

**Факултет инжењерских наука
Универзитета у Крагујевцу**



**Назив студијског програма: Машинско инжењерство
Ниво студија: Основне академске студије
Модул: Машинске конструкције и механизација
Предмет: Основи поузданости машинских конструкција
Број индекса: 33 / 2007**

Арсин Б. Стефан
Моделирање поузданости
елемената машинских система
завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Проф. др Добривоје Ћатић
2. _____
3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

Резиме

Поузданост машинског система се дефинише као вероватноћа да ће систем исправно радити у одређеном временском периоду. У раду су прво објашњени неки основни појмови везани за саму поузданост. Након тога је било речи о моделима расподеле времена исправног рада, као што је Вејбулова расподела. Акценат је стављен на мали и велики узорак као и на програм који израчунава њихову вредност.

Кључне речи: поузданост система, Вејбулова расподела, густина расподеле, интензитет отказа, велики узорак, мали узорак.

Abstract

The reliability of the mechanical system is defined as a probability that the system will work during a defined time period. In the thesis were firstly explained some of the basic principles of the reliability. After that i was discusted about the types of the distribution of the time of corect work, Weibull's distribution. The accent of this work is at the small and big sample and the programe which is written to calculate them.

Key words: the reliability of the system, Weibull's distribution, distribution density, intensity of the collapse big and small sample(of Weibull's distribution)

Садржај

1. Увод.....	3
2. Основни појмови везани за поузданост и показатељи поузданости... 4	4
2.1 Показатељи поузданости.....	5
2.2 Функција интезитета отказа и век трајања система	8
3. Одређивање закона расподеле времена рада до отказа	10
3.1 Увод.....	10
3.2 Процена показатеља исправног рада	11
3.2.1 Бројне карактеристике времена рада до отказа.....	11
3.3 Процена вредности потпуних карактеристика времена рада до отказа	18
3.3.1 Мали узорак.....	19
3.3.2 Велики узорак.....	20
3.4 Тестирање расподеле	23
3.4.1 Тест Пирсона	24
3.4.2 Тест Колмогорова	26
3.4.3 Тест Мисеса	27
4. Модели расподеле	29
4.1 Случајне величине и закони њихове расподеле	29
4.2 Функција и низ расподеле.....	30
4.3 Густина расподеле	31
4.4 Континуални закони расподеле појављивања отказа.....	32
4.4.1 Вејбулова расподела	32
5. Програм за одређивање процењених вредности показатеља исправног рада.....	36
5.1 Пример за мали узорак	37
5.2 Пример за велики узорак.....	40
6. Закључак.....	46
7. Литература	47

1. УВОД

Од савремених техничких система захтева се висок ниво поузданости, уз истовремено смањење трошкова и скраћења времена развоја.

У свакодневном животу врло често су у употреби појмови који се односе на поузданост техничких производа и објеката [1]. Њихово значење се обично подразумева. Међутим, ради квантитативног одређивања поједних величина и параметара који карактеришу те појмове, неопходно их је прецизно дефинисати. Егзактан приступ овом проблему базира се на теорији поузданости као научној дисциплини која се бави проучавањем законитости, којих се треба придржавати при пројектовању, конструисању, испитивању, производњи и експлоатацији техничких производа, како би они имали што дужи радни век, а тиме и максимални радни учинак.

Поузданост је вероватноћа, на одређеном нивоу поверења, да ће систем успешно, без отказа, обавити функцију за коју је намењен, унутар специфицираних граница перформанси, у току специфицираног времена трајања задатака, када се користи на прописани начин и у сврху за коју је намењен, под специфицираним нивоима оптерећења, узимајући у обзир и претходно време коришћења система.

Историјски, развој науке о поузданости је релативно кратак али буран [2]. Сматра се да прва испитивања поузданости почињу са прикупљеним података о отказима појединих агрегата на авионима тридесетих година прошлог века, када и почиње експанзија коришћења авиона. На бази ових података могли су се добити и први показатељи поузданости, као што је на пример средњи број отказа по авиону. Почетком четрдесетих година утврђује се пропис да авиони могу имати највише један отказ на десет хиљада часова лета, с обзиром на висок степен опасности таквог отказа. Математичка теорија поузданости најпре се развила четрдесетих година у Сједињеним Америчким Државама и педесетих у Совјетском савезу, што је било у вези са проучавањем радио и електронских система у главном за потребе војне технике. Касније су проблеми поузданости проширени и на машинство, што је било у вези с неопходним обезбеђењем поузданости машина. Захтеви за поузданошћу све више расту, тако да су данас у развијеним земљама разрађени посебни прописи којима се прецизирају технички услови поузданости одговорних система.

