

**Универзитет у Крагујевцу**  
**Факултет инжењерских наука**



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Мастер академске студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Лаке конструкције

Број индекса: 402/2014

**Павле Д. Лазаревић**

**АНАЛИЗА ПРОРАЧУНА ТАНКОЗИДНОГ НОСАЧА  
ОПТЕРЕЋЕНОГ НА ОМЕТЕНУ ТОРЗИЈУ**

**Мастер рад**

**Комисија за преглед и одбрану:**

1. Др Весна Марјановић, ванредни професор - ментор

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Датум одбране: \_\_\_\_\_

Оцена: \_\_\_\_\_

У оквиру овог мастер рада кандидат треба да:

\* Опише лаке конструкције и танкозидне носаче,

\* Објасни појам неуниформне (ометене) торзије,

\* Прикаже класичан начин прорачуна према теорији еластичности и прорачун по најновијем европском стандарду за Металне конструкције – Еврокоду 3 танкозидних носача оптерећених на ометену торзију

\* Као прилог да прорачун танкозидног носача урађен на сва три претходна начина

Препоручена литература:

- [1] Буђевац Д., Марковић З. и др., Металне конструкције, Грађевинска књига, Београд, 2007.
- [2] Тимошенко С., Теорија еластичне стабилности, Научна књига, Београд, 1952.
- [3] Петковић З., Металне конструкције у машиноградњи 2, Машински факултет у Београду, Београд, 2005.
- [4] Зарић Б., Стипанић Б., Буђевац Д., Челичне конструкције у грађевинарству, ИРО Грађевинска књига, Београд, 1990.

Крагујевац, 2016.

ментор:  
Др Весна Марјановић, ванр. проф.

---

## Резиме

На почетку овог рада дате су основне карактеристике и кратак историјат металних конструкција. Посебна пажња усмерена је ка лаким металним конструкцијама. Под лаким конструкцијама подразумевају се конструкције са танким зидовима. Детаљно су описани носачи, тј. елементи конструкције код којих савијање и увијање представљају доминантан вид напрезања. Дат је опис појма слободне (униформне) и ометене (спречене или неуниформне) торзије, методе за прорачун и анализу носача у којима се јавља ометена торзија, као и начин одређивања секторских карактеристика попречног пресека.

У другом поглављу приказан је конкретан прорачун танкозидног носача, класичним поступком. Затим, приказан је прорачун танкозидног носача и појам ометене торзије према Еврокоду 3.

Поред класичног прорачуна и конструисања, последњих неколико деценија у употреби су све више специјализовани софтвери, уз чију помоћ инжењери много лакше и брже долазе до тражених резултата. У трећем делу су приказане делимичне могућности софтверског пакета *Autodesk Robot Structural Analysis* и извршена је детаљна анализа датог танкозидног носача. Прво је анализиран попречни пресек и одређене су све карактеристике попречног пресека укључујући и све секторске карактеристике, а затим су приказани нормални и смицајни напони у попречном пресеку.

**Кључне речи:** танкозидни носач, секторске карактеристике, ометена торзија, напонска анализа, софтвер

## Abstract

Some basic characteristic and a short historical review have been presented at the beginning of this work. Special attention was paid to lightweight metal constructions. What is meant by that are the thin-wall constructions. Node have been minutely described i.e. parts of the constructions at which bending and twisting represent a dominant aspect of straining. A description was given of a term free (uniform) and interrupted (non uniform) torsion, methods for calculation and analysis of nodes where the non uniform torsion is dominate load, as well as methods for determination of sector characteristics of cross section.

Classical calculation of metal thin walled nodes is presented in the second chapter. Calculation of metal thin walled nodes and the concept of non uniform torsion according to Eurocode 3 are given afterwards.

Along with classical calculation and constructing, for a last few decades there have been used modern ways which have modern specialized software. Thanks to that, engineers have much quicker and easier methods to get required results. The possibilities of software program *Autodesk Robot Structural Analysis* are partly shown in the third chapter and analysis of metal thin walled nodes is presented afterwards. The cross section is analyzed first and its main characteristics, including all sector characteristics, in order to get the precise values of normal and shear stress.

**Key words:** metal thin walled node, sector characteristics, non uniform torsion, stress analysis, software

## САДРЖАЈ

|                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Увод</b>                                            | <b>10</b> |
| 1.1 Основе металних конструкција                          | 10        |
| 1.1.1 Карактеристике металних конструкција                | 10        |
| 1.1.2 Историјски развој металних конструкција             | 11        |
| 1.2 Лаке металне конструкције                             | 14        |
| 1.2.1 Хладнообликовани елементи и лимови                  | 14        |
| 1.3. Носачи                                               | 19        |
| 1.3.1 Пуни носачи                                         | 21        |
| 1.3.2 Пуни носачи израђени од ваљаних профила             | 23        |
| 1.3.3 Пуни лимени носачи                                  | 24        |
| 1.4 Појам ометене торзије носача                          | 26        |
| 1.4.1 Основне претпоставке ометене торзије                | 29        |
| 1.4.2 Напонска стања и утицаји код ометене торзије        | 30        |
| 1.5 Анализа машинских конструкција                        | 33        |
| 1.6 Секторске карактеристике попречног пресека            | 36        |
| 1.6.1 Секторска координата                                | 39        |
| 1.6.2 Главна секторска координата. Центар увијања         | 40        |
| <b>2. Прорачун и примери прорачуна танкозидног носача</b> | <b>42</b> |
| 2.1 Прорачун танкозидног носача                           | 42        |
| 2.1.1 Секторске карактеристике                            | 42        |

|                                                            |           |
|------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.1.2 Спречена торзија                                     | 49        |
| 2.2 Прорачун танкозидног носача према Еврокоду             | 55        |
| 2.2.1 Ограничена торзија према Еврокоду 3                  | 57        |
| 2.2.2 Примери прорачуна према Еврокоду 3                   | 61        |
| <b>3. Анализа танкозидних конструкција помоћу рачунара</b> | <b>65</b> |
| 3.1 Савремени софтвери за анализу лаких конструкција       | 66        |
| 3.1.1 Autodesk Robot Structural Analysis                   | 67        |
| <b>4. Закључак</b>                                         | <b>84</b> |
| <b>ЛИТЕРАТУРА</b>                                          | <b>86</b> |

## Прилог слика:

**Слика 1.** *Мост преко реке Северн у Енглеској*

**Слика 2.** *Crystal Palace у Лондону*

**Слика 3.** *Empire State Building*

**Слика 4.** *Танкозидни профили*

**Слика 5.** *Шематски приказ хладног ваљања*

**Слика 6.** *Шематски приказ пресовања (1-жљеб, доњи део пресе; 2- чекић, горњи део пресе; 3- матрица за подешавање)*

**Слика 11.** *Пуни и решеткасти носачи - дијаграми нормалних напона*

**Слика 12.** *Еволуција облика носача у тежњи за смањењем њихове тежине: а) пуни носач - ваљани I-профил; б) пуни лимени носач;*

*в) олакшани I-профил; г) саћасти носач; д) решеткасти носач*

**Слика 13.** *Различити облици попречних пресека пуних носача: а) ваљани I-профил;*

*б) пуни лимени носач у закованој изради; в) пуни лимени носач у завареној изради*

**Слика 14.** *Статички системи пуних носача:*

*а) Проста греда; б) Континуални носач; в) Герберов носач; г) Оквирни носач; д) Лучни носач*

**Слика 15.** *Различити типови ваљаних профила који се користе као носачи: а) I-профили са уским ножицама (I и IPE); б) I-профили са широким ножицама (HEA, HEB и HEM); в) U-профили*

**Слика 16.** *Попречни пресеци пуних лимених носача: а) у завареној изради; б) у закованој изради*

**Слика 17.** *Слободна торзија*

**Слика 18.** *Расподела тангенцијалних напона*

**Слика 19.** *Ометена торзија*

**Слика 20.** *Ограничено увијање код виљушкастих ослонаца штапа*

**Слика 21.** *Ограничена торзија код променљивог и профила константног попречног пресека*

**Слика 22.** *Штап отвореног профила, произвољног пресека*

**Слика 23.** *Приказ елементарне површине*

**Слика 24.** *Конзола од I профила оптерећена моментом увијања  $M_0$  на слободном крају*

**Слика 25.** *Фазе извођења анализе конструкција*

**Слика 26.** *Методе за анализу и прорачун машинских конструкција*

**Слика 27.** *Дијаграми координате  $x(s)$  и секторске координате  $\omega(s)$  за I профил*

**Слика 28.** *“Исправљање угла” у правоугаоник*

**Слика 29.** *Шрафирана површина сектора од  $N_0$  до  $N$*

**Слика 30.** *Попречни пресек профила*

**Слика 31.** *Почетни координатни систем*

**Слика 32.** *Дијаграм секторске координате  $\omega_0$*

Слика 33. Дијаграм промене координате у

Слика 34. Дијаграм секторске координате за центар смицања  $\omega_{D01}(S)$

Слика 35. Симетричност троуглова

Слика 36. Симетричност трапеза

Слика 37. Дијаграм нормиране секторске координате  $\Omega$

Слика 38. Дијаграм секторског статичког момента  $\overline{S_{\Omega}}$

Слика 39. Греда оптерећена на савијено увијање

Слика 40. Дијаграм промене величина  $\varphi, \varphi', V, M_s, M_{\Omega}$  по дужини греде

Слика 41. Промена напона  $\tau_s$

Слика 42. Промена напона  $\tau_{\Omega}$

Слика 43. Промена напона  $\sigma$

Слика 44. Нормирана секторска координата и секторски статички момент за I пресек

Слика 45. Напони и деформације услед неуниформне (ограничене) торзије код I пресека

Слика 46. Доприноси униформне и неуниформне торзије укупном напрезању

Слика 47. Попречни пресеци

Слика 48. Група софтвера за грађевинске конструкције

Слика 49. Прозор за одабир нове конструкције

Слика 50. Радно окружење програма Autodesk Robot Structural Analysis

Слика 51. Одабир стандарда за прорачун конструкције

Слика 52. Картица Section Definition

Слика 53. Картица Results

Слика 54. Изглед резултата приказаних у оквиру програма Microsoft Word

Слика 55. Изглед резултата приказаних у оквиру програма Microsoft Word

Слика 56. Изглед резултата приказаних у оквиру програма Microsoft Word

Слика 57. Изглед картице Graphical results (Diagrams)

Слика 58. Дијаграм промене координате - у

Слика 59. Дијаграм промене координате - z

Слика 60. Дијаграм промене -  $\Omega_s$

Слика 61. Дијаграм промене -  $S_y(s)$

Слика 62. Дијаграм промене -  $S_z(s)$

Слика 63. Дијаграм промене површине – A

Слика 64. Дијаграм секторског статичког момента  $\overline{S_{\Omega}}$

Слика 65. Приказ подмодула Stress Analysis

Слика 66. Оптерећење при утицају нормалних напона у оквиру програма Microsoft Word

## Прилог табела:

*Табела 1.: Вредности поправних коефицијената*

*Табела 2.: Обрасци за премножавање дијаграма*

*Табела 3. Подаци за дијаграме промене величина  $\varphi, \varphi', B, M_s, M_\Omega$*

*Табела 4. Упоредни преглед резултата*

## 1. Увод

### 1.1 Основе металних конструкција

#### 1.1.1 Карактеристике металних конструкција

Употреба гвожђа, а потом челика, као материјала за носеће конструкције у грађевинарству, је релативно скоријег датума. Прва конструкција од гвожђа стара је тек нешто више од 200 година. За извођење грађевинских објеката са носећом конструкцијом од метала, по употребљеној количини, челик и даље представља главни материјал, мада се последњих деценија уочава и повећана употреба алуминијума. Челичне конструкције поседују специфична својства и значајне техничке и функционалне предности у односу на друге грађевинске материјале и зато имају широку примену за све врсте грађевинских конструкција. Такође, карактерише их изузетно брз тренд развоја који је проузрокован појавом и развојем нових савремених метода прорачуна и анализе, нових високо софистицираних конструкцијских система, затим развој потпуно аутоматизованих система за израду радионичке документације на рачунару, као и система за израду конструкција у радионици и нових поступака монтаже на градилишту.

Челик, као основни материјал за носеће металне конструкције, се користи скоро за све типове грађевинских објеката као што су: индустријске хале, спратне зграде, изложбене и спортске дворане, хангари, кровови стадиона, гараже, мостови, резервоари, силоси, бункери, водоторњеви, антенски стубови, стубови далековода, димњаци, уставе, офшор-платформе и многе друге конструкције за специјалне намене. [1]

Високе механичке карактеристике и дуктилност конструкционих челика, много веће него код других грађевинских материјала, обезбеђују највећи степен искоришћења носећих својстава, а при том и знатну пластичну резерву носивости. То има посебног значаја при изузетним екстремним оптерећењима као што је слегање темеља, дејство земљотреса или удар возилао конструкцију. Захваљујући изузетним механичким својствима елементи челичних конструкција, у поређењу са конструкцијама од других материјала, имају знатно мање димензије, а самим тим и мању тежину што омогућава лакшу манипулацију и транспорт. Као материјал за носеће конструкције челик поседује изузетне карактеристике у које спадају:

- висока механичка својства,
- мале димензије и тежине елемената челичних конструкција,
- индустријализована производња,
- лака манипулација, транспорт и монтажа,
- релативно лако фундаирање,
- велика сеизмичка отпорност,
- флексибилност, адаптивност и могућност демонтаже.

Оптимални распони при примени челичних конструкција су доста већи него при употреби других материјала, а повећање коштања при прекорачењу тих оптималних распона је минимално. Челичне конструкције омогућавају савлађивање великих распона и висина, како код хала и спратних зграда, тако и код мостова, при чему су тежине и димензије носеће челичне конструкције битно мање него код других грађевинских материјала. У многим случајевима, као на пример код мостова изузетно великих распона, хала великих површина без стубова, зграда високе спратности или високих торњева и јарбола носећа конструкција од челика представља једину прихватљиву солуцију. Због претходно наведеног челичне конструкције држе све рекорде у грађевинарству.

Мостови, без сумње, представљају највеће достигнуће модерног градитељства, а посебно место свакако припада металним мостовима. Слична ситуација је и у другим областима примене, на пример, у зградарству где челичне конструкције држе све рекорде како по висини, тако и по распонима, брзини изградње итд.

Све бржи пораст броја људи и интензивна миграција у велике градове поставља захтев за напуштањем конвенционалних начина грађења и прелазак на потпуну индустријализацију грађења. Индустријализација обухвата комплексно планирање, пројектовање, израду, монтажу, финализацију и одржавање објеката кроз један простудирани концепт, који обједињује све учеснике у процесу изградње, како би се постављени циљеви испунили уз економисање у времену и коштању. Овим се максимално користи савремена технологија производње у фабрикама, а с тим у вези добија се бољи квалитет и нижа цена. Значајним смањењем радова на градилишту, а тиме и утицаја фактора "човек" и "временски услови" остварује се скоро потпуно елиминисање непредвиђених радова.

### **1.1.2 Историјски развој металних конструкција**

Да би се гвожђе могло користити руда се мора ослободити знатних процената нечистоћа. Дуги низ година су археолози покушавали да одгонетну тајну о томе ко је био проналазач гвожђа и његове израде. Међутим, ни најстарији списи не дају одговор на ово питање, јер они говоре како је стари културни народ добијао своје знање о добијању гвожђа од неког божанства или некакве мистериозне личности. При истраживању велике Кеопсове пирамиде 1837. године, Енглец *Хил* је у њеним зидинама пронашао парче гвожђа, чија старост достиже око 5000 година, а које се као највећа реткост чува у Британском музеју у Лондону. Добијање метала у Кини и Индији било је познато од давнина, тако да је цар *Ју*, 2000 година пре нове ере, добијао од становника Тибета гвожђе као данак. Од Јевреја, Феничана и др. старих народа пренета је вештина израде метала у најстарије културне државе. Све до средњег века гвожђе се добијало редукцијом помоћу дрвеног угља у рововима или ниским шахтним пећима изграђеним од блата и ломљеног камена, а касније и у већим пећима. У XV веку из шахтних пећи је развијена висока пећ, која је због довода ваздуха помоћу водом покретаних мехова могла бити загрејана на вишу

температуру. Тек проналаском поступка добијањ асировог гвожђа помоћу кокса у високим пећима 1735. године омогућена је већа производња сировог гвожђа, а тиме и његова шира примена. Примена гвожђа у грађевинским конструкцијама била је углавном ограничена на побољшање познатих техника спајања елемената. Употреба ексера датира још од првог миленијума пре нове ере. Завртњеве почињу да се користе од средине XVI века, а подвезице одкованог гвожђа за спајање елемената дрвене грађе од XVII века. До пред крај XVIII века ливено гвожђе углавном је коришћено за алате и ратну технику, тако да познатих примера употребе гвожђа као главног материјала за носеће конструкције у грађевинарству нема све до касних година XVIII века, осим изузетно ретких случајева у којима је гвожђе једноставно замењивало дрво, камен или опеку.

Прва носећа конструкција од гвожђа у свету подигнута је у периоду 1777-1779. године уместу Колбрукдејл у Енглеској преко реке Северн (слика 1.) од стране *Абрахама Дарбија*.



*Слика 1. Мост преко реке Северн у Енглеској*

Прогрес у грађењу мостова и кровова од вареног гвожђа брзо се проширио на све развијене земље, што је захтевало производњу нових облика носећих елемената, тако да је дошло до појаве првих профила. Француски инжењер *Фердинанд Зорес* је успео 1839. године да изваља први *I*-профил, потом *U*-профил и на крају 1852. године по њему названо *Зорес* гвожђе, које је касније широко примењивано за образовање коловозних табли мостова.

Посебан значај за развој металних конструкција имао је проналазак топљеног челика, 1855. године, од стране *Хенрија Бесемера*. Челик се производио у великим крушкастим окретним посудама, званим конвертори, у растопљеном стању, те отуда и његов назив. Међутим, до друге половине XIX века челик се није производио у довољним количинама и са довољно ниском ценом да би био конкурент вареном гвожђу.

Главна разлика у хемијском саставу горња два метала је у садржају угљеника. Увођењем Сименс-Мартиновог, а нарочито Томасовог поступка омогућена је после 1880. године масовна производња челика, доброг квалитета, такозваног топљеног челика који је и данас у употреби. Година 1881. је везана за почетке електролучног заваривања, а 1928. за примену заваривања у мостоградњи. Децембра 1928. године завршен је мост на Слудви (*Sludwa*) у Пољској, први друмски мост на свету израђен заваривањем. У почетку примене, заваривање је дало изузетне резултате, јер су мостови постали једноставније конструкције, а јефтинији од одговарајућих закованих. Међутим, убрзо су, 1936. године откривене пукотине у подужном шаву између ребра и ножица главног носача железничког моста у Берлину. Иста оштећења откривена су и на друмском мосту у Немачкој, 1938. године. Ове хаварије су иницирале допунска теоријско-експериментална истраживања широм света, што је довело до нових сазнања у области заварених конструкција, а касније и до тога да заваривање постане доминантан поступак спајања при изради челичних конструкција.

Најстарија примена гвоздених конструкција у зградарству датира из 1785. године на једној кући у Боулоњу, француског архитекте *Ангоа*, код које су примењени гвоздени носачи међуспратне конструкције распона 6,5 *m*. Прве кровне конструкције од ливеног гвожђа јављају се почетком XIX века и то по угледу на већ постојеће системе од дрвета.

Прву вишеспратну конструкцију од ливеног гвожђа је 1797. године у Шрузберију (Енглеска) саградио *Бејн*. За прву светску изложбу која је отворена 1. маја 1851. године изграђена је *Crystal Palace* у Лондону (слика 2.), за до тада нечувено кратко време од само 17 недеља. Конструкција је изведена као оквирна, са витким гвозденим стубовима и решеткастим носачима.



Слика 2. *Crystal Palace* у Лондону



Слика 3. *Empire State Building*

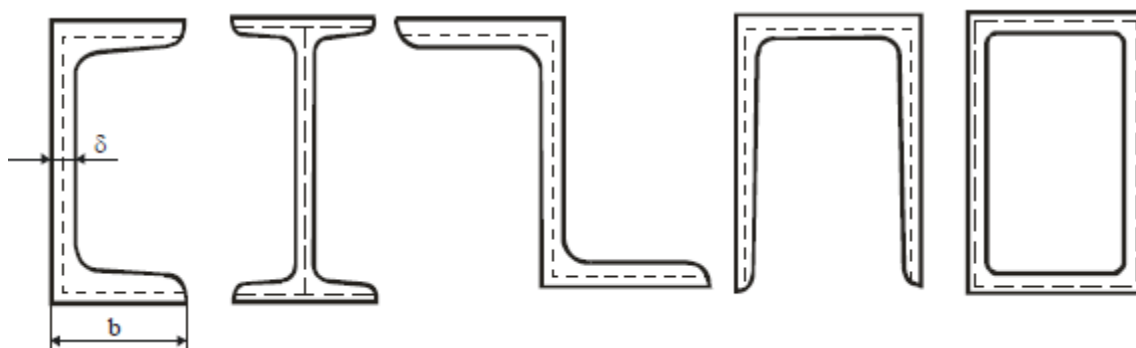
Развој вишеспратних зграда од челика, оквирног система и великих висина, првенствено је везан за Америку, па су овакви објекти постали синоними архитектуре њених великих градова. Свакако најбитнију конструкцију представља *Empire State Building*. Овај објекат, доајен свих спратних зграда са 381,0 *m* висине, био је светски рекордеру висини наредних 40 година и има 102 спрата са преко 50.000 *t* уграђеног челика (слика 3.).

## 1.2 Лаке металне конструкције

Под лаким конструкцијама подразумевају се конструкције са танким зидовима. Под танкозидним штапом подразумева се такво тело чије су све три димензије величине различитих редова, то јест дужина је много већа од ширине попречног пресека, а ширина попречног пресека је много већа од дебљине зида.

(1.1)

Теорија танкозидних профила допуњује класичну теорију. Све танкозидне профиле боље је проучавати по овој теорији него по класичној. Многи обрасци и даље важе. Танкозидни профиле приказани су на слици 4. где испрекидане линије представљају контуру попречног пресека. [2]



Слика 4. Танкозидни профиле

### 1.2.1 Хладнообликовани елементи и лимови

Под хладнообликованим профилима (ХОП) подразумевају се конструктивни елементи произведени хладним обликовањем челичних лимова и трака, ваљањем или пресовањем. Уобичајене дебљине челичних лимова и трака које се користе за производњу хладно обликованих производа крећу се од 0,4 *mm* до 6,0 *mm*.

Употреба хладно обликованих производа у зградарству датира још од 1850. године (САД и Велика Британија). Шира примена профила узела је маха тек по завршетку II светског рата. Први прописани стандарди датирају из 1946. године, када је Амерички институт за челик и гвожђе (AISI) објавио “Одредбе за пројектовање хладно обликованих челичних конструкција”. У другој половини XX века вршила су се значајна испитивања на Корнел Универзитету под руководством професора *Џорџа Винтера*.

Хладно обликовани производи добијају се углавном од нискоугљеничних и легираних челика, са границом развлачења од 250 до 630  $N/mm^2$ . Материјал мора да има довољну дуктилност због знатних попречних савијања са малим полупречницима (обично  $r=t$ ) без појаве прелина уз омогућену пластификацију.

ХОП могу да се производе и од лимова пресвучених другим металима (цинк, алуминијум), пластичним масама или лаковима (заштита од корозије још у току производње). Пластифицирани лимови не могу да се заварују, док поцинковани, такође, не треба да се заварују јер се губи АКЗ у зони шава, а заваривање је отежано због скупљања насллага.

Главне предности конструкција од хладно обликованих производа су:

- мала тежина, па самим тим и мањи утрошак челичног материјала по  $m^2$  објекта у поређењу са вруће ваљаним профилима (15-40%, а за неке елементе и преко 50%),
- широк дијапазон облика и димензија производа,
- већа прецизност димензија - мање производне толеранције,
- квалитет површина хладнообликованих производа је бољи од врућеваљаних профила - олакшано наношење и повећана трајност АКЗ,
- механичке карактеристике основног материјала (граница развлачења и чврстоћа на затезање), се повећавају хладним обликовањем,
- лако се производе "гнездасти" пресеци погодни за компактно паковање, манипулацију и транспорт,
- адекватним избором облика пресека могу се постићи значајни естетски и конструктивни ефекти.

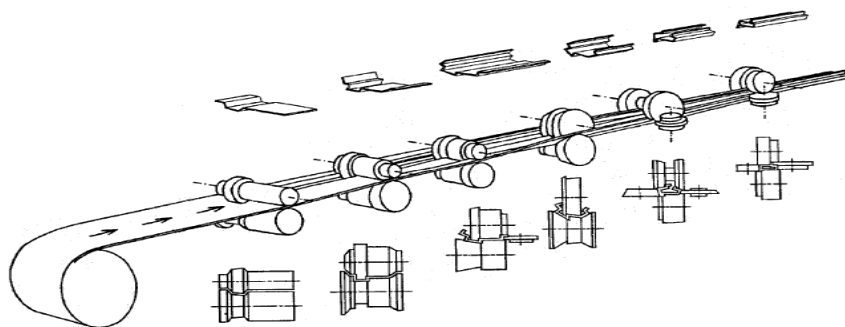
Док највеће недостатке конструкција од хладно обликованих производа представљају:

- виша јединична цена у односу на вруће ваљане профиле,
- мања отпорност у односу на грубе поступке при транспорту и монтажи,
- израженија опасност од дејства корозије, у смислу да исти корозиони ефекат више слаби танкозидни пресек хладно обликованог профила него дебело зидни пресек врућеваљаних профила,
- релативно теже спајање.

Хладно обликовани профили и лимови се добијају од равних трака њиховим постепеним савијањем у хладном стању. Дебљина зидова свих делова попречног пресека (нпр. ножица и ребра) је иста, односно константна. Углавном се користе два типа производње:

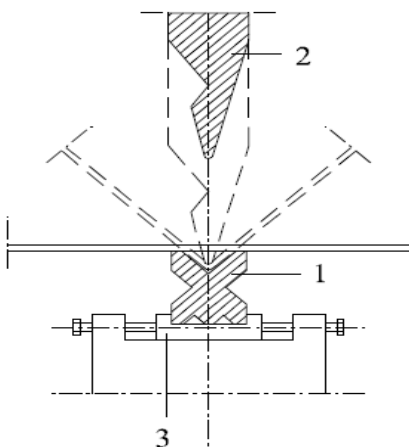
- хладно ваљање и
- пресовање.

