

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Аутомобилско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Предмет: Основе динамике моторних возила

Број индекса: 824/2013

Немања Д. Обрадовић

Линијски модели динамике моторних ВОЗИЛА

завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. др Данијела Милорадовић, ванр. проф. - ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да:

- изведе једначине кретања и карактеристичне преносне функције најчешће коришћених линијских модела динамике моторних возила,
- формира програм за решавање диференцијалних једначина кретања и израчунавање преносних функција линијског модела возила са 2 степена слободе,
- прикаже резултате симулације кретања конкретног возила коришћењем развијеног програма.

Препоручена литература:

- [1] Јанковић, А.: „Динамика аутомобила“, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2008.
- [2] Симић, Д.: „Динамика моторних возила“, Научна књига, Београд, 1988.
- [3] Милорадовић, Д.: „Динамика возила – Збирка решених задатака“, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац, 2017.

Ментор:

Крагујевац, септембар 2017. год.

др Данијела Милорадовић, ванр. проф.

РЕЗИМЕ

У оквиру завршног рада изведене су једначине кретања и карактеристичне преносне функције најчешће коришћених линијских модела динамике моторних возила. Формиран је програм за решавање диференцијалних једначина кретања и израчунавање преносних функција линијског модела возила са 2 степена слободе. Такође су приказани резултати симулације кретања модела конкретног возила добијени коришћењем развијеног програма.

Кључне речи: *возило, линијски модели, преносне функције*

ABSTRACT

Equations of motion and characteristic transfer functions of mostly used linear models of motor vehicle dynamics are derived in this final paper. A program for solving differential equations of motion and calculation of transfer functions of the model having two degrees of freedom was developed. The results of simulations of motion of concrete vehicle model obtained using the developed program are also presented.

Keywords: *vehicle, linear models, transfer functions*

Садржај

1. УВОД.....	1
2. ЛИНИЈСКИ МОДЕЛИ ДИНАМИКЕ ВОЗИЛА.....	3
2.1 Линијски модел возила са једним степеном слободе	3
2.1.1 Преносне функције линијског модела са једним степеном слободе	8
2.1.2 Графичко представљање преносних функција. Bode дијаграми.....	10
2.2 Линијски модел са два степена слободе.....	13
2.2.1 Формирање карактеристичних односа	15
2.2.2 Анализа карактеристичних односа	16
2.2.3 Графичко представљање карактеристичних односа	18
2.3. Линијски модел са три степена слободе	21
2.3.1 Утицај седишта на осцилаторну удобност.....	24
3. РЕЗУЛТАТИ СИМУЛАЦИЈЕ КРЕТАЊА ЛИНИЈСКОГ МОДЕЛА ВОЗИЛА СА ДВА СТЕПЕНА СЛОБОДЕ	28
4. ЗАКЉУЧАК.....	31
ЛИТЕРАТУРА	32

1. УВОД

Свако возило представља сложен динамички систем састављен од комплексних конструкција појединачних делова возила (агрегати, системи, подсистеми...), конструктивно и функционално повезаних у систем који поседује одређене еласто-пригушне карактеристике.

Услед међусобне интеракције делова возила, као и услед интеракције са подлогом по којој се оно креће и са окружењем уопште, возило врши одређене осцилације.

Проблем пројектовања система еластичног ослањања возила је врло сложен јер се од доброг система еластичног ослањања тражи да задовољи неколико међусобно противуречних захтева као што су:

- осцилаторна удобност треба да буде што је могуће већа; то значи да вешање аутомобила треба да обезбеди максималну изолацију осцилација,
- промене динамичких реакција тла треба да буду што мање,
- релативни ход гибња, односно релативно померање каросерије у односу на тачкове треба да остане у одређеним границама [1].

Анализа ових захтева показује колико је сложен проблем оптимизације параметара система еластичног ослањања.

Изолацију осцилација возила од неравнина пута могуће је побољшати применом меких еластичних елемената система еластичног ослањања, што значи да сопствена учестаност ослоњене масе (каросерије) треба да буде што нижа. Са друге стране, човек је врло осетљив на ниске учестаности (испод 1 Hz). При томе долази и један практичан конструктивни проблем. Врло мекани еластични елементи система еластичног ослањања захтевају врло велика релативна померања каросерије у односу на тачкове возила.

Релативно померање ослоњене масе (каросерије) у односу на тачкове састоји се из две компоненте:

- статичке компоненте која се мења у зависности од тежинског стања, односно од тежине ослоњене масе и
- динамичке компоненте померања која представља одзив на дејство неравнине пута и која, с обзиром да реални профил пута има стохастички карактер, такође има стохастички карактер.

Проучавањем вертикалних и угаоних осцилација у подужној равни симетрије возила, равни (x, z), има за циљ одређивање преносних функција између улазне функције (побуде изазване неравнинама пута) и карактеристичних излазних функција

(апсолутних или релативних померања, апсолутних или релативних убрзања, како ослоњених тако и неослоњених маса).

Функција побуде сматра се познатом величином, задатом у временском или фреквентном домену.

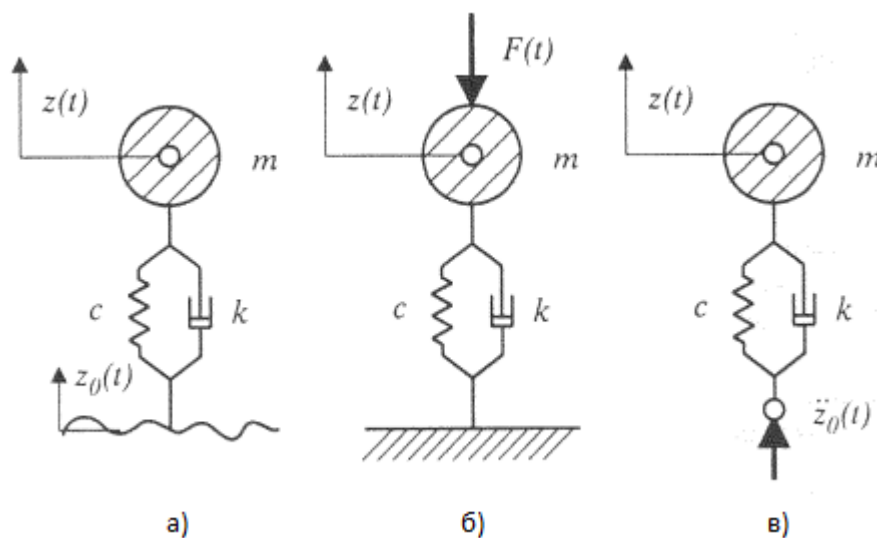
Осцилације сложених механизма са много степени слободе кретања по правилу се врши на упрошћеним моделима. Изабрани модел треба да обухвати само најважније параметре, док се параметри мање важности могу занемарити. На овај начин убрзавамо аналитичку обраду проблема и поједностављујемо практичну проверу добијених резултата, снижавамо трошкове и штедимо на времену [2].

У даљем раду биће разматрани најпре неки једноставни осцилаторни **линијски модели** на којима је могуће извести основне закључке о осцилаторном понашању возила, а потом и сложенији модели и начин решавања диференцијалних једначина њиховог кретања.

2. ЛИНИЈСКИ МОДЕЛИ ДИНАМИКЕ ВОЗИЛА

2.1 Линијски модел возила са једним степеном слободе

Модел са једним степеном слободе којим је представљено сопствено осциловање масе m , еквивалентне крутости c и пригушења k , слика 1а), описан је хомогеном диференцијалном једначином другог реда.



Слика 1: Осцилаторни модел са једном масом – различити аспекти примене [1]

За математичаре је то најједноставнији облик диференцијалне једначине са константним коефицијентима, за физичаре механички осцилатор, док инжењер тражи суштину у успостављању зависности између вредности параметара и одзива система на одређене побуде, што представља терен за истраживање и доношење закључака о понашању возила [1].

Овај најједноставнији модел дискретног осцилаторног система са једним степеном слободе може да послужи као пример илустровања различитих инжењерских проблема, тј. може да има више различитих тумачења.

а) За случај када постоје померање и брзина фундамента, који су временске функције, слика 1а), једначина кретања је у облику (1):

$$m\ddot{z}(t) + k[\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t)] + c[z(t) - z_0(t)] = 0, \quad (1)$$

б) У случају осциловања масе под дејством временски променљиве силе, слика 1б), фундамент је непомичан. Маса, на пример, представља ослоњену масу возила на коју делује побуда од рада мотора, при чему се сматра да возило мирује или пак да је тло идеално равно. Одговарајућа једначина кретања је у облику (2):

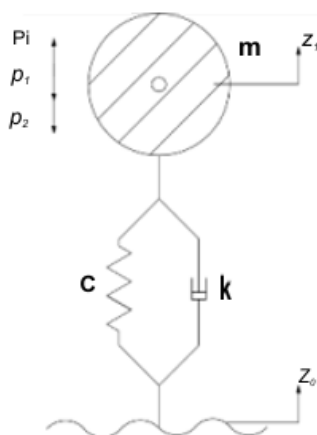
$$m\ddot{z}(t) + k\dot{z}(t) + cz(t) = F(t) \quad (2)$$

в) У случају осциловања масе на платформи која такође осцилује, слика 1в), побуда је временски променљиво убрзање фундамента, које производи релативно померање између масе m и фундамента, тако да диференцијална једначина кретања гласи:

$$m[\ddot{z}(t) - \ddot{z}_0(t)] + k[\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t)] + c[z(t) - z_0(t)] = 0. \quad (3)$$

Свака од ових једначина има хомогено решење, које зависи од коефицијента m , c и k , и партикуларно решење, које зависи од облика побуде, тј. функције $z_0(t)$, односно $F(t)$.

На слици 2 дат је најједноставнији осцилаторни модел возила са једном масом. Овде нису узете у обзир еластичне и пригушне карактеристике неослоњених маса, већ само ослоњених (крутост еластичног елемента и пригушење амортизера).



