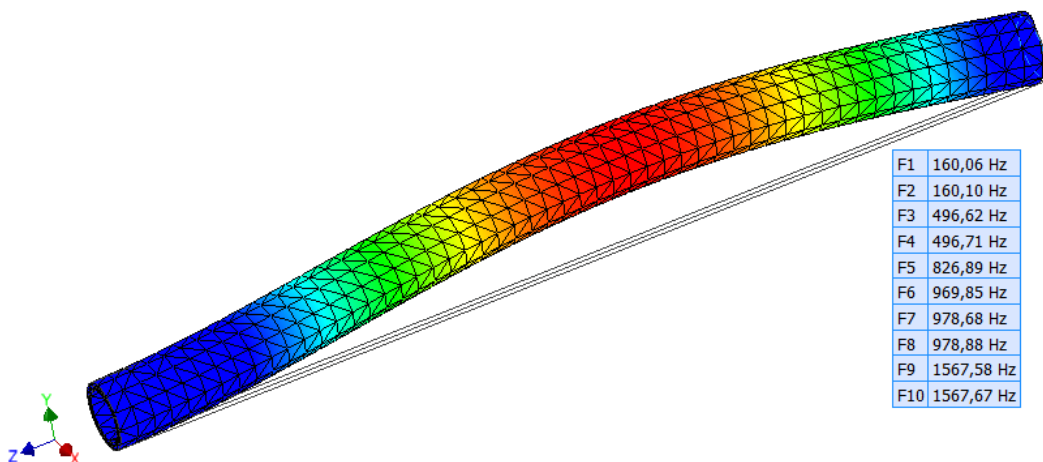
- [1] Николић, В., „Машински елементи“, Машински факултет у Крагујевцу, 2004.
- [2] Дедић, А., „Основи машинства“, Шумарски факултет у Београду, 2008.
- [3] Вукојевић, Д., Екиновић, Е., „Теорија осцилација“, Зеница, 2004.
- [4] Рашковић, Д., „Теорија осцилација“, Универзитет у Београду, 1974.
- [5] Радуновић, Д., „Нумеричке методе“, Београд, 2003.
- [6] Драпић, С., „Машински елементи 2“, Завод за уџбенике и наставна средства- Београд, 2000.
- [7] Ђорђевић, З., „Динамичко понашање вратила од композитних материјала“, Докторска дисертација, Крагујевац, 2008.
- [8] Зувић, М., „Примена нових материјала за израду елемената редуктора“, Завршни рад, Крагујевац, 2012.
- [9] www.masfak.ni.ac.rs/uploads/articles/www2_pr_iii.pdf, преузето 03.04.2014.
- [10] www.masinac.org/download/.../me1_5_vratila_i_osovine/, преузето 05.04.2014.
- [11] www.kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/09/, преузето 19.04.2014.
- [12] www.mfkvy.kg.ac.rs/index.php/.../doc.../882-4-vr-il-i-s-vin-pr-d-v-nj.htm, преузето 22.04.2014.
- [13] www.infoteh.etf.unssa.rs.ba/zbornik/2009/radovi/E1/E1-10.doc , преузето 29.04.2014.
- [14] www.unze.ba/mkpr/MKE%201.pdf, преузето 29.04.2014.
- [15] http://moodle.mfkg.rs/file.php/69/07_nedelja/Predavanja/PREDAVANJE_7_2013.pdf , преузето 11.12.2013.
- [16] <http://moodle.mfkg.rs/mod/resource/view.php?id=7507> , преузето 21.11.2013.

- [17] http://www.vstss.com/media/pdf/2011/vstss_osnovne_metode_konacnih_elementata.pdf ,
преузето 30.04.2014.
- [18] <http://moodle.mfkg.rs/mod/resource/view.php?id=7641> , преузето 21.11.2013.
- [19] <http://ttl.masfak.ni.ac.rs/SA/PREDAVANJE5%20%202007%20%20INZINJERSKA%20PROCEDURALNOST.pdf>, преузето 05.05.2014.
- [20] http://moodle.mfkg.rs/file.php/69/07_nedelja/Predavanja/PREDAVANJE_8_2013.pdf ,
преузето 11.12.2013.