Поузданост стога игра све већу улогу, поготово у сектору техничких производа као што су возила, ручни алати или потрошачка електроника где се због великог броја функција, као и сложености њиховог извршавања врло брзо утврђује степен поузданости.

Наука о поузданости техничких направа и система се темељи на примени теорије вероватноће и математичке статистике. Ове математичке дисциплине су омогућиле разраду специјалних метода прорачуна основних показатеља поузданости.

2. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ВЕЗАНИ ЗА ПОУЗДАНОСТ И ПОКАЗАТЕЉИ ПОУЗДАНОСТИ

Ради лакшег и јаснијег проучавања поузданости техничких система потребно је прво дефинисати неке основне појмове из области поузданости као што су: објекат поузданости, параметар функционисања, радна способност, отказ, време исправног рада, гранично стање објекта и радни век.

Објекат у теорији поузданости представља предмет на који се поузданост односи. Објекат поузданости може бити технички систем или његови елементи.

Параметри функционисања карактеришу различита својства објекта као што су: показатељи тачности функционисања, механичке карактеристике, кинематски и динамички показатељи, економски показатељи, експлоатациони показатељи итд.

Радна способност представља стање објекта при коме је он способан да извршава своју задату функцију, а да при томе одређени параметри функционисања не пређу граничне вредности.

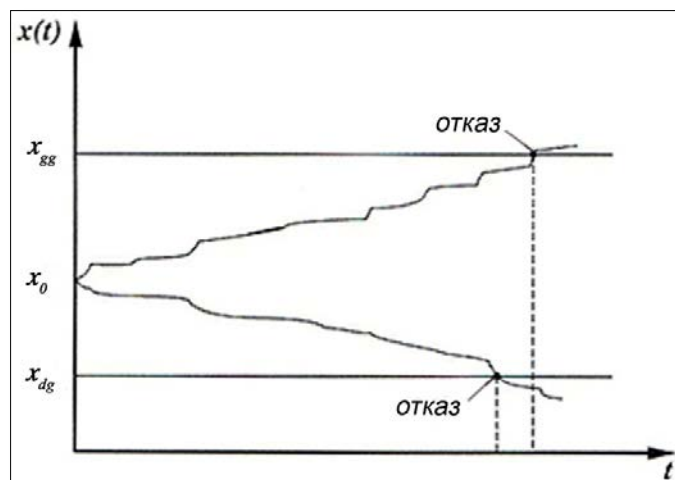
Отказ је један од основних појмова који фигуришу при разматрању поузданости и сигурности машинских и уопште техничких система.

Отказ објекта је догађај који има за последицу губитак радне способности. Под термином „догађај“ подразумева се динамичка промена стања система, што значи да појава отказа доводи до непланираног и непожељног стања система.

Отказ наступа када после извесног временског периода рада било који параметар функционисања достигне граничну вредност.

Време рада до отказа обухвата временски период исправног рада објекта до наступања отказа. Ово време је ефективно време функционисања објекта.

Отказ и време исправног рада могу се дефинисати посматрањем зависности карактеристичних параметара функционисања у функцији од времена, чија је илустрација дата на слици 2.1.



Слика 2.1 Дијаграм зависности карактеристичног параметра функционисања x од времена t

Посматрани параметар функционисања на почетку рада система има вредност x_0 али у току времена (рада) он се мења. Ако у неком тренутку параметар функционисања достигне било горњу граничну вредност x_{gg} , или доњу граничну вредност x_{dd} , доћи ће до отказа система.

Гранично стање објекта представља оно стање при коме даљу експлоатацију објекта треба прекинути. Оно настаје када је даље економски неоправдано извршавати поправку објекта.

Радни век објекта је временски период који обухвата целокупно време експлоатације објекта, узимајући у обзир систем ремонта објекта.

2.1 Показатељи поузданости

Са проблемом квантитативног изражавања поузданости повезан је појам показатеља поузданости. Под овим појмом подразумева се квантитативна карактеристика неког од својстава које одређује поузданост.

До квантитативних података о поузданости може се углавном доћи на следећа три начина: прорачуном, лабораторијски и у току експлоатације.

Први начин је посебно интересантан за уређаје или системе [1]. Поступак се састоји у утврђивању степена поузданости на основу познавања поузданости компонената или блокова, кола уређаја и предвиђених режима рада. Тако утврђена поузданост је прорачуната поузданост. Од значаја је при развијању нових типова уређаја и система, када се у фази пројектовања узима у обзир потребна поузданост као један од захтева који треба да испуни пројектовани уређај.