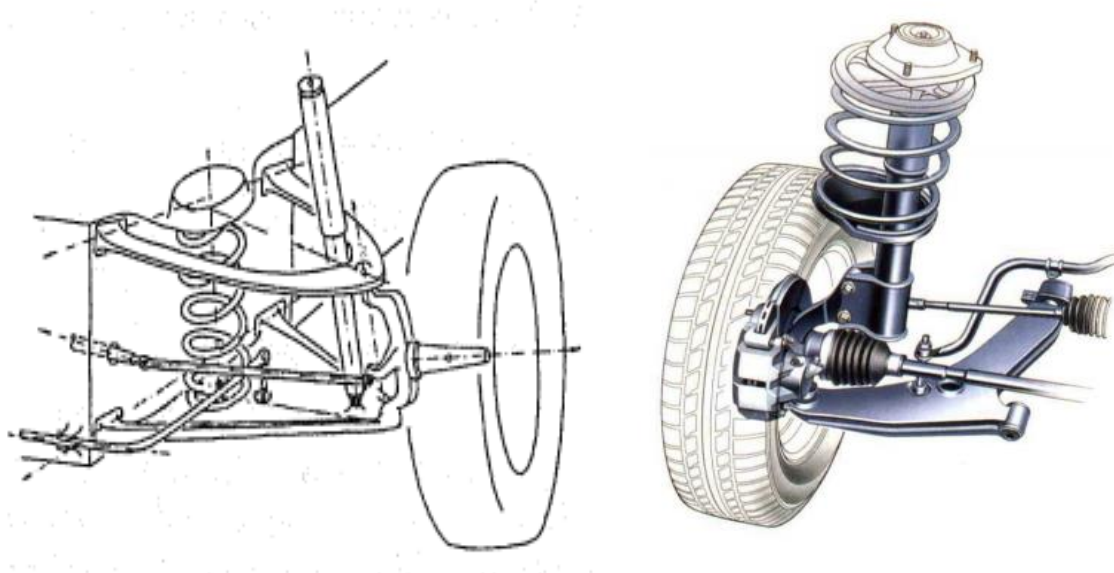
Слика 2: Једноставни осцилаторни модел са једном масом

Овде су:

- m - ослоњена маса,
- c - еквивалентна крутост,
- k - коефицијент пригушења,
- p_i - инерцијална сила,
- p_1 - сила у еластичном елементу,
- p_2 - сила у амортизеру.

Део ослоњене масе изнад предње или задње осовине аутомобила означен је са m док параметри c , N/m и k , Ns/m представљају крутост опруге и коефицијент пригушења амортизера посматраног(предњег или задњег) ослањања аутомобила [3].

Модел са једним степеном слободе одговара систему независног ослањања точка за које постоје различита конструктивна извођења. Нека од могућих извођења су дата на слици 3.



Слика 3: Примери независног ослањања точка [4]

У наредним разматрањима ће се као параметри система јављати само ослоњена маса сведена на један точак (половина осовинског оптерећења), крутост и пригушење које поседује један точак, док се систем вођења точка изоставља, па су отуда, очигледно различито конструктивно изведени системи ослањања, представљени истим моделом.

Истим моделом се може анализирати и осциловање једне осовине возила под условом да су осцилације предње и задње осовине распрегнуте. При томе, ослоњена маса је маса која оптерећује осовину, док су вредности за крутост и пригушење еквивалентне вредностима паралелно постављених еластичних и пригушних елемената левих и десних точкова.

Диференцијалну једначину осцилаторног кретања масе m можемо да добијемо примењујући Даламберов принцип. Према слици 2 је:

$$P_i - P_1 - P_2 = 0. \quad (4)$$

Овде су:

$$P_i = (-m\ddot{z}_1) \quad \text{-инерцијална сила,}$$

$$P_1 = c(z_1 - z_0) \quad \text{- сила у еластичном елементу,}$$

- $P_2 = k(\dot{z}_1 - \dot{z}_0)$ - сила у амортизеру,
 z_0 - функција профила пута,
 z_1 - померање неослоњене масе.

Диференцијална једначина осцилаторног кретања сада гласи:

$$m\ddot{z}_1 + k(\dot{z}_1 - \dot{z}_0) + c(z_1 - z_0) = 0. \quad (5)$$

За хармонијско побуђивање, решење се тражи у комплексном облику:

$$z_0 = A_0 e^{j\omega t}, \quad (6)$$

$$z_1 = A_1 e^{j(\omega t + \alpha)}, \quad (7)$$

где су:

- A_0 - амплитуда висина неравнина пута,
 A_1 - амплитуда вертикалног осциловања ослоњене масе,
 ω - сопствена кружна фреквенција осциловања ослоњене масе,
 α - угао фазног кашњења осцилација.

Када се узме у обзир да су изводи:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_0 &= j\omega A_0 e^{j\omega t} = j\omega z_0, \\
 \dot{z}_1 &= j\omega A_1 e^{j(\omega t + \alpha)} = j\omega z_1, \\
 \ddot{z}_1 &= (j\omega)^2 A_1 e^{j(\omega t + \alpha)} = -\omega^2 z_1,
 \end{aligned} \quad (8)$$

сменом у једначину (5) добијамо:

$$-m\omega^2 z_1 + k(z_1 - z_0)j\omega + c(z_1 - z_0) = 0, \quad (9)$$

$$z_1(c - m\omega^2 + jk\omega) = z_0(c + jk\omega), \quad (10)$$

одакле се добија фреквентна карактеристика, $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = \frac{z_1}{z_0} = \frac{c + jk\omega}{c - m\omega^2 + jk\omega}, \quad (11)$$

где дати израз представља однос амплитуда у комплексном облику.

У даљем извођењу ће се користити следећи односи:

- сопствена учестаност система без пригушења, ω_0

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m},$$

- коефицијент пригушења за гранични случај апериодичких осцилација, k_{krit}

$$k_{krit} = 2m\omega_0,$$

- мера пригушења или техничко пригушење, D

$$D = \frac{k}{k_{krit}} = \frac{k}{2m\omega_0} = \frac{k/m}{2\omega_0} = \frac{\delta}{\omega_0},$$

- однос учестаности побуђивања и сопствене учестаности система, η

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0},$$

па однос амплитуда у комплексном облику сада гласи:

$$G(j\omega) = \frac{Z_1}{Z_0} = \frac{1+j2D\eta}{(1-\eta^2)+j2D\eta} \quad (12)$$

Функција увећања, $\left|\frac{z_1}{z_0}\right|$, добија се из релације (12) као апсолутни однос амплитуда:

$$\left|\frac{z_1}{z_0}\right| = \frac{A_1}{A_0} = H\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \sqrt{\frac{1+4D^2\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}} \quad (13)$$

При анализи било које преносне функције посебно се разматрају вредности када је:

- $\eta \ll 1$ - фреквенција побуде много нижа од сопствене,
- $\eta=1$, - фреквенција побуде приближно је једнака сопственој (резонанца система)
- $\eta \gg 1$ - фреквенција побуде је много већа од сопствене [5].

Понашање линеарног система датог на слици 2 биће описано релевантним преносним функцијама које ће бити наведене и графички представљене.

2.1.1 Преносне функције линијског модела са једним степеном слободе

Функција појачања хода система еластичног ослањања

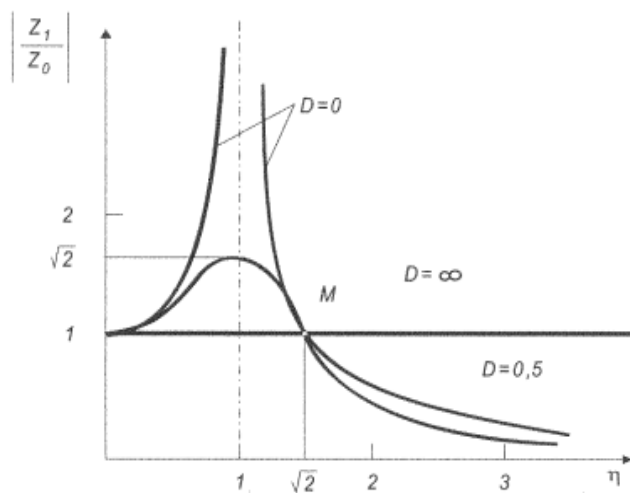
Функција појачања хода система еластичног ослањања, $\left| \frac{z_1}{z_0} \right|$, представљена је односом амплитуде одзива према амплитуди побуде:

$$\left| \frac{z_1}{z_0} \right| = \sqrt{\frac{1+4D^2\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}}. \quad (14)$$

Треба запазити да за $\eta=1$ (систем у резонанци), непригушен систем ($D=0$) има амплитуду одзива теоријски бесконачно велику (на графику, слика 4, представљено вертикалном асимптотом), док сваки пригушен систем има неку коначну вредност која представља максимум фреквентне функције.

Што је систем слабије пригушен, резонанца је израженија, тј. преносна функција има у тачки максимума већу ординату. За јако пригушене системе (теоријски техничко пригушење је бесконачно велико), одзив прати побуду готово без промене (хоризонтална права на графику).

За вредност $\eta=\sqrt{2}$ преносна функција је увек јединична, без обзира на вредност пригушења.



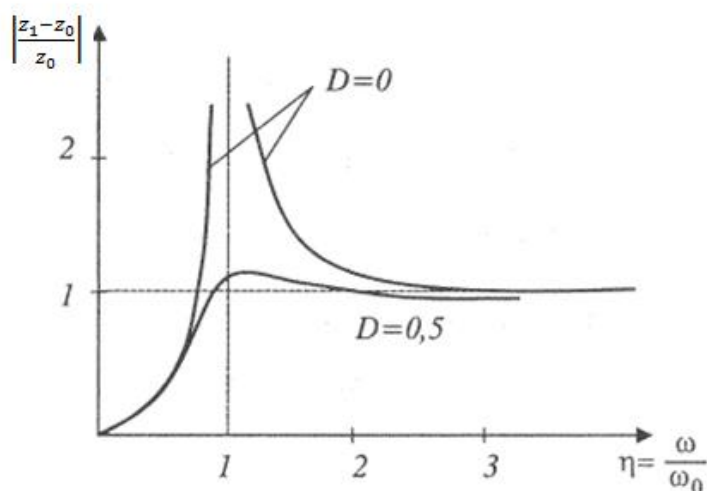
Слика 4: Преносна функција хода ослоњене масе [1]

Тачка М са слике 4 је инваријантна тачка, односно вредност $\omega = \omega_0\sqrt{2}$ представља инваријантну вредност побудне фреквенције јер је, без обзира на карактеристике система (m , c и k), преносна функција за $\eta = \sqrt{2}$ увек јединична.