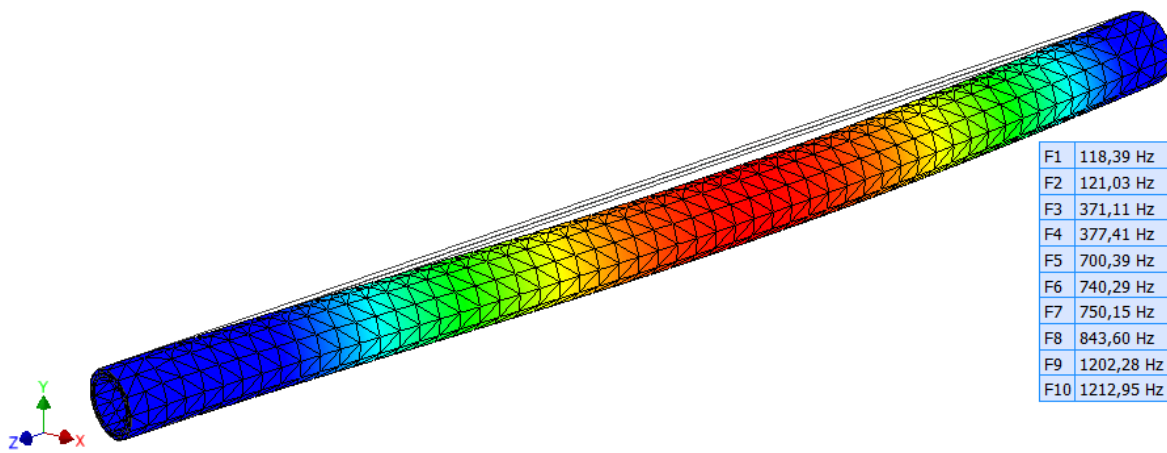
10. Додатак



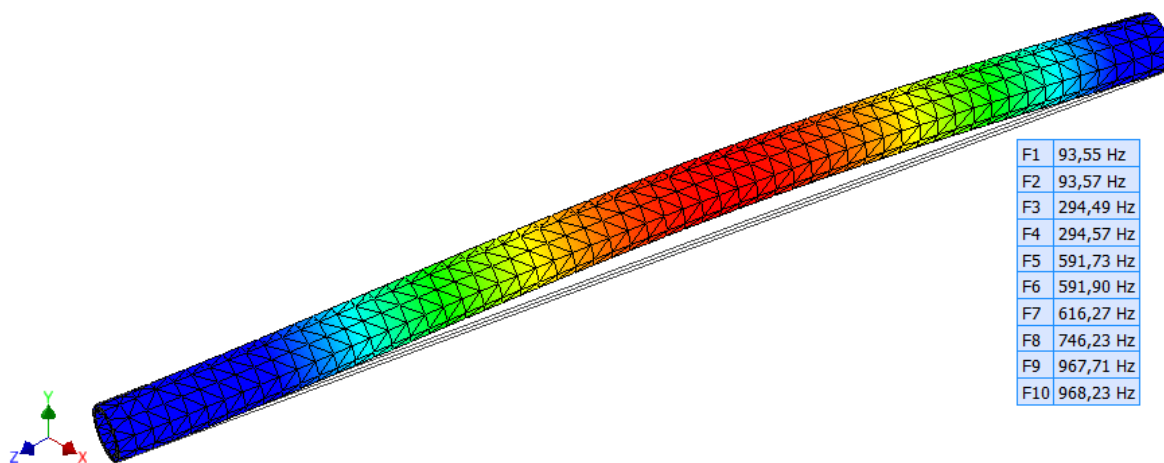
Слика 1. Композитно вратило, алуминијум-термопластична смола, дужине 1100 mm