При хладном ваљању број парова ваљака се креће од 6 за једноставне пресеке до 15 за сложене. Брзина ваљања креће се у опсегу од 6 - 92  $m/min$ , а уобичајено износи 23 - 46  $m/min$ . По завршетку операције обликовања пресек се одсеца на захтевану дужину аутоматским сечењем, без заустављања рада машине. Уобичајена дужина је 6 и 12  $m$ . У савременим фабрикама компјутерски вођене машине аутоматски секу на захтевану дужину и истовремено буше рупе. Овај поступак је погодан за масовну производњу хладно обликованих профила и лимова - велике количине (серије). Шематски приказ хладног ваљања приказан је на *слици 5*. [3]



**Слика 5.** Шематски приказ хладног ваљања

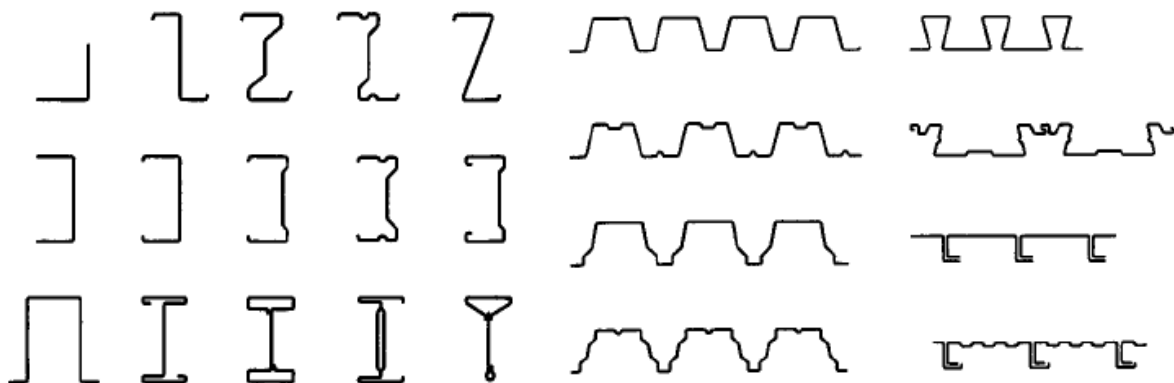
Поступак пресовања (*слика 6.*) је погодан за мање дужине, мање серије, једноставније облике и веће ширине профила. Приликом пресовања могу се добити и профили променљиве геометрије.



**Слика 6.** Шематски приказ пресовања (1-жљеб, доњи део пресе; 2- чекић, горњи део пресе; 3- матрица за подешавање)

Хладно обликовани профили могу бити:

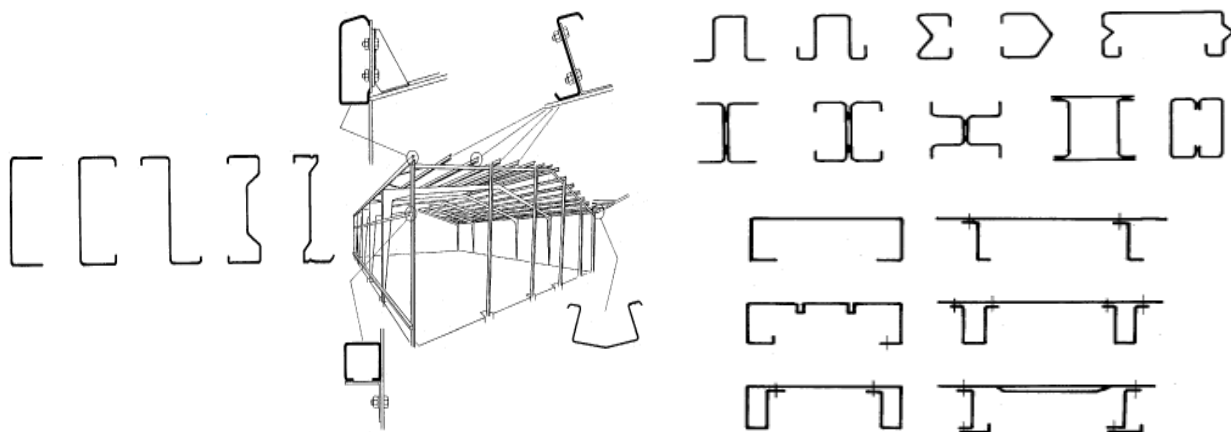
- хладно обликовани профили - линијски елементи отвореног или затвореног попречног пресека;
- хладно обликовани лимови и касете.



**Слика 7.** Врсте хладно обликованих производа

Област примене ХОП у грађевинарству:

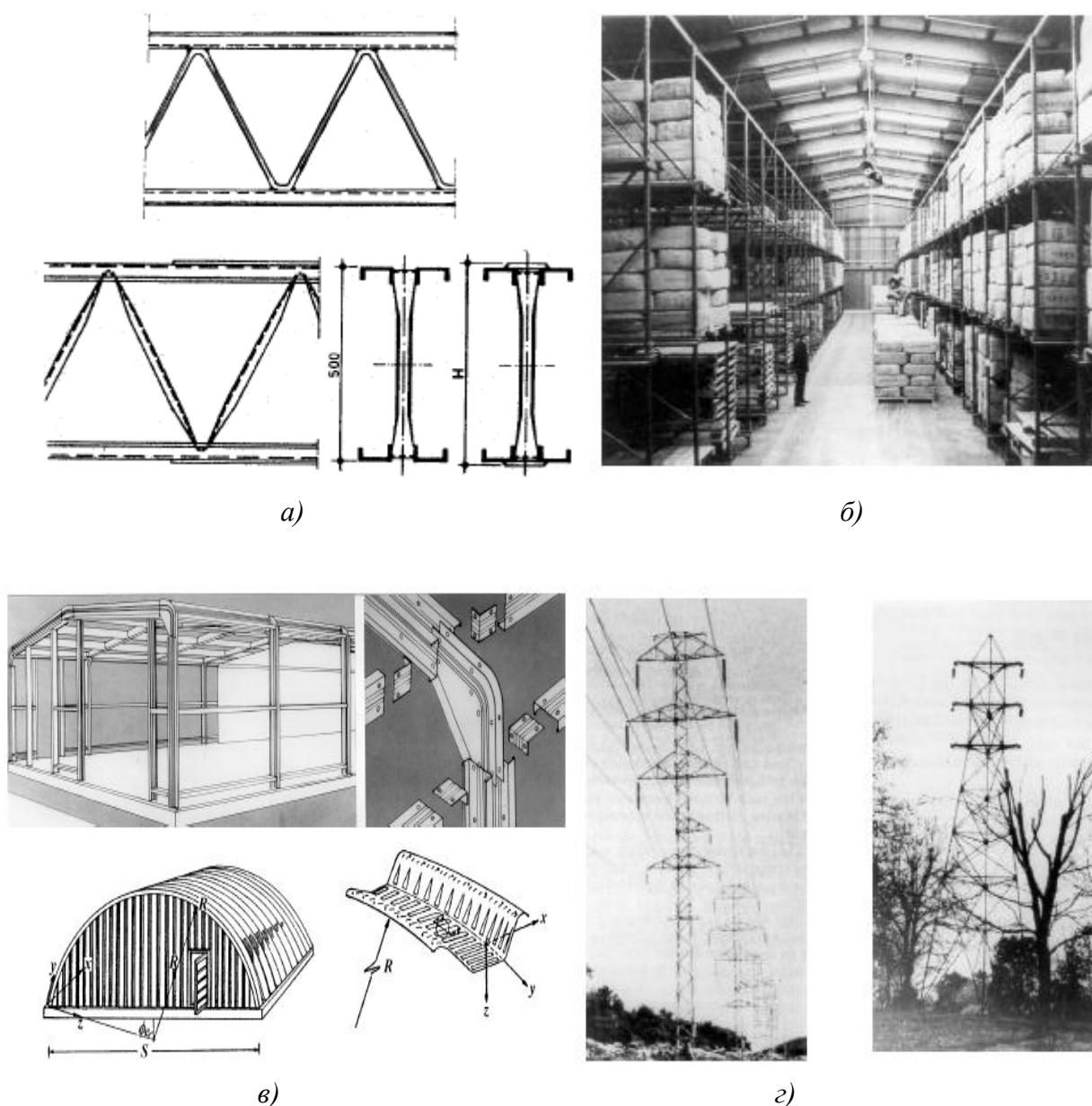
- зградарство (рожњаче, фасадне ригле, подни носачи, решеткасти носачи, типски главни носачи, стакленици, високо регална складишта, фасадне икроне облоге итд.),
- мостоградња (олучаста и трапезаста укрућења ортотропних плоча, ивични носачи, одбојници, граничници, итд.),
- хидротехничке конструкције (укрућења табластих устава, талпе).



**Слика 8.** Уобичајени облици пресека рожњача и лаке међуспратне конструкције

Хладно обликовани профили могу бити веома специфични. Наиме, може доћи до промене својстава материјала у попречном пресеку на местима повијања. Сви проблеми стабилности (извијање, бочно-торзионо извијање) су још израженији него код класичних челичних конструкција, док се везе конструишу и прорачунавају на посебан начин. Користе се и специфична средства и поступци заваривања. [2]

На слици 9. приказани су неки од типова хладно обликованих профила.



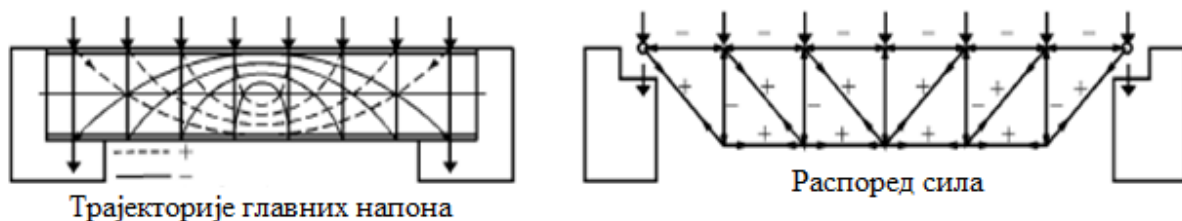
Слика 9. Типови хладно обликованих профила - а) Решеткасти носачи, б) Високорегална складишта, в) Типске индустријске хале, г) Стубови далековаода

### 1.3 Носачи

Елементи конструкције код којих савијање представља доминантан вид напрезања називају се носачи. Ови елементи под дејством спољашњег оптерећења подлежу деформацији савијања. Са становишта отпорности материјала, савијање носача може бити последица следећих случајева напрезања: чистог правог савијања, савијања силама, косог савијања, косог савијања силама и ексцентричног притиска или затезања. Што се тиче ексцентричног притиска односно затезања, треба напоменути да се код носача јављају напрезања у области великих ексцентрицитета, то јест таква напрезања код којих су утицаји савијања знатно већи од оних изазваних аксијалним напрезањем, било да је реч о затезању или притиску. Ригле оквирних носача представљају карактеристичан пример носача са напрезањем у зони великих ексцентрицитета. Елементи код којих се јављају ексцентрични притисак или затезање у зони малих ексцентрицитета не спадају у носаче, јер је код њих доминантан утицај аксијалних сила. [1]

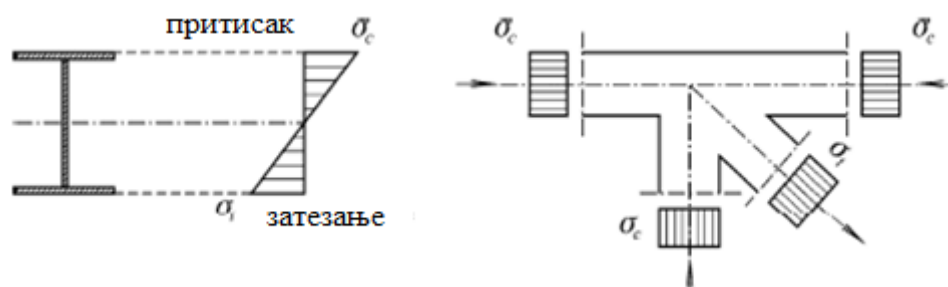
Према начину израде носачи се могу поделити на пуне и решеткасте. Код пуних носача појасеви су спојени пуним зидом - ребром, док је код решеткастих носача повезивање горњег и доњег појаса остварено штаповима испуне - вериткалама и дијагоналама. Иако имају исту функцију и супротстављају се сличном или чак истом оптерећењу, пуни и решеткасти носачи се битно разликују, како по начину напрезања, тако и по конструкцијском обликовању. Док се пријем момента савијања и код решеткастих и код пуних носача остварује на сличан начин, помоћу појасних штапова односно ламела, постоје значајне разлике у пријему трансверзалних (смичућих) сила. Код решеткастих носача пријем смичућих сила остварује се аксијалним напрезањем штапова испуне, док се код пуних носача трансверзалне силе преносе преко ребра изазивајући у њему смичуће напоне. Међутим, ипак се могу уочити сличности између трајекторија главних напона притиска и затезања у ребру носача и напрезања штапова испунерешеткастог носача (слика 10.).

Ова сличност се посебно може уочити код пуних носача са витким ребрима при граничном стању носивости на избочавање смицањем. Наиме, у фази посткритичног понашања долази до формирања затегнутог поља које је еквивалент затегнутој дијагонали решеткастог носача, па се пун носач трансформише у решеткаст, сачињен од појасних ламела (појасни штапови), затегнутих поља (дијагонале) и укрућења (вертикале).



Слика 10. Пуни и решеткасти носачи - напрезање

Решеткасти носачи се састоје од међусобно повезаних појасних штапова и штапова испуне који чине троугаону структуру. Сви елементи - штапови су аксијално напрегнути па се прорачунавају и конструишу према правилима која важе за аксијално затегнуте односно притиснуте штапове. И док је код штапова решеткастих носача дијаграм нормалних напона константан по свим штаповима, код пуних носача се, сходно *Бернулијевој* хипотези о равним пресецима, јавља линеарна промена напона по висини носача (слика 11.). Како се нормални напони услед момента савијања јављају по читавој висини пресека, па самим тим и у ребру, у њему се јавља сложено напонско стање које потиче једним делом од напона смицања, а другим од нормалних напона.



Слика 11. Пуни и решеткасти носачи - дијаграми нормалних напона

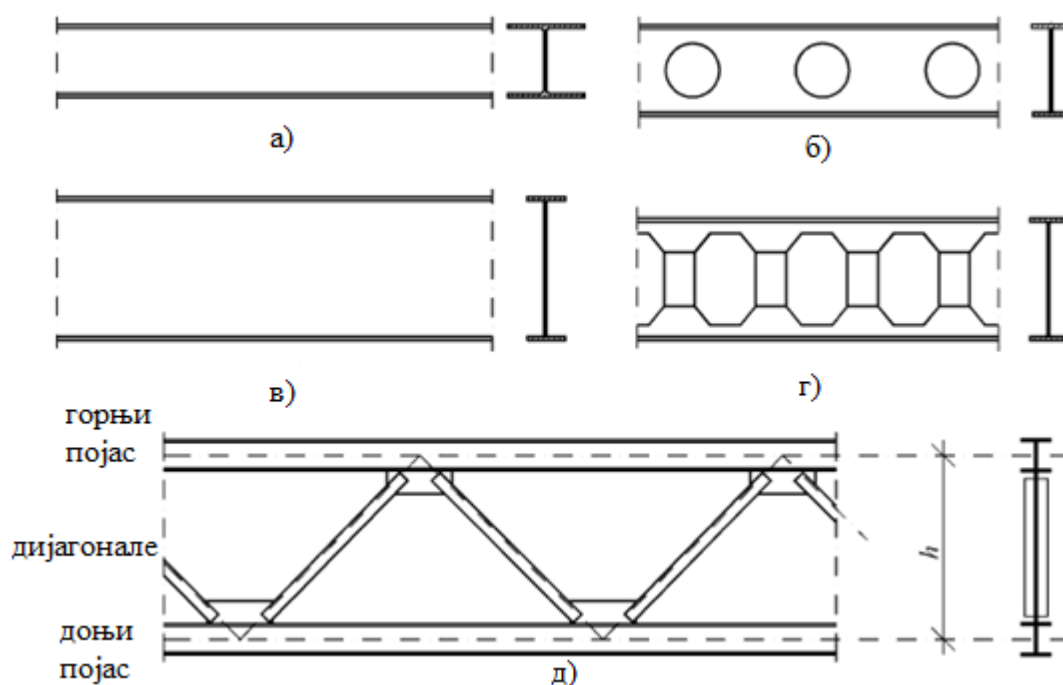
Линеарна расподела напона по висини попречног пресека пуних носача не дозвољава максимално искоришћење целокупног пресека. У еластичном подручју понашања максимални нормални напони јављају се само у крајњим влакнима. Код решеткастих носача, који су напрегнути искључиво аксијалним силама, константан распоред напона по пресецима омогућава боље искоришћење материјала, а самим тим и лакше носаче, односно мањи утрошак челика.

И пуни и решеткасти носачи имају своје предности и мане, па избор једног од ова два типа носача зависи од низа чинилаца, као што су: распон носача, интензитет оптерећења, цена рада и материјала, предвиђена корозиона заштита итд. Генерално, пуни носачи су тежи од решеткастих, али су знатно једноставнији за израду, монтажу и одржавање, па у зависности од односа цене рада и челика често могу да буду економичнији.

Једноставне, равне површине и мањи обим по јединици дужине проузрокују јефтинију антикорозиону заштиту пуних носача. Због лакше израде пуни носачи могу бити јефтинији од решеткастих и када је њихова тежина већа за 10 до 20%. Такође, пуни носачи имају извесну резерву носивости, која се креће између 10 и 15%, а последица је пластификације попречног пресека, па се може рећи да имају већи степен сигурности од решеткастих носача. Међутим, за веће распоне и већа оптерећења пуни носачи постају тешки и неекономични, па се у таквим случајевима препоручује примена решеткастих носача. У погледу распона, граница економичности између пуних и решеткастих носача

крећесе у опсегу од 20 до 30  $m$ , зависно од интензитета корисног оптерећења и статичког система. За распоне преко 30  $m$  свакако су економичнији решеткасти носачи.

Ошупљени (олакшани) и саћасти носачи (слика 12.) представљају прелаз између пуних и решеткастих носача. Настали су као последица настојања да се добију што лакши носачи, уз минималан утрошак рада. Добијају се релативно једноставним операцијама резања и заваривања од ваљаних или заварених  $I$ -профила. Лакши су од пуних носача и користе се углавном у зградарству за носаче средњих распона (10-15  $m$ ). При прорачуну саћастих носача не могу се правити просте аналогије са прорачуном пуних носача, већ се они морају рачунати као "Вирендел" - оквирни носачи, уз узимање у обзир свих специфичности које се код њих јављају.

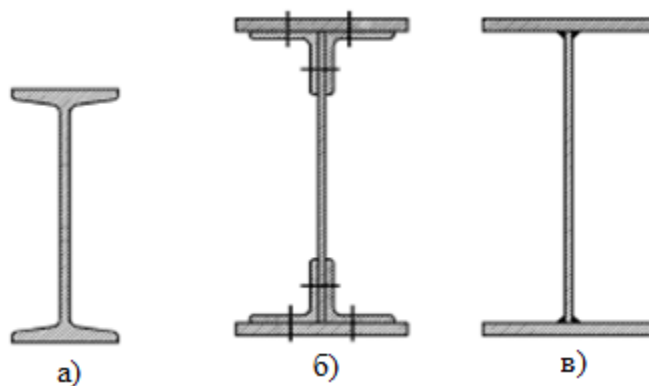


**Слика 12.** Еволуција облика носача у тежњи за смањењем њихове тежине: а) пун носач - ваљани  $I$ -профил; б) пун лимени носач; в) олакшани  $I$ -профил; г) саћасти носач; д) решеткасти носач

### 1.3.1 Пуни носачи

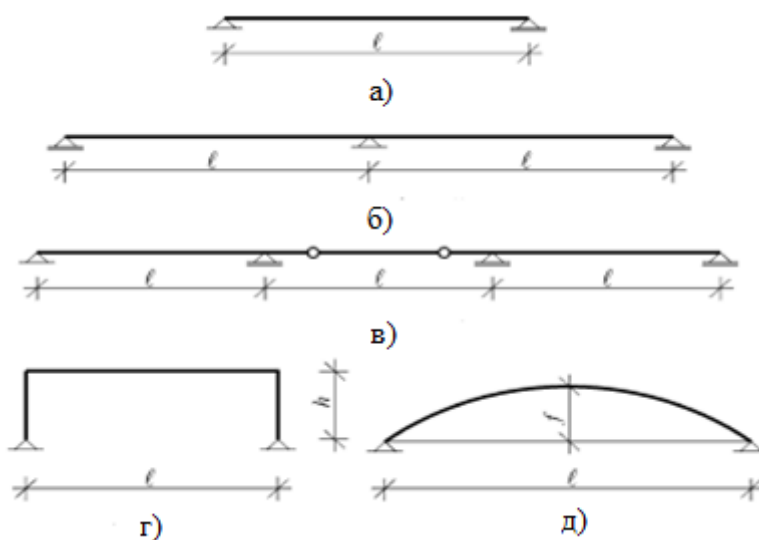
Као пуни носачи углавном се користе стандардни ваљани профили (слика 13.а) и профили образовани спајањем равних челичних лимова помоћу прикључних угаоника и закивака (слика 13.б) или директним заваривањем (слика 13.в). У зависности од начина на који се спајају лимови и остварује њихов заједнички рад, носачи се деле на заковане носаче и носаче у завареној изради. Заједнички назив за ова два типа носача је: пуни лимени носачи.

Пре него што је заваривање узело маха као веома рационалан и ефикасан технолошки начин спајања челичних елемената, пуни лимени носачи извођени су искључиво у закованој изради. На овај начин изведен је велики број објеката, нарочито у области мостоградње. Данас се пуни лимени носачи изводе искључиво у завареној изради, али је због санација и реконструкција многобројних постојећих објеката, углавном мостова, неопходно познавање основних правила за прорачун и конструисање пуних лимених носача у закованој изради. [1]



**Слика 13.** Различити облици попречних пресека пуних носача: а) ваљани I-профил; б) пуни лимени носач у закованој изради; в) пуни лимени носач у завареној изради

Што се тиче статичког система најчешће се примењују гредни носачи (просте греде, континуални носачи и ређе Герберови носачи), мада се, такође, неретко примењују и оквирни и лучни носачи. На слици 14., приказани су карактеристични статички системи пуних носача.

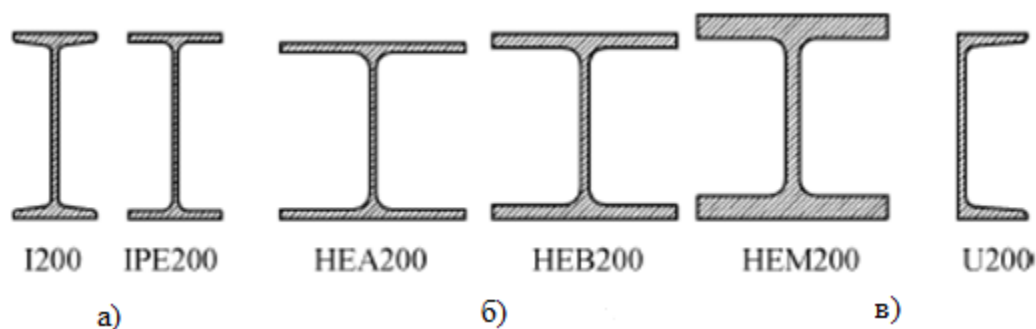


**Слика 14.** Статички системи пуних носача:

а) Проста греда; б) Континуални носач; в) Герберов носач; г) Оквирни носач; д) Лучни носач

### 1.3.2 Пуни носачи израђени од ваљаних профила

Пуни носачи израђени од ваљаних профила имају велику примену у зградарству где су распони релативно мали, а оптерећења мирна и умереног интензитета. Предност ваљаних у односу на пуне лимене носаче огледа се, пре свега, у минимализацији радионичких захвата, па самим тим и трошкова. Међутим, ваљани профили имају већу тежину од еквивалентних лимених носача, чије се димензије могу ускладити уз оптимално искоришћење напона. Њихова већа јединична тежина је последица недовољно усавршене технологије ваљања. Наиме, технологија производње, то јест ваљања, условљава минималне дебљине ребра ваљних профила, које би са становишта економичности, односно оптималног искоришћења пресека, требало да буду значајно мање. На тај начин, смањењем дебљине ребра смањује се и тежина носача уз незнатно смањење његове носивости, јер, као што је познато, дебљина ребра веома мало утиче на вредност отпорног момента и момента инерције попречног пресека, па самим тим и на његову носивост и крутост. Овај недостатак на неки начин се компензује мањом јединичном ценом ваљаних профила. Од широке палете ваљаних профила најчешће се као носачи користе *I*-профили са уским (слика 15.а) или широким ножицама (слика 15.б) и ређе *U*-профили (слика 15.в).



**Слика 15.** Различити типови ваљаних профила који се користе као носачи: а) *I*-профили са уским ножицама (*I* и *IPE*); б) *I*-профили са широким ножицама (*HEA*, *HEB* и *HEM*); в) *U*-профили

Употреба ваљаних *I*-профила са уским ножицама је рационална када је носач изложен само савијању око јаче осе инерције или ако је савијање око слабије осе инерције веома мало. Предност оваквих носача у односу на остале ваљане профиле је у мањој тежини, а недостатак је велика конструктивна висина и релативно мала отпорност на савијање око слабије осе инерције, па самим тим и на бочно-торзионо извијање. Нормалан ваљани *I*-профил, који је све до педесетих година овог века имао огромну примену, потиснут је од стране *IPE*-профила.

Предности *IPE* - профила, на основу којих је готово у потпуности заменио класични *I*-профил, су следеће:

- паралелне стране ножица не захтевају косе подложне плочице, а подвезице се могу поставити са обе стране,
- однос отпорног момента и површине ( $W_y/A$ ) који одсликава рационалност попречног пресека, већи је него код класичног *I*-профила,
- ножице су шире, па је повећана носивост око слабије осе, а с тим и стабилност на бочно торзионо извијање,
- дебљина ребра је мања него код класичног *I*-профила.

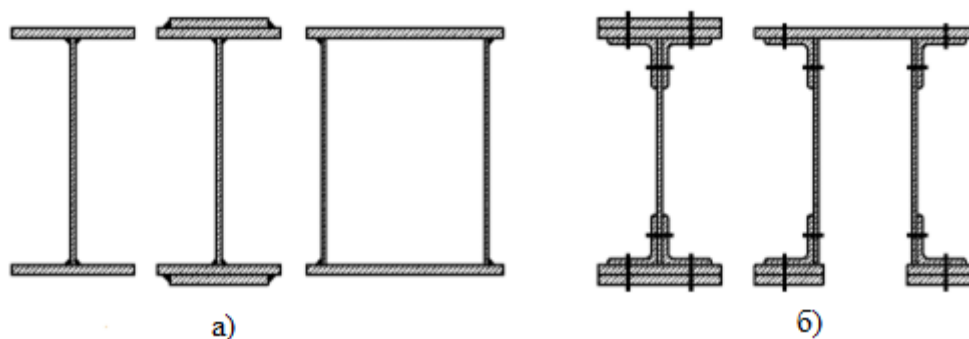
Примена ваљаних профила са широким ножицама (*HEA*, *HEB* и *HEM*) препоручује се када је носач изложен косом савијању, затим, када носач није бочно придржан и када је ограничена грађевинска висина. Пожељно је користити *HEA* и *HEB* профиле, док *HEM*-профиле треба избегавати због њихове велике тежине. У поређењу са *I* -профилима са уским ножицама овипрофили захтевају мању конструктивну висину, али су знатно тежи. Опредељење за један од поменутих типова *I* -профила зависи од тога који од наведених услова је строжији, односно које решење је економичније. Наиме, применом профила са широким ножицама повећава се тежина, а самим тим и цена челичне конструкције, али се смањује грађевинска висина, па се код вишеспратних зграда могу остварити знатне уштеде на фасади. Осим тога ваљани *I* -профили са широким ножицама имају већу носивост од профила са уским ножицама, па се примењују и у случајевима када распон и оптерећење носача диктирају носивост већу од оне које поседују *I* или *IPE* -профили.