Други начин добијања података о поузданости је лабораторијски. Постоје разне нормалне и убрзане статичке и динамичке методе утврђивања поузданости у лабораторијским условима. Испитивања се врше било у нормалним, било у посебним режимима рада.

Најзад, најприроднији начин добијања података о поузданости је на основу експлоатације. Специфичан проблем који се при томе јавља је организација добијања информација и веродостојност.

С обзиром на то како је податак о поузданости формиран, говори се о утврђеној, оцењеној, екстраполираној, прогнозираној и стварној поузданости. Било којој карактеристици поузданости даје се једна од ових верзија. Верзија “утврђен” односи се на податке добијене на основу испитивања у којем сви испитни узорци нису престали да раде. Верзија “оцењен” односи се на податке који су одређени са одговарајућим нивоом веродостојности и представљају граничну вредност интервала веродостојности. Верзија “екстраполиран” односи се на податке о поузданости у датим условима рада који су дефинисани екстраполацијом или интерполацијом утврђених или оцењених података о поузданости у другим условима рада. Верзија “прогнозиран” односи се на податке прорачунате на основу утврђене, оцењене или екстраполиране поузданости. Верзија “стварна” односи се на податак добијен на основу испитивања у току којег су сви узорци престали да раде. Математичка представа показатеља поузданости је повезана са теоријом вероватноће и математичком статистиком.

Први показатељ поузданости који се односи на исправност објекта представља вероватноћа безотказног рада [3]. Овај показатељ даје оцену вероватноће да у одређеном временском периоду неће доћи до појаве отказа, односно да ће објекат исправно радити.

Ако је T случајна променљива величина која означава време појаве отказа, онда ће вероватноћа отказа у функцији времена бити једнака:

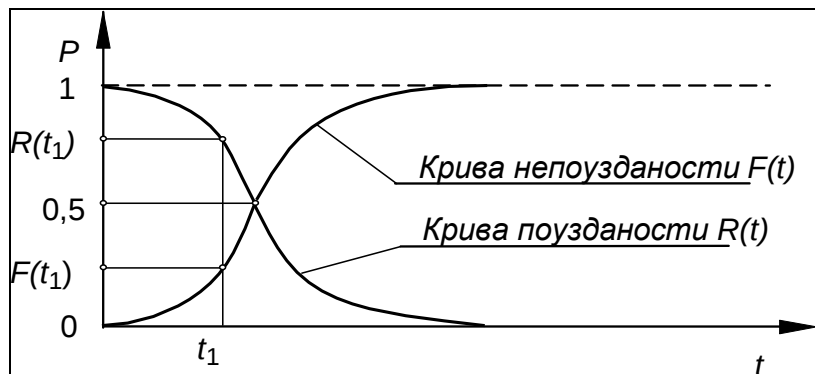
$$P(T \leq t) = F(t), t \geq 0. \quad (2.1)$$

Функција $F(t)$ зове се функција расподеле отказа и она показује вероватноћу да ће систем отказати до времена t . У теорији вероватноће ова функција се зове кумулативна функција расподеле. Ако се поузданост система означи као вероватноћа безотказног рада у временском интервалу t , може се писати:

$$R(t) = 1 - F(t) = P(T > t), \quad (2.2)$$

где $R(t)$ означава функцију поузданости.

На слици 2.2 приказане су функционалне зависности $F(t)$ и $R(t)$.



Слика 2.2 Функционалне зависности $F(t)$ и $R(t)$

Показатељ вероватноће исправног рада $R(t)$ се креће у границама од 0 до 1. Када показатељ $R(t)$ има вредност 0 каже се да је објект непоуздан, а када је $R(t) = 1$ објект је сигуран.

Функцију густине отказа се обележава са $f(t)$, а на основу основних закона из теорије вероватноће може се написати да је:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}. \quad (2.3)$$

Према теорији вероватноће ова функција се зове функција густине вероватноће. На основу претходних дефиниција може се написати израз за функцију поузданости:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt = \int_t^{\infty} f(t)dt. \quad (2.4)$$

Дакле, довољно је знати облик функције $f(t)$ па да се добије функција поузданости $R(t)$. Претпоставља се да се истовремено испитује n система. После одређеног времена t , n_1 система нису отказали, а n_2 система су отказали при чему је $n_2 = n - n_1$. Према овоме и на основу до сада реченог о поузданости, $R(t)$ се може изразити као:

$$R(t) = \frac{n_1(t)}{n} = \frac{n_1(t)}{n_1(t) + n_2(t)}. \quad (2.5)$$

Значи да ова једначина показује вероватноћу безотказног рада било ког од n система у току времена t , јер је она као што је речено функција времена. По логици ствари, јасно је да како t расте, све више и више система отказује, што значи да ће поузданост опадати. Претходна једначина се може написати у следећем облику:

$$R(t) = \frac{n - n_2(t)}{n} = 1 - \frac{n_2(t)}{n}. \quad (2.6)$$

Лева и десна страна претходне једначине се могу диференцирати па се добија следеће:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{d[1 - \frac{n_2(t)}{n}]}{dt} = -\frac{1}{n} \frac{dn_2(t)}{dt}, \quad (2.7)$$

где је n константно.