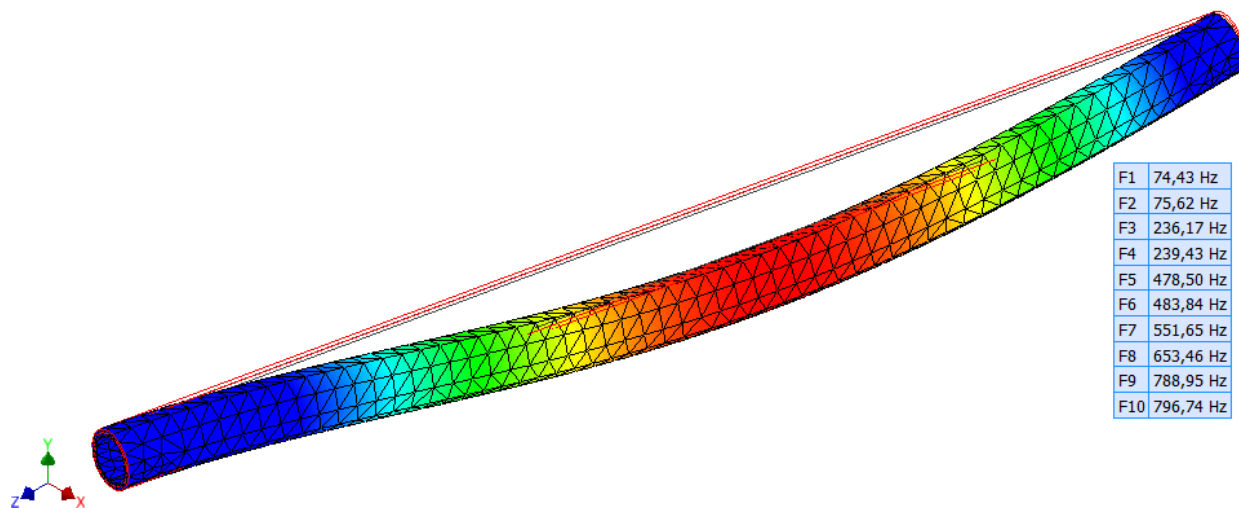
Слика 2. Композитно вратило, алуминијум-термопластична смола, дужине 1300 mm



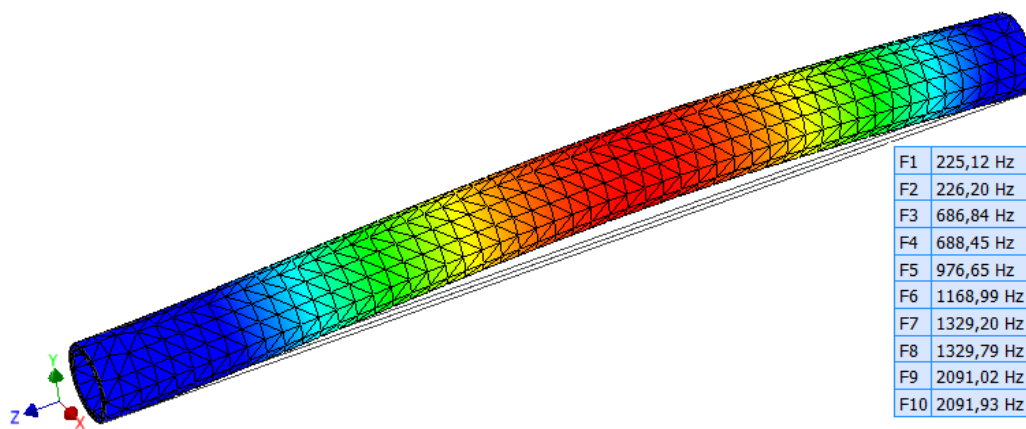
Слика 3. Композитно вратило, алуминијум-термопластична смола, дужине 1500 mm



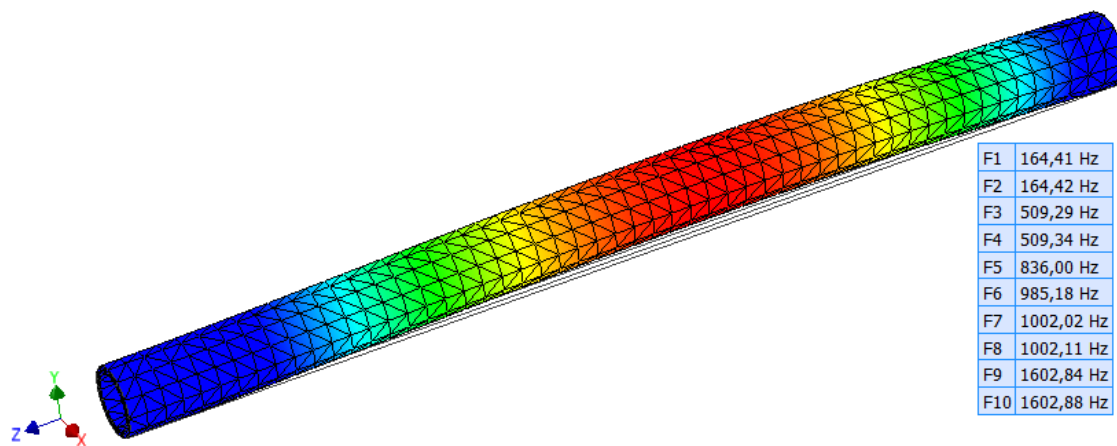
Слика 4. Композитно вратило, алуминијум-термопластична смола, дужине 1700 mm