### 1.3.3 Пуни лимени носачи

Као што је већ поменуто, пуни лимени носачи се користе када су распони и оптерећења толико велики да је исцрпљена носивост ојачаних ваљаних профила, али и у свим другим случајевима када њихова примена има економску оправданост. Они имају низ предности у односу на ваљане профиле, а то су пре свега:

- мања тежина,
- слобода у избору облика и димензија попречног пресека,
- савлађивање великих распона и оптерећења,
- могућност израде носача променљиве висине,
- могућност покривања дијаграма момента,
- могућност оптимизације попречног пресека итд.

Пуни лимени носачи имају нешто већу јединичну цену од ваљаних, што је последица већег обима радова неопходних за њихову израду. Наиме, повезивање челичних лимова у целину и формирање јединственог попречног пресека захтева додатне радионичке операције (сечење и заваривање или закивање), па самим тим и трошкове. Међутим, имајући у виду горе наведене предности, а посебно мањи утрошак челика, пуни лимени носачи у великом броју случајева представљају најекономичније решење, па стога и имају веома велику примену у зградарству, а нарочито у мостоградњи. Облици попречних пресека пуних лимених носача који се најчешће примењују приказани су на слици 16. Пуни лимени носачи углавном имају једно (једнозидни носачи) или два ребра (двозидни носачи).



**Слика 16.** Попречни пресеци пуних лимених носача: а) у завареној изради; б) у закованој изради

Код заварених носача појасне ламеле се директно заварују за ребро, док се код закованих њихова веза остварује помоћу појасних угаоника и закивака. Појасни угаоници осим што омогућавају повезивање међусобно управних лимова, учествују и у раду попречног пресека, па се при прорачуну узимају у обзир при одређивању геометријских карактеристика сложеног пресека. Пуни лимени носачи у завареној изради имају низ предности у односу на заковане, а најважније су:

- мања тежина,
- бржа и једноставнија израда,
- мања јединична цена,
- једноставније настављање и бржа монтажа,
- лакше одржавање,
- јефтинија антикорозиона заштита.

Због свих ових предности пуни лимени носачи у завареној изради у потпуности су потиснули заковане носаче, па се данас пуни лимени носачи изводе скоро искључиво у завареној изради.

## 1.4 Појам ометене торзије носача

У еластомеханици, торзија је увијање објекта услед примене момента силе. У секцијама које су нормалне на осу момента силе, резултујући тангенцијални напон је нормалан на радијус.

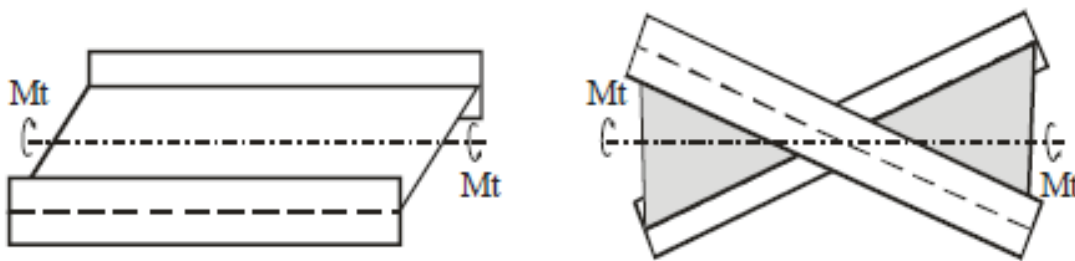
За вратила униформног попречног пресека торзија је:

$$T = \frac{J_T}{r} \tau = \frac{J_T}{l} G \theta \quad (1.2)$$

где је:

- $\tau$  - максимални тангенцијални напон на спољашњој површини,
- $J_T$  - торзиона константа секције,
- $r$  - растојање између ротационе осе и најдаље тачке секције (на спољашњој површини),
- $\ell$  - дужина објекта на који се торзија примењује,
- $\theta$  - угао увијања,
- $G$  - модул смицања,
- Производ  $J_T G$  је торзиона крутост.

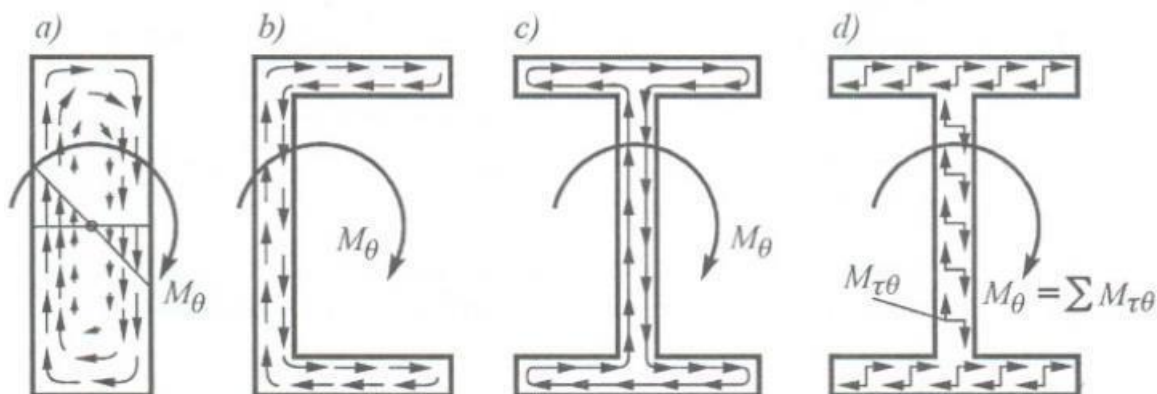
Код штапа који је изложен увијању или торзији делује само момент увијања, док остале унутрашње силе - аксијална сила, трансверзална и момент савијања не постоје. Узрочници напрезања су спољашњи обртни momenti који делују на штап у равнима управним на његову осу. Да би се одредио унутрашњи момент увијања користи се метода пресека. Штап се пресеца замишљеном равни  $R$ . Сваки од делова треба да буде у равнотежи. То је могуће ако је унутрашњи момент у уоченом пресеку једнак обртном моменту супротног смера. Моменти се разликују само по смеру сагласно закону акције и реакције. Момент увијања, унутрашњи момент, сматра се позитивним ако обрће у смеру казаљке на часовнику посматран из врха нормале на раван момента. [4]



Слика 17. Слободна торзија

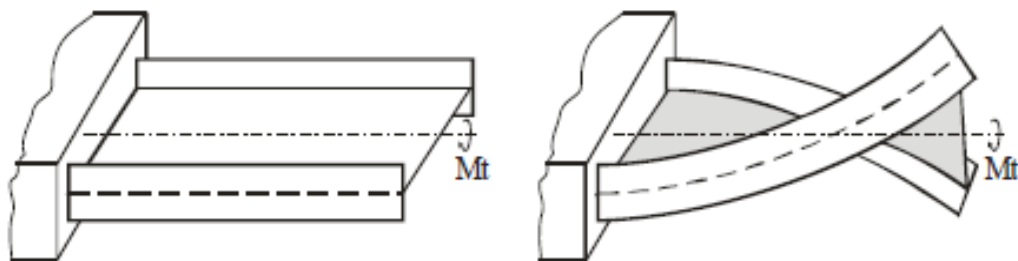
Према теорији *Сен-Венана* сви обрасци се односе на место далеко (довољно далеко) од зоне поремећаја – места дејства оптерећења, ослонца и слично. Код танкозидног штапа важе обрасци дуж целог штапа. Увијање је слободно, па стопе профила остају праве. Код слободног увијања неког танкозидног штапа отвореног профила, долази само до “упредања” елемената пресека, чија влакна не мењају своју дужину. На *слици 17*. приказано је слободно увијање *I* профила код кога се појасеви међусобно заокрећу за неки угао око осе увијања, али остају прави. При томе се и ивице појасева профила међусобно заокрећу, тако да претходно раван попречни пресек штапа престаје то да буде, односно долази до његовог витоперења које се назива депланација. [5]

Због тога што је депланација слободна (неометана), расподела тангенцијалних напона у свим попречним пресецима дуж штапа је једнака, а њихов ток по танкозидној контури се поклапа са мембранском аналогијом (*Слика 18*). Пошто се дужина влакана између попречних пресека дуж штапа не мења, не долази до појаве нормалних напона. Ово су карактеристике слободног или чистог увијања.



**Слика 18.** Расподела тангенцијалних напона

Ограничена торзија представља случај када је један крај штапа укљештен. (назива се још спречена или ометена торзија). Осим увијања елементи штапа изложени су и савијању. Карактеристични примери код којих се јавља ограничено увијање (увијање са савијањем), приказани су на *слици 19* и *слици 20*.

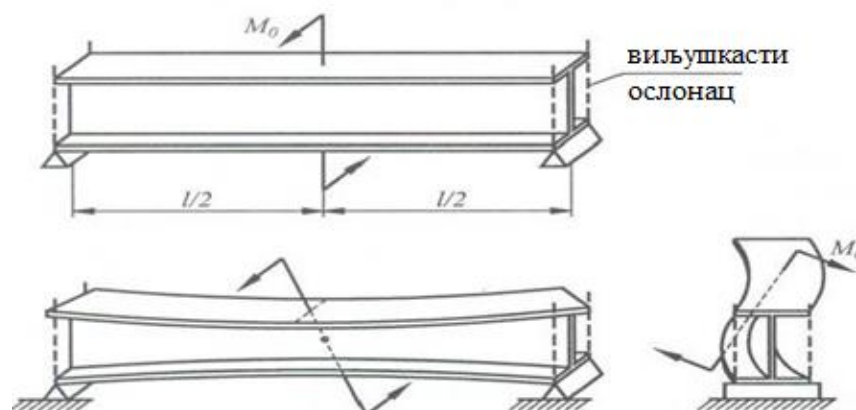


**Слика 19.** Ометена торзија

У случају конзоле оптерећене на слободном крају спрегом  $M_0$ , због немогућности депланације на месту укљештења, долази при увијању и до савијања појасева профила. Влакна у овом случају мењају своју дужину, јер постоје зоне затезања и зоне притиска на појасевима профила, па долази до појаве нормалних напона услед ограниченог увијања.

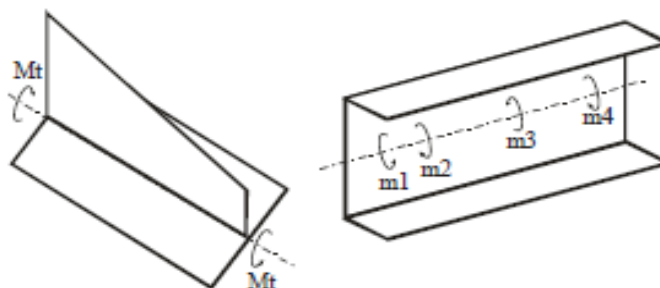
Пошто се савијање мења дуж распона, постоји промена нормалних напона услед ограниченог увијања коју уравнотежавају одговарајући тангенцијални напони. Ово је потпуна аналогија везе између нормалних и тангенцијалних напона при класичном савијању носача силама (Теорема Журавског).

Ограничено увијање се јавља и у случају када је момент увијања (један или више) унешен између тзв “виљушкатастих” ослонаца штапа. Ослонци штапа “виљушкастог” типа су конструктивно тако изведени да онемогућавају окретање крајева слободно ослоњеног штапа око подужне осе  $z$ , али не спречавају депланације крајњих пресека.



**Слика 20.** Ограничено увијање код виљушкатастих ослонаца штапа

Дакле, ограничено увијање се јавља у свим случајевима када је депланација дуж штапа неједнака. На слици 21. услед дејства неколико момената долази до различитих углова увијања сегмената између момената, тако да је депланација дуж штапа променљива. Исто тако, променом крутости штапа услед подужне промене геометрије попречног пресека, долази до различите депланације дуж штапа.



**Слика 21.** Ограничена торзија код променљивог и профила константног попречног пресека

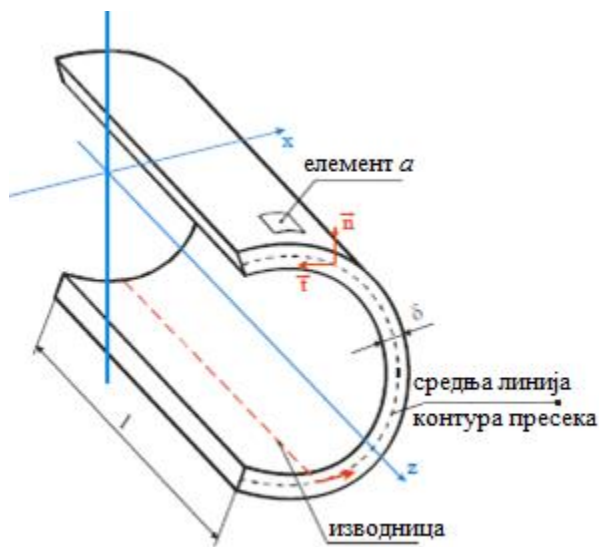
Торзиони момент се мења дуж осе штапа. Углови увијања различитих пресека су различити. Како су померања попречног пресека пропорционална углу увијања то значи да померања појединих пресека дуж осе штапа нису иста. Због тога настају нормални напони.

#### 1.4.1 Основне претпоставке ометене торзије

Посматра се штап отвореног профила, произвољног пресека. Штап се посматра у координатном систему  $x, y, z$  (слика 22.).

У било којој тачки контуре могу да се повуку тангента  $\vec{t}$  и нормала  $\vec{n}$  на контуру. Уочи се карактеристична изводница, дефинише се  $s$  као променљива по средњој линији, док је  $l$  дужина штапа.

Прва претпоставка је да је попречни пресек недеформабилан, док је друга претпоставка да се клизање у средњој површини занемарује. Средња површ настаје кретањем контуре дуж осе  $z$ . Уколико би пресек мењао облик ова теорија не би важила, то онда спаде у теорију љуски. Да се попречни пресек не мења, обезбеђује се разним попречним укрућењима - дијафрагмама, које се користе у авионској индустрији код авионских крила. Друга претпоставка важи само за случај слободне торзије. [5]



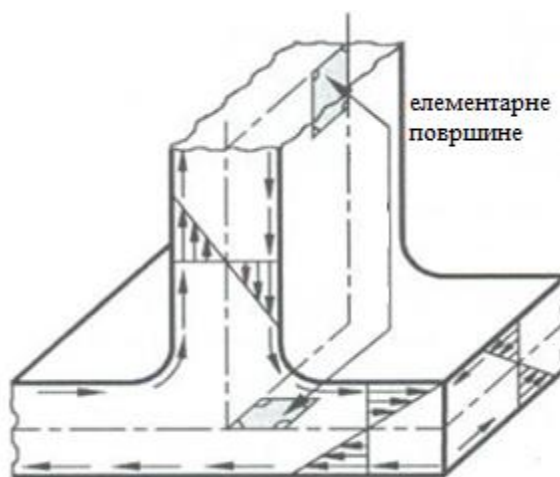
Слика 22. Штап отвореног профила, произвољног пресека

### 1.4.2 Напонска стања и утицаји код ометене торзије

Општа проблематика ограниченог увијања штапова са отвореним танкозидним профилима решена је у радовима проф. В. З. Власова, који је за основе математичког описивања ове појаве поставио две хипотезе.

1. Клизање у равни средње линије контуре попречног пресека при ограниченом увијању једнако је нули.
2. Пројекција контуре на раван попречног пресека остаје иста пре и после деформације.

Прва хипотеза заснива се на чињеници да је услед слободног увијања и појаве циркулације тангенцијалних напона, напон на средњој линији једнак нули. То значи да нема промене правог угла код посматране елементарне површнице на средњој линији контуре (слика 23.).



Слика 23. Приказ елементарне површине

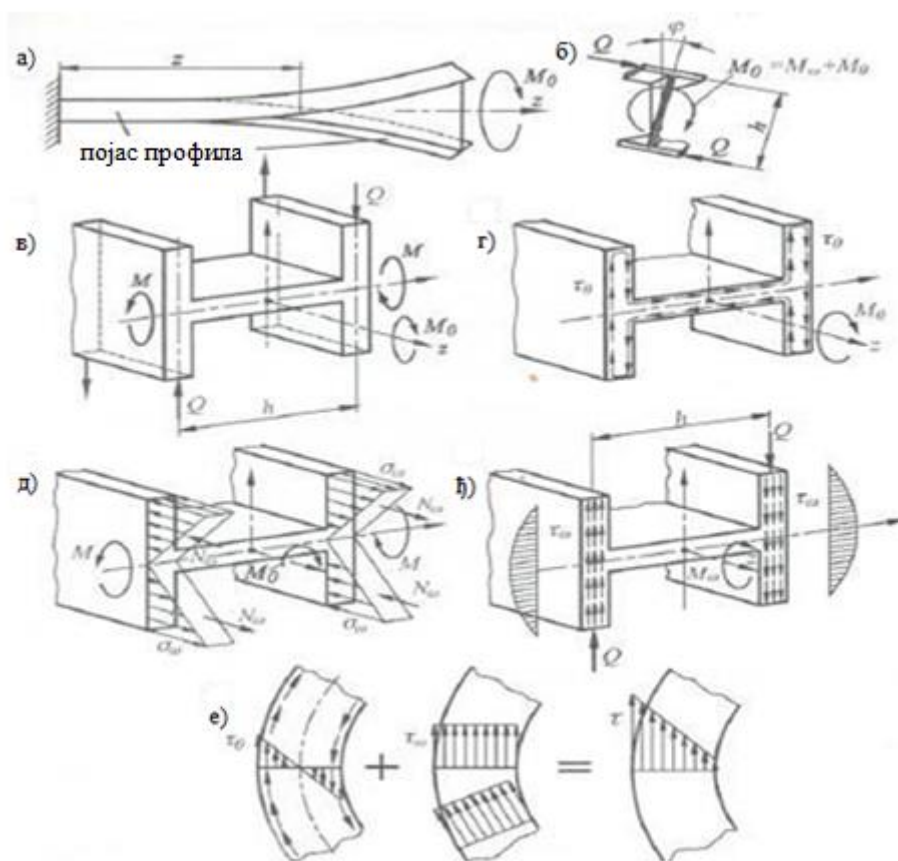
Ред величине допунских тангенцијалних напона је мали, тако да се њихова клизања могу занемарити.

Друга хипотеза представља замену за хипотезу равних пресека код класичног савијања и претпоставља одржање облика контуре без обзира на депланацију, која одговара само подужном померању тачака контуре. Неизменљивост форме контуре практично се може постићи уградњом попречних укрућења на одговарајућим растојањима дуж штапа.

Да би се сагледала деформација штапа и утицаји који је изазивају при ограниченом увијању, посматра се конзола од  $I$  профила оптерећена моментом увијања  $M_0$  на слободном крају (Слика 24.). Услед дејства момента увијања  $M_0$ , због укљештења конзоле, долази до савијања појасева профила у међусобно супротне стране (Слика 24.а).

Утицаји који савијају појасеве профила су неки моменти  $M$ , који делују у равни појасева профила, једнаког су интензитета али међусобно супротног смера и чији се интензитет мења дуж осе  $z$ . Аналогно класичном савијању силама, у посматраном попречном пресеку профила постоје и одговарајуће трансверзалне силе  $Q$  које делују у појасевима профила у смеру њиховог савијања (Слика 24.б).

Дакле, да би се описали утицаји облика деформације, пошто се јавља увијање са савијањем тј. ограничено увијање, уведени су утицаји  $M$  и  $Q$ . Под дејством  $M_0$ ,  $M$  и  $Q$  у неком издвојеном елементарном делићу носача (Слика 24.в), јавиће се три врсте напона приказане на Сл. 24.в,г,д.



Слика 24. Конзола од I профила оптерећена моментом увијања  $M_0$  на слободном крају

На сл. 24.г приказан је тангенцијални напон  $\tau_\theta$  који потиче од дела задатог спољњег момента увијања  $M_0$ , односно  $M_\theta$ . Момент  $M_\theta$  назива се моментом слободног (чистог) увијања. Сума малих спрегова при циркулацији овог напона око контуре пресека даје момент:

$$\sum M_{\tau\theta} = M_\theta = G\theta I_z \quad (1.3)$$

Из претходног израза следи одговарајући напон слободног увијања, који гласи:

$$\tau_{\theta} = \frac{M_{\theta}}{I_t} \cdot \delta \quad (1.4)$$

где су:  $I_t$  - мембрански увојни момент инерције контуре,

$\delta$  - дебљина контуре у посматраном влакну,

$M_{\theta}$  - момент слободног увијања, који је део укупног спољног момента увијања  $M_0$ , чија је величина за сада још неодређена.

Тангенцијални напон услед ограниченог увијања је напон који се јавља у појасевима профила под дејством трансверзалне силе  $Q$  (Слика 24.в,ђ) односно од момента ограниченог увијања. Момент представља преостали део од спољнег момента  $M_0$ . Аналогно теореме Журавског, која даје везу између нормалних и тангенцијалних напона при савијању силама, напон је повезан са појавом промене нормалног напона ограниченог увијања дуж носача.

Нормални напони ограниченог увијања (Слика 24.д) јављају се услед савијања појасева профила. С обзиром да услед савијања појасева профила постоје зоне затегнутих и притиснутих влакана, нормалне силе еквивалентне напонима (због својих различитих смерова), образују спрегове  $M$  у сваком појасу. Како су смерови момената  $M$  међусобно супротни, систем је статички самоуравнотежен, јер се у једначинама статичке равнотеже они међусобно поништавају. [5]

Услед савијања појасева профила долази до депланације контуре у пресеку и појаве различитог напрезања влакана, тако да на местима промене напрезања постоје и влакна која не мењају своју дужину и у којима је напон 0. Ове тачке зову се нулте тачке контуре.

Три врсте напона  $\tau_{\theta}, \sigma_{\omega}, \tau_{\omega}$  еквивалентни су дејству спољашњег момента увијања  $M_0$ , тако да услови равнотеже гласе:

$$\sum X = 0, \quad (1.5)$$

$$\sum Y = 0, \quad (1.6)$$

$$\sum Z = \int_A \sigma_{\omega} dA = 0, \quad (1.7)$$

$$\sum M_x = \int_A \sigma_{\omega} \cdot y dA = 0, \quad (1.8)$$

$$\sum M_y = \int_A \sigma_{\omega} \cdot x dA = 0, \quad (1.9)$$

$$\sum M_z = M_0 - M_{\theta} - M_{\omega} = 0, \quad (1.10)$$

$$\text{односно,} \quad M_0 = M_{\theta} + M_{\omega} \quad (1.11)$$

Напони у посматраном пресеку редукују се на величину и смер спољашњег активног оптерећења, због тога што је смер деформација у смеру оптерећења. Услов равнотеже одржава блиски пресек од посматраног у задржаном делу штапа, који се супроставља дејству оптерећења.

Претходни услови показују да нормални напон у потпуности учествује у формирању самоуравнотеженог система унутрашњих сила. Као што се види, систем нормалних унутрашњих сила услед  $M$ , може се редуковати на два спрега супротног смера  $M$ , који дејствују у појасевима профила. Ова два момента леже у међусобно паралелним равнима чије је растојање  $h$ , а пошто су супротног смера они један другог сами статички уравнотежавају, тако да немају директну везу са спољашњим моментима услед оптерећења. С обзиром на ову своју особину, величина овог унутрашњег статички самоуравнотеженог система не може се одредити директном методом пресека, као што се то чини код одређивања класичних момената савијања.

## 1.5 Анализа машинских конструкција

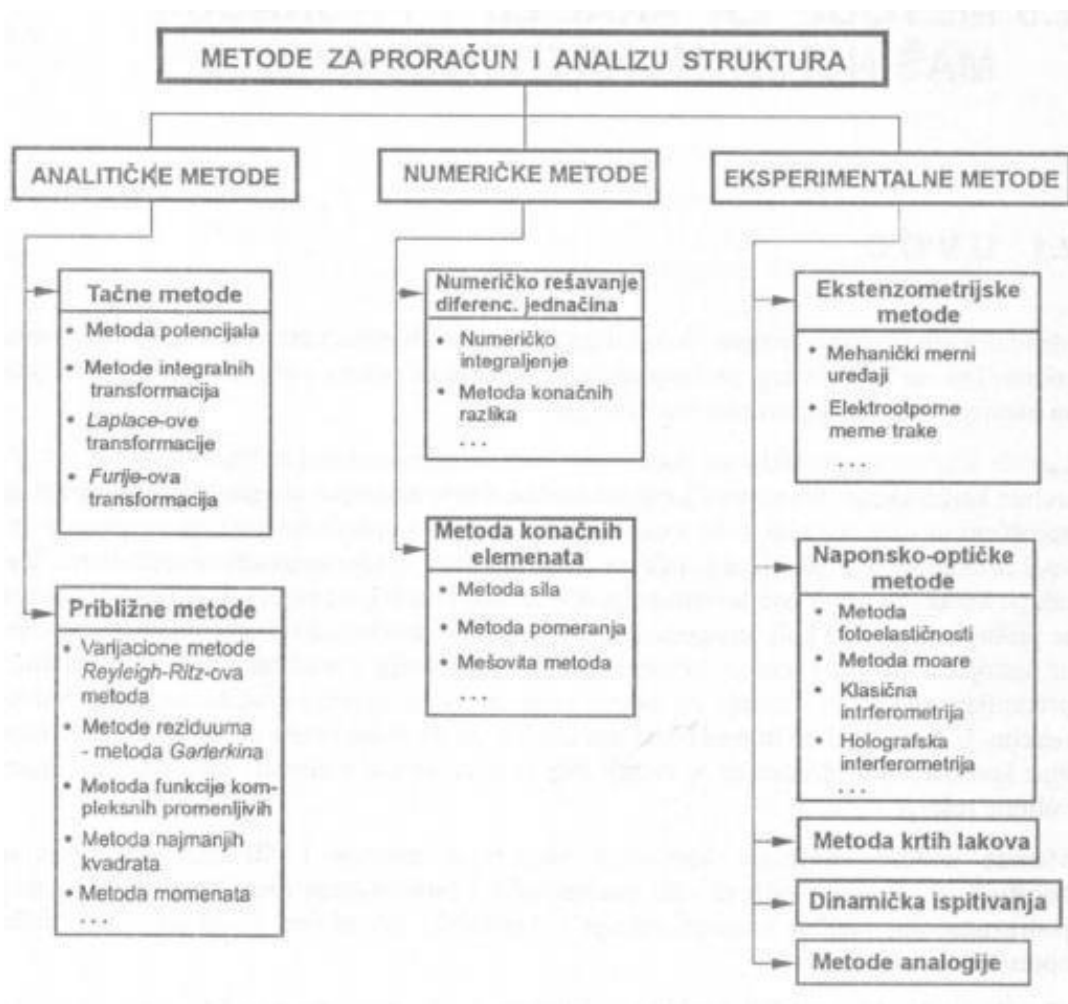
Анализом машинских конструкција се усавршава сама конструкција “корак по корак” док се не постигну жељени циљеви. Прикупљају се подаци који омогућавају корекцију конструктивних решења, односно еволуцију постојећих и усавршавање новоразвијених конструкција. Такође, прикупљају се подаци и знања на којима ће се заснивати развој будућих машинских конструкција. У раној фази се може развити више конструктивних варијанти и од њих изабрати најповољније решење.