На основу овог се добија израз за фреквенцију са којом систем отказује:

$$\frac{dn_2(t)}{dt} = -n \frac{dR(t)}{dt}. \quad (2.8)$$

Сада је могуће обе стране претходне једначине поделити са $n_1(t)$:

$$\frac{1}{n_1(t)} \frac{dn_2(t)}{dt} = -\frac{n}{n_1(t)} \frac{dR(t)}{dt}. \quad (2.9)$$

Из претходне једначине се може дефинисати функција интензитета отказа $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{1}{n_1(t)} \frac{dn_2(t)}{dt} = -\frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt}. \quad (2.10)$$

Одавде се може добити општа формула за функцију поузданости $R(t)$. Може се написати да је:

$$\frac{dR(t)}{R(t)} = -\lambda(t)dt, \quad (2.11)$$

односно:

$$\int_1^R \frac{dR(t)}{R(t)} = -\int_0^t \lambda(t)dt, \quad (2.12)$$

односно:

$$\ln R(t) = -\int_0^t \lambda(t)dt, \quad (2.13)$$

и на крају:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}. \quad (2.14)$$

Формула (2.14) математички описује поузданост на најопштији начин и може се применити за било коју функцију густине отказа. Из једначине (2.2) може се написати да је:

$$F(t) = 1 - R(t), \quad (2.15)$$

па се заменом у једначини (2.3) добија:

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}. \quad (2.16)$$

Имајући у виду израз (2.16), функција интензитета отказа како је дефинисано изразом (2.10) може се написати и у следећем облику:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}. \quad (2.17)$$

Значај ове функције је у томе што показује како се у току времена мења интензитет отказа неког система.

Јасно је да први део збира тежи нули за обе границе на основу дефиниције $R(t)$ преко $\lambda(t)$, јер је у питању експоненцијална функција, а xe^{-x} када x тежи ∞ тежи нули. На основу овога, облик за очекивано време безотказног рада система је дат изразом:

$$T_{sr} = \int_0^{\infty} R(t)dt. \quad (2.20)$$

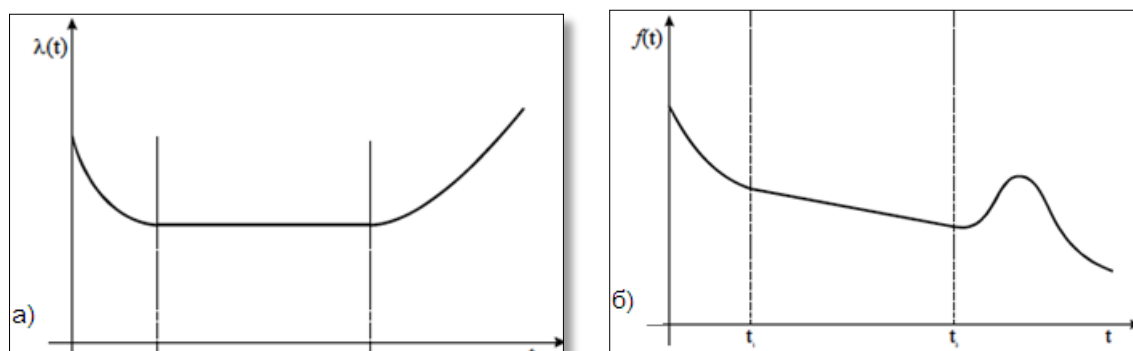
Ако се систем који се испитује обнавља одржавањем или поправкама, тј. у случају такозваних обновљивих система, очекивано време безотказног рада је познато под називом средње време између отказа (*MTBF – Mean Time Between Failure*). При томе је јасно да се полази од претпоставке да је понашање поправљеног система у погледу интензитета отказа исто као код новог система. Код такозваних непоправљивих система говори се о средњем времену рада до првог отказа, или једноставно о средњем времену до отказа (*MTTF – Mean Time To Failure*). Величине *MTBF* и *MTTF* треба увек користити када је специфицирана функција густине отказа, јер ниво поузданости који се може приписати одређеној вредности *MTBF* и *MTTF* зависи од облика те функције. Ако се посматра n система који се испитују, при чему се бележе времена рада између отказа $t_1, t_2, \dots, t_n$ онда ће *MTBF* бити:

$$MTBF = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i. \quad (2.21)$$

2.2 Функција интензитета отказа и век трајања система

У почетку коришћења неког система обично се јавља већи број отказа који се могу приписати почетним слабостима или пропуштеним дефектима у току производње [1]. Касније, ови такозвани рани откази уступају место отказима за које је тешко утврдити узрок настајања. То су такозвани случајни откази, чије се време појављивања не може предвидети, али зато се зна фреквенција појављивања отказа. Старењем система почињу да се јављају откази услед истрошености. На слици 2.3 а) су приказани периоди промене $\lambda(t)$ за сва три интервала, а на слици 2.3 б) облици функције густине расподеле отказа $f(t)$.

У периоду раних отказа (0 до t_1) $\lambda(t)$ и $f(t)$ су опадајуће функције. За карактеристику случајних отказа (t_1 до t_2) приближно је константна вредност $\lambda(t)$ и приближно експоненцијална функција $f(t)$. У периоду старења (t_2 до ∞) $\lambda(t)$ је растућа функција, док $f(t)$ има један врх око кога се дешава највећи број отказа. Из овог разматрања може се видети да је функција $\lambda(t)$ погоднија од $f(t)$ када се жели направити разлика између разних облика отказа.



Слика 2.3 Општи облик функција $\lambda(t)$ и $f(t)$

Искуство је показало да многи системи имају криву интензитета отказа како је већ показано на слици 2.3 а). Многи произвођачи опреме високе поузданости пуштају ту опрему да ради како би је довели на почетак интервала константних отказа. Тек онда је уграђују у неки систем.

На жалост, многи системи имају континуално опадајућу и континуално растућу функцију интензитета отказа, па се на њих не може применити облик криве $\lambda(t)$ са слике 2.3 а).

3. ОДРЕЂИВАЊЕ ЗАКОНА РАСПОДЕЛЕ ВРЕМЕНА РАДА ДО ОТКАЗА

3.1 Увод

Када су у питању машинске конструкције, објекат поузданости може да буде машински систем или његова саставна целина (подсистем, склоп, подсклоп или елемент) [2].

Променљива величина, која бројно карактерише реализацију овог догађаја, је случајна променљива. Ако су у питању објекти, чија се радна способност одговарајућим поправкама обнавља (поправљиви објекти), случајна променљива може да буде време рада до првог отказа или време рада између отказа. За објекте, чија се радна способност не може обновити, већ се морају заменити новим (непоправљиви објекти), случајна променљива се назива време рада до отказа [12]. Случајне променљиве величине могу да буду дискретне и континуалне [6]. Под дискретном случајном променљивом, у теорији вероватноће, подразумева се случајна променљива која узима коначан број вредности. Случајна променљива је континуална (непрекидна), ако са позитивном вероватноћом може узети произвољну бројну вредност у одређеном интервалу. Време рада до првог отказа или између отказа машинских објеката представља континуалну случајну променљиву.

Означава се са T , а појединачне вредности се означавају са t_1, t_2, t_3 итд. У општем случају, случајна променљива је потпуно одређена ако је познат закон расподеле. У теорији поузданости, закон расподеле случајне променљиве може да буде дефинисан:

- кумулативном вероватноћом појаве отказа,
- функцијом поузданости,
- функцијом густине отказа или
- функцијом интензитета отказа.

Набројане функције су у међусобној функционалној вези. Довољно је познавати једну функционалну зависност за одређивање осталих. Због потпуног дефинисања случајне променљиве, набројане функције се називају потпуним карактеристикама времена рада до отказа.

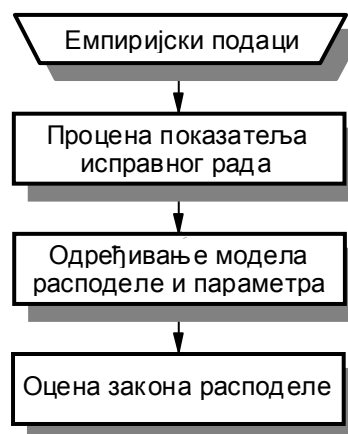
Осим потпуног функционалног дефинисања, постоји могућност одређивања бројних карактеристика (параметара) случајне променљиве, односно њене расподеле вероватноћа.