Функција појачања релативног хода система еластичног ослањања

За познату функцију увећања хода система еластичног ослањања, могуће је одредити функцију појачања релативног хода еластичног елемента, $\left| \frac{z_1 - z_0}{z_0} \right|$, слика 5:

$$\left| \frac{z_1 - z_0}{z_0} \right| = \left| \frac{z_1}{z_0} - 1 \right| = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \quad (15)$$



Слика 5: Преносна функција релативног хода система еластичног ослањања [1]

Функција појачања убрзања ослоњене масе $\left| \frac{\ddot{z}_1}{\ddot{z}_0} \right|$

Како су ход (померање) и убрзање хармонијске функције повезане релацијом:

$$\ddot{z}_1 = -\omega^2 z_1, \quad (16)$$

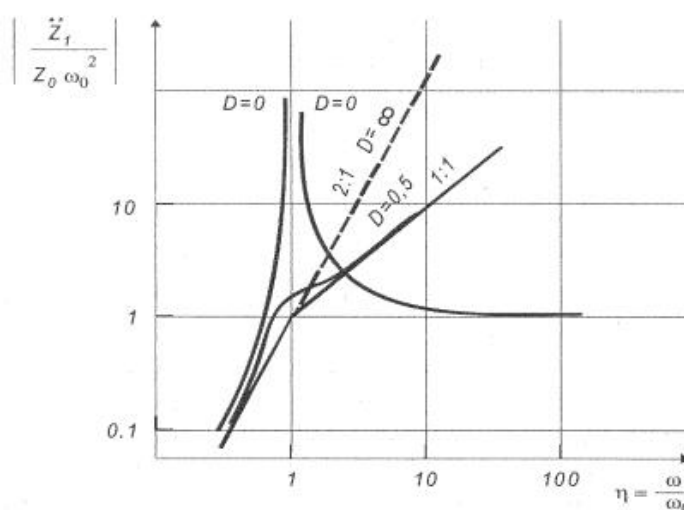
следи да је:

$$\left| \frac{\ddot{z}_1}{\ddot{z}_0} \right| = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left| \frac{z_1}{z_0} \right| = \eta^2 \left| \frac{z_1}{z_0} \right| \quad (17)$$

или

$$\left| \frac{\ddot{z}_1}{z_0} \right| = \omega^2 \left| \frac{z_1}{z_0} \right|, \quad (18)$$

што је графички приказано на слици 6.



Слика 6: Преносна функција хода ослоњене масе [1]

2.1.2 Графичко представљање преносних функција. Bode дијаграми.

На сликама 4, 5 и 6 дате су вредности амплитудно-фреквентних функција у природним координатама. Уобичајено је да се ове функције дају у координатним системима са двоструком логаритамском размером. То је чисто практична потреба због тога што се врши анализа понашања осцилаторног система у великом дијапазону побудних фреквенција.

Поред представљања вредности преносних функција у линеарној или логаритамској размери, често је присутно представљање логаритмованих вредности преносне функције у двострукој логаритамској размери. На апсиси се налази вредност $\log \eta$ или $\log \omega$ или $\log f$, док је на ординати логаритам неке од амплитудно фреквентних функција. Такав дијаграм се назива **Bode дијаграм** и формира се на следећи начин [5]:

- зада се вредност техничког пригушења D ,
- нађе се гранична вредност преносне функције када је $\eta \rightarrow 0$ ($\eta \ll 1$),
- нађе се гранична вредност преносне функције када је $\eta \rightarrow \infty$ ($\eta \gg 1$),
- логаритмује се преносна функција, па се производ или количник своди на алгебарски збир по η , различитих коефицијената уз η [1].

Графички представљено, то су праве линије које у одређеној фреквентној области имају одређени нагиб.

У табели 1 су приказане карактеристичне вредности неких функција појачања.

Табела 1: Карактеристичне вредности неких функција појачања

Функција увећања	$\eta \ll 1$		$\eta \gg 1$	
	D=0	D $\rightarrow\infty$	D=0	D=0.5
$\left \frac{z_1}{z_0}\right $	1	1	$1/\eta^2$	$1/\eta$
$\left \frac{z_1 - z_0}{z_0}\right $	η^2	0	1	1
$\left \frac{\dot{z}_1}{z_0 \omega_0^2}\right $	η^2	η^2	1	η

Анализа односа функције увећања, $H\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \left|\frac{z_1}{z_0}\right|$, врши се према једначини (14):

1. Нека је η знатно мања од јединице, ($\eta \ll 1$). Онда је:

за D=0:

$$\left|\frac{z_1}{z_0}\right| = \lim_{\eta \ll 1} \sqrt{\frac{1}{|1-\eta^2|}} \rightarrow 1 \quad (19)$$

за D $\rightarrow\infty$:

$$\left|\frac{z_1}{z_0}\right| = \lim_{\eta \ll 1} \frac{2D\eta}{2D\eta} = 1 \quad (20)$$

2. Нека је η знатно веће од јединице, ($\eta \gg 1$). Онда је:

за D = 0,5:

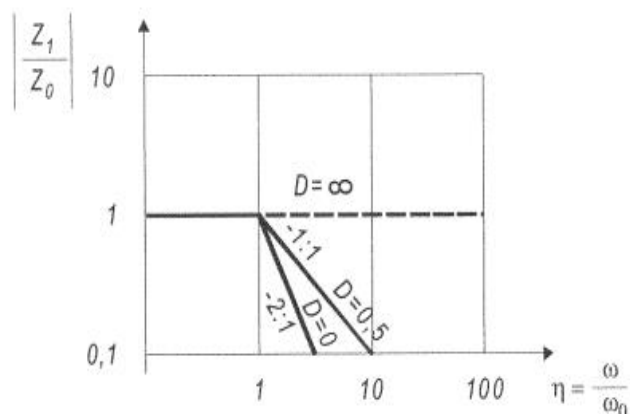
$$\left|\frac{z_1}{z_0}\right| = \lim_{\eta \gg 1} \sqrt{\frac{1+4*0.5^2\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4*0.5^2\eta^2}} = \frac{1}{\eta} \quad (21)$$

за D=0:

$$\left|\frac{z_1}{z_0}\right| = \frac{1}{\eta^2} \quad (22)$$

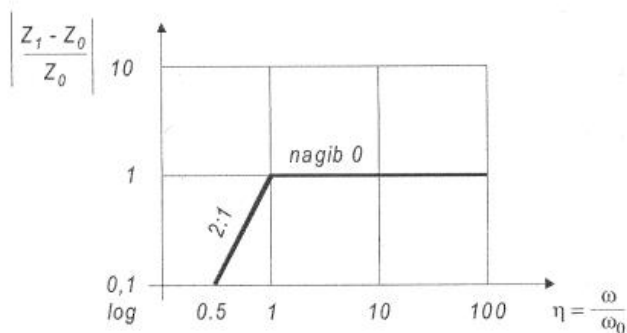
Изложена анализа оправдава карактер кривих приказаних на сликама 6 и 7.

Као што је познато из теорије осцилација, систем са једним степеном слободе има једну сопствену учестаност, односно једну резонантну учестаност. У Bode дијаграму, за ту вредност ($\eta=1$) долази до промене нагиба праве којом се репрезентује преносна функција. Дакле, промена нагиба праве у Bode дијаграму у вези је са резонантном учестаности система, односно, тачка у којој преносна функција има максимум представља тачку промене коефицијента правца праве у Bode дијаграму [1].

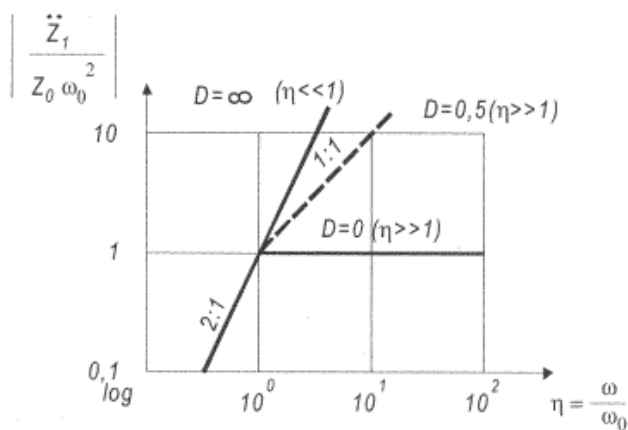


Слика 7: Bode дијаграм преносне функције хода ослоњене масе [1]

За систем са једном масом који има једну реалну сопствену вредност, на Bode дијаграму било које фреквентне функције постоји једна тачка ($\eta=1$) када се преносна функција „ломи“ тј. када долази до промене коефицијента правца праве којом је она представљена, слике 8 и 9.



Слика 8: Bode дијаграм преносне функције релативног хода система еластичног ослањања [1]



Слика 9: Bode дијаграм преносне функције убрзања ослоњене масе [1]

Вредност преносне функције у Bode дијаграму често се даје у децибелима, dB. Да би се ове вредности израчунале, потребно је користити релацију:

$$H^* = 20 \log(H), \quad (23)$$

где је са H^* , dB означена вредност која кореспондира функцији H .

Нагиб праве у Bode дијаграму изражава се у децибелима по декади или у децибелима по октави. Октава је интервал на апсцисној оси између две вредности x_2 и x_1 ($x_2 > x_1$) који задовољава услов $x_2 = 2x_1$. Декада је интервал на апсцисној оси, ($x_2 - x_1$), ($x_2 > x_1$) који задовољава услов $x_2 = 10x_1$.

2.2 Линијски модел са два степена слободе

На слици 10 је приказан једнодимензионални модел са две масе. На слици су:

m_1 , kg - неослоњена маса (осовина, точкови),

m_2 , kg - ослоњена маса (каросерија).