У анализи конструкција матричне методе имају веома широку примену, нарочито при увођењу у прорачун сложених спољашњих оптерећења и историје претходног оптерећења конструкција, одређивању крутости итд... Основне зависности између геометријских и физичких величина у механици континуума свде се углавном на успостављање веза између стања напона и стања деформација и спољашњег оптерећења.



Слика 25. Фазе извођења анализе конструкција [9]

Аналитичке методе се заснивају на законима Теорије еластичности и Отпорности материјала. Код чврстих еластичних тела изучавају се везе између спољашњег оптерећења, унутрашњих сила и деформација. Аналитичким методама се добијају једнозначна решења. Применом аналитичких метода може се решити веома мали број граничних задатака (машински елементи једноставног геометријског облика). При решавању је готово увек неопходно усвојити одређени број претпоставки у погледу описивања стварних граничних и почетних услова. Тела произвољног облика нису ни до данас потпуно изучена, поред осталог и због компликованости математичког апарата. Аналитичке методе могу бити тачне и приближне. На *слици 26.* су приказане методе за анализу и прорачун машинских конструкција.



**Слика 26.** Методе за анализу и прорачун машинских конструкција

Диференцијалне једначине које описују стање напона и стање деформација тела сложених геометрија, структура или контурних услова решавају се приближним нумеричким методама. Добијена решења су приближна, али могу бити увек довољно блиска тачном решењу онолико колико се у датом проблему жели. [5]

Први приступ нумеричких метода је нумеричко интеграње, тј. Метода коначних разлика где се дискретизација врши тек у математичком моделу. Други приступ представља Метода коначних елемената – МКЕ, где се дискретизација врши у физичком моделу. Код ове методе крајњи резултат се добија решавањем система алгебарских једначина. Континуум се дискретизује одређеним бројем међусобно повезаних коначних елемената са коначним бројем степени слободе кретања. Тачност решења зависи од изабраних интерполационих функција, мреже и типа коначних елемената. МКЕ подразумева обавезну примену рачунара због обимности рачунања. Помоћу ове методе се могу решавати и најсложенији проблем (скоро потпуно реални гранични услови, сложени геометријски облици, спољашња оптерећења итд...). Постоје три вида МКЕ:

- Метода померања (метода деформација) – непозната померања – деформације,
- Метода сила – непознате силе,
- Мешовита метода.

Експерименталним методама се долази до изузетно поузданих података о стању напона, деформација и померања као параметара који су неопходни при анализи машинских конструкција. Ове методе су поготово значајне када се због сложености проблема јављају тешкоће при теоријском па и нумеричком решавању истог. Резултати експерименталних истраживања су важни и за верификацију резултата добијених другим методама. Методе експерименталне анализе могу се примењивати на оригиналним конструкцијама или на њиховим моделима у лабораторијским условима и деле се на:

- Екстензиометријске методе,
- Напонско - оптичке методе и
- Посебне методе.

## 1.6 Секторске карактеристике попречног пресека

Основне секторске карактеристике попречног пресека су:

- секторска координата

$$\omega = \int_0^s \omega \cdot dA, \quad (1.12)$$

- секторски статички момент површине

$$S_\omega = \int_A \omega \cdot dA (= \delta \int_s \omega \cdot ds), \quad (1.13)$$

- секторски центрифугални моменти

$$I_{x\omega} = \int_A x \cdot \omega \cdot dA (= \delta \int_s x \cdot \omega \cdot ds), \quad (1.14)$$

$$I_{y\omega} = \int_A y \cdot \omega \cdot dA (= \delta \int_s y \cdot \omega \cdot ds), \quad (1.15)$$

- секторски центрифугални момент инерције

$$I_\omega = \int_A \omega^2 \cdot dA (= \delta \int_s \omega^2 \cdot ds). \quad (1.16)$$

У претходним изразима коришћене су следеће ознаке:

$\omega$  - секторска координата,

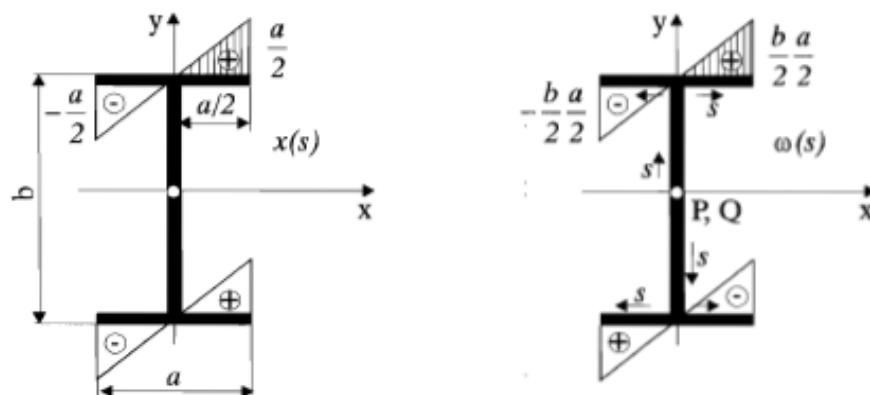
$h_p$  - растојање од пола (за који се рачуна  $\omega$ ) и

$A$  - површина попречног пресека ( $dA$  - елемент површине).

У случају константне дебљине попречног пресека, интеграл у изразима (1.13) до (1.16) се замењује изразима у заградама.

За прорачун секторских карактеристика попречног пресека користе се графички методи - премножавање дијаграма. На пример се добија премножавањем дијаграма промене координате  $x$  у попречном пресеку и дијаграма промене секторске координате дуж попречног пресека. [6]

На слици 27. је илустровано премножавање дијаграма за израчунавање секторског центрифугалног момента за  $I$ -профил.



Слика 27. Дијаграми координате  $x(s)$  и секторске координате  $\omega(s)$  за  $I$  профил

За ова премножавања користи се табела 2. За конкретно приказан пример користио би се случај - троугао  $\times$  троугао и резултат би био:

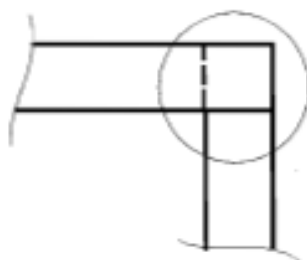
$$A_{ab} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \text{ са дијаграма } x(s), \quad (1.17)$$

$$\eta_b = \frac{a}{2}; \overline{\eta_b} = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \quad (1.18)$$

$$I_{ab} = \frac{A_{ab}}{3} \cdot \eta_b \cdot \overline{\eta_b} = \frac{1}{192} \cdot a^4 \cdot b. \quad (1.19)$$

$$I_{x\omega} = 2 \cdot \frac{a^4 \cdot b}{192} - 2 \cdot \frac{a^4 \cdot b}{192} = 0. \quad (1.20)$$

У табели 1. су дате вредности поправног коефицијента  $h$  који узима у обзир немогућности исправљања углова у правоугаоник (Слика 28.).

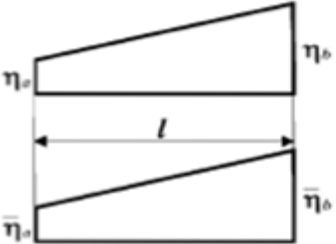
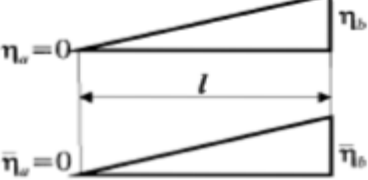
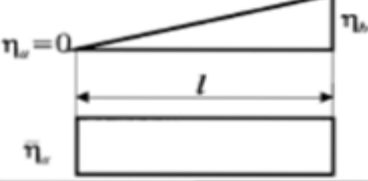
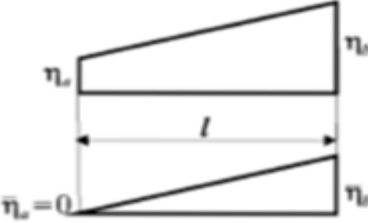


Слика 28. “Исправљање угла” у правоугаоник

Табела 1.: Вредности поправних коефицијената

| ПРОФИЛ                                                                                | $\eta$ | ПРОФИЛ                                                                                       | $\eta$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
|      | 0,99   |  Р (ПАЛНЕР) | 1,29   |
|  (U) | 1,12   |             | 1,16   |
|      | 1,15   |  (КРСТ)     | 1,17   |
|      | 1,31   |                                                                                              |        |

Табела 2.: Обрасци за премножавање дијаграма

| Скица                                                                               | Обрасци за премножавање дијаграма                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   | <p>траpez x траpez</p> $I_{ab} = \frac{A_{ab}}{6} [\bar{\eta}_a (2\eta_a + \eta_b) + \bar{\eta}_b (\eta_a + 2\eta_b)]$ |
|  | <p>троугао x троугао</p> $I_{ab} = \frac{A_{ab}}{3} \eta_b \bar{\eta}_b$                                               |
|  | <p>троугао x правоугаоник</p> $I_{ab} = \frac{A_{ab}}{2} \eta_b \bar{\eta}_a$                                          |
|  | <p>траpez x правоугаоник</p> $I_{ab} = \frac{A_{ab}}{2} (\eta_a + \eta_b) \bar{\eta}_a$                                |
|  | <p>траpez x троугао</p> $I_{ab} = \frac{A_{ab}}{6} (\eta_a + 2\eta_b) \bar{\eta}_b$                                    |

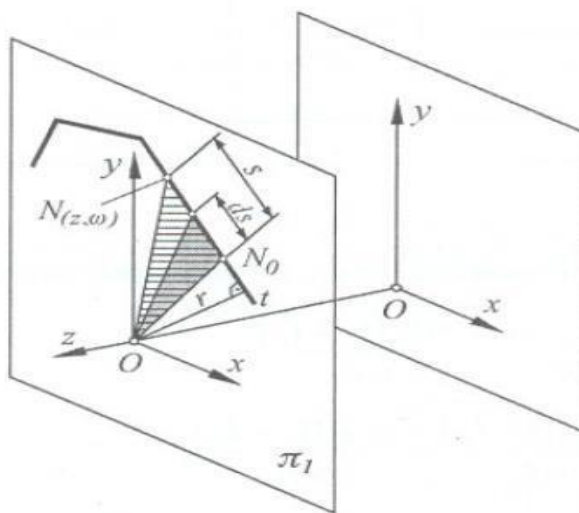
### 1.6.1 Секторска координата

Уобичајено је да се положај неке тачке у простору одређује помоћу Декартових правоуглих координата. Међутим, описивање геометријских стања може да буде прикладније коришћењем других специфичних координатних система, којим се то стање најједноставније описује. Као што је промена нормалних напона услед класичног савијања неког носача, дуж контуре попречног пресека, директно пропорционална Декартовој координати положаја сваке тачке контуре у односу на тежиште пресека, тако је код увијања танких профила, услед појаве депланације, карактер ове геометријске промене по контури попречног пресека адекватно описан са секторском координатом.

Величина секторске координате дефинисана је изразом:

$$\omega = \int_0^s r ds \quad (1.21)$$

Нумеричка вредност секторске координате једнака је двострукој шрафираној површини сектора од неке почетне тачке  $N_0$  (од које се почиње мерење текуће координате контуре “ $s$ ”), до посматране тачке  $N$  (Слика 29.).



Слика 29. Шрафирана површина сектора од  $N_0$  до  $N$

$r$  – је нормално растојање од тангенте контуре “ $t$ ” у тачки контуре сагласно координати “ $s$ ”, до пола  $O$ .

Позитиван смер координате обиласка контуре “ $s$ ” је кретање супротно кретању казаљки на часовнику око пола  $O$ .

### 1.6.2 Главна секторска координата. Центар увијања

Уколико је позната промена нормалних напона  $\sigma_\omega$  по контури, могу се интегралити изрази проистекли из услова равнотеже. При томе, добијају се следећи изрази и услови:

$$1. \text{ Из } \sum Z \Rightarrow \int_A \sigma_\omega dA = \frac{B}{I_\omega} \int_A \omega dA = 0, \quad (1.22)$$

$$\text{добија се услов: } S_\omega = \int_A \omega dA = 0. \quad (1.23)$$

$$2. \text{ Из } \sum M_x \Rightarrow \int_A \sigma_\omega y dA = \frac{B}{I_\omega} \int_A \omega y dA = 0, \quad (1.24)$$

$$\text{добија се услов: } I_{\omega y} = \int_A \omega y dA = 0. \quad (1.25)$$

$$3. \text{ Из } \sum M_y \Rightarrow \int_A \sigma_\omega x dA = \frac{B}{I_\omega} \int_A \omega x dA = 0, \quad (1.26)$$

$$\text{добија се услов: } I_{\omega x} = \int_A \omega x dA = 0. \quad (1.27)$$

Испуњавањем услова:  $S_\omega = 0, I_{\omega y} = 0, I_{\omega x} = 0$ , напон  $\sigma_\omega$  редукује се на систем унутрашњих нормланих сила  $N_\omega$  који се самоуравнотежава у сваком пресеку носача.

Исти услови одређују да секторска координата мора да буде главна секторска карактеристика. При њеном формирању услови (1.25) и (1.27) одређују да јој је пол у центру увијања, а услов (1.23) одређује положај главне нулте тачке обиласка контуре.

Према томе, изрази  $I_{\omega y} = 0$  и  $I_{\omega x} = 0$ , користе се за одређивање положаја центра увијања. Као што је већ указано при добијању израза за  $\sigma_\omega$ , центар увијања представља пол (тачку) у равни пресека око које се пресек при увијању окреће за угао  $\varphi$ . Геометријско место полова у простору је оса увијања, која и при ограниченом увијању остаје права линија. [5]

Упоредјујући изразе (1.25) и (1.27) са изразима који одређују положај центра савијања, уочава се да су изрази слични, иако су добијени из различитих полазних услова, односно:

$$I_{\omega y} = \int_A \omega y dA = 0, \quad I_{\omega x} = \int_A \omega x dA = 0 - \text{ одређују центар увијања,}$$

$$I_{\omega_2 y} = \int_A \omega_2 y dA = 0, \quad I_{\omega_2 x} = \int_A \omega_2 x dA = 0 \text{ одређују центар савијања.}$$

Једина разлика је у секторским координатама, јер је:

$\omega$  - главна секторска координата,

$\omega_2$  - обична секторска координата чији је пол у центру савијања, али нема услов  $S_{\omega_2} = 0$ .

Према томе: центар увијања се код ограниченог увијања поклапа са центром савијања. Дефинисањем главне секторске координате, појавили су се и следећи изрази:

$$S_{\omega} = \int_A \omega dA \quad - \text{секторски статички момент контуре [L}^4\text{]}, \quad (1.28)$$

$$I_{\omega x} = \int_A \omega x dA = 0 \quad - \text{центрифугални секторски момент контуре [L}^5\text{]}, \quad (1.29)$$

$$I_{\omega y} = \int_A \omega y dA = 0 \quad - \text{центрифугални секторски момент контуре [L}^5\text{]}, \quad (1.30)$$

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA \quad - \text{главни секторски момент инерције [L}^6\text{]}. \quad (1.31)$$

Дакле, главну секторску координату  $\omega$  одређују услови:

$S_{\omega} = 0, I_{\omega y} = 0, I_{\omega x} = 0$ , тако да при формирању главне секторске координате треба испунити следеће:

- Пол формирања  $\omega$  мора да буде у центру увијања (савијања).
- Избор почетне тачке  $N_0$  обиласка контуре мора да задовољи услов  $S_{\omega} = 0$ .

Код контуре која има бар једну осу симетрије, почетна тачка  $N_0$  треба да буде у пресеку осе симетрије и контуре. Ова тачка се назива главна нулта тачка. Поред главне нулте тачке, контура може имати још нултих тачака у којима је  $\omega = 0$ .

Ако контура има две осе симетрије, онда се са тежиштем поклапају центар увијања (савијања) и главна нулта тачка. Ако се код симетричне контуре произвољно узме почетна нулта тачка  $N_0$ , добијена секторска координата не задовољава услов да је  $S_{\omega} = 0$ , тако да се формирана секторска координата може кориговати, да би постала главна секторска координата  $\omega$ .

Идентичан случај је и код несиметричних контура, где се увек поступа са корекцијом неке првобитне секторске координате која се означава са  $\omega_0$ , дакле:

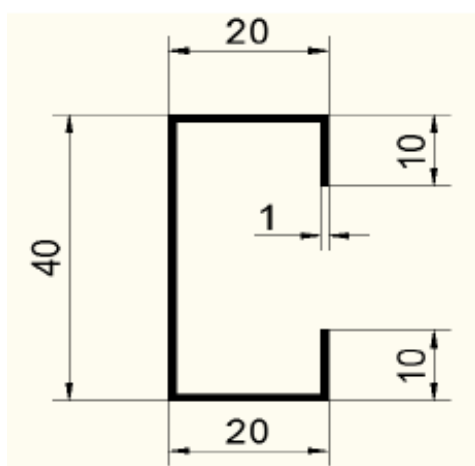
$$\omega = \omega_0 + C. \quad (1.32)$$

## 2. Прорачун и примери прорачуна танкозидног носача

### 2.1 Прорачун танкозидног носача

#### 2.1.1 Секторске карактеристике

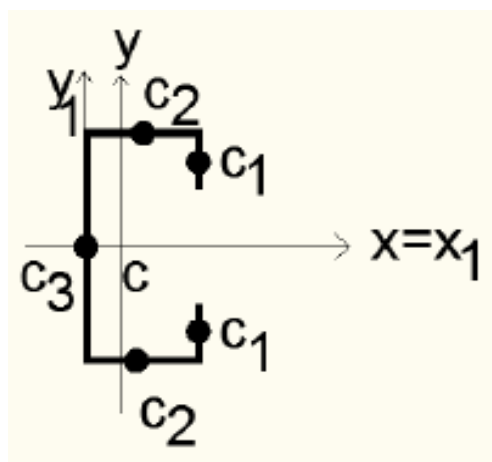
За попречни пресек приказан на *слици 30*. потребно је одредити површину, координате тежишта, главне моменте инерције, положај главних тежишних оса. Затим ће бити приказана промена секторске координате по контури датог пресека и дијаграм нормиране секторске координате, дијаграм секторског статичког момента и добиће се крајња вредност секторског момента инерције. [7]



Слика 30. Попречни пресек профила

$$a = 20\text{cm}; b = 10\text{cm}; \delta = 1\text{cm}; h = 40\text{cm}$$

Усваја се почетни координатни систем приказан је на *слици 31*.



Слика 31. Почетни координатни систем

Одређивање површине:

$$A = 2A_1 + 2A_2 + A_3$$

$$A_1 = B\delta = 10\text{cm}^2$$

$$A_2 = (a - \delta)\delta = (20 - 1) \cdot 1 = 19\text{cm}^2$$

$$A_3 = (h - 2\delta)\delta = (40 - 2) = 38\text{cm}^2$$

$$A = 93\text{cm}^2$$

Одређивање тежишта:

$$X_c = \frac{S_{y1}}{A} = \frac{A_1 X_{c1} + A_2 X_{c2} + A_3 X_{c3} + A_1 X_{c1} + A_2 X_{c2}}{96} = 8.125\text{cm}$$

$$Y_c = 0$$

Момент инерције:

$I_y$  - не мора да се рачуна јер је  $X$  – оса симетрије.

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + I_{x4} + I_{x5}$$

$$I_{x1} = I_{x1} + A_1 Y_{c1}^2 = \frac{b_1 \delta_1^3}{12} + 10 \cdot 15^2 = 2333,33\text{cm}^4$$

$$I_{x2} = I_{x2} + A_2 Y_{c2}^2 = \frac{a_2 \delta_2^3}{12} + 19 \cdot 20^2 = 7601,66\text{cm}^4$$

$$I_{x3} = I_{x3} = \frac{1 \cdot 40^3}{12} = 5333,33\text{cm}^4$$

$$I_{x4} = 7601,66\text{cm}^4$$

$$I_{x5} = 2333,33\text{cm}^4$$

$$I_{xUK} = 25203,31\text{cm}^4$$

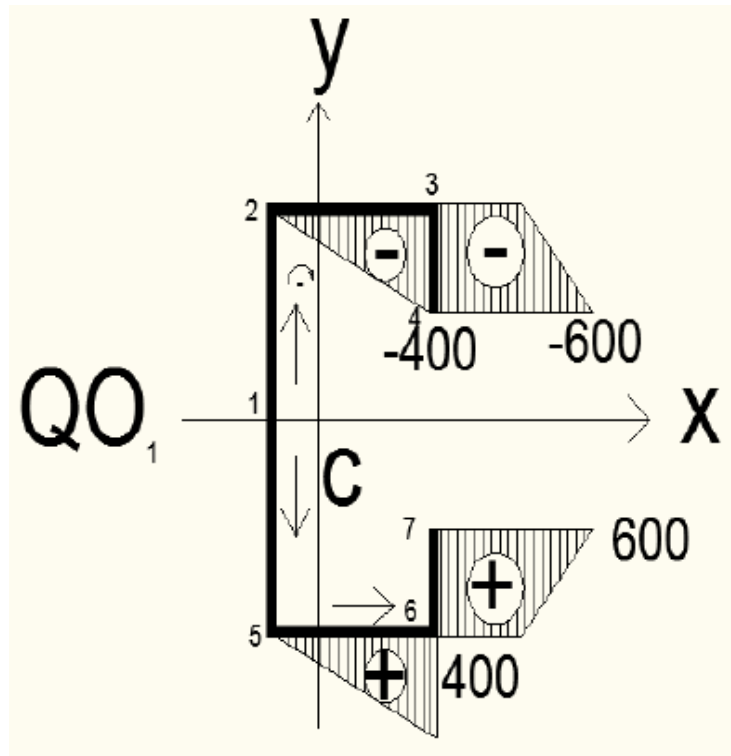
Центар смицања:

$$X_D = X_Q + \frac{I_{yWQ}}{I_x}$$

$$Y_D = 0$$

Дијаграм секторске координате:

Дијаграм секторске координате приказан је на слици 32.



Слика 32. Дијаграм секторске координате  $\omega_Q$

$$\omega_{Q01}^1(s) = 0,$$

$$\omega_{Q01}^2(s) = 0,$$

$$\omega_{Q01}^3(s) = -400\text{cm}^2,$$

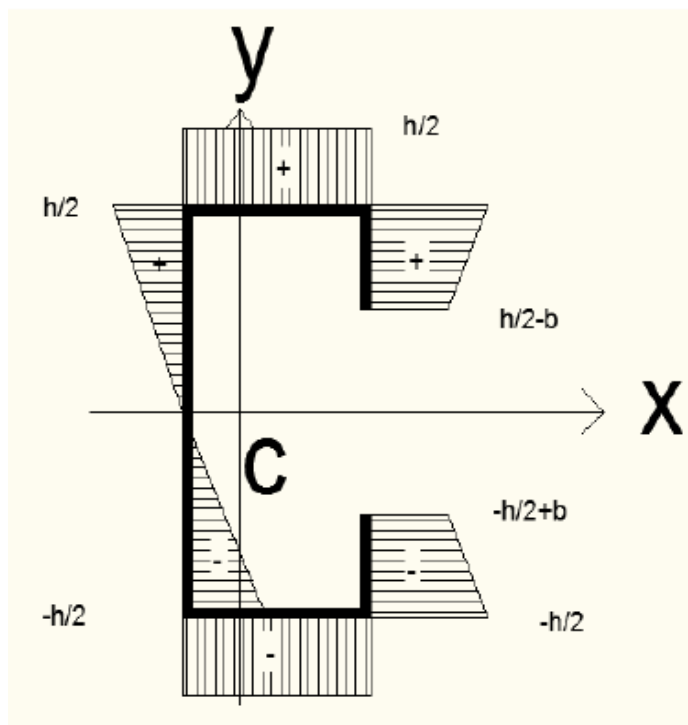
$$\omega_{Q01}^4(s) = -400 - 200 = -600\text{cm}^2,$$

$$\omega_{Q01}^5(s) = 0,$$

$$\omega_{Q01}^6(s) = 400\text{cm}^2,$$

$$\omega_{Q01}^7(s) = 400 + 200 = 600\text{cm}^2.$$

Дијаграм промене координате  $y$ :



Слика 33. Дијаграм промене координате  $y$

Центрифугални секторски момент:

$$I_{y\omega Q} = y(s) \times \omega_{Q01},$$

$$I_{y\omega Q} = \left[ \frac{h}{2} \cdot a \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{ha}{2} \right) + \left( -\frac{ha}{2} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{ah}{2} \right) \right] \delta +$$

$$+ 2 \left[ \frac{b \cdot \delta}{6} \left[ \frac{h}{2} (2 \cdot (-400) + (-600)) + \left( \frac{h}{2} - b \right) ((-400) + 2(-600)) \right] \right] = -306666,66 \text{ cm}^4$$

Координате центра смицања:

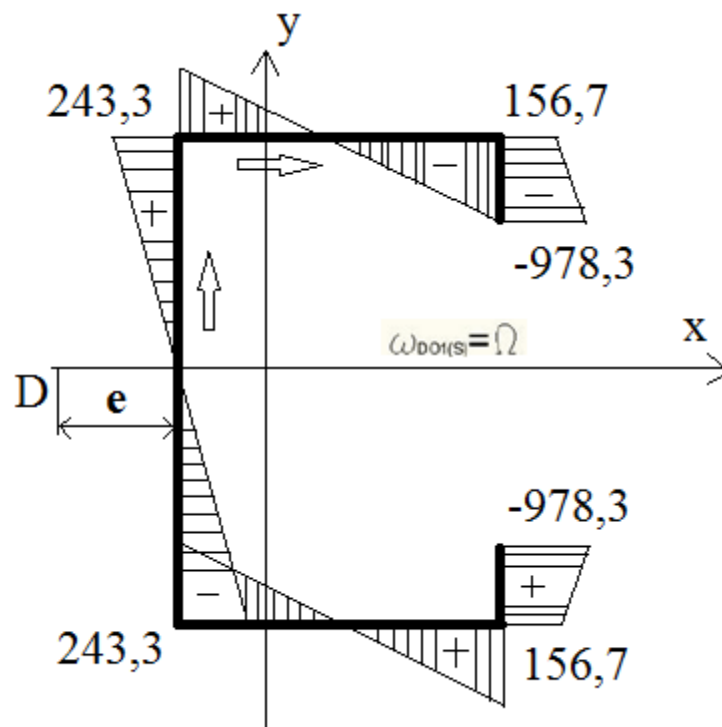
$$X_D = X_Q + \frac{I_{y\omega Q}}{I_X}$$

$$Y_D = 0$$

$$X_Q = -X_C$$

$$X_D = -20,29 \text{ cm}$$

Дијаграм секторске координате за центар смицања:



Слика 34. Дијаграм секторске координате за центар смицања  $\omega_{D01}(S)$

$$\Omega = \omega_D + \omega_0,$$

$$\omega_0 = -\frac{S_\omega}{A},$$

$$S_\omega = \int_A \omega_D(s) dA,$$

$$S_\omega = \int_A \omega_D \cdot 1 \cdot dA,$$

$$S_\omega \equiv 0 \Rightarrow \omega_0 = 0$$

$$\Omega \equiv \omega_D$$

Дијаграм нормиране секторске координате:

$$\Omega \equiv \omega_{D01}(S)$$

Секторски момент инерције:

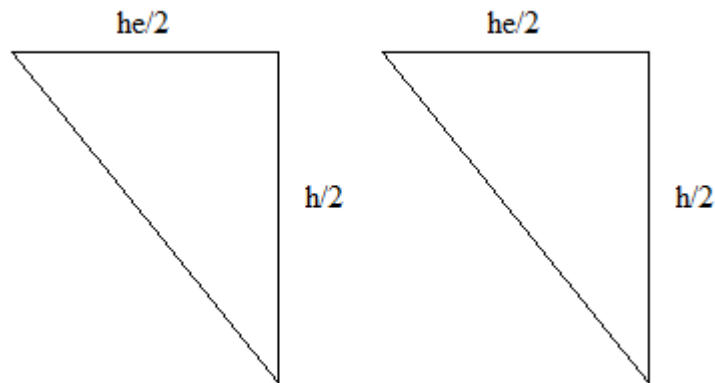
$$I_\Omega = \Omega(s) \times \Omega(s)$$

$$I_{\Omega_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{he}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{he}{2} = 1097549,811 \text{ cm}^6$$

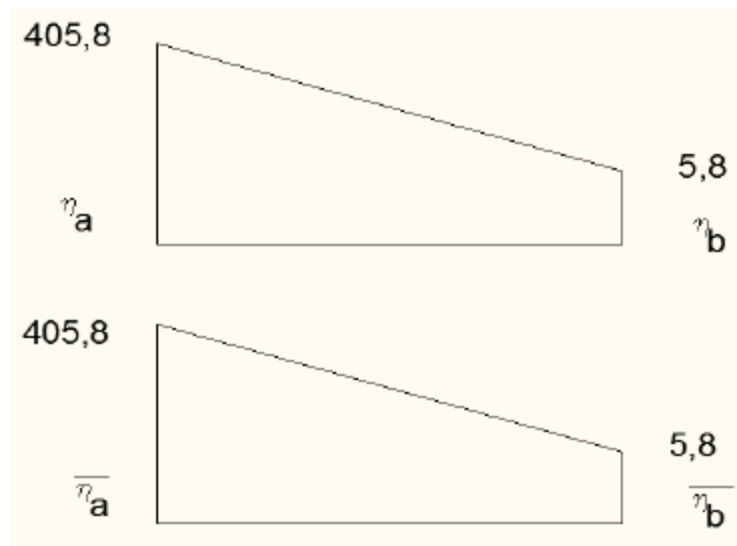
Због симетричности троуглова множи се са два, па је:

$$I_{\Omega_1} = 2195099,622 \text{ cm}^6$$

$$I_{\Omega_2} = 1109284,454 \text{ cm}^6$$



Слика 35. Симетричност троуглова



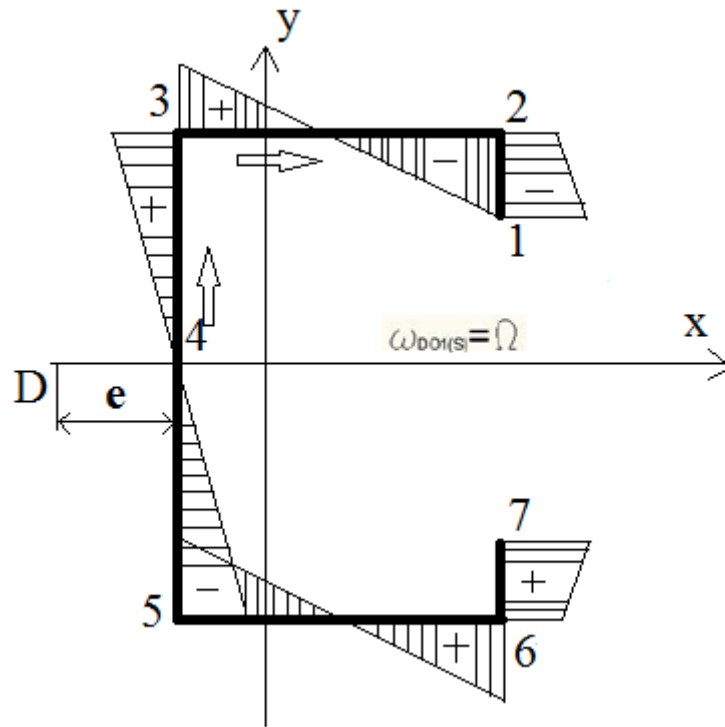
Слика 36. Симетричност трапеца

Због симетричности се множи са два, па је:

$$I_{\Omega 3} = 1024334,739 \text{ cm}^6$$

$$I_{\Omega UK} = 4328718,815 \text{ cm}^6$$

Дијаграм секторског статичког момента  $\overline{S_{\Omega}}$ :

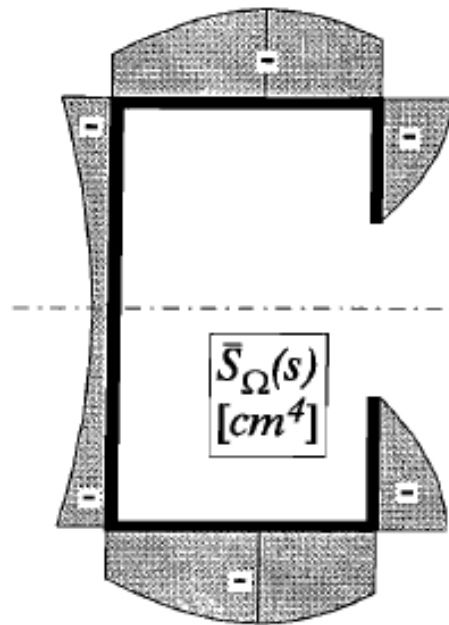


Слика 37. Дијаграм нормиране секторске координате  $\Omega$

$$\overline{S_{\Omega}} = \int_A \Omega s dA = \delta \int_s \Omega s ds$$

$$S_{\Omega}^{1-2} = \delta \int \Omega^{1-2}(s) ds$$

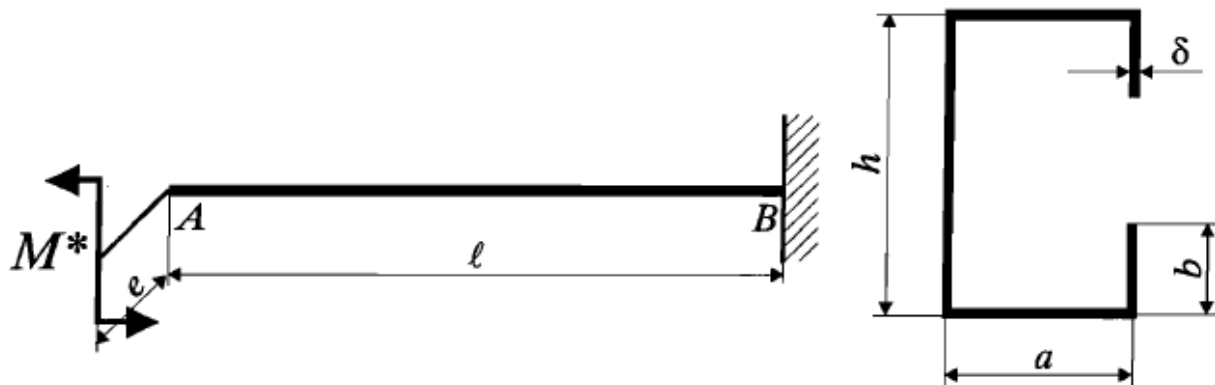
На слици 38. приказан је дијаграм секторског статичког момента.



Слика 38. Дијаграм секторског статичког момента  $\bar{S}_{\Omega}$

### 2.1.2 Спречена торзија

За греду оптерећену на савијено увијање, као на слици 39. Потребно је одредити аналитичке изразе за  $\varphi, \varphi', B, M_s, M_{\Omega}$  и приказати дијаграме промене ових величина подужини греде.



Слика 39. Греда оптерећена на савијено увијање

$$B^* = M^* \cdot e = 30 \cdot 0,2 = 6kNm$$

$$\varphi_{(z)} = \varphi_0 + \frac{\varphi_0}{k} shkz + \frac{B_0}{GI_t} (1 - chkz) + \frac{M_0}{GI_t} \left( z - \frac{1}{k} shkz \right)$$

$$\varphi'_{(z)} = \varphi_0 chkz - \frac{B_0 k}{GI_t} shkz + \frac{M_0}{GI_t} (1 - chkz)$$

$$B_{(z)} = -\varphi'_0 \frac{GI_t}{k} shkz + B_0 chkz + \frac{M_0}{k} shkz$$

$$M_{(z)} = M_0$$

$$M_{s(z)} = GI_t \varphi'(z)$$

$$M_{\Omega(z)} = -E_1 I_{\Omega} \varphi''(z)$$

$$E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} = 2,2 \cdot 10^5 MPa$$

$$I_t = \frac{\eta}{3} \sum_{i=1}^n si \delta i = 37,33 cm^4$$

$$k^2 = \frac{GI_t}{E_1 I_{\Omega}} = 0,03135 \frac{1}{m^2}$$

$$k = 0,177 \frac{1}{m}$$

Непознате величине  $\varphi_0, \varphi'_0, B_0, M_0$ , одређују је из граничних услова:

$$z = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \varphi' = 0$$

$$z = l \Rightarrow M = 0, B = B^*$$

Из граничних услова следи:

$$\varphi = 0,$$

$$\varphi'(z=0) = \varphi'_0 = 0$$

$$M_0 = 0$$

$$B(z=l) = B^* = B_0 chkl$$

$$B_0 = \frac{B^*}{chkl}$$

Заменом добијаних вредности, добија се:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{B^*}{GI_{tchkl}}(1 - chklz), \\ \varphi'(z) &= -\frac{B^*k}{GI_{tchkl}}shklz, \\ B(z) &= \frac{B^*}{GI_{tchkl}}chklz, \\ \varphi''(z) &= -\frac{B^*k^2}{GI_{tchkl}}chklz, \\ \varphi'''(z) &= -\frac{B^*k^3}{GI_{tchkl}}shklz, \\ M_s(z) &= -\frac{B^*k}{GI_{tchkl}}shklz, \\ M_\Omega(z) &= -EI_\Omega\varphi''' = \frac{B^*k}{chkl}shklz, \\ M(z) &= M_s(z) + M_\Omega(z) = 0.\end{aligned}$$

Заменом бројних вредности добијају се аналитички изрази:

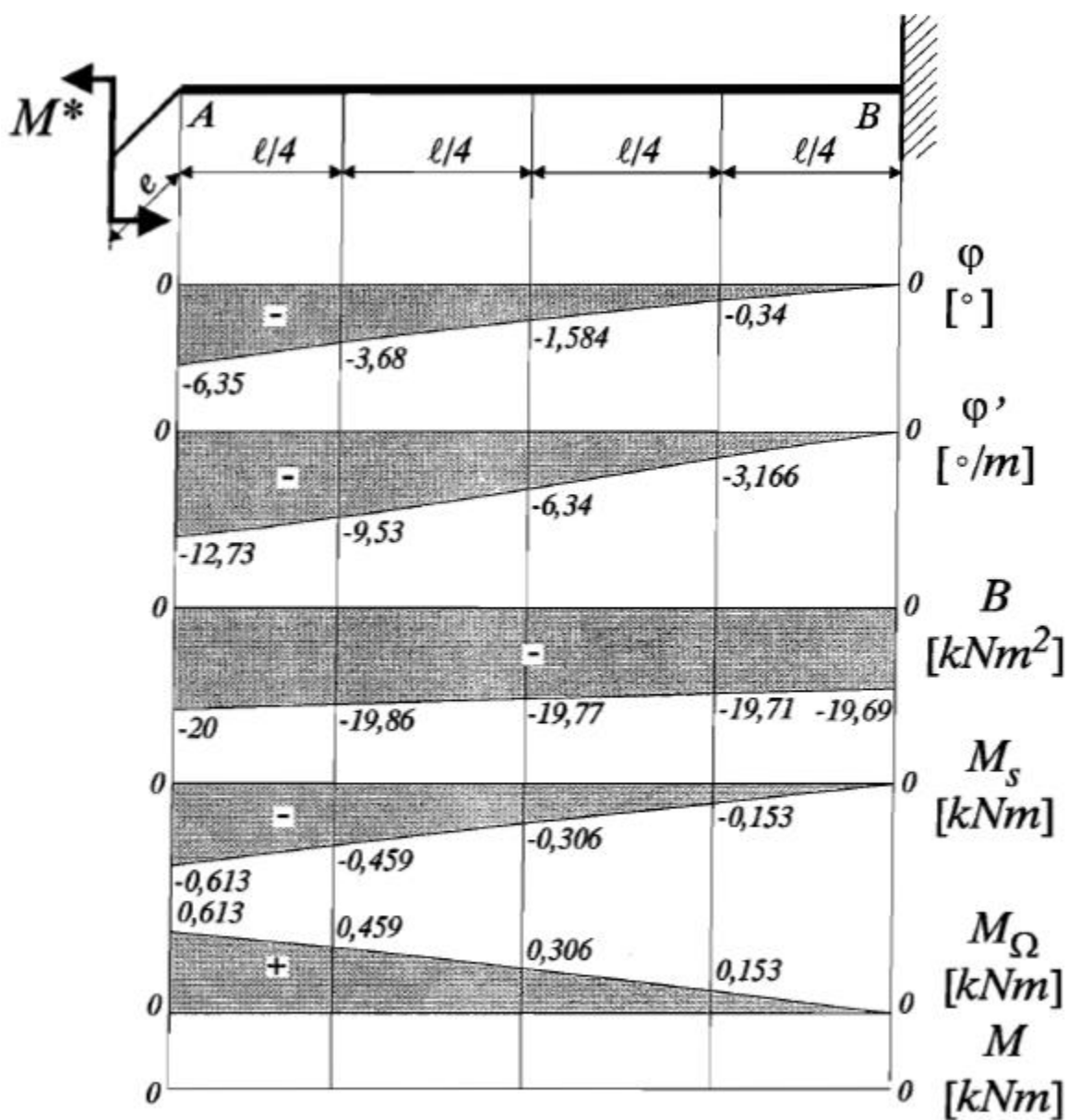
$$\begin{aligned}\varphi(z) &= 0,197(1 - chklz), \\ \varphi'(z) &= -0,03503shklz, \\ B(z) &= 5907,22chklz, \\ M_s(z) &= -1,04557shklz, \\ M_\Omega(z) &= 1,04557shklz, \\ M(z) &= 0.\end{aligned}$$

Подаци за дијаграме промене величина  $\varphi, \varphi', B, M_s, M_\Omega$  дати су у табели 3.:

**Табела 3.** Подаци за дијаграме промене величина  $\varphi, \varphi', B, M_s, M_\Omega$

| $z, m$               | 0      | 0,25   | 0,5    | 0,75   | 1      |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\varphi(z), rad$    | 0      | -0,34  | -1,584 | -3,68  | -6,35  |
| $\varphi'(z), rad/m$ | 0      | -3,166 | -6,34  | -9,53  | -12,73 |
| $B(z), kNm^2$        | -19,69 | -19,71 | -19,77 | -19,86 | -20    |
| $M_s(z), kNm$        | 0      | -0,153 | -0,306 | -0,459 | -0,613 |
| $M_\Omega(z), kNm$   | 0      | 0,153  | 0,306  | 0,459  | 0,613  |
| $M(z), kNm$          | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |

Дијаграми тражених величина приказани су на слици 40.

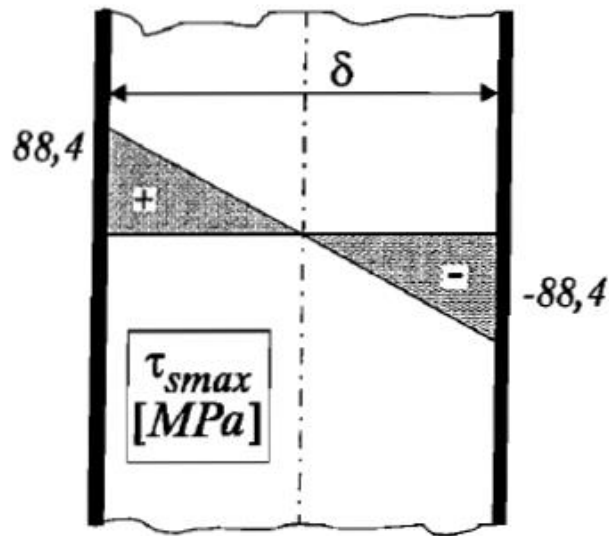


Слика 40. Дијаграм промене величина  $\varphi, \varphi', B, M_s, M_{\Omega}$  по дужини греде

Смичући напон:

$$\tau_s = \frac{2M_s \max}{I_t} \cdot \frac{\delta}{2} = 88,84 MPa$$

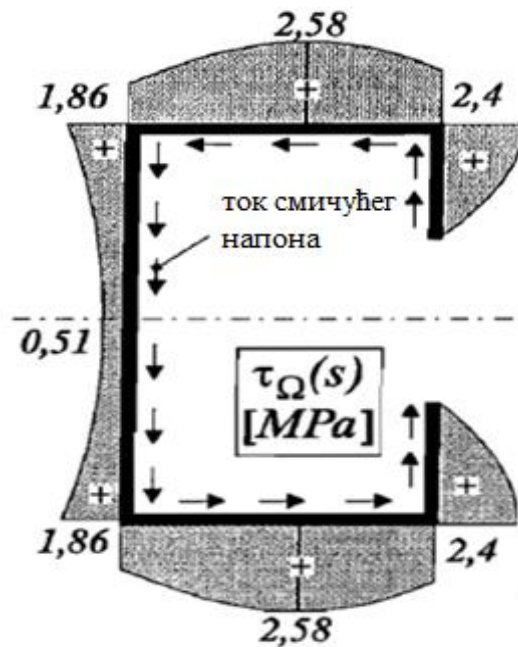
Промена смичућег напона је приказана на слици 41.:



Слика 41. Промена напона  $\tau_s$

Смичући напон услед спреченог увијања (Слика 42.):

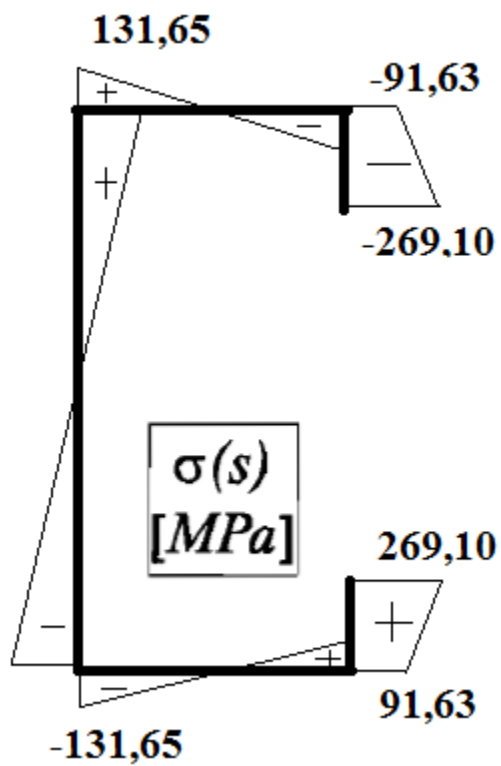
$$\tau_{\Omega} = -\frac{M_{\Omega\max}}{I_{\Omega}\delta} \cdot \overline{S}_{\Omega} = -0,003\overline{S}_{\Omega} \text{ MPa}$$



Слика 42. Промена напона  $\tau_{\Omega}$

Нормални напон:

$$\sigma = \frac{B_{\max}}{I_{\Omega}} \Omega = 49,44 \cdot \Omega \text{ MPa}$$



Слика 43. Промена напона  $\sigma$

## 2.2 Прорачун танкозидног носача према Еврокоду

Еврокод пружа могућност инжењерима пројектантима да у потпуности искористе еласто-пластична својства челика и прецизно утврде носивост попречних пресека или елемената, посебно узимајући у обзир понашање челика као материјала изван еластичне области деформација. Понашање конструкције више се неограничава на еластичну област, већ се анализира њено понашање све до достизања граничног стања носивости или употребљивости. Гранична стања су она стања конструкције чијим достизањем, односно прекорачењем конструкција губи своју употребну функцију или услове носивости. Гранична стања се могу поделити на две групе:

- гранична стања носивости (*ULS - Ultimate Limit State*) и
- гранична стања употребљивости (*SLS - Serviceability Limit State*).

У Еврокоду примењује се метода граничних стања заснована на полупробабистичком концепту прорачуна. Примена оваквих метода прорачуна омогућава пројектовање рационалних челичних конструкција што је био један од основних разлога за увођење нових метода прорачуна и нових прописа, а имајући у виду вечиту тржишну утакмицу. [8]

Савремена софтверска решења, посебно у Европи, користе као основу прорачун по Еврокоду. Еврокод дефинише различите прорачунске ситуације које треба да обухвате све околности у којима се конструкција може наћи током читавог свог експлоатационог века. Под околностима се подразумевају различите диспозиције и комбинације дејстава, односно оптерећења које се могу очекивати, имајући у виду врсту и намену објекта. Диспозиција оптерећења представља скуп дејстава која су дефинисана својим положајем, интензитетом и врстом и која могу истовремено да делују на конструкцију. Еврокод разликује четири групе прорачунских ситуација:

- сталне прорачунске ситуације - обухватају уобичајене, нормалне услове коришћења објекта и одговарајућа дејства која се током њих јављају. Ова дејства су, дакле, присутна током већег дела прорачунског животног века конструкције;
- повремене или пролазне прорачунске ситуације - односе се на повремене (пролазне), краткотрајне ситуације које настају на пример приликом извођења или поправке;
- инцидентне прорачунске ситуације - обухватају изузетне случајеве који се могу, али и не морају, јавити током експлоатационог века конструкције, а у које спадају нпр. пожар, експлозија, удар возила ...;
- сеизмичке прорачунске ситуације - односе се на сеизмичка дејства, односно на утицаје који се јављају у конструкцији за време и непосредно након земљотреса.

Гранична стања носивости се односе на сигурност људи и конструкције и манифестују се губитком носивости конструкције или неког њеног дела. Често се, ради једноставније анализе, уместо самог лома, односно рушења конструкције, третирају стања која непосредно претходе лому. Еврокод дефинише четири групе граничних стања носивости која се морају анализирати и доказати. То су:

- губитак равнотеже конструкције или њеног дела као крутог тела (означава се скраћено са *ECU*),
- отказ услед прекомерне деформације, преласка конструкције или њеног дела у механизам, лома попречног пресека, губитка стабилности конструкције или њеног дела, укључујући ослонце и темеље (*STR*),
- лом или превелика деформација тла, када носивост тла, односно стене имају доминантан утицај за одређивање носивости (*GEO*) и
- лом услед замора материјала (*FAT*).

Гранична стања употребљивости обухватају гранична стања која се углавном односе на померања (деформације) и вибрације које могу да угрозе:

- функционалност конструкције и опреме,
- комфор људи и
- изглед грађевинског објекта.

Најчешће се гранична стања употребљивости доказују кроз контроле деформација појединачних елемената конструкције (угиби), или конструкције као целине (хоризонтална померања) и у одређеним случајевима, вибрација. Строгост критеријума употребљивости зависи од више параметара, а суштина је да се избегну оштећења завршне обраде, односно неконструктивних елемената и осећај несигурности код корисника, а обезбеди несметано функционисање опреме, машина и објекта као целине. Код челичних конструкција, гранична стања употребљивости, у неким случајевима (на пример у мостоградњи), обухватају и напонске контроле којима се доказује да, при експлоатационом оптерећењу, неће доћи до конструкција, услед цикличног оптерећења може да проузрокује оштећења чијим прогресивним ширењем се значајно умањује трајност конструкције.

Без обзира да ли се ради о граничном стању носивости или употребљивости, прорачуном треба да се докаже да прорачунске вредности утицаја ( $E_d$ ) услед најнеповољније комбинације дејстава, при било којој прорачунској ситуацији нису веће од одговарајућих прорачунаских вредности носивости ( $R_d$ ) или других референтних граничних вредности које се односе на употребљивост ( $\sigma_d$ ). Треба нагласити да се за различите комбинације дејстава на основу којих се одређују одговарајуће прорачунске вредности утицаја услед дејстава.

### 2.2.1 Ограничена торзија према Еврокоду 3

Торзија се у челичним конструкцијама углавном не јавља као самостално напрезање, већ у комбинацији са другим оптерећењима, а најчешће савијањем, на пример као последица ексцентричног оптерећења код мостовских носача или кранских стаза. Поред тога, познавање феномена торзије је битно и са становишта анализе одређених проблема који се тичу стабилности, карактеристичних за челичне конструкције, као што су торзионо извијање притиснутих елемената и бочно-торзионо извијање носача. Као што је већ наведено (поглавље 1.), носивост елемената оптерећеног торзијом се, у општем случају, може разложити на два суштински различита напрезања:

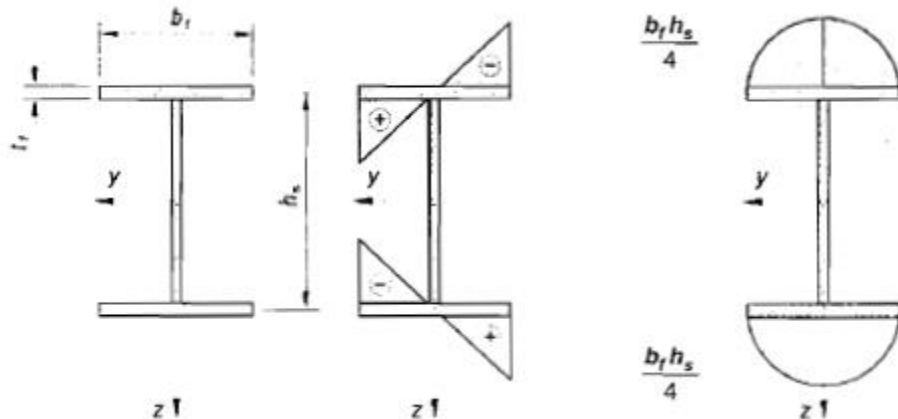
- униформну ( *Сен Венанову* торзију) и
- неуниформну или ограничену торзију.

У овом раду се анализира оптерећење на ометену, тј. ограничену торзију, па ће тај део бити детаљно описан. [8]

Код елемената отвореног попречног пресека који су изложени променљивим торзионим утицајима или код којих су спречене подужне деформације кривљења на бар једном крају, јавља се неуниформна торзија. У случају неуниформн еторзије промена угла ротације (увијања)  $\varphi(x)$  дуж елемента није константна, као ни кривљење попречних пресека. Крутост елемента у овом случају пропорционална је крутости елемента на кривљење која је једнака производу  $EI_w$  где је  $I_w$  секторски момент инерције, а веза између момента торзије и ротације (увијања) пресека око подужне осе  $x$  може да се напише на следећи начин:

$$T_w(x) = -EI_w \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \quad (2.1)$$

Нормирана секторска координата и секторски статички момент приказани су на *слици 44*.