Постоје три групе ових параметара. У прву групу спадају параметри који репрезентују центар растурања (дисперзије) случајне променљиве. Другу групу чине параметри који мере то растурање око центра растурања и на крају, у трећу групу спадају параметри који ближе одређују геометријски облик расподеле.

Испитивање машинских објеката за оцену поузданости долази се до одређеног броја подата о вредностима времена рада до отказа.

Поступак за одређивање закона расподеле времена рада до отказа, на основу емпиријских података, спроводи се у три корака (слика 3.1) [4].

У првом кораку врши се процена показатеља исправног рада. Одређују се бројне карактеристике статистичког скупа (средње време рада до отказа, медијана, мода, стандардно одступање, коефицијент асиметрије и коефицијент ексцеса), и врши се процена вредности потпуних карактеристика случајне променљиве (функција расподеле, поузданост, густина расподеле и интензитет отказа). У другом кораку, на основу вредности добијених у првом кораку, врши се одређивање теоријског модела расподеле који би могао да се користи за апроксимацију емпиријске расподеле. Након тога, одређују се параметри изабраног модела.



Слика 3.1 Алгоритам поступка за одређивање закона расподеле времена рада до отказа

Потврда сагласности усвојеног теоријског модела расподеле са емпиријском расподелом врши се у трећем кораку.

У наредним поглављима детаљно је изложена теоријска основа неопходна за разматрање ове проблематике.

3.2 Процена показатеља исправног рада

За утврђивања теоријског закона расподеле времена рада до отказа, потребно је да се одреде бројне карактеристике статистичког скупа података и процењене вредности потпуних карактеристика. На основу вредности и међусобних односа израчунатих параметара и графика процењених вредности потпуних карактеристика, добија се читав низ информација о могућем теоријском моделу расподеле, који се може користити за апроксимацију емпиријске расподеле.

3.2.1 Бројне карактеристике времена рада до отказа

Од параметара, који репрезентују центар растурања случајне променљиве, највећи практичан значај за утврђивање теоријског закона расподеле имају математичко очекивање, које се често назива и средњом вредношћу случајне променљиве, медијана и мода.

Из друге групе параметара, који карактеришу растурање случајне променљиве, као што су варијациони интервал вредности, средње апсолутно одступање, дисперзија, стандардно одступање и коефицијент варијације, за утврђивање закона расподеле се најчешће користи стандардно одступање.

Трећу групу параметара чине коефицијенти асиметрије и ексцеса. Изрази за бројне карактеристике случајне променљиве времена рада до отказа T , који су дати у наставку поглавља, изведени су на основу израза за карактеристике произвољне континуалне случајне променљиве X [5].

Облици закона расподеле за дискретне и непрекидне случајне величине (функција расподеле, низ расподеле, густина расподеле) представљају неке функције које потпуно описују случајну величину.

У многим случајевима из праксе није неопходно да се случајна величина опише у потпуности, и да се одређују закони њене расподеле. Најчешће је довољно да се знају неки бројни параметри, који у одређеном степену карактеришу суштинске особине расподеле случајне променљиве. На пример, од интереса је бројни параметар који показује неку средњу вредност око које се групишу могуће вредности случајне променљиве, или параметар који показује степен растурања вредности случајне величине у односу на средњу вредност.

Овакви бројни параметри називају се бројним карактеристикама случајне променљиве (параметри расподеле).

Бројне карактеристике случајне променљиве имају важну улогу у теорији вероватноће. Многи проблеми се решавају само операцијама са бројним карактеристикама, а да се о законима расподеле и не води рачуна. Нарочито је значајна особина да, уколико се у некој појави јавља више случајних величина, од којих свака има извесни утицај на исход појаве, тада закон расподеле резултујуће случајне величине не зависи од закона расподеле појединих случајних величина, тако да није потребно да се знају закони расподеле појединачних случајних величина. На основу бројних карактеристика тих величина, знајући да ће се резултантни утицај понашати по тзв. нормалном закону расподеле, могуће је одредити његове параметре.

Једна од најважнијих бројних карактеристика случајне величине, која даје неку средњу вредности случајне величине, назива се математичко очекивање или средња вредност случајне величине. Ова карактеристика описује положај случајне величине на бројној оси.