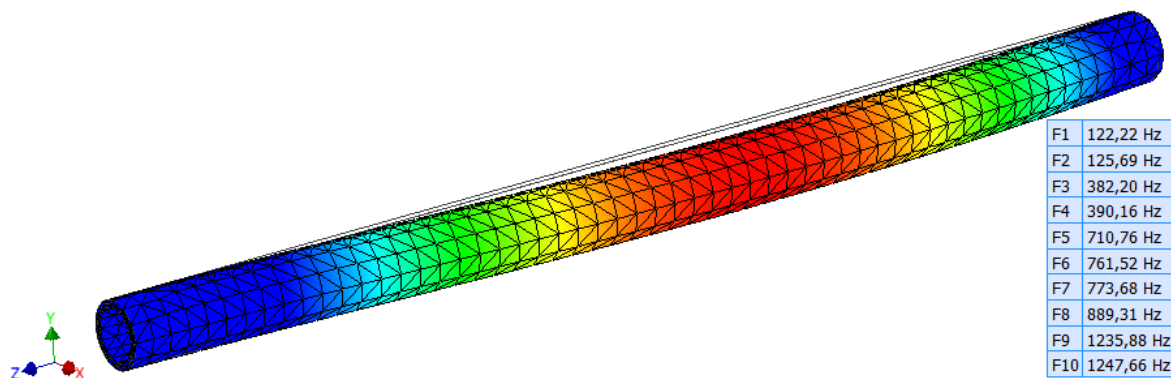
Слика 5. Композитно вратило, алуминијум-термопластична смола, дужине 1900 mm



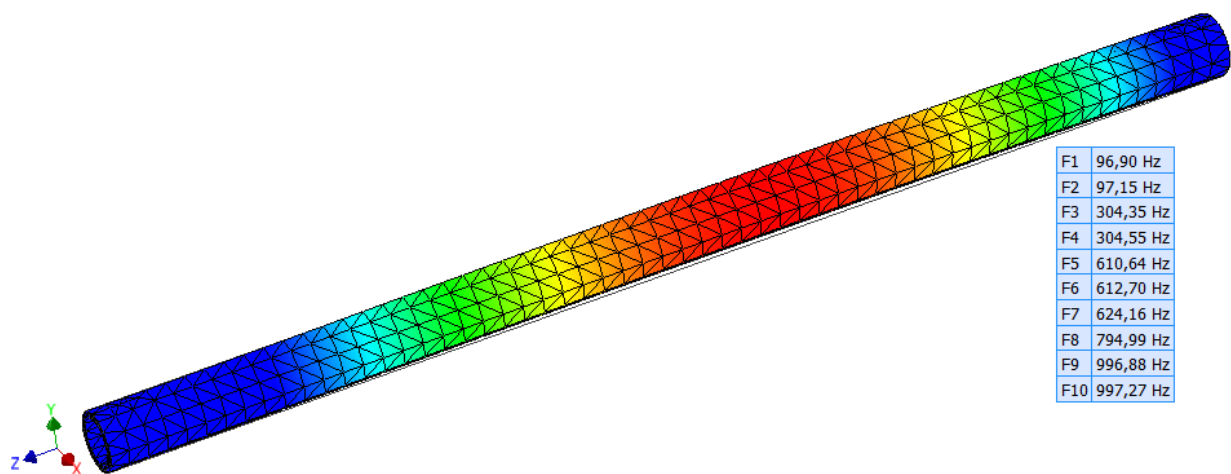
Слика 5. Композитно вратило, алуминијум-полимер ојачан стакленим влакнима, дужине 1100 mm