**Слика 44.** Нормирана секторска координата и секторски статички момент за I пресек

где је:

$$\omega(y, z) = -y, z - \text{нормирана секторска координата} \quad (2.2)$$

$$I_w = I_z \frac{h_s^2}{4} - \frac{1}{24} t_f b_f^3 h_s^2 - \text{секторски момент инерције} \quad (2.3)$$

$$S_{w, \max} = \frac{1}{16} t_f h_s b_f^2 - \text{секторски статички момент} \quad (2.4)$$

$$h_s = h - t_f - \text{растојање између центра смицања појасних ламела} \quad (2.5)$$

При ограниченој торзији, у општем случају, јављају се смичући напони  $\tau_w$ , услед момента торзије  $T_w$  и нормални напони  $\sigma_w$  услед бимоента  $B$ . Изрази за одређивање смичућег и нормалног напона при ограниченој торзији могу да се напишу по аналогiji са савијањем:

$$\sigma_w(y, z) = \frac{B}{I_w} \omega(y, z) \quad (2.6)$$

$$\tau_w = \frac{T_w S_w}{I_w t_f} \quad (2.7)$$

где је:

$t_f$  - дебљина ножице,

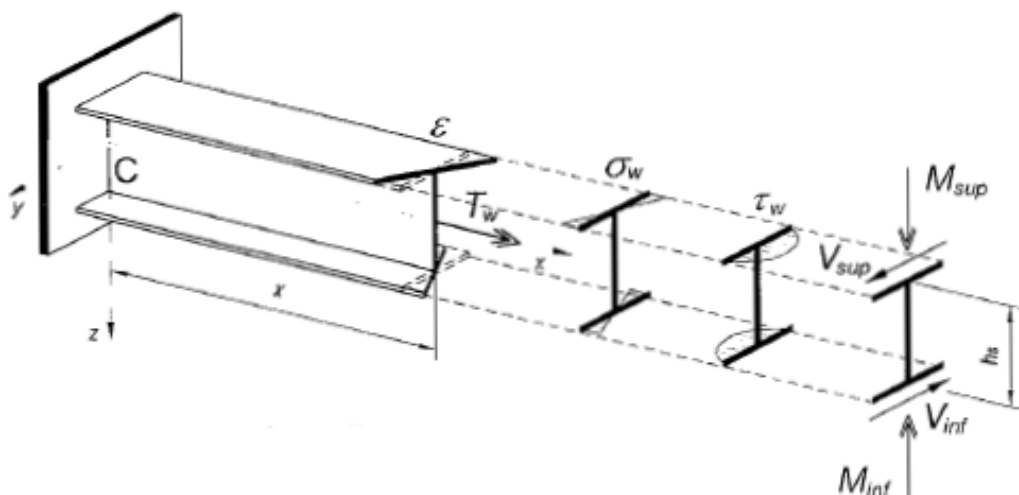
$$B = -EI_w \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} - \text{бимомент},$$

$\omega(y, z) = -y, z$  - нормализована секторска координата,

$$I_w = \int_A \omega(y, z)^2 dA - \text{секторски момент инерције } [m^6],$$

$$S_w = \int_A \omega(y, z) dA - \text{секторски статички момент } [m^4].$$

Напрезања услед торзије могу да се илуструју на примеру укљештеног (конзолног) елемента  $I$  пресека који је оптерећен торзионим моментом  $T_w$  који делује на слободном крају (слика 45.). [8]



**Слика 45.** Напони и деформације услед неуниформне (ограничене) торзије код  $I$  пресека

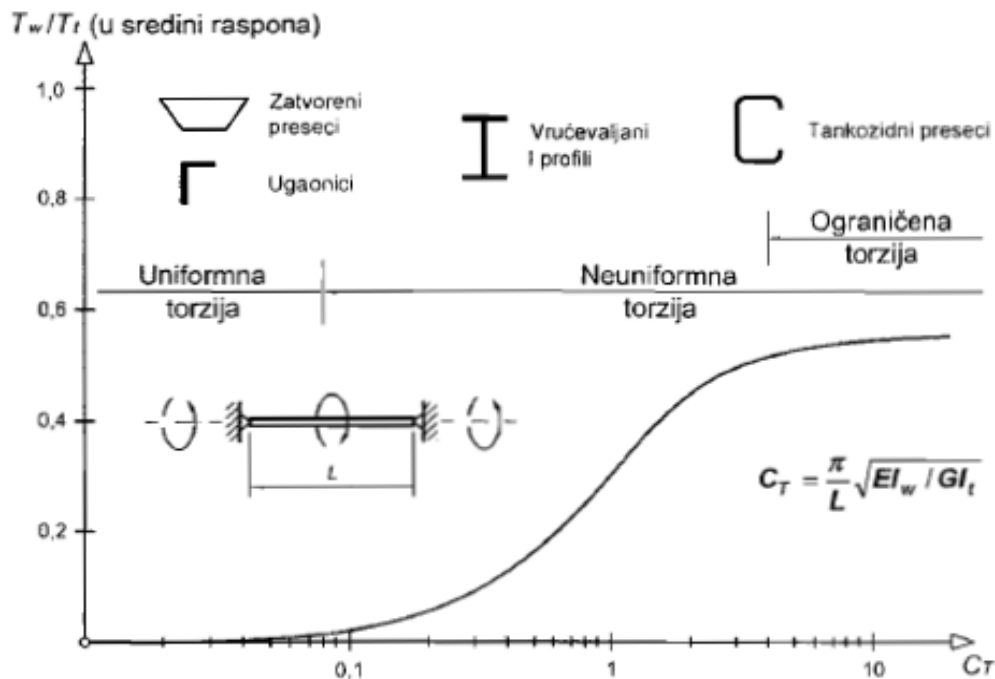
где је:

$$V_{sup} = -V_{inf} = \frac{T_w}{h_s} - \text{спрег сила које делују у нивоу ножица,} \quad (2.8)$$

$$M_{sup} = -M_{inf} = \frac{B}{h_s} - \text{спрег момената савијања који делују на ножице } I \text{ пресека.} \quad (2.9)$$

Проблем торзионог напрезања у овом случају може да се апроксимира савијањем ножица носача око слабије вертикалне осе ( $z-z$ ) као последица деловања бимомента  $B$  и смицањем ножица услед момента торзије  $T_w$ . Момент торзије  $T_w$  може да се подели на спрег сила које делују у нивоу ножица  $V_{sup}$  и  $V_{inf}$ . На сличан начин и бимомент  $B$  који је последица спречене деформације на месту укљештења може да се представи као спрег момената савијања који делују на ножице  $I$  пресека  $M_{sup}$  и  $M_{inf}$ . Дакле, ограничена торзија код  $I$  пресека изазива напрезања само у ножицама.

Да ли ће преовлађујући бити утицаји униформне или ометене торзије зависи од облика попречног пресека, услова ослањања елемента на крајевима и начина деловања торзионог оптерећења. Доминантну улогу има однос торзионе крутости  $GI_t$  и крутости на кривљење  $EI_w$ . Однос ових крутости може да се прикаже и помоћу торзионог параметра  $C_T$  који је приказан на *слици 46*. Вредност торзионе константе  $I_t$ , а самим тим и торзионе крутости код затворених попречних пресека је изузетно велика у односу на крутост пресека на кривљење (параметар  $C_T$  је веома мали), па је код таквих попречних пресека доминантна униформна торзија. Слично је и са  $L$  и  $T$  пресецима који имају занемарљиво малу крутост на кривљење  $EI_w$ . Са друге стране, када торзиони параметар  $C_T$  има веома велике вредности, односно када је торзиона крутост знатно мања од крутости на кривљење, доминира неуниформна торзија. То је случај код отворених танкозидних пресека. Између ових крајности налазе се стандардни врућеваљани  $I$  и  $H$  профили код којих је присутна комбинована торзија.



**Слика 46. Доприноси униформне и неуниформне торзије укупном напрезању**

У случају комбиноване торзије укупан момент торзије једнак је збиру момента услед униформне и неуниформне торзије, па може да се напише следећа диференцијална једначина:

$$T(x) = T_t(x) + T_w(x) = GI_t \frac{d\varphi(x)}{dx} - EI_w \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \quad (2.10)$$

### 2.2.2 Примери прорачуна према Еврокоду 3

У делу Еврокода који се бави торзионим напрезањима попречних пресека, у сваком попречном пресеку треба да буде задовољен следећи услов:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd}} \leq 1 \quad (2.11)$$

где је:

$T_{Ed}$  - прорачунска вредност укупних торзионих момената који делују на посматрани пресек услед униформне (*Сен Венанове*) и ограничене торзије ( $T_{Ed} = T_{t,Ed} + T_{w,Ed}$ ),

$T_{Rd}$  - прорачунска носивост попречног пресека на торзију.

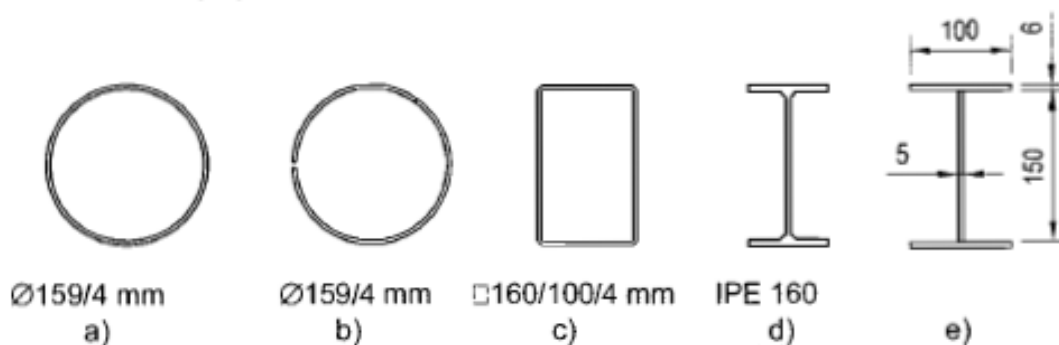
Међутим, није дефинисано на који начин треба да се одреди прорачунска носивост попречног пресека на торзију ТРД имајући у виду претходна разматрања о торзионим напрезањима, прорачунска носивост попречног пресека на торзију, у оваквом облику, може да се одреди само у случају униформне (*Сен Венанове*) торзије. У том случају може се написати:

$$T_{Rd} = \frac{W_t f_y I \sqrt{3}}{\gamma_{M0}} = W_t \tau_y I \gamma_{M0} \quad (2.12)$$

где је  $W_t$  торзиони отпорни момент за отворене, односно затворене попречне пресеке. Међутим овакав приступ није могућ у случају ограничене и комбиноване торзије, јер се истовремено јављају и нормални напони  $\sigma_{w,Ed}$  услед бимомената ( $B_{Ed}$ ) и смичући напон  $\tau_{w,Ed}$  услед момента неуниформне торзије ( $T_{w,Ed}$ ), као и смичући напон  $\tau_{t,Ed}$  услед момента униформне торзије ( $T_{t,Ed}$ ). У оваквим случајевима торзиони утицаји у елементу треба да се одреде применом еластичне анализе, а суперпозиција напона може да се изврши применом Мизесовог услова пластичности. Имајући у виду да се торзиона напрезања углавном јављају у комбинацији са неким другим утицајима, најчешће са савијањем, анализа утицаја торзије на укупна напрезања у попречним пресецима елемената челичних конструкција је приказана у наредном делу који се бави комбинованим напрезањима, односно интеракцијом различитих појединачних напрезања.

Пример:

Потребно је одредити торзиону константну  $I_t$  и торзиони момент носивости  $T_{Rd}$  за попречне пресеке приказане на слици 47. Претпоставља се да је елемент изложен дејству униформне торзије. Основни материјал је S235.



Слика 47. Попречни пресеци

$$S235 \Rightarrow f_y = 235 \text{ MPa} \Rightarrow \tau_y = \frac{f_y}{\sqrt{3}} = \frac{235}{\sqrt{3}} = 135,7 \text{ MPa}$$

а) Шупљји профил кружног попречног пресека:

$$\frac{\text{Ø}159}{4} \text{ mm} (g = 15,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}})$$

$$d_s = D - t = 159 - 4 = 155 \text{ mm} \Rightarrow \Omega = \frac{d_s^2 \pi}{4} = \frac{155^2 \pi}{4} = 18869 \text{ mm}^2$$

$$I_t = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4\Omega^2}{\frac{O}{t}} = \frac{4(\frac{d_s^2 \pi}{4})^2}{\frac{d_s \pi}{t}} = \frac{d_s^3 t \pi}{4} = 1169 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$W_t = 2\Omega t_{\min} = 2 \cdot 18869 \cdot 4 = 150953 \text{ mm}^3$$

$$T_{Rd} = \frac{W_t \tau_y}{\gamma_{M0}} = 20,48 \text{ kNm}$$

б) Расечени шупљи профил кружног попречног пресека:

$$\frac{\varnothing 159}{4} mm$$

$$I_t = \frac{1}{3} \int_0^{d_s \pi} t^3 ds = \frac{1}{3} d_s \pi t^3 = 1,0388 \cdot 10^4 mm^4$$

$$W_t = \frac{I_t}{t} = 2597 mm^3$$

$$T_{Rd} = \frac{W_t \tau_v}{\gamma_{M0}} = 0,353 kNm$$

Расечени шупљи пресек има више од 1000 пута мању торзиону константу  $I_t$  и преко 58 пута мањи торзиони момент носивости пресека  $T_{Rd}$  у односу на затворени шупљи кружни пресек истих димензија.

в) Шупљи профил правоугаоног попречног пресека:

$$\varnothing 160 / 100 / 4 mm (g = 15,5 kg / m)$$

$$b_s = b - t = 96 mm$$

$$h_s = h - t = 156 mm \Rightarrow \Omega = b_s h_s = 14976 mm^2$$

$$I_t = \frac{4\Omega^2}{\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{t_i}} = 712 \cdot 10^4 mm^4$$

$$W_t = 2\Omega t_{\min} = 119808 mm^3$$

$$T_{Rd} = \frac{W_t \tau_y}{\gamma_{M0}} = 16,26 kNm$$

Шупљи профил правоугаоног попречног пресека има готово 40% мању торзиону константу  $I_t$  и око 20% мањи торзиони момент носивости пресека  $T_{Rd}$  у односу на шупљи профил кружног пресека из примера под а) који има приближно исту масу.

г) Врућеваљани *IPE 160* ( $g=15,8 \text{ kg/m}$ )

$$I_t = 3,6 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$t_f = 7,4 \text{ mm}$$

$$W_t = \frac{I_t}{t_{\max}} = 4864 \text{ mm}^3$$

$$T_{Rd} = \frac{W_t \tau_y}{\gamma_{M0}} = 0,660 \text{ kNm}$$

д) Заварени *I* пресек:

ножице  $100 \times 6$  + ребро  $150 \times 5 \text{ mm}$  ( $g=15,3 \text{ kg/m}$ )

$$I_t = \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3 = 2,065 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$W_t = \frac{I_t}{t_{\max}} = 3441,7 \text{ mm}^3$$

$$T_{Rd} = \frac{W_t \tau_y}{\gamma_{M0}} = 0,467 \text{ kNm}$$

Табела 4. Упоредни преглед резултата

|                                          |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                      |                                                                                       |                                                                                       |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|                                          |  |  |  |  |  |
| $g \text{ [kg/m]}$                       | 15,3                                                                                | 15,3                                                                                | 15,5                                                                                 | 15,8                                                                                  | 15,3                                                                                  |
| $I_t \text{ [10}^4 \text{ mm}^4\text{]}$ | 1169,9                                                                              | 1,039                                                                               | 712,0                                                                                | 3,600                                                                                 | 2,065                                                                                 |
| $T_{Rd} \text{ [kNm]}$                   | 20,48                                                                               | 0,355                                                                               | 16,26                                                                                | 0,660                                                                                 | 0,467                                                                                 |

### 3. Анализа танкозидних конструкција помоћу рачунара

У време настанка лаких, тј. танкозидних конструкција инжењери су се користили претходно описаним методама како би дошли до резултата, тачније стабилне конструкције. Треба напоменути да у то време није постојао алат у виду данашњег дигитрона који би тај поступак убрзао или на било који начин олакшао. Из тог разлога постоје, данас помало заборављене, графичке методе. Њихова практичност се огледа баш у томе што нису захтевале било какво рачунање. Потребно је било само пажљиво наносити силе на „план сила“ и водити рачуна о размери. Након тога следи једноставно читавање непознатих сила.

Данас је инжењерски посао готово незамислив без помоћи рачунара. Применом рачунара поступак је вишеструко убрзан и олакшан. Али то није главна предност оваквог поступка. Рачунари су преузели рачунски део посла који је био све тежи како су конструкције постајале веће и компликованије. С обзиром на то, инжењеру преостаје велика слобода за осмишљавање нових видова конструкција остављајући увек места за нека додатна побољшања. На тај начин, поступак се могао понављати више пута све док се не би пронашло задовољавајуће решење. [13]

Међутим, примена рачунара се може спровести на основу застарелих графичких метода помоћу програма за 2D цртање. Неки од тих програма су *AutoCAD*, *CorelDRAW*, *SketchUP*... Помоћу ових програма се може врло лако и прецизно цртати план сила, па чак и за неке компликованије конструкције али се опет не користе у пракси већ програми могу послужити само за репрезентативно представљање графичких метода.

### 3.1 Савремени софтвери за анализу лаких конструкција

Данас су развијени софтвери са готово неограниченим могућностима у погледу сложености конструкције. Практично, софтвери су прављени за анализу конструкција које још нису осмишљене, али и за оне које су осмишљене, а сматрају се финансијски и технички неизводљиве, па се у том смислу могу поново анализирати. Помоћу софтвера може се проверити изводљивост сваке идеје.

Цена софтвера сразмерно расте са могућностима софтвера. Са повећањем могућности софтвера повећава се потражња за рачунаром са јачим карактеристикама, јер је тешко оптимизовати софтвере са циљем да софтвер ради на слабијим рачунарима, па се од рачунара захтева „суро̀ва“ снага за обраду информација. На тај начин ограничен је број корисника, па су само веће компаније у могућности да купе и користе лиценциране софтвере. Цена се креће од пар хиљада евра до стотину хиљада евра. У ту цену треба укључити трошкове за обуку корисника због изузетне сложености и великог броја могућности софтвера. [10]

Структурна анализа се може извести у доминантним 3Д софтверским пакетима попут програма *CATIA*, *SolidWorks*, *Autodesk Inventor* и др. У овим пакетима се могу вршити класичне напонске анализе, које дају врло прецизне резултате. У овом раду је приказан један од најнапреднијих и, свакако, најпрактичнијих софтверских програма за анализу прорачуна танкозидних профила, а то је *Autodesk Robot Structural Analysis*.

### 3.1.1 Autodesk Robot Structural Analysis

Компанија Autodesk настала је 1982. године и данас поседује велики број специјализованих софтвера које користе архитекте, грађевински и машински инжењери, дизајнери и многи други. Тренутно компанија располаже са 185 софтвера, а само неки од најпознатијих су:

- 3ds Max,
- AutoCAD,
- Inventor,
- Maya,
- SimulationMechanical,
- Moldflow,
- Robot StructuralAnalysis.

На званичном сајту компаније извршена је подела софтвера према областима инжењерства. На *слици 48.* приказани су софтвери за грађевинске конструкције. [11]

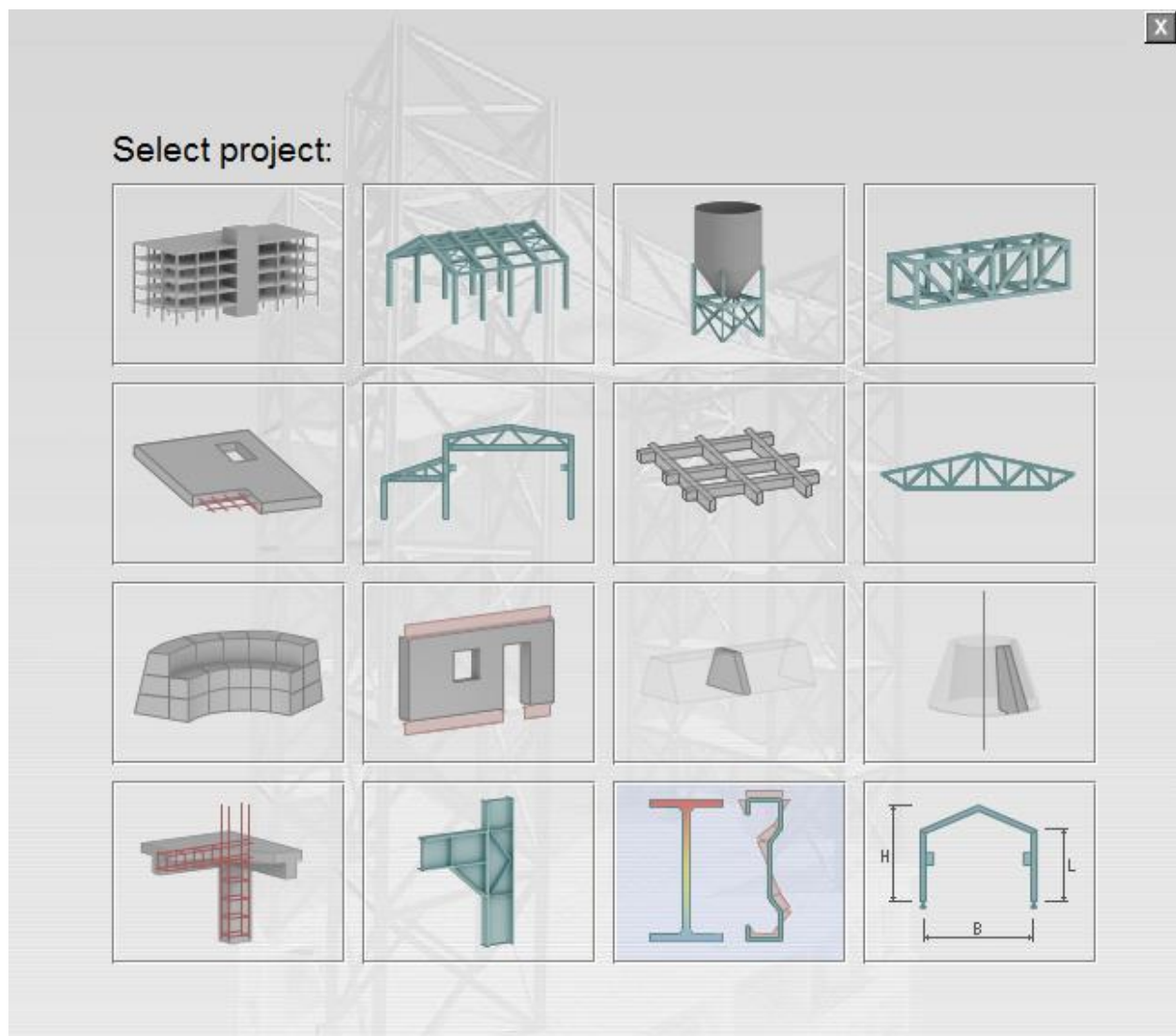


*Слика 48. Група софтвера за грађевинске конструкције*

Неки од софтвера као што је *Inventor* поседује широк спектар примене, па се може наћи у већем броју група.

За напредну структурну анализу креиран је софтвер *Robot Structural Analysis*. Осмишљен је тако да инжењерима пружа алате помоћу којих могу да разумеју понашање конструкције било ког типа и да изврше њено испитивање у складу са одређеним стандардима. У склопу софтвера уграђен је *BIM – Building Information Modeling*, систем који омогућава размену информација између чланова тима, па и читавих тимова који учествују у пројектовању. Било каква измена на пројекту прослеђује се свим члановима и остаје документована. На тај начин убрзано је пројектовање и читав процес пројектовања подложен је мањем броју грешака. [12]

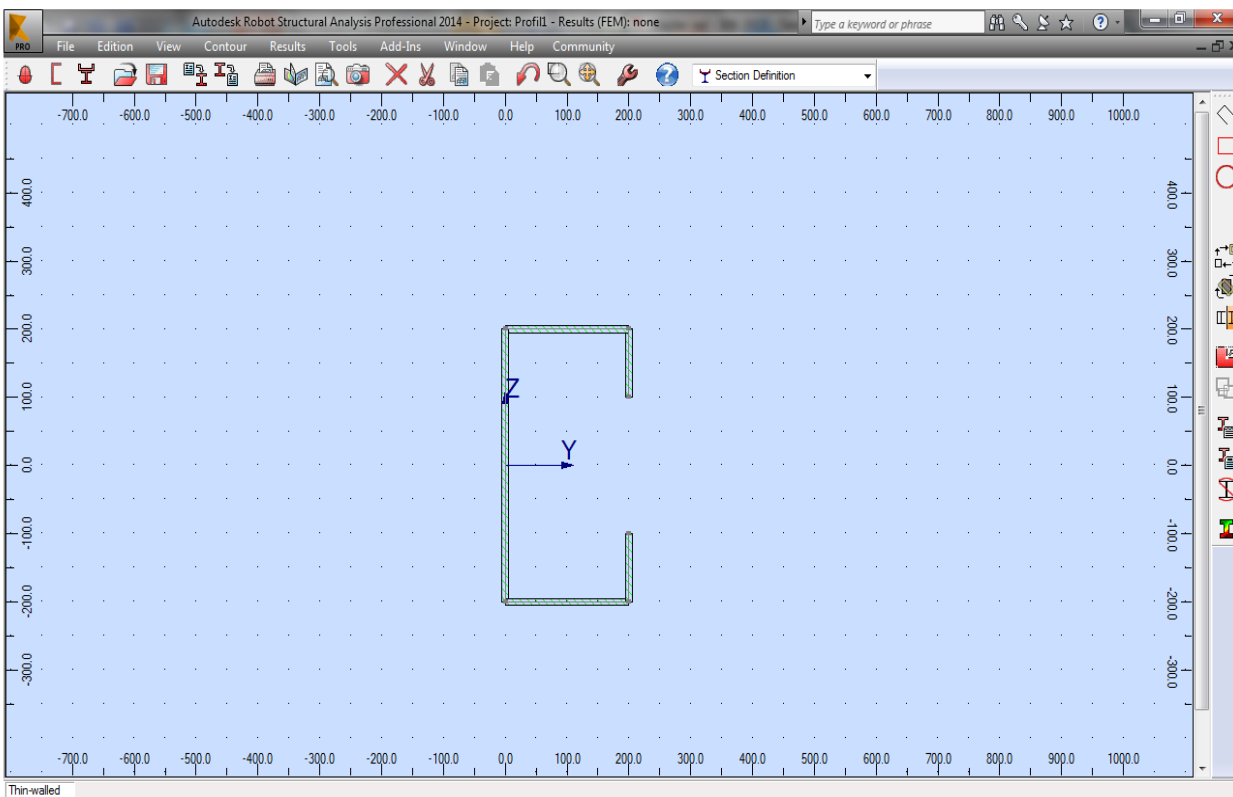
При самом покретању софтвера условљен је одабир конструкције. Прозор за одабир пројекта приказан је на *слици 49*.