Математичко очекивање $M[X] = m_x$ дискретне случајне величине X , која може да добије вредност $x_1, x_2, \dots, x_n$ са одговарајућим вероватноћама $p_1, p_2, \dots, p_n$, дефинисано је изразом:

$$M[X] = m_x = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}. \quad (3.1)$$

Како је:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad (3.2)$$

добива се за m_x израз:

$$m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (3.3)$$

Случајна величина X , чија је функција расподеле $F(x)$, има математичко очекивање у виду Стилтјесовог (Stieltjes) интеграла:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x). \quad (3.4)$$

Аналогија између израза (3.2) и (3.4) је очигледна. Уместо прекидне вредности случајне променљиве x_i , узима се непрекидна вредност x , уместо вероватноће појединих вредности x_i долази елемент вероватноће $f(x)dx$, а уместо збира интеграл. Треба имати у виду да егзистенција вредности m_x зависи од егзистенције израза (3.2) односно (3.4).

Осим карактеристика положаја (средњих вредности), које представљају типичне вредности случајне величине, употребљавају се карактеристике расподеле вредности случајне променљиве око средњих вредности. Ове бројне карактеристике називају се моменти по аналогији са моментима из механике. Најчешће се користе централни моменти, који се дефинишу преко централне случајне величине X_c :

$$X_c = X - m_x.$$

Централни моменти k -тог степена дискретне случајне величине X назива се математичко очекивање k -тог степена одговарајуће центриране случајне величине:

$$M[(X - m_x)^k] = m_k = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^k p_i. \quad (3.5)$$

За непрекидну случајну величину X , одговарајући централни моменат k -тог реда може да се напише у облику:

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx. \quad (3.6)$$

Од централних момената, од посебног је интереса други централни моменат, који се још назива и дисперзијом случајне величине X . За дискретну случајну величину, дисперзија D_x је дата изразом:

$$D_x = m_2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - m_x^2, \quad (3.7)$$

а за непрекидну:

$$D_x = m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (3.8)$$

Дисперзија је карактеристика растурања вредности случајне променљиве око њеног математичког очекивања. Уколико је мања величина дисперзије, уколико је већи проценат вредности случајне величине из области која непосредно окружује математичко очекивање.

Уместо дисперзије D_x , која има размеру квадрата случајне променљиве, често је погодније да се користи величина која има размеру саме случајне променљиве. Та величина се назива средње квадратно одступање или стандардно одступање и обележава се са:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (3.9)$$

• **Средње време рада до отказа** представља математичко очекивање случајне променљиве времена рада до отказа T . Означава се са $M(T)$ или t_{sr} . За статистички скуп података о вредностима случајне променљиве T , средње време рада до отказа представља аритметичку средину расположивих вредности случајне променљиве:

$$t_{sr} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n t_i, \quad (3.10)$$

где је:

n - случајне променљиве број вредности,

t_i - i -та вредност случајне променљиве (i -то време рада до отказа).

Ако су вредности случајне променљиве T груписане по интервалима, за израчунавање средњег времена рада до отказа користи се израз:

$$t_{sr} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^z m_i \cdot t_i, \quad (3.11)$$

где је:

- n – број вредности случајне променљиве,
- z – број интервала у којима су груписане вредности,
- m_i – број вредности случајне променљиве (учесталост) у i -том интервалу и
- t_i – средина i -тог интервала.

• **Медијана**, по дефиницији, представља вредност случајне променљиве, чија је кумулативна вероватноћа реализације 0,5 [5]. Означава се са M_e или t_{50} . Индекс у другој ознаци представља кумулативну вероватноћу реализације у процентима. За континуалну случајну променљиву T , која је дефинисана густином расподеле $f(t)$, медијана се одређује из израза:

$$F(M_e) = F(t_{50}) = \int_{-\infty}^{t_{50}} f(t) dt = 0,5. \quad (3.12)$$

За непаран број података у статистичком скупу вредности случајне променљиве, медијана је једнака бројној вредности средњег резултата у растућем низу, а за паран број података, аритметичкој средини средња два резултата.

Ако су вредности случајне променљиве времена рада до отказа објекта груписане по интервалима са одговарајућим фреквенцијама $m_1, m_2, \dots, m_z$, формирају се суме:

$$m_1, \quad m_1 + m_2, \quad m_1 + m_2 + m_3, \quad \dots$$

док се не наиђе на суме фреквенција отказа које задовољавају услов:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_{k-1} \leq \frac{n}{2} < m_1 + m_2 + \dots + m_k. \quad (3.13)$$

На овај начин, одређен је интервал k у коме се налази централни резултат или резултати код парног броја објеката.

Након тога, медијана се добија из израза:

$$t_{50} = L + \Delta t \cdot \frac{ng(k) - \frac{n}{2}}{m_k}, \quad (3.14)$$

где је:

- L – лева граница k -тог интервала,
- Δt – ширина интервала,
- $ng(k)$ – број радно способних (исправних) објеката на почетку k -тог интервала,
- n – број вредности случајне променљиве и
- m_k – број објеката који су отказали у k -том интервалу.