Употребљене су и следеће ознаке:

z_0 , m - функција профила пута

z_1 , m - померање неослоњене масе,

z_2 , m - померање ослоњене масе,

$c_1, \frac{N}{m}$ - крутост пнеуматика,

$c, \frac{N}{m}$ - крутост ослањања,

$k, \frac{Ns}{m}$ - коефицијент пригушења амортизера.

Како су многа испитивања показала да је ефекат пригушења пнеуматика мали, ова пригушења се могу занемарити.

Равнотежа сила даје следеће изразе:

$$P_{i2} - P_2 - P_3 = 0 \quad (24)$$

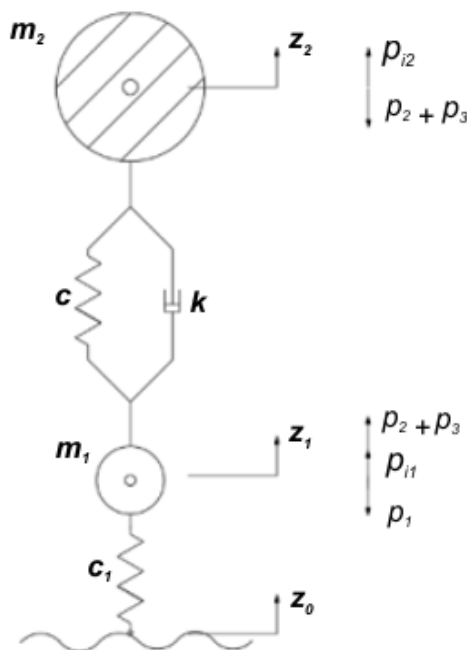
$$P_{i1} + P_2 + P_3 - P_1 = 0 \quad (25)$$

где су:

P_{i1} - инерцијална сила неослоњене масе m_1 ,

P_{i2} - инерцијална сила ослоњене масе m_2 ,

- P_1 - сила еластичности пнеуматика,
 P_2 - сила еластичности система еластичног ослабања,
 P_3 - сила пригушења амортизера.



Слика 10: Осцилаторни модел са две масе

Користећи следеће изразе за силе:

$$P_{i1}=(-m\ddot{z}_1), \quad (26)$$

$$P_{i2}=(-m\ddot{z}_2), \quad (27)$$

$$P_1=c_1(z_1-z_0), \quad (28)$$

$$P_2=c_2(z_2-z_1), \quad (29)$$

$$P_3=k(\dot{z}_2-\dot{z}_1), \quad (30)$$

диференцијалне једначине осцилаторног кретања гласе:

$$m_2\ddot{z}_2+c_2(z_2-z_1)+k(\dot{z}_2-\dot{z}_1)=0, \quad (31)$$

$$m_1\ddot{z}_1-c_2(z_2-z_1)-k(\dot{z}_2-\dot{z}_1)+c_1(z_1-z_0)=0. \quad (32)$$

Решење ових једначина траже се комплексном облику за хармонијско побуђивање:

$$z_0 = A_0 e^{j\omega t}, \quad (33)$$

$$z_1 = A_1 e^{j(\omega t + \alpha)}, \quad (34)$$

$$z_2 = A_2 e^{j(\omega t + \beta)}. \quad (35)$$

2.2.1 Формирање карактеристичних односа

Диференцирањем израза за (34) и (35) добија се:

$$\dot{z}_1 = j\omega z_1; \ddot{z}_1 = -\omega^2 z_1, \quad (36)$$

$$\dot{z}_2 = j\omega z_2; \ddot{z}_2 = -\omega^2 z_2. \quad (37)$$

Смењивањем добијених величина и сређивањем система једначина (31) и (32) добија се:

$$(-m_2\omega^2 + c_2 + jk\omega)z_2 = (c_2 + jk\omega)z_1 \quad (38)$$

$$(-m_1\omega^2 + c_2 + jk\omega + c_1)z_1 - (c_2 + jk\omega)z_2 = z_1 c_0 \quad (39)$$

У циљу скраћивања записа, уводе се смене:

$$p = c_2 + jk\omega, \quad (40)$$

$$q = -m_2\omega^2 + c_2 + jk\omega, \quad (41)$$

$$s = -m_1\omega^2 + c_2 + jk\omega + c_1. \quad (42)$$

Систем једначина сада гласи:

$$qz_2 = pz_1 \quad (43)$$

$$sz_1 - pz_2 = c_1 z_0 \quad (44)$$

Да би се формирали карактеристични односи једнодимензионалног осцилаторног модела аутомобила са две масе, претходно морају да се формирају односи амплитуда:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{p}{q}, \quad (45)$$

$$\frac{z_1}{z_0} = \frac{c_1 q}{sq - p^2}. \quad (46)$$

Карактеристични односи су:

$$1) \frac{z_2}{z_0} = \frac{z_2}{z_1} \frac{z_1}{z_0} = \frac{c_1 p}{sq - p^2} \quad (47)$$

Израз (47) даје однос амплитуда ослоњене масе према амплитуди профила пута. Представља меру оптерећења аутомобила, односно меру за оптерећење путника у аутомобилу.

$$2) \frac{z_2 - z_1}{z_0} = \frac{c_1 p}{sq - p^2} - \frac{c_1 q}{sq - p^2} = \frac{c_1(p - q)}{sq - p^2} \quad (48)$$

Овај однос представља релативни ход гибња.

$$3) \frac{z_2 - z_0}{z_0} = \frac{z_2}{z_0} - 1 = \frac{c_1 p}{sq - p^2} - 1 \quad (49)$$

Израз (49) говори о релативној промени слободне висине возила.

$$4) \frac{z_1 - z_0}{z_0} = \frac{z_1}{z_0} - 1 = \frac{c_1 q}{sq - p^2} - 1 \quad (50)$$

Овај израз даје меру за анализу контакта точкова са тлом. Истовремено показује промену оптерећења које се појављује између пута и возила, односно промену динамичких реакција тла.

2.2.2 Анализа карактеристичних односа

У даљем делу рада биће извршена анализа карактеристичних односа амплитуда за уобичајене односе крутости и маса: $\frac{c_2}{c_1} \approx 0.1 \ll 1$ и $\frac{m_1}{m_2} \approx 0.1 \ll 1$. При томе ће се користити следећи изрази и смене [3]:

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_{02}}, \quad (51)$$

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}, \quad (52)$$

као и:

$$R = sq - p^2. \quad (53)$$

За $D = 0$ ($k=0$) важи:

$$P = c_2, \quad (54)$$

$$q = c_2 - m_2 \omega^2 = c_2 (1 - \eta^2), \quad (55)$$

$$s = c_2 + c_1 - m_1 \omega^2 = c_2(10 - 0.01\eta^2), \quad (56)$$

$$R(0) = c_1 c_2 [(1 - \eta^2)(1 - 0.01\eta^2)]. \quad (57)$$

За $D = \infty$ ($k = \infty$) имамо:

$$p = q = jk\omega, \quad (58)$$

$$s = c_1(1 - 0.01\eta^2) + jk\omega. \quad (59)$$

За $D = \infty$, посматрани систем са две масе своди се на осцилаторни систем са једном масом $m = m_1 + m_2 \approx m_2$. Сада је:

$$R(\infty) = j c_1 k \omega (1 - 0.1\eta^2). \quad (60)$$

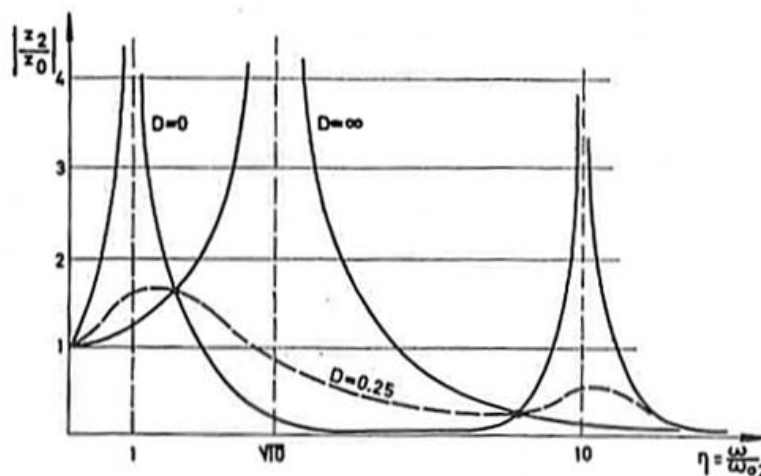
Вредности карактеристичних односа срачунате су у Табели 2 за два посматрана екстремна случаја ($D = 0$ и $D = \infty$).

Табела 2: Вредности карактеристичних односа за $D = 0$ и $D = \infty$ [3]

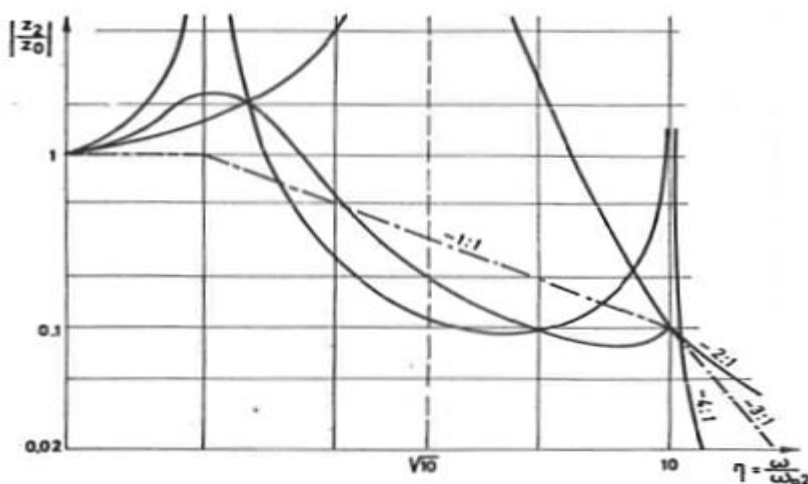
Однос	$k=0, (D=0)$	$k=\infty, (D=\infty)$
p	c_2	$j k \omega$
q	$c_2(1 - \eta^2)$	$j k \omega$
s	$c_2(10 - 0.01\eta^2)$	$c_1(1 - 0.01\eta^2) + j k \omega$
R	$c_1 c_2 [(1 - \eta^2)(1 - 0.01\eta^2)]$	$j c_1 k \omega (1 - 0.1\eta^2)$
$\left \frac{z_2}{z_0} \right $	$\frac{1}{(1 - \eta^2)(1 - 0.01\eta^2)}$	$\frac{1}{(1 - 0.1\eta^2)}$
$\left \frac{z_2 - z_1}{z_0} \right $	$\frac{\eta^2}{(1 - \eta^2)(1 - 0.01\eta^2)}$	0
$\left \frac{z_2 - z_0}{z_0} \right $	$\frac{\eta^2}{1 - \eta^2}$	$\frac{0.1\eta^2}{1 - 0.1\eta^2}$
$\left \frac{z_1 - z_0}{z_0} \right $	$\frac{0.01\eta^2}{1 - 0.01\eta^2}$	$\frac{0.1\eta^2}{1 - 0.1\eta^2}$

2.2.3 Графичко представљање карактеристичних односа

На основу Табеле 2, формиране су криве $\left| \frac{z_2}{z_0} \right|$ у природном, слика 11, и координатном систему са логаритамском размером, слика 12.