Слика 49. Прозор за одабир нове конструкције

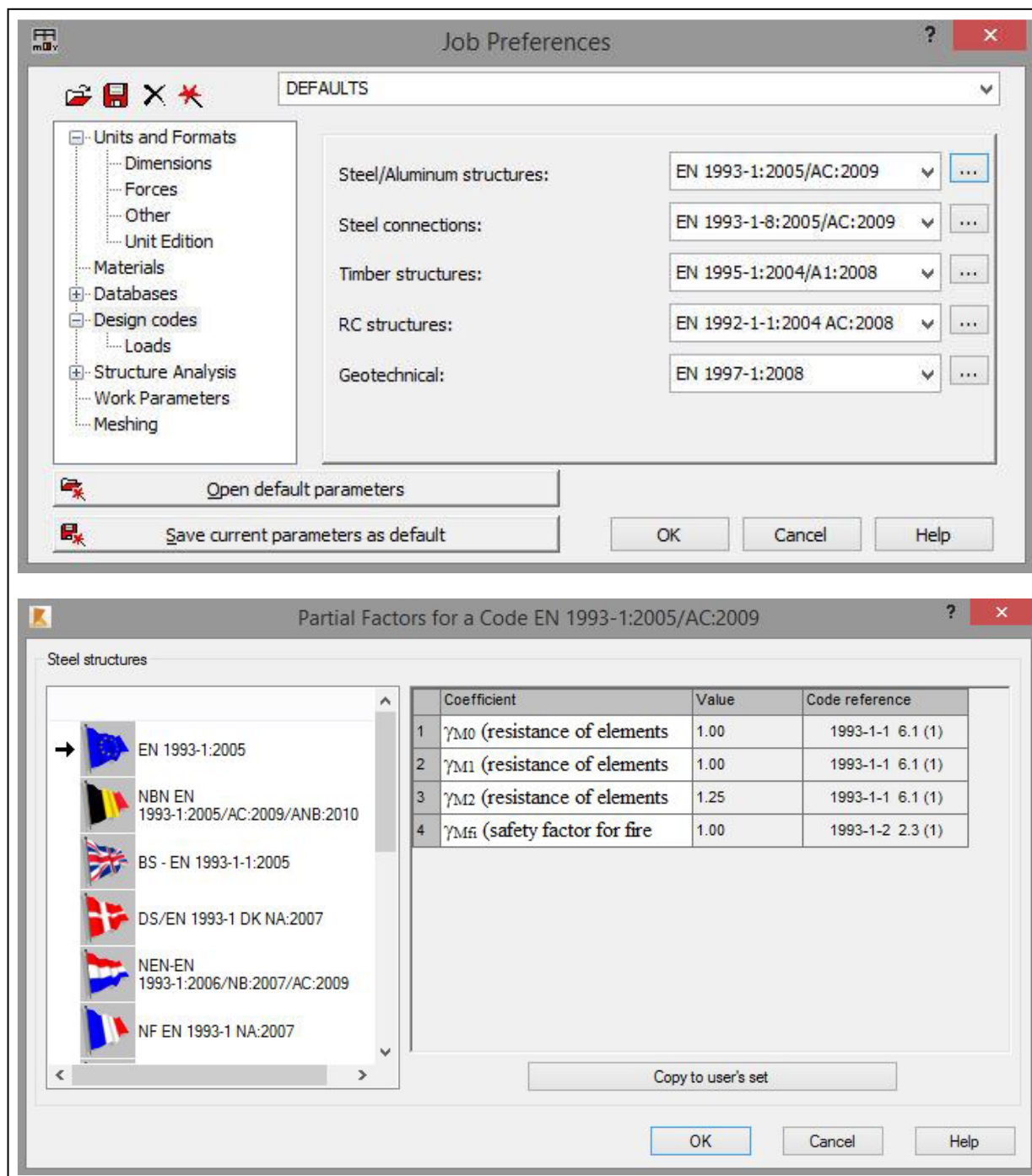
У склопу прозора са слике ЦЦЦ међу понуђеним пројектима може се одабрати: *BuildingDesign, Frame 3D Design, Shell Design, Truss 3D Design, Plate Design, Frame 2D Design, Grillage Design, Truss 2D Design, Volumetric Structure Design, Plane Stress Structure Design, Plane Deformation Structure Design, Axsymmetric Structure Design, RC Elements Design, Connection Design, Section Definition, Parametrized Structure Design*.

Одабиром новог пројекта *Section Definition* отвара се прозор који је углавном исти за све друге пројекте. На десној страни прозора налазе се неке од главних команди, помоћу којих се врши уношење и анализа било ког профила. Пример радног окружења приказан је на слици 50.



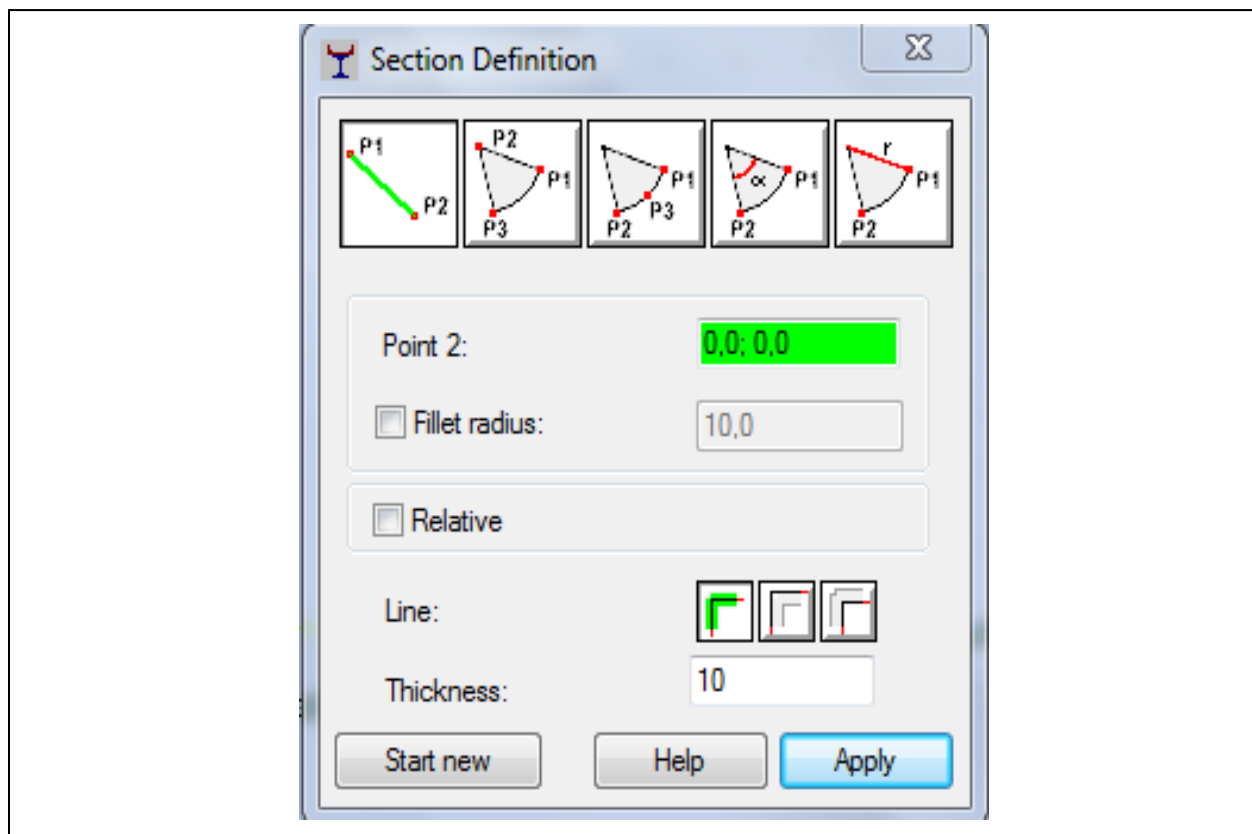
Слика 50. Радно окружење програма Autodesk Robot StructuralAnalysis

За боље пословање фирме *Autodesk* морало се приступити усклађивању прорачуна симулација са свим већим, у свету признатим, стандардима. На слици 51. приказана је опција *Job Preferences*, која служи за одабир стандарда по којима ће се вршити прорачун. На самом почетку треба извршити прави одабир стандарда, као и подешавања јединица које се користе у прорачуну које се, такође, може извршити у овом прозору.



Слика 51. Одабир стандарда за прорачун конструкције

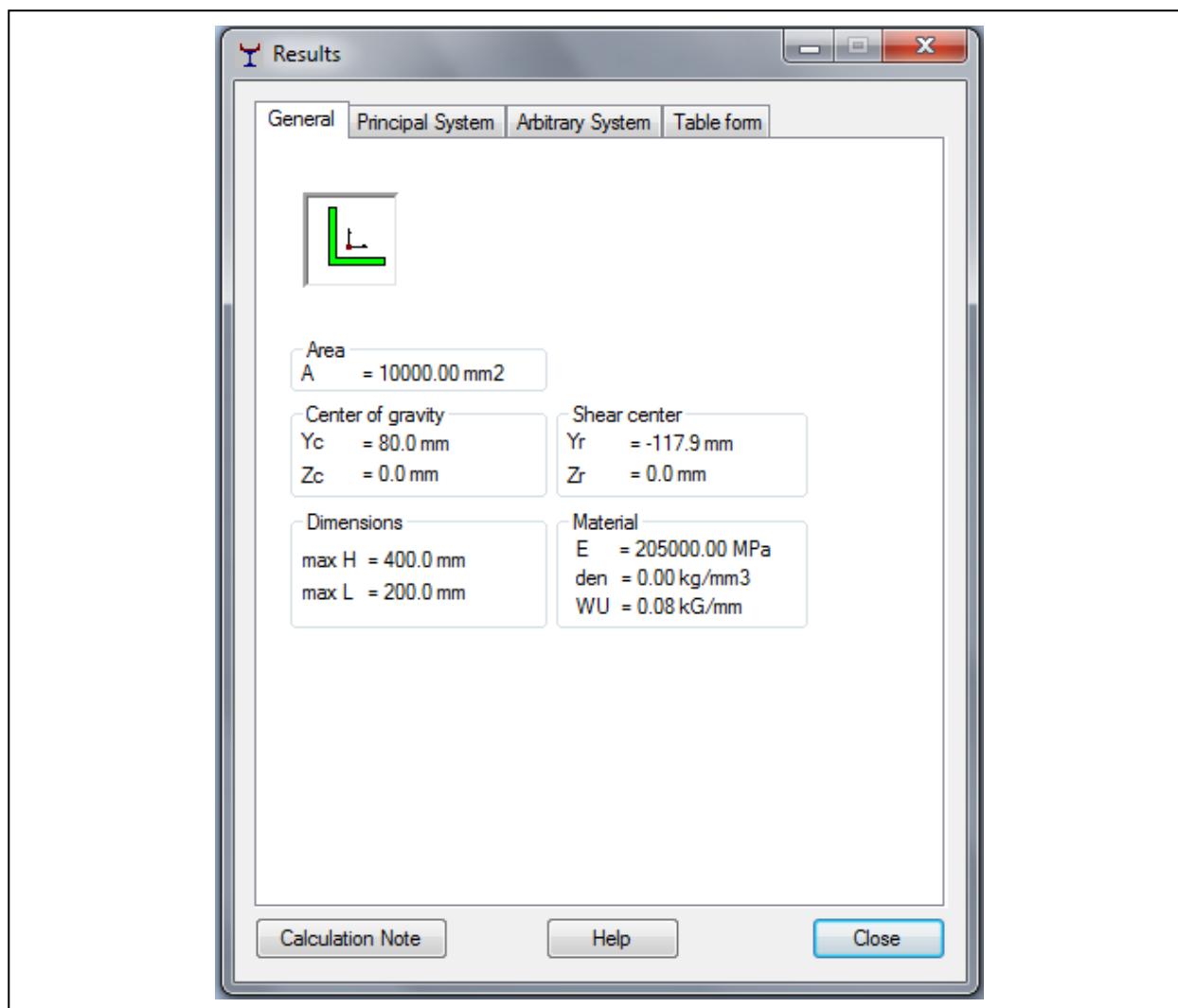
Кликом на картицу *Open from database*, која се налази у горњем командном менију, може се унети неки од стандардизованих профила. У овом случају се мануелно врши уношење профила, одабиром друге по реду картице у горњем менију, под називом *New thin-walled section*, а кликом на команду *Polygon* отвара се прозор под називом *Section Definition* за цртање профила, као и за одабир дебљине зида. Картица *Section Definition* приказана је на слици 52.



Слика 52. Картица *Section Definition*

Након што је унешен профил, као што је приказано на слици 52, може се приступити вршењу структурне анализе профила, тј. читавању резултата. За приказ резултата користи се подмодул *Results* који у себи садржи опције *General*, *Principal System*, *Arbitrary System* и *Table form*. Кликом на картицу *Results* приказују се главне вредности и карактеристике задатог профила (Слика 53.), као што су површина, центар гравитације, центар смицања, минималне и максималне дужине профила, као и особине материјала.

Опширне и тачне вредности, као и слика профила, заједно се могу видети након клика на картицу *Calculation Note* у склопу картице *Results* или у десном командном менију (Слике 54, 55 и 56). Приказане су израчунате вредности момената инерције, као и вредности промене дијаграма  $y(s)$ ,  $z(s)$ ,  $\omega(s)$ ,  $A(s)$ ,  $S_y(s)$ ,  $S_z(s)$  и  $\omega(s)$ , у табеларном приказу.



Слика 53. Картица *Results*

На сликама 54, 55 и 56 приказан је изглед резултата преведен у *Word* документ.

Autodesk Robot Structural Analysis Professional2014

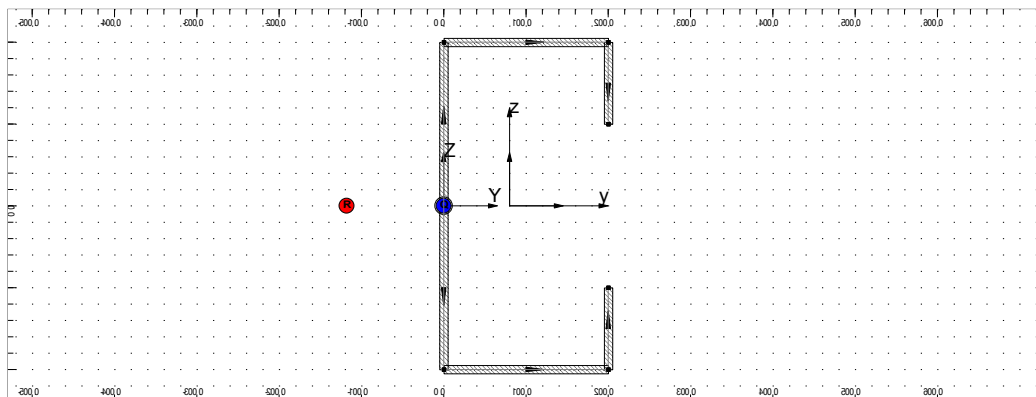
Author: **Lazarevic Pavle**

Address:

File: **StructuralAnalysis.rtd**

Project: StructuralAnalysis

## SECTION ANALYSIS



### Geometry description

| Point no. | Y      | Z       |
|-----------|--------|---------|
| 1         | 200 mm | 100 mm  |
| 2         | 200 mm | 200 mm  |
| 3         | 0 mm   | 200 mm  |
| 4         | 0 mm   | -200 mm |
| 5         | 200 mm | -200 mm |
| 6         | 200 mm | -100 mm |
| 7         | 0 mm   | -0 mm   |

| Edge no. | Point P1 | Point P2 | Thickness |
|----------|----------|----------|-----------|
| 1        | 1        | 2        | 10 mm     |
| 2        | 2        | 3        | 10 mm     |
| 3        | 3        | 7        | 10 mm     |
| 4        | 4        | 5        | 10 mm     |
| 5        | 5        | 6        | 10 mm     |
| 6        | 7        | 4        | 10 mm     |

Date : 20/11/16

Page : 1

**Слика 54.** Изглед резултата приказаних у оквиру програма *Microsoft Word*

Autodesk Robot Structural Analysis Professional2014

Author: **Lazarevic Pavle**

Address:

File: **StructuralAnalysis.rtd**

Project: StructuralAnalysis

### General results

Area

A = 10000 mm<sup>2</sup>

Center of gravity

Yc = 80 mm

Zc = 0 mm

Shear center

Yr = -118 mm

Zr = 0 mm

Base material

STEEL

E = 205000.00 MPa

den = 7852.83 kg/m<sup>3</sup>

WU = 78.53 kG/m

### Principal system

Angle

alpha = 0.0 Deg

Moments of inertia

Ix = 320733 mm<sup>4</sup>

Iy = 260033333 mm<sup>4</sup>

Iz = 69383333 mm<sup>4</sup>

Sectional moments of inertia

Iomy = 0 mm<sup>5</sup>

Iomz = 6597445 mm<sup>5</sup>

Iom = 3582906150315 mm<sup>6</sup>

Maximum distances

Vy = 120 mm

Vpy = 80 mm

Vz = 200 mm

Vpz = 200 mm

Date : 20/11/16

Page : 2

**Слика 55.** Изглед резултата приказаних у оквиру програма Microsoft Word

Autodesk Robot Structural Analysis Professional2014

Author: **Lazarevic Pavle**

Address:

File: **StructuralAnalysis.rtd**

Project: StructuralAnalysis

*Values in characteristic points*

| no | y(s)<br>[mm] | z(s)<br>[mm] | omega(s)<br>[mm2] | A(s)<br>[mm2] | Sy(s)<br>[mm3] | Sz(s)<br>[mm3] | Som(s)<br>[mm4] |
|----|--------------|--------------|-------------------|---------------|----------------|----------------|-----------------|
| 1  | 120          | 100          | 48208             | 0             | 0              | 0              | 0               |
| 2  | 120          | 200          | 16415             | -1000         | -150000        | -120000        | -32311499       |
| 3  | -80          | 200          | -23585            | -3000         | -550000        | -160000        | -25142161       |
| 4  | -80          | -200         | 23585             | 3000          | -550000        | 160000         | -25142161       |
| 5  | 120          | -200         | -16415            | 1000          | -150000        | 120000         | -32311499       |
| 6  | 120          | -100         | -48208            | 0             | 0              | 0              | 0               |
| 7  | -80          | -0           | 0                 | 5000          | -750000        | 0              | -1557493        |

### Central system

Moments of inertia

Iyc = 260033333 mm4

Izc = 69383333 mm4

Iyczc = 0 mm4

Maximum distances

Vyc = 120 mm

Vpyc = 80 mm

Vzc = 200 mm

Vpzc = 200 mm

### Arbitrary system

Angle

alpha = 0.0 Deg

Moments of inertia

Iy' = 260033333 mm4

Iz' = 69383333 mm4

Iy'z' = 0 mm4

Maximum distances

Vy' = 120 mm

Vpy' = 80 mm

Vz' = 200 mm

Vpz' = 200 mm

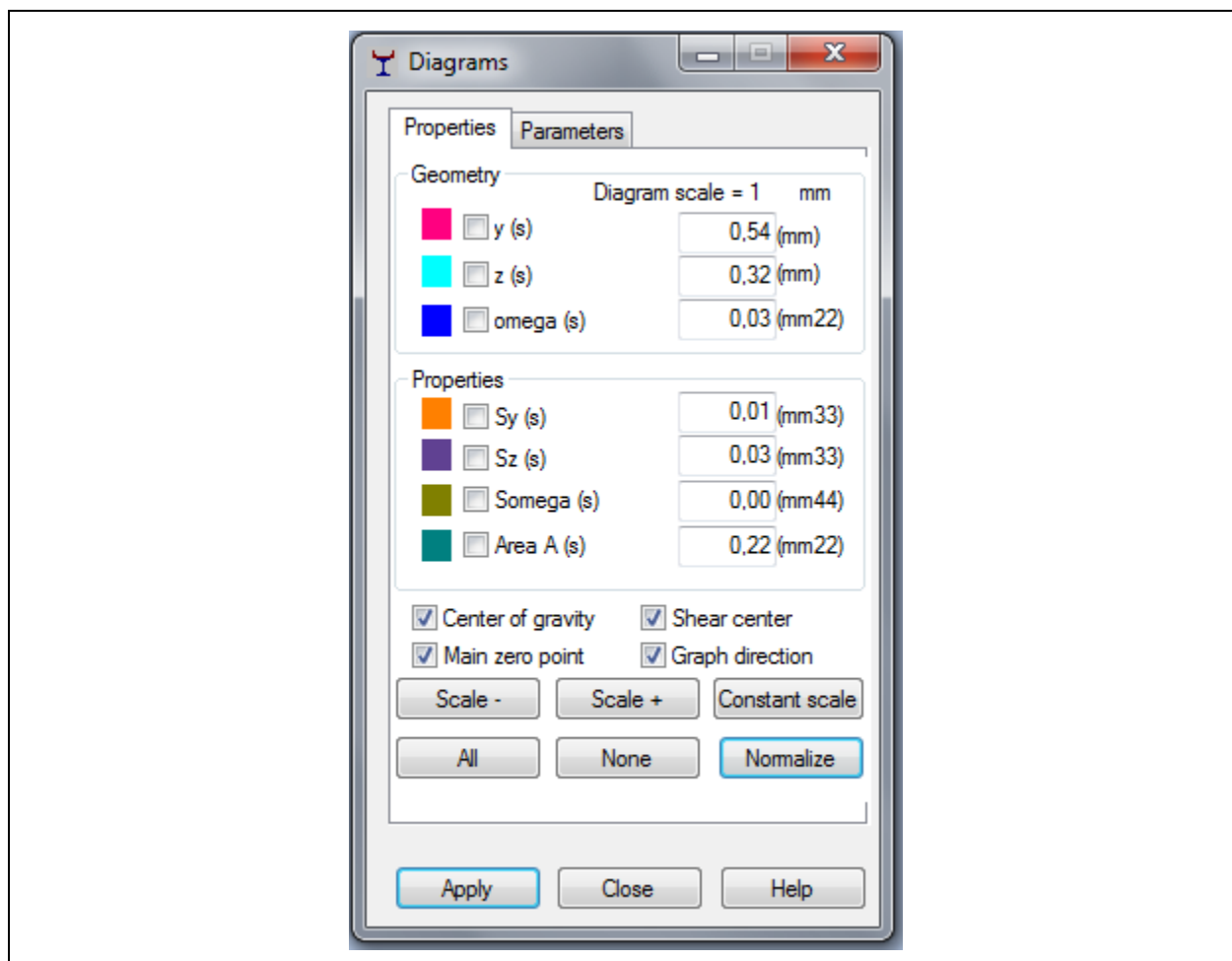
Date : 20/11/16

Page : 3

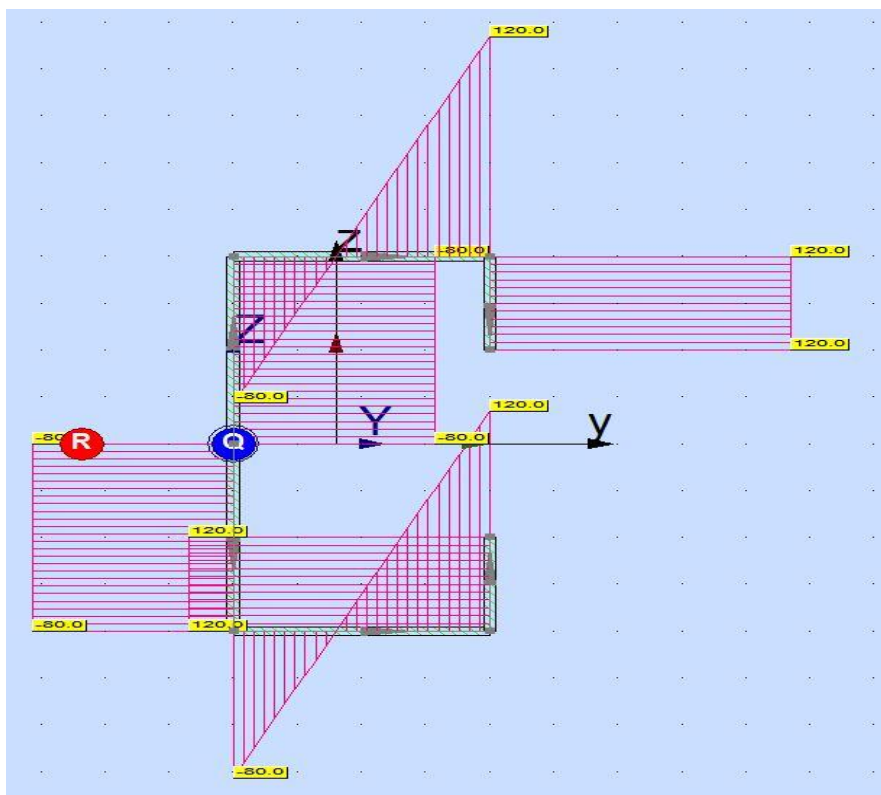
**Слика 56.** Изглед резултата приказаних у оквиру програма Microsoft Word

Након очитаних резултата, кликом на претпоследњу картицу у оквиру десног командног менија, под називом *Graphical results*, отвара се прозор *Diagrams*, у оквиру кога се налазе подкартице *Properties* и *Parameters*, где се могу активирати дијаграми секторских карактеристика, који ће бити приказани на сликама 57,58,59,60,61,62 и 63. Пре активирања било ког од дијаграма, требало би чекирати картицу *Normalize*, да би очитавање одређеног дијаграма било апсолутно прецизно.

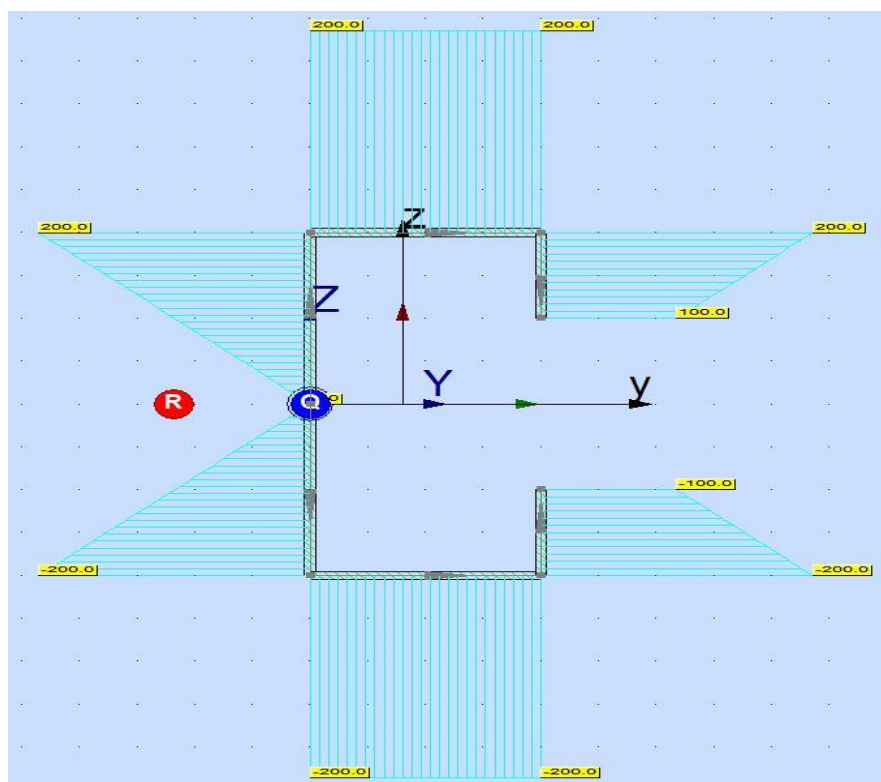
У картици *Parameters* врши се подешавање изгледа резултата, односно дијаграма. Резултати се могу приказивати у оквиру новог прозора и вредности резултата могу се скалирати како би њихов изглед био погоднији за преглед.