Геометријски, медијана представља тачку на апсцисној оси ($m = m_{50}$), одакле полази вертикална линија која дели хистограм густине расподеле на два дела са једнаким површинама.

• **Мода** се дефинише као вредност случајне променљиве, за коју график густине расподеле има максимум. За дискретне случајне променљиве, мода се дефинише као вредност случајне променљиве са највећом фреквенцијом. Један статистички скуп може да има једну или више мода. Исто тако може да се деси да мода не постоји.

Ако су статистички подаци о времену рада до отказа распоређени у класе, онда се мода израчунава из израза:

$$M_o = L + \Delta t \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}, \quad (3.15)$$

где је:

L – доња граница k -тог интервала са највећом фреквенцијом случајне променљиве m_k ,

Δt – ширина интервала,

Δ_1 – разлика између фреквенција случајне променљиве k -тог и $k-1$ интервала и

Δ_2 – разлика између фреквенција случајне променљиве k -тог и $k+1$ интервала.

• **Варијациони интервал** вредности случајне променљиве времена рада до отказа:

$$R = t_{\max} - t_{\min}, \quad (3.16)$$

представља разлику између максималне и минималне вредности случајне променљиве. Ова врло једноставна карактеристика растурања случајне променљиве одређује интервал вредности, али не приказује и сам карактер растурања случајне променљиве око центра растурања.

• **Средње апсолутно одступање.** За скуп вредности случајне променљиве T : $t_1, t_2, \dots, t_n$, средње апсолутно одступање дефинише се као:

$$\bar{\theta}_t = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n |t_i - t_{sr}|, \quad (3.17)$$

где је n – укупан број вредности случајне променљиве.

Ако су вредности случајне променљиве T груписане у z интервала са фреквенцијама $m_1, m_2, \dots, m_z$, ргд њему је $\sum_{i=1}^z m_i = n$, средње апсолутно одступање се добија из израза:

$$\bar{\theta}_t = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^z |t_i - t_{sr}| \cdot m_i, \quad (3.18)$$

где је t_i – средина i -тог интервала.

• **Дисперзија (варијанса)**, као мера растурања случајне променљиве, има највећи теоријски и практични значај. За случајну променљиву време рада до отказа дисперзија представља математичко очекивање квадрата одступања случајне променљиве T од $M(T)$:

$$D(T) = M [T - M(T)]^2. \quad (3.19)$$

Ако је познат закон расподеле случајне променљиве T , дисперзија се одређује из израза:

$$D(T) = \int_{-\infty}^{\infty} [t - M(T)]^2 \cdot f(t) \cdot dt. \quad (3.20)$$

За статистички скуп података о вредностима случајне променљиве T , дисперзија се израчунава коришћењем израза:

$$D(T) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - t_{sr})^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - t_{sr}^2. \quad (3.21)$$

Ако су вредности случајне променљиве груписане по интервалима, дисперзија је једнака:

$$D(T) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^z (t_i - t_{sr})^2 \cdot m_i . \quad (3.22)$$

Значење коришћених ознака већ је дато уз израз (3.4).

За број објеката у узорку $n \leq 30$, дисперзија се дефинише тако што се у изразу (3.12) уместо n у имениоцу стави $n - 1$. Тако добијена вредност дисперзије боље репрезентује дисперзију основне популације из које је узорак узет. За вредности $n > 30$, практично нема разлике између ове две дефиниције.

• **Стандардно одступање** се дефинише као позитиван квадратни корен из дисперзије:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^z (t_i - t_{sr})^2 \cdot m_i} \quad (3.23)$$

Изражава се у истим мерним јединицама као и случајна променљива. Све што је речено за дисперзију у вези груписања вредности случајне променљиве по интервалима, важи и за стандардно одступање.

• **Коефицијент варијације** представља релативну меру одступања случајне променљиве. Дефинише се као однос стандардног одступања и средње вредности:

$$K_v = \frac{\sigma}{t_{sr}} . \quad (3.24)$$

Пошто се стандардно одступање и средња вредност случајне променљиве изражавају у истим јединицама, коефицијент варијације омогућава поређење растурања расподела различитих случајних променљивих.

• **Коефицијент асиметрије** се користи као погодно средство за меру асиметрије емпиријске расподеле. За расподелу случајне променљиве дефинише се изразом:

$$K_A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} , \quad (3.25)$$

где је:

μ_3 - трећи централни момент, а

σ - стандардно одступање случајне променљиве.

За дискретан скуп вредности произвољне