Слика 11: Преносна функција хода неослоњене масе [3]



Слика 12: Преносна функција хода неослоњене масе у логаритамској размери [3]

На слици 12 уцртана је истовремено функција увећања у облику Bode – дијаграма, за вредност $D = 0.25$. Поређењем са стварним током криве $\left| \frac{z_2}{z_0} \right|$ за $D = 0.25$ види се ради о апроксимацији исте са три праве.

У интервалу $\eta = 0$ до $\eta = 1$ апроксимирана је крива $\left| \frac{z_2}{z_0} \right|$ делом праве која је паралелна са апсцисном осом, која има нагиб 0 или 0 dB/окт, што је исто.

У интервалу од $\eta = 1$ до $\eta = 10$, апроксимација је извршена делом праве под нагибом $-1:1$, док је за $\eta > 10$ апроксимација извршена правом нагиба $-3 : 1$. У

последњем интервалу ($\eta > 10$) посматрана крива увећања може се апроксимирати са правом под нагибом $-4 : 1$ за $D = 0$ и правом $-2 : 1$ за $D = \infty$.

Поред наведених функција, у пракси се, такође, одређују и следеће преносне функције:

- Релативни ход еластичног елемента, $\left| \frac{z_2 - z_1}{z_0} \right|$

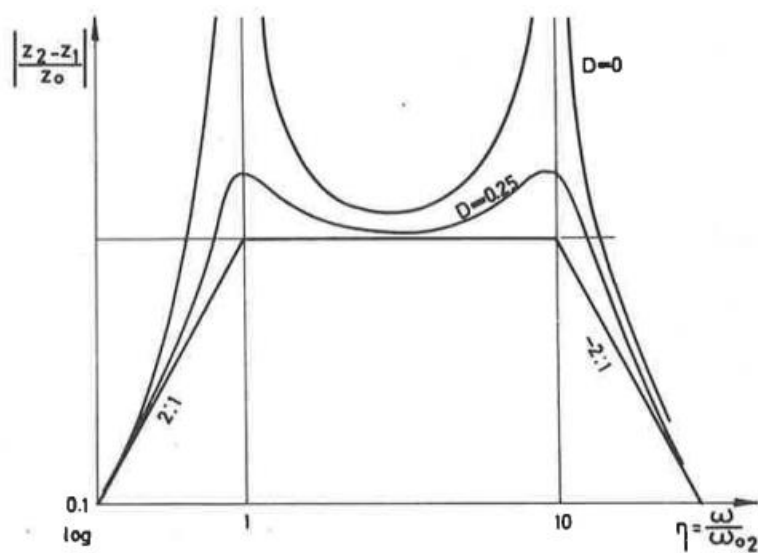
Карактеристика ове функције дата је на слици 13.

- Релативни ход точка (динамички ход неослоњених маса), $\left| \frac{z_1 - z_0}{z_0} \right|$

Карактеристика ове функције дата је на слици 15.

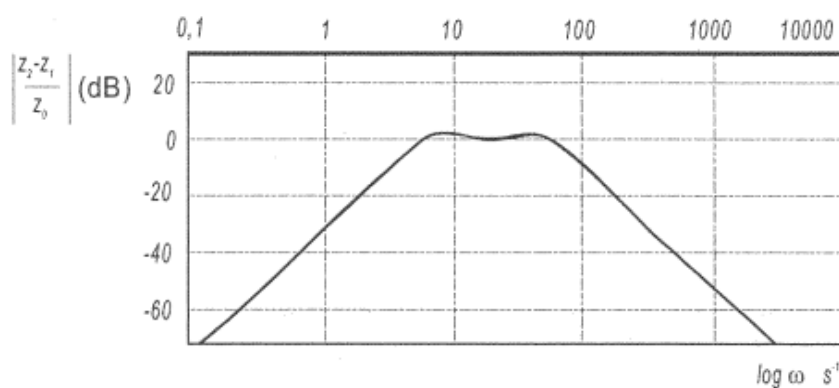
- Релативни положај надградње (промена слободне висине возила), $\left| \frac{z_2 - z_0}{z_0} \right|$

Карактеристика функције дата је на слици 17.

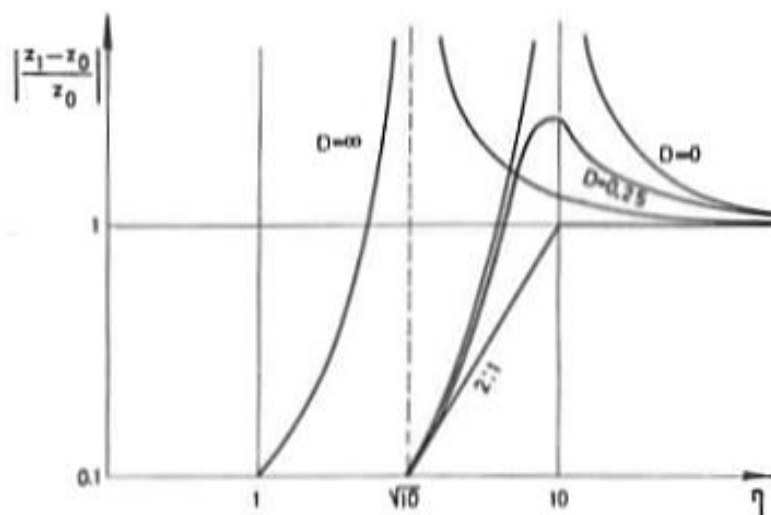


Слика 13: Функција релативног хода еластичног елемента [3]

Са дијаграма на слици 14 се види да амплитуда хода еластичног елемента у области ниских фреквенци расте са порастом фреквенце за ($\omega < \omega_0$, тј. за вредности мање од сопствене фреквенце надградње), док у области виших фреквенца ($\omega > \omega_2$, тј. за фреквенце веће од сопствене фреквенце неослоњене масе) опада.

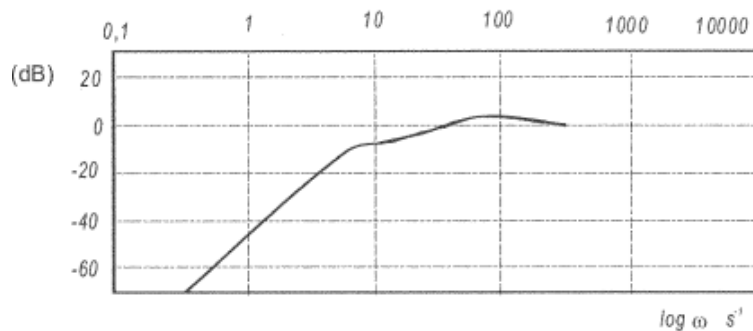


Слика 14: Амплитудно фреквентна функција динамичког хода надградње
($D = 0.5$) [1]



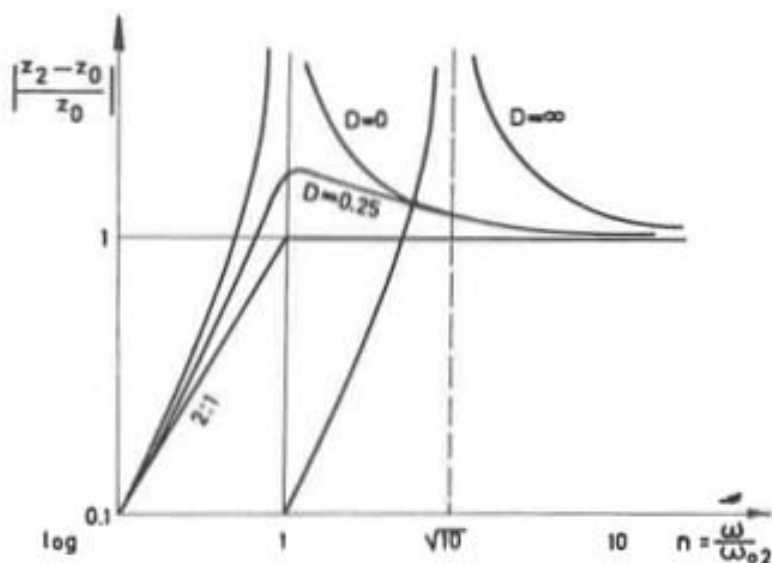
Слика 15: Функција релативне промене оптерећења између пута и точка [3]

Са дијаграма на слици 16 се види да је у области виших фреквенци ($\omega > \omega_2$, односно од сопствене учестаности надградње) точак миран, тј. да он апсорбује високе фреквенце.