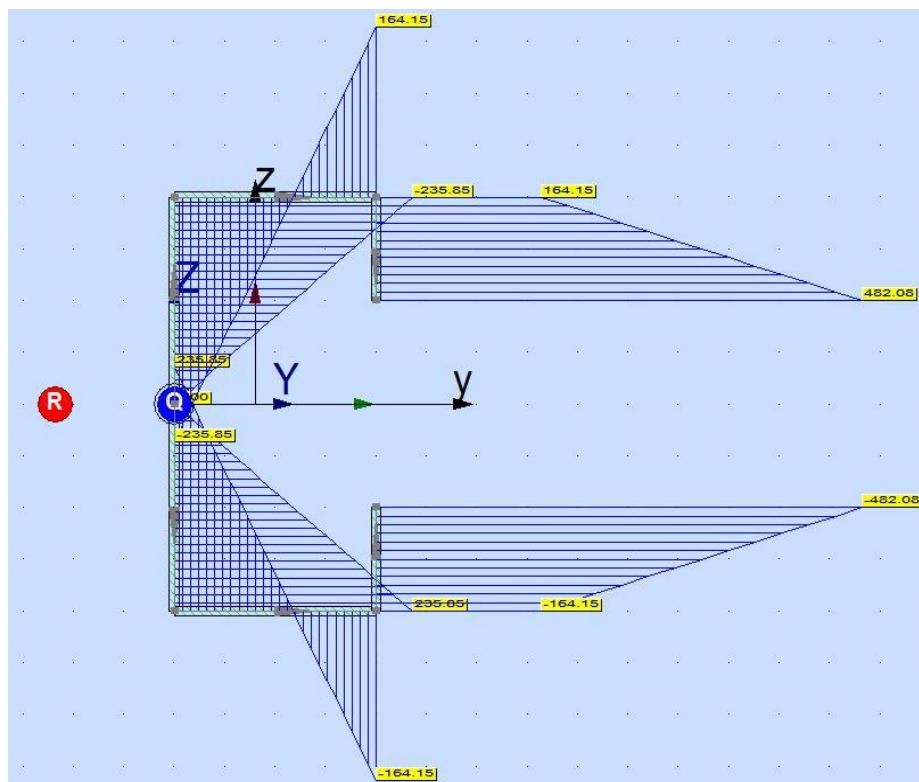
Слика 57. Изглед картице *Graphical results (Diagrams)*



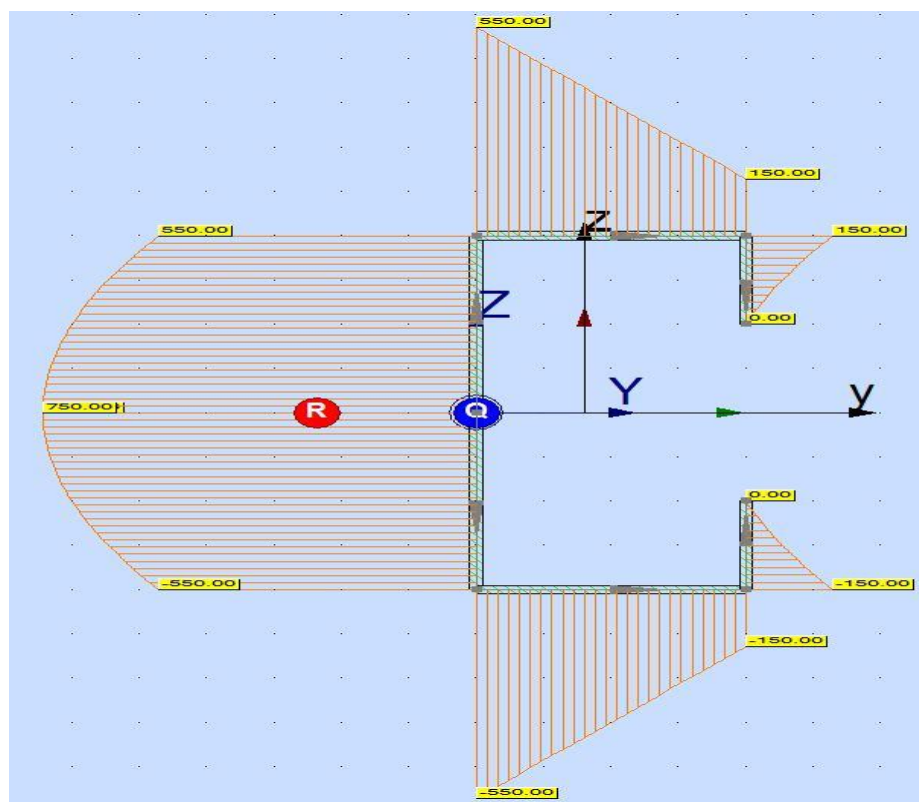
Слика 58. Дијаграм промене координате -  $y$



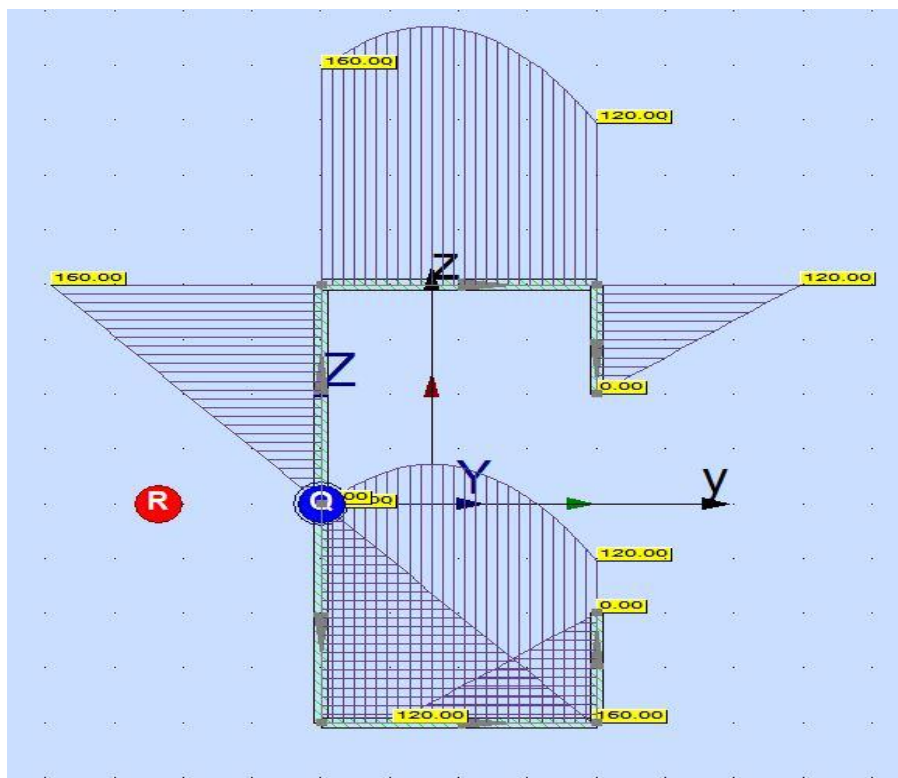
Слика 59. Дијаграм промене координате -  $z$



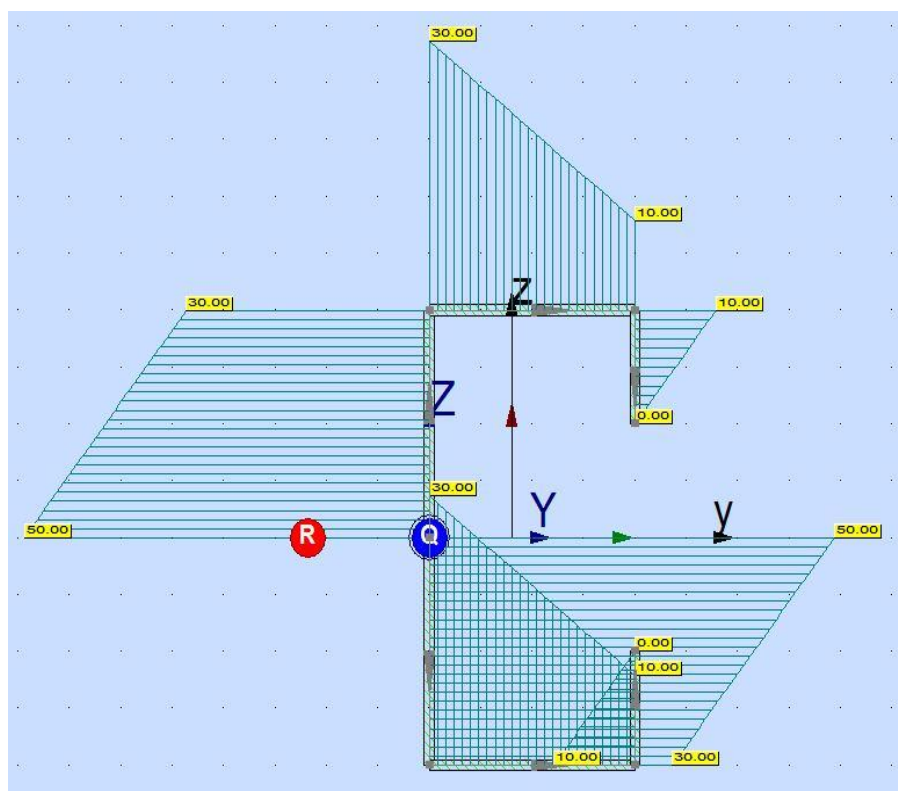
Слика 60. Дијаграм промене -  $\Omega_s$



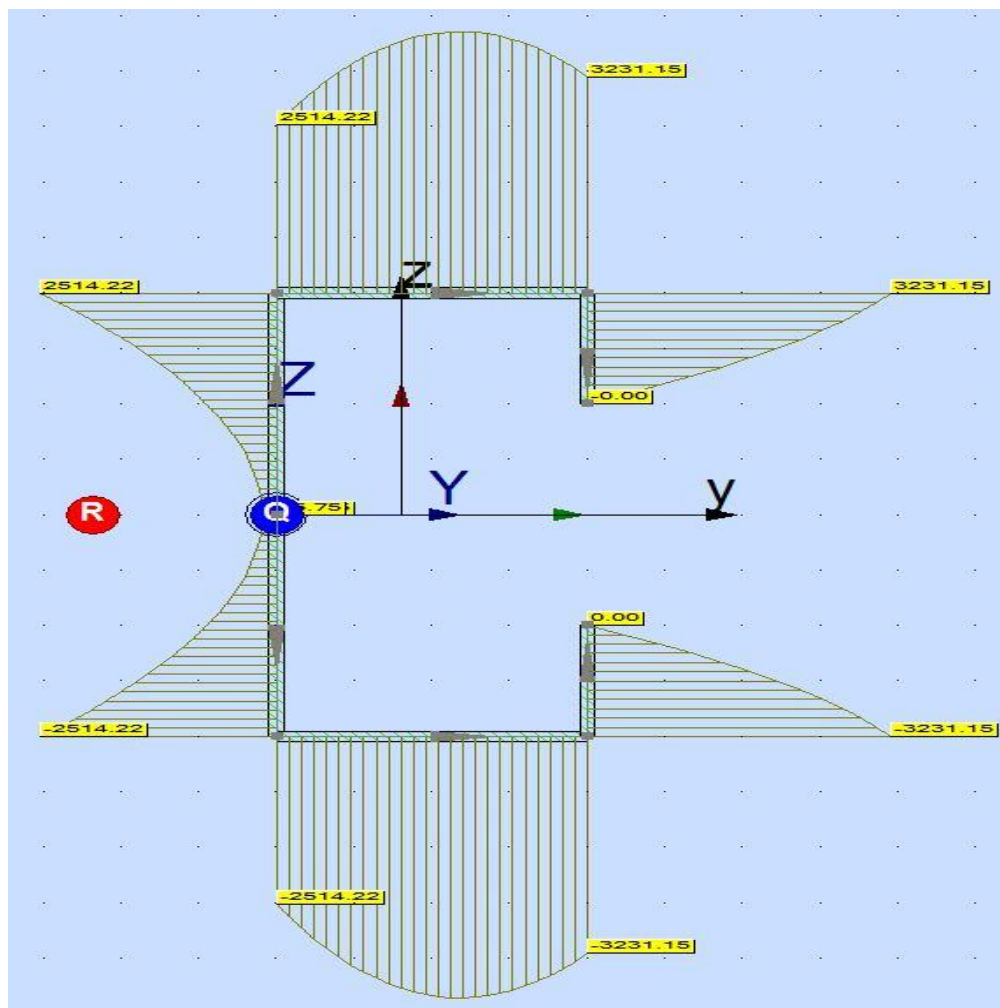
Слика 61. Дијаграм промене -  $S_y(s)$



Слика 62. Дијаграм промене -  $S_z(s)$



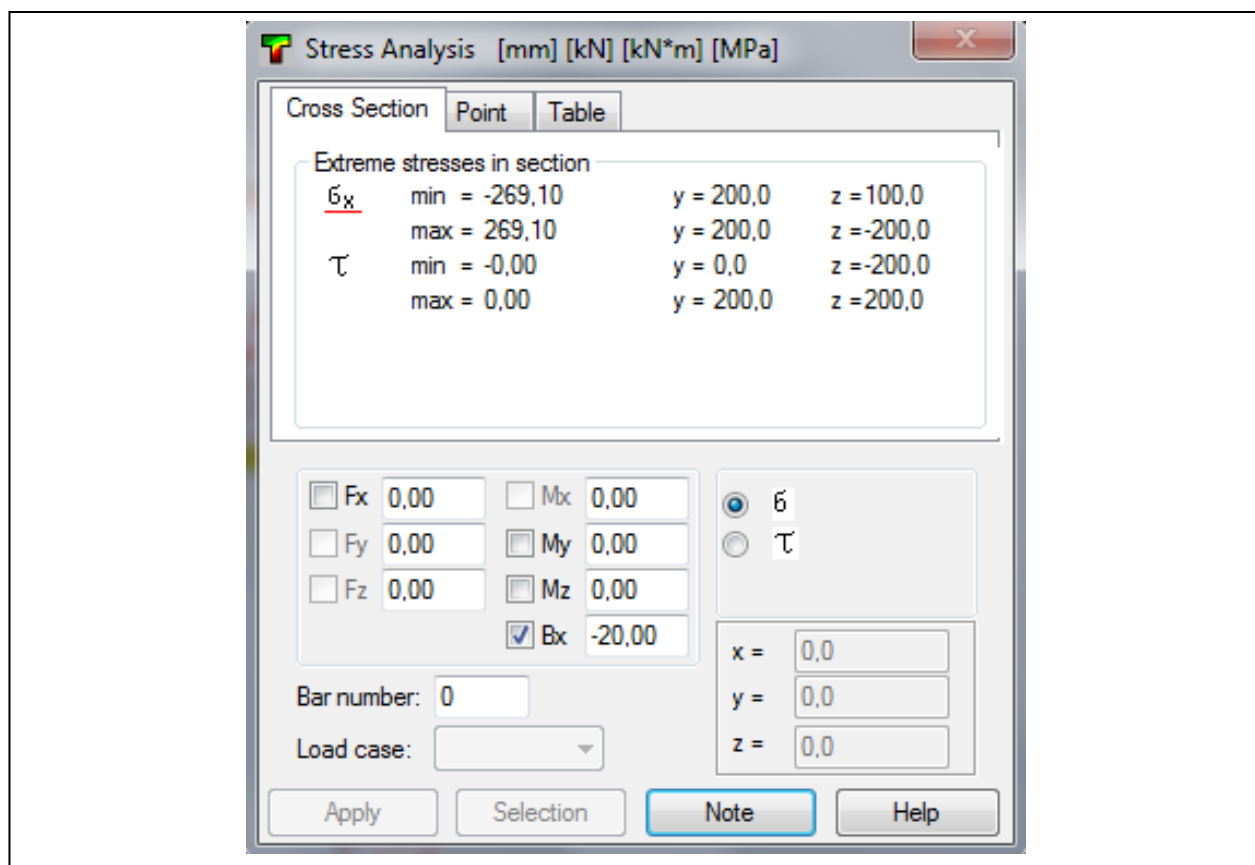
Слика 63. Дијаграм промене површине –  $A$



Слика 64. Дијаграм секторског статичког момента  $\overline{S_\Omega}$

Након очитавања резултата и приказа дијаграма промена секторских карактеристика попречног пресека профила, треба очитати и анализу нормалног и смицајног напона. Ова функција се врши преко подмодула *Stress Analysis*, који се налази на дну командног панела са десне стране. Приказ овог прозора може се видети на *слици 65*.

Овај подмодул представља и најбитнију функцију целе анализе у овом софтверском окружењу, јер даје 3Д приказ профила, као и нормална и смицајна напонска оптерећења. Када се отвори прозор *Stress Analysis*, са десне стране се налази прозор који где се могу видети минимални и максимални напони, као и растојања између координата. Може се задавати сила и бимомент по  $x$  - оси, као и моменти по  $y$  и  $z$  оси. Са леве стране је поменути 3Д приказ, а кликом на картицу *Note* добија се приказ у *Word* документу, прилагођен кориснику за штампање. На *слици 66*, приказан је изглед резултата преведен у *Word* документ.



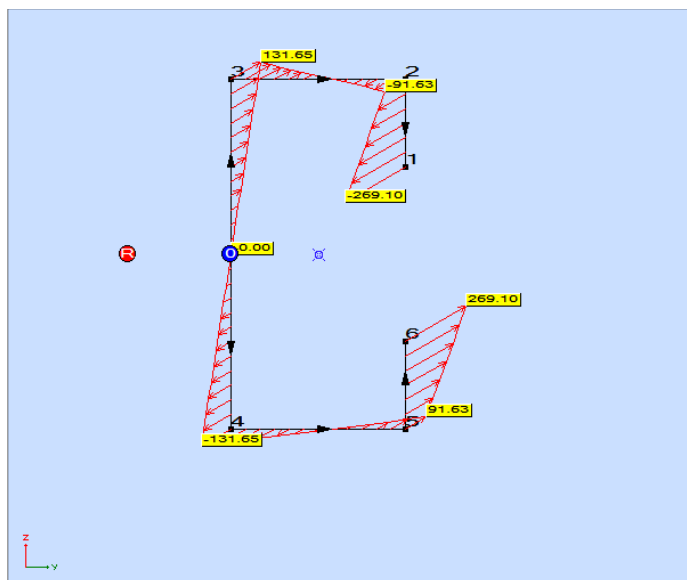
**Слика 65.** Приказ подмодула *Stress Analysis*

Autodesk Robot Structural Analysis Professional2014  
 Author: **Lazarevic Pavle**  
 Address:

File: **Project Structure.rtd**  
 Project: Project Structure

## STRESS ANALYSIS IN THE BAR

### CROSS SECTION



Stress analysis type (hypothesis) : Normal

**Internal forces taken into account :** Bx

### RESULTS IN THE SECTION

#### **Forces applied to the section**

**Fx** = 10.00 kN      **Mx** = 10.00 kN\*m  
**Fy** = 10.00 kN      **My** = 10.00 kN\*m  
**Fz** = 10.00 kN      **Mz** = 10.00 kN\*m  
**Bx** = -20.00 kN\*m2

#### **Extreme stresses in the section**

|          | <b>S<sub>x</sub> max</b> | <b>S<sub>x</sub> min</b> | <b>  t   max</b> | <b>  t   min</b> |
|----------|--------------------------|--------------------------|------------------|------------------|
| Stresses | 269.10 MPa               | -269.10 MPa              | 0.00 MPa         | 0.00 MPa         |
| Y local  | 200.0 mm                 | 200.0 mm                 | 200.0 mm         | 0.0 mm           |
| Z local  | -200.0 mm                | 100.0 mm                 | 200.0 mm         | -200.0 mm        |

Date : 20/11/16

Page : 1

*Слика 66. Оптерећење при утицају нормалних напона у оквиру програма Microsoft Word*

Само приказивање резултата, ма колико оно било погодно за преглед, није довољно ако се не може документовати на папиру. За ту потребу креирана је иконица *Printout Composition* која служи за стандардизовање приказа резултата. Активирањем ове иконице отвара се прозор који је подељен на два дела. На левом делу прозора налази се стандардна база резулта и појединачним селектовањем и кликом на иконицу *Open* преводи се у десни део прозора у коме се двокликом отварају резултати у програму *Microsoft Word*. Резултати се могу отварати и у *Microsoft Excel*-у или било ком интернет претраживачу.

У току прегледа резултата на моделу се могу директно фотографисати резултати који се јављају као кориснички у претходно поменутом прозору.

Резултати се приказују у стандардној форми, са оквиром и заглављем у које се уноси аутор пројекта, адреса, назив пројекта и у том смислу олакшава се њихово документовање.

*Robot Structural Analysis*, као што се може и приметити, веома брзо и ефикасно може обрадити структурну анализу, како стандардизованих тако и нестандартних профила. Структурна и напонска анализа у оквиру *Autodesk Robot* – а приказала је једноставне и врло прецизне резултате. Ипак, софтвер не пружа могућност да се анализа изврши до краја, што вероватно узрокује тзв. „студентска“ верзија овог пакета, која не даје све бенефите и модуле које би пружила оригинал верзија, која је, свакако, тренутно недоступна због велике цене.

## 4. Закључак

Металне конструкције поседују специфична својства и значајне техничке и функционалне предности у односу на друге грађевинске материјале и зато имају широку примену за све врсте грађевинских и машинских конструкција. Такође, карактерише их изузетно брз тренд развоја који је проузрокован појавом и развојем нових савремених метода прорачуна и анализе, нових високо софистицираних конструкцијских система, затим развој потпуно аутоматизованих система за израду радионичке документације на рачунару, као и система за израду конструкција у радионици и нових поступака монтаже на градилишту.

Основна карактеристика лаких конструкција је тело чије су све три димензије величине различитих редова, то јест дужина је много већа од ширине попречног пресека, а ширина попречног пресека је много већа од дебљине зида.

Појам торзије подразумева увијање објекта услед примене момента силе. Слободна торзија је дефинисана према теорији *Сен-Венана* – код слободног увијања неког танкозидног штапа отвореног профила, долази само до „упредања“ елемената пресека, чија влакна не мењају своју дужину. Ограничена или ометена торзија представља случај када је један крај штапа укљештен. Осим увијања елементи штапа изложени су и савијању.

У овом раду су детаљно описана три начина за одређивање секторских карактеристика попречног пресека профила, као и напони који настају услед ометене торзије. Према класичној верзији, редом се одређују основне секторске карактеристике, тзв. метода решавања „пешака“, што је до скоро била једина и основна метода, која користи графичке методе – премножавање дијаграма, као што се може видети у поглављу 2.1.

Због преобимног прорачунавања и у циљу упрошћавања целе прорачунске ситуације, упоредо са развојем нових технологија и софтверских система, развијена је анализа према *EVROCODE* стандардима. Еврокод пружа могућност инжењерима пројектантима да у потпуности искористе еласто-пластична својства челика и прецизно утврде носивост попречних пресека или елемената, посебно узимајући у обзир понашање челика као материјала изван еластичне области деформација.

У Еврокоду примењује се метода граничних стања заснована на полупробабалистичком концепту прорачуна. Примена оваквих метода прорачуна омогућава пројектовање рационалних челичних конструкција што је био један од основних разлога за увођење нових метода прорачуна и нових прописа, а имајући у виду вечиту тржишну утакмицу.

Најразвијеније земље Европе, чланице Европске Уније, пре више од двадесет година, започеле су рад у циљу усаглашавања националних техничких прописа и стандарда из области грађевинског конструисања. Програмом Еврокода за конструкције предвиђено је девет делова. Један од њих је прорачун челичних конструкција означен као Еврокод 3 (EC3). При стварању Еврокодова примењивали су се принципи једноставности, систематичности и униформности.

У поглављима 2.2.1 и 2.2.2 детаљно је описано одређивање смичућих и нормалних напона за добијање ометене торзије, према Еврокоду 3. Суштина ових анализа огледа се у што квалитетнијем прорачуну секторских карактеристика профила, што касније омогућава врло једноставно одређивање нормалних и смичућих напона, као и ометене торзије.

Данас је инжењерски посао готово незамислив без помоћи рачунара. Применом рачунара поступак је вишеструко убрзан и олакшан. Ипак, то није главна предност оваквог поступка. Рачунари су преузели рачунски део посла који је био све тежи како су конструкције постајале веће и компликованије. С обзиром на то, инжењеру преостаје велика слобода за осмишљавање нових видова конструкција остављајући увек места за нека додатна побољшања. На тај начин, поступак се могао понављати више пута све док се не би пронашло задовољавајуће решење.

За озбиљније анализе представљен је програмски пакет *Autodesk Robot Strucural Analysis*. На конкретном примеру танкозидног профила приказане су делимичне могућности овог софтверског пакета. Све анализе вршене су према *EVROCODE* стандардима.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буђевац Д., Марковић З. и др., Металне конструкције, Грађевинска књига, Београд, 2007.
- [2] Лаке металне конструкције – спречена торзија, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Moodle portal, приступљено септембра 2016.
- [3] Лаке металне конструкције – презентација, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Moodle portal, приступљено септембра 2016.
- [4] [https://bs.wikipedia.org/wiki/Torzija\\_\(mehanika\)](https://bs.wikipedia.org/wiki/Torzija_(mehanika)), приступљено септембра 2016.
- [5] Петковић З., Металне конструкције у машиноградњи 2, Машински факултет у Београду, Београд, 2005.
- [6] Николић Р., Марјановић В., Металне конструкције – Приручник за прорачуне, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 1998.
- [7] Николић Р., Вељковић Ј., Марјановић В., Металне конструкције – збирка решених задатака, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Крагујевац 2013.
- [8] Марковић З. Гранична стања челичних конструкција према ЕВРОКОДУ, Академска мисао, Београд, 2014.
- [9] Компјутерска анализа конструкција, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Moodle portal, приступљено септембра 2016.
- [10] [http://www.monarch.hu/\\_arak/\\_eng/adesk-arak-ip.shtml](http://www.monarch.hu/_arak/_eng/adesk-arak-ip.shtml) , приступљено октобра 2016.
- [11] <http://www.autodesk.com/products> , приступљено октобра 2016.

- [12] <https://adaptsolutions.wordpress.com/rsa/> , приступљено октобра 2016.
- [13] Денић М., Прорачун и конструисање решеткастих носача применом савремених софтверских решења, мастер рад, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац, 2015.