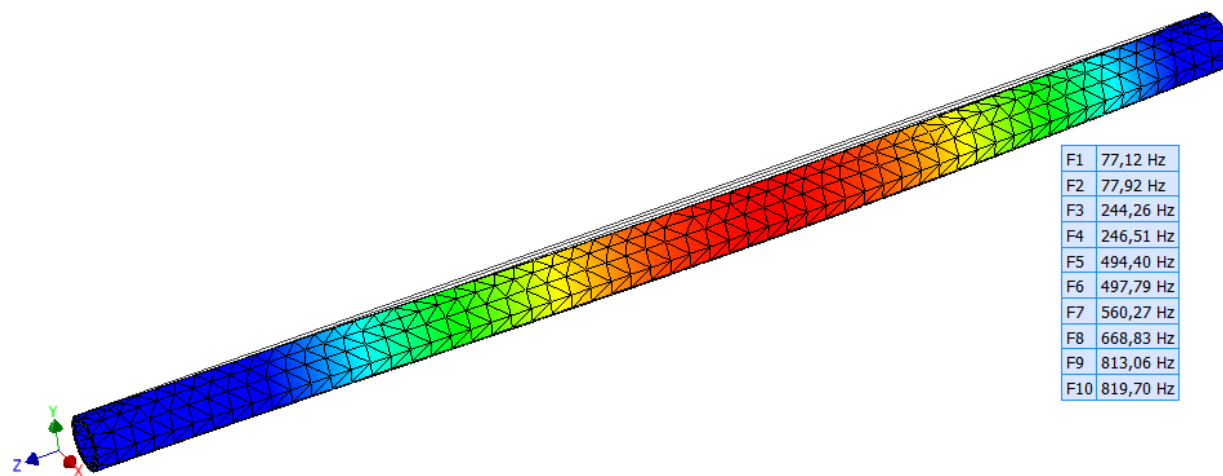
Слика 5. Композитно вратило, алуминијум-полимер ојачан стакленим влакнима, дужине 1300 mm



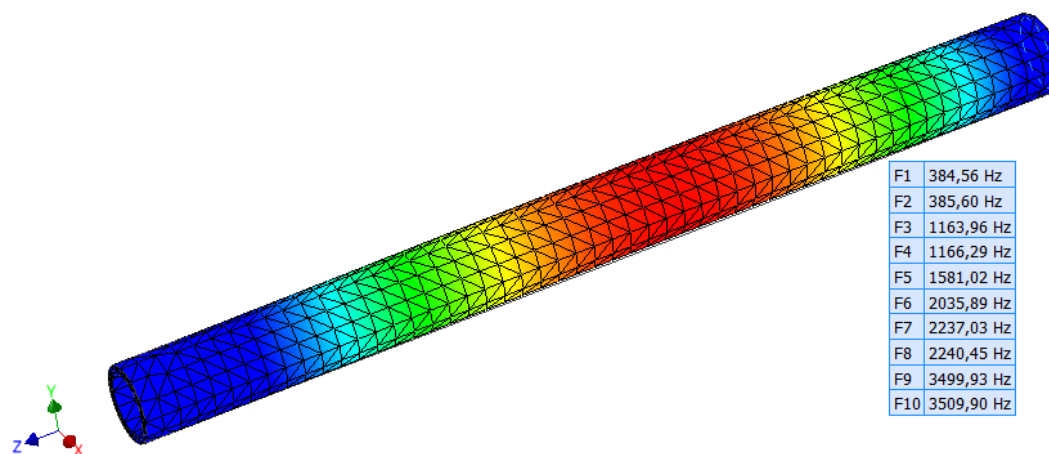
Слика 5. Композитно вратило, алуминијум-полимер ојачан стакленим влакнима, дужине 1500 mm