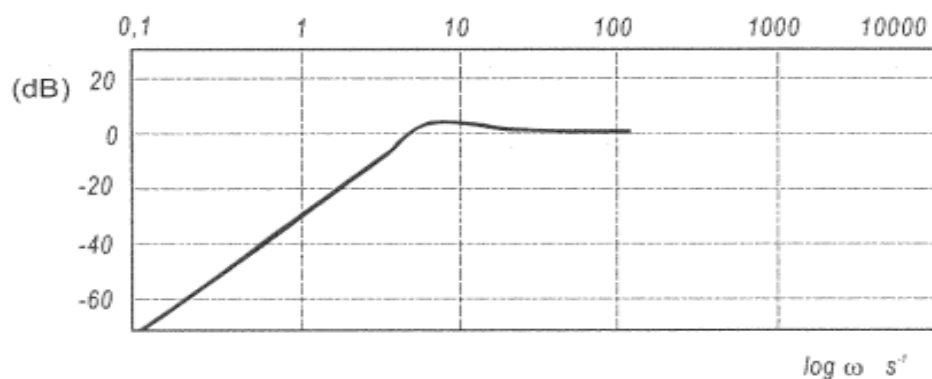
Слика 16: Амплитудно фреквентна карактеристика релативног хода точка [1]

На слици 17 приказана је функција релативне промене слободне висине возила.



Слика 17: Функција увећавања релативне промене слободне висине возила [3]

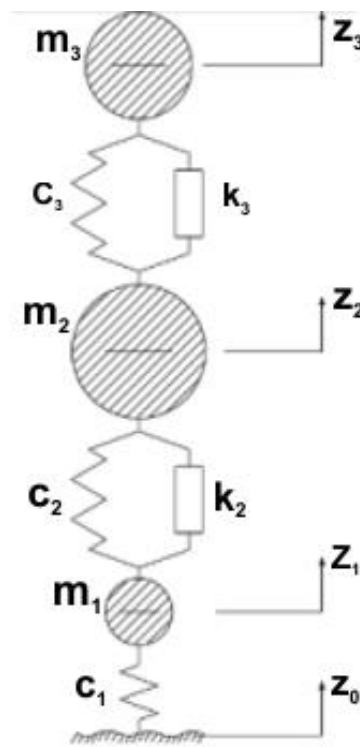
Са дијаграма на слици 18 се види да је промена слободне висине возила у области ниских фреквенција мала, а у области виших фреквенција практично нема промене ове величине.



Слика 18: Амплитуда релативног хода надградње [1]

2.3. Линијски модел са три степена слободе

Код осцилаторног модела са две масе може се посматрати систем „човек – седиште“ као круту масу у саставу ослоњене масе, m_2 . У стварности, човек је врло сложен осцилаторни систем. У даљем раду, у циљу приближења реалном проблему, човек се посматра као материјална тачка масе m_3 , која је еластично ослоњена на седиште тако да чини осцилаторни систем „човек – седиште“, слика 19 [3].



Слика 19: Осцилаторни модел са три масе

За једнодимензионални осцилаторни модел са три масе приказан на слици 19, диференцијалне једначине осцилаторног кретања гласе:

$$m_1 \ddot{z}_1 + c_1(z_1 - z_0) - k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - c_2(z_2 - z_1) = 0, \quad (61)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + c_2(z_2 - z_1) - k_3(\dot{z}_3 - \dot{z}_2) - c_3(z_3 - z_2) = 0, \quad (62)$$

$$m_3 \ddot{z}_3 + k_3(\dot{z}_3 - \dot{z}_2) + c_3(z_3 - z_2) = 0. \quad (63)$$

Систем једначина (61) до (63) може да се напише и у облику повољнијем облику за формирање матрица:

$$m_1 \ddot{z}_1 + m_2 \ddot{z}_2 + m_3 \ddot{z}_3 = -c_1(z_1 - z_0), \quad (64)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + m_3 \ddot{z}_3 = -c_2(z_2 - z_1) - k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1), \quad (65)$$

$$m_3 \ddot{z}_3 = -c_3(z_3 - z_2) - k_3(\dot{z}_3 - \dot{z}_2). \quad (66)$$

Под претпоставком да се побуђивање врши хармонијском функцијом $z_0 = z_0 e^{j\omega t}$, одзиве очекујемо у облику:

$$z_1 = z_1 e^{j\omega t} ; z_2 = z_2 e^{j\omega t} ; z_3 = z_3 e^{j\omega t} . \quad (67)$$

Одговарајући изводи одзива из (67) су:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= j\omega z_1 e^{j\omega t}, & \dot{z}_2 &= j\omega z_2 e^{j\omega t}, & \dot{z}_3 &= j\omega z_3 e^{j\omega t}, \\ \ddot{z}_1 &= j\omega^2 z_1 e^{j\omega t}, & \ddot{z}_2 &= -\omega^2 z_2 e^{j\omega t}, & \ddot{z}_3 &= -\omega^2 z_3 e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (68)$$

После смењивања добијених израза у једначине (64) до (66), добијају се три једначине из којих могу да се одреде изразе за комплексне амплитуде, z_i .

$$(c_1 - m_1 \omega^2) z_1 - m_2 \omega^2 z_2 - m_3 \omega^2 z_3 = c_1 z_0, \quad (69)$$

$$(-c_2 - j\omega k_2) z_1 + (c_2 - m_2 \omega^2 + j\omega k_2) z_2 - m_3 \omega^2 z_3 = 0, \quad (70)$$

$$(-c_3 - j\omega k_3) z_2 + (c_3 - m_3 \omega^2 + j\omega k_3) z_3 = 0. \quad (71)$$

Написан у облику матрице систем (68) до (70) гласи:

$$A \cdot Q = F. \quad (72)$$

Овде су одговарајуће матрице:

$$A = \begin{bmatrix} c_1 - m_1 \omega^2 & -m_2 \omega^2 & -m_3 \omega^2 \\ -c_2 - j\omega k_2 & c_2 - m_2 \omega^2 + j\omega k_2 & -m_3 \omega^2 \\ 0 & -c_3 - j\omega k_3 & c_3 - m_3 \omega^2 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} c_1 z_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Побуђивање осциловања врши се углавном од неравнина пута које су у свему случајног карактера (амплитуде, облик профила, ток профила). Практично може да се говори о спектру побуђивања. Са променом брзине возила мења се и спектар побуђивања. Осциловање појединих концентрисаних маса сложеног осцилаторног система такође је сложено и проузроковано је, с једне стране појединачним неравнинама профила пута које побуђују осциловање масе при сопственим учестаностима или њима блиским учестаностима, и са друге стране укупним спектром профила пута [2].

Напред изведене релације пружају могућност да се изврши детаљна анализа утицаја појединих осцилаторних параметара. У овом раду биће размотрена улога седишта са аспекта изолације осцилација путника и осцилаторне удобности.

2.3.1 Утицај седишта на осцилаторну удобност

Многобројна испитивања су показала да систем „човек – седиште“ ближе гледано може да се посматра као једнодимензионални осцилаторни модел са једном масом. За одређивање кривих једнаких јачина опажања при вертикалним осцилацијама, извршена су испитивања већег броја субјеката на пробном столу, чија је блок шема дата на слици 20 [3].



Слика 20: Блок шема за испитивање система човек – седиште [3]

Изабрано седиште причвршћено је на хидрауличном пулзатору. Побуђивање пулзатора се врши генератором синусне функције на коме је могуће подешавање жељене учестаности и амплитуде, практично континуално. На клипу пулзатора постављен је давач убрзања чији је сигнал претходно био појачан, а затим уведен у давач ефективне вредности на чијем је излазу добијен аналогни напон, U_p . На основу овог напона израчунато је ефективно убрзање пулзатора, p_{eff} .

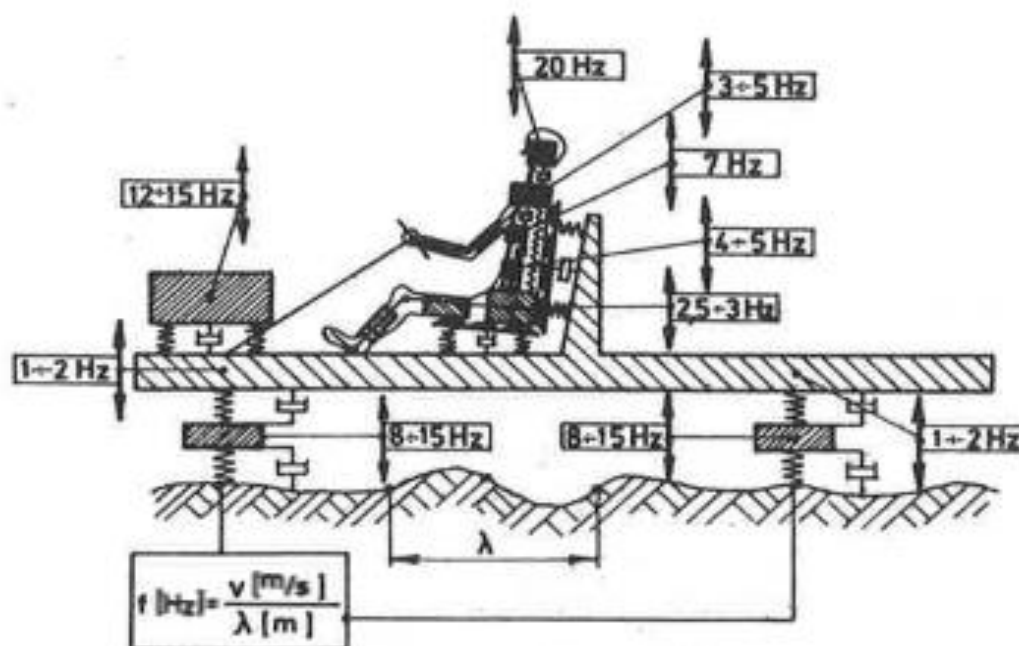
Основни проблем оптимизације осцилаторних параметара оваквог система своди се на изоловање међусобног утицаја при осциловању појединих маса система. Стога је неопходно познавање сопствених учестаности појединих осцилаторних подсистема.

У Табели 3 и на слици 21 дате су уобичајене вредности сопствених учестаности појединих маса осцилаторног система “аутомобил – седиште – човек” [3].

Табела 3: Преглед сопствених учестаности појединих маса [3]

Осцилаторни систем	Човек	Путнички аутомобил	Камион
Ослоњена маса		1 - 1.5	1.5 - 2.0
Седиште - човек		1.6 - 2.6	2.2 - 3.2
Труп - седални предео	3.5 - 6.0		
Кабина			6 - 7
Срце	6.5 - 7.5		
Мотор - еластично ослањање		12 - 15	6 - 9
Неослоњена маса		9 - 16	9 - 16
Глава	20 - 22		
Торзионе осцилације каросерије		16 - 25	

Анализа структуре осцилаторног система аутомобила у првом реду има за циљ одређивање сопствених учестаности појединих осцилаторних маса, док би следећи задатак био померање сопствених учестаности ван најчешћих учестаности побуђивања применом одговарајућих конструктивних мера. Како то није увек могуће, сопствена учестаност еластично ослоњеног мотора треба да буде нижа од учестаности побуђивања при раду мотора на минималном стабилном режиму броја обртаја коленастог вратила. При томе је необично важно, као што је већ напоменуто, да не дође до поклапања сопствених учестаности појединих маса система [3].



Слика 21: Вредности сопствених учестаности система “аутомобил–седиште–човек” [3]

Параметар осцилаторне удобности – квадрат ефективне вредности убрзања човека – можемо да израчунамо на основу познатог односа за линеарни систем, преко интеграла:

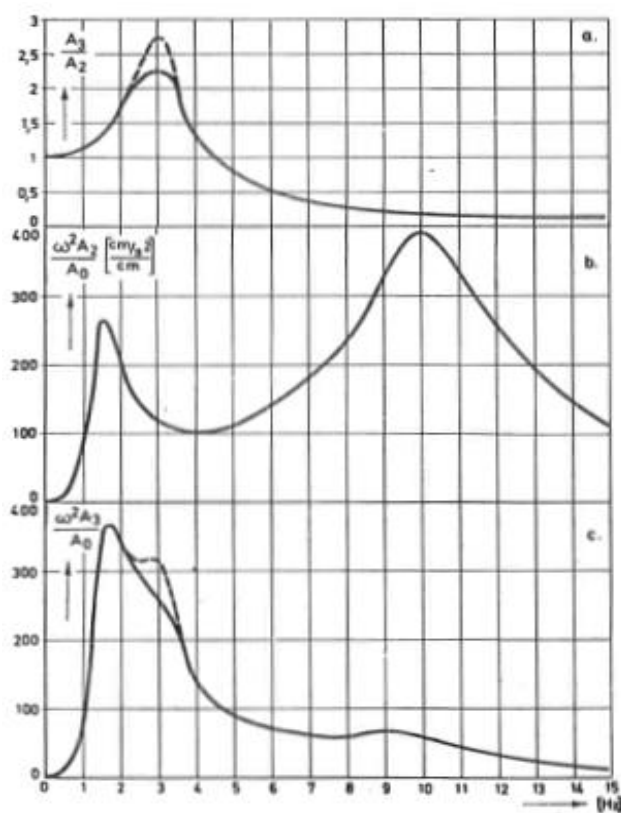
$$\ddot{z}_{eff}^2 = \int_0^\infty \left(\frac{\omega^2 A_3}{A_0} \right)^2 A_0(\omega) d\omega. \quad (73)$$

На основу једначине (73), очигледно је да додатни осцилаторни модел са једном масом „човек – седиште“ нема утицаја на осциловање неослоњене масе. Са друге стране, маса човека - m_3 је релативно мала у односу на ослоњену масу, па може да се претпостави да она не утиче на осциловање ослоњене масе m_2 .

Овакво разматрање омогућава да се фактор увећања посматра као два независна члана:

$$\frac{\omega^2 A_3}{A_0} = \frac{A_3}{A_2} \frac{\omega^2 A_2}{A_0} \quad (74)$$

На слици 22 спроведена је графичка анализа утицаја седишта на осцилаторну удобност.



Слика 22: Графичка анализа утицаја седишта на осцилаторну удобност [3]

Са дијаграма на слици 22 се види да код карактера преносне функције система „човек – седиште“ долази до јачег испољавања утицаја резонантних места ослоњене масе и система „човек – седиште“ на масу човека, док је утицај резонантног места неослоњене масе знатно пригушен. На основу тога наведени пример омогућава да се изведу следећи закључци [3]:

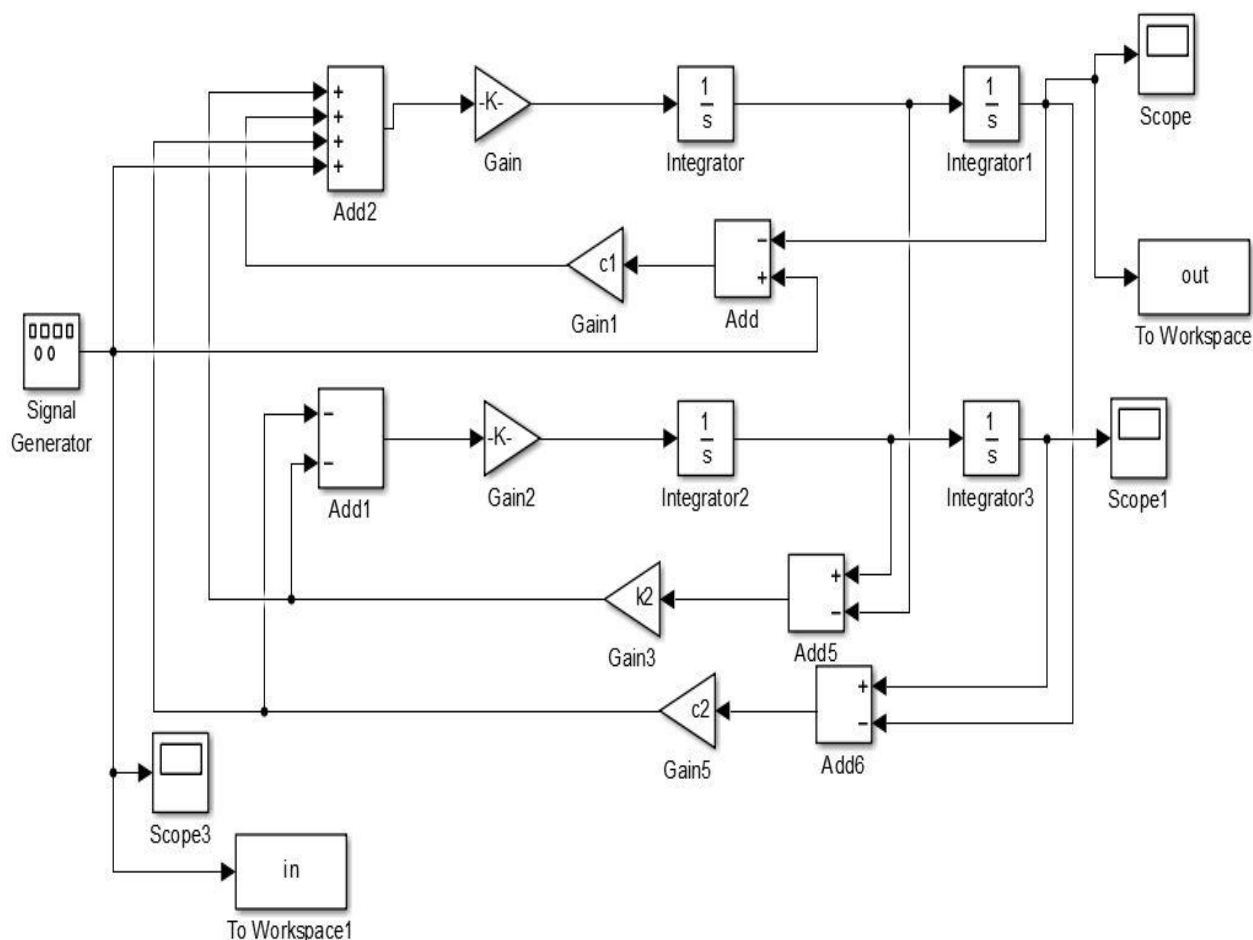
- Резонантно место ослоњене масе (m_2) треба да буде на довољној удаљености од резонантног места система „човек – седиште“. Обично је сопствена учестаност ослоњене масе при 1 – 1,5 Hz, док је сопствена учестаност самог система „човек – седиште“ при 1,5 до 3 Hz.
- Коефицијент пригушења k_2 (односно техничко пригушење D_2) не сме да буде исувише велики, јер се повећавају убрзања ослоњене масе за веће учестаности побуђивања, с друге стране сувише мале вредности коефицијента k_2 (односно D_2) знатно повећавају амплитуде ослоњене масе у резонантној области што врло неповољно утиче на осцилаторну удобност.
- Сопствене учестаности ослоњене масе (односно седишта) које би биле мање од 1 Hz се не могу проучити, јер је човек веома осетљив на убрзања при нижим учестаностима. Са друге стране, постоје знатне тешкоће конструктивне природе. Обезбеђење сопствене учестаности система човек – седиште од 1 Hz с тим да сопствена учестаност ослоњене масе буде виша (око 1.4 Hz), захтевало би остварење врло меког седишта уз додатни уређај за подешавање нивоа [3].

У сваком конкретном случају остаје проблем усаглашавања осцилаторних параметара седишта за дато возило.

3. РЕЗУЛТАТИ СИМУЛАЦИЈЕ КРЕТАЊА ЛИНИЈСКОГ МОДЕЛА ВОЗИЛА СА ДВА СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

Симулација кретања линијског модела са две масе који је дат на слици 10, извршена је у програму *Matlab/Simulink*. За симулацију је коришћен систем једначина кретања (30) и (31).

На слици 23 приказана је блок шема одговарајућег *Matlab/Simulink* програма за решавање једначина кретања осцилаторног модела са две масе.