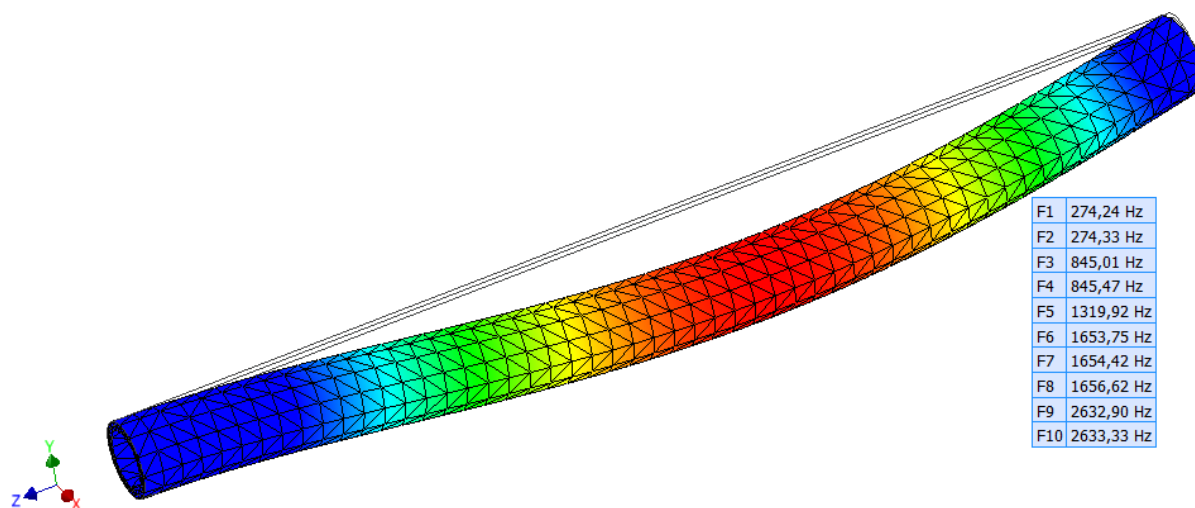
Слика 5. Композитно вратило, алуминијум-полимер ојачан стакленим влакнима, дужине 1700 mm



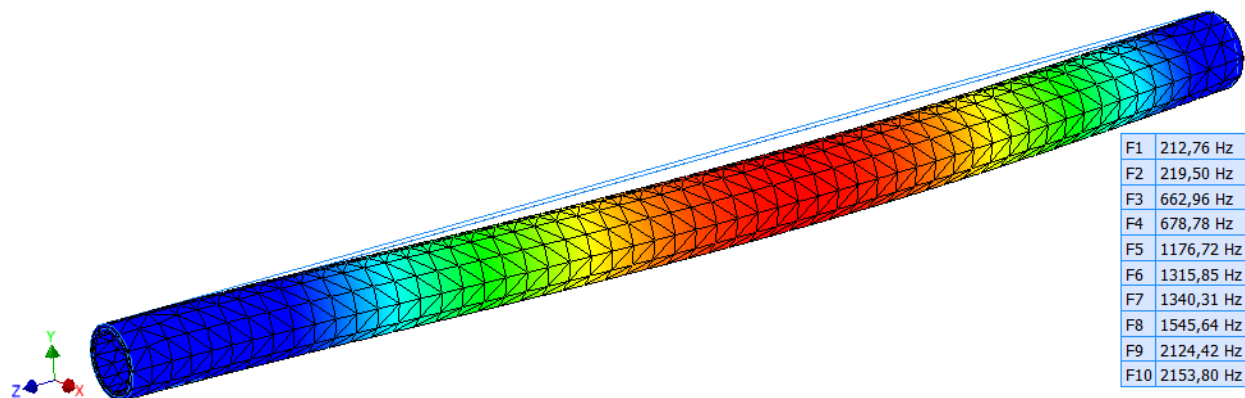
Слика 5. Композитно вратило, алуминијум-полимер ојачан стакленим влакнима, дужине 1900 mm



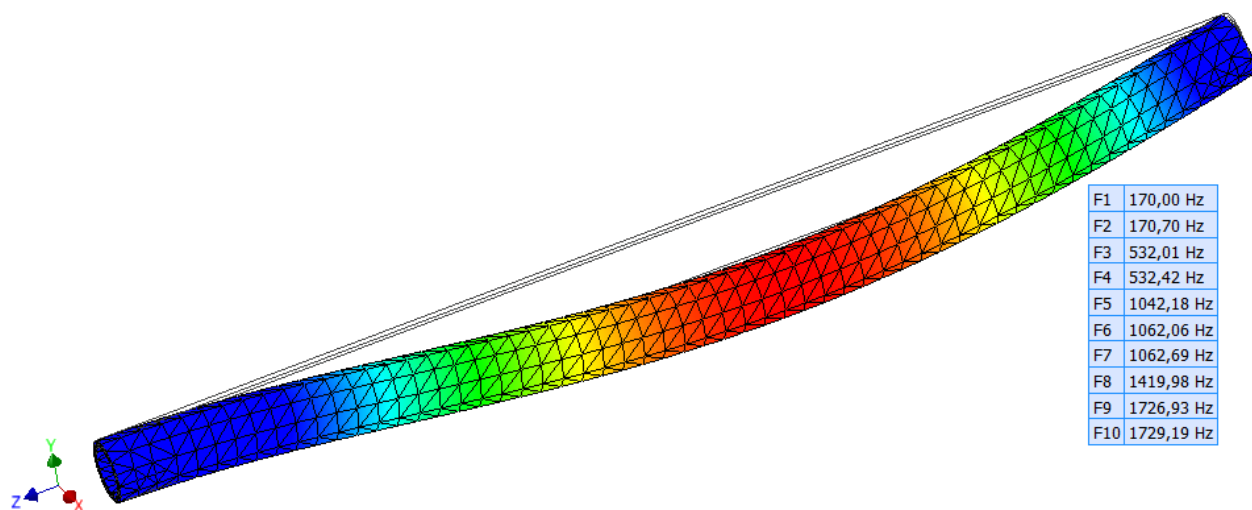
Слика 5. Композитно вратило, алуминијум-карбонска влакна, дужине 1100 mm



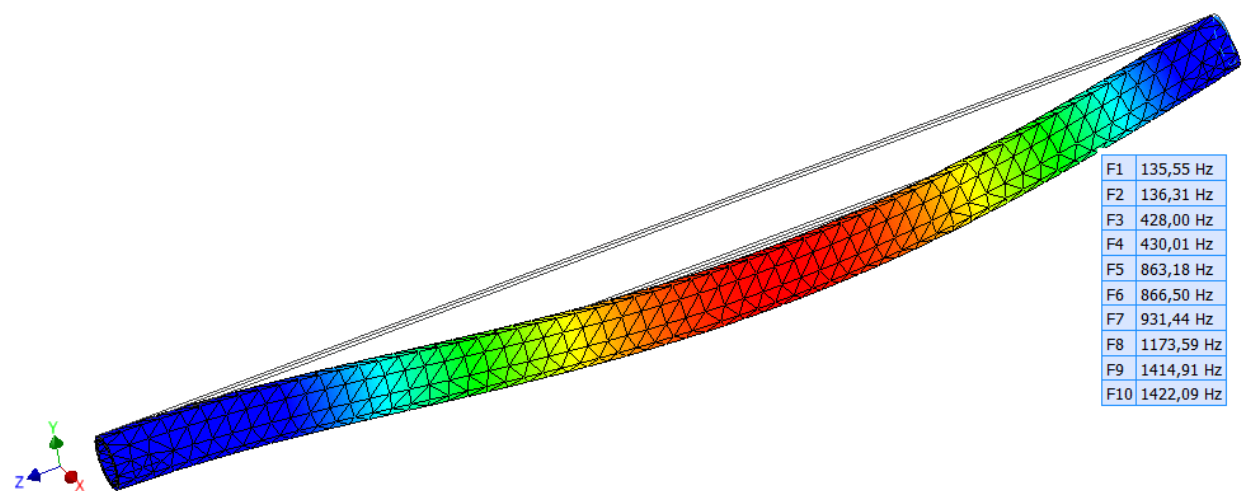
Слика 5. Композитно вратило, алуминијум-карбонска влакна, дужине 1300 mm



Слика 5. Композитно вратило, алуминијум-карбонска влакна, дужине 1500 mm



Слика 5. Композитно вратило, алуминијум-карбонска влакна, дужине 1700 mm



Слика 5. Композитно вратило, алуминијум-карбонска влакна, дужине 1900 mm