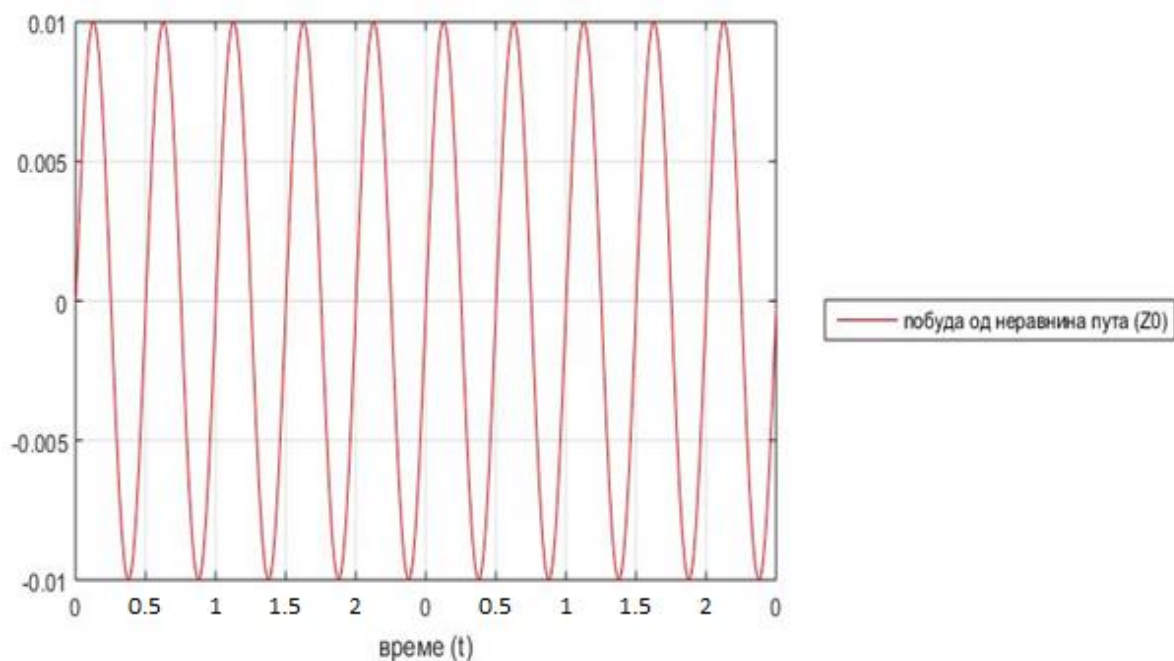


Слика 23: Блок шема развијеног *Matlab/Simulink* програма за решавање једначина кретања линијског осцилаторног модела са две масе

Побуда од неравнина пута уведена је у облику синусне функције облика:

$$z_0 = A \cdot \sin(2\pi ft), \quad (75)$$

где су: $A=0,01$ m - амплитуда неравнина пута и $f=2$ Hz - фреквенција побуде. Дијаграмски приказ функције побуде од неравнина пута дат је на слици 24.



Слика 24: Симулирана функција побуде од неравнина пута ($A=0,01\text{ m}$, $f=2\text{ Hz}$)

Остали подаци коришћени при симулацији су:

$$m_1 = 28\text{ kg},$$

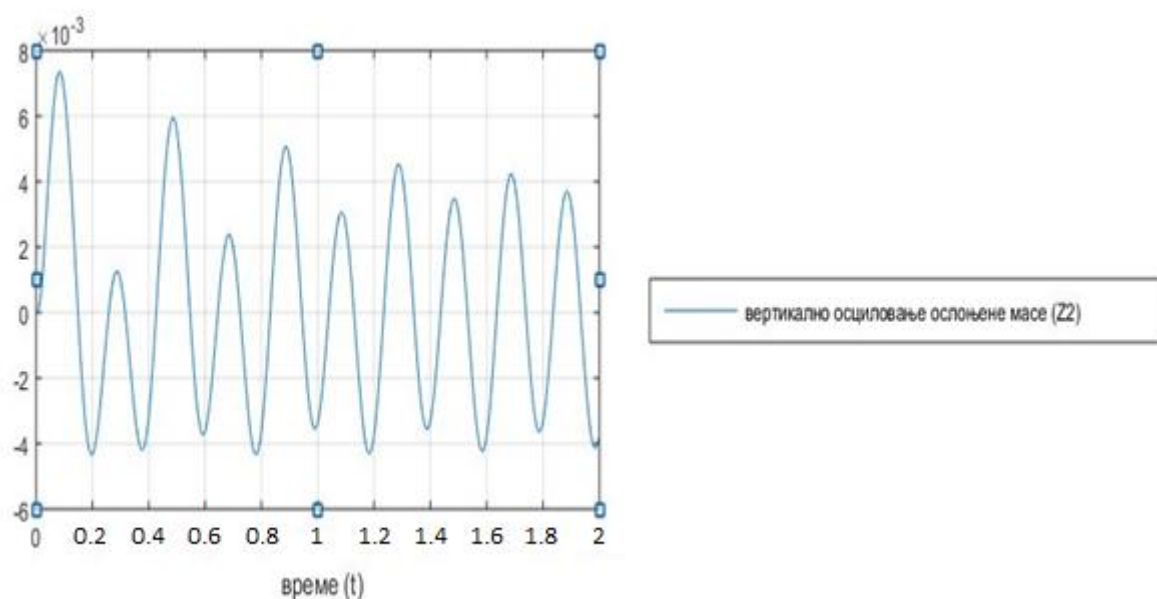
$$m_2 = 305\text{ kg},$$

$$c_1 = 130000\frac{\text{N}}{\text{m}},$$

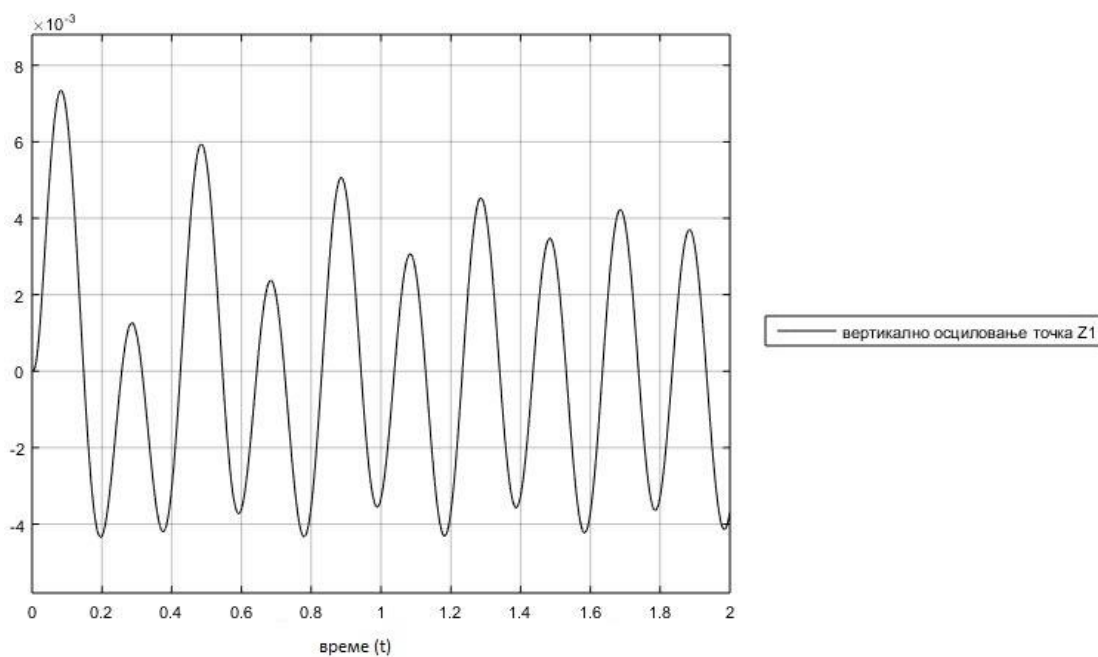
$$c_2 = 150000\frac{\text{N}}{\text{m}},$$

$$k = 4060\frac{\text{Ns}}{\text{m}}.$$

Резултати симулације вертикалног осциловања неослоњене и ослоњене масе дати су на дијаграмима на сликама 25 и 26, респективно.



Слика 25: Вертикално осциловање ослоњене масе (z_2)



Слика 26: Вертикално осциловање неослоњене масе (z_1)

Са дијаграма 25 и 26 може се закључити да линијски модел возила са две масе побуђен хармонијском функцијом, даје одзиве који су такође у облику хармонијских функција. Са слика је очигледан и међусобни утицај осциловања ослоњене и неослоњене масе кроз суперпонирање хармонијских функција.

4. ЗАКЉУЧАК

Циљ овог завршног рада био је да се размотре најпре неки једноставни осцилаторни *линијски модели* на којима је могуће извести основне закључке о осцилаторном понашању возила, а потом и сложенији модели и начин решавања диференцијалних једначина њиховог кретања.

Осцилације сложених система са много степени слободе кретања (као што је возило), по правилу се врши на упрошћеним моделима. Изабрани модел треба да обухвати само најважније параметре, док се параметри мање важности могу занемарити.

Проблем пројектовања система еластичног ослањања возила је врло сложен јер се од доброг система еластичног ослањања тражи да задовољи неколико међусобно противуречних захтева. Проучавањем вертикалних и угаоних осцилација у подужној равни симетрије возила, има за циљ одређивање преносних функција између улазне функције (побуде изазване неравнинама пута) и карактеристичних излазних функција (апсолутних или релативних померања, апсолутних или релативних убрзања, како ослоњених тако и неослоњених маса).

Формирање програма за решавање једначина кретања линијског модела возила са две масе на основу података о реалном моделу возила, може се закључити да линијски модел возила са две масе побуђен хармонијском функцијом, даје одзиве који су такође у облику хармонијских функција.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Јанковић, А.: „Динамика аутомобила“, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2008.
- [2] Кнор, П.: „Динамика моторних возила“, Машински факултет Сарајево, 2006.
- [3] Симић, Д.: „Динамика моторних возила“, Научна књига, Београд, 1988.
- [4] Познановић, Н., Ружић, Д.: „Основи моторних возила - скрипта“, Факултет техничких наука, Нови Сад, 2014.
- [5] Милорадовић, Д.: „Динамика возила – Збирка решених задатака“, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац, 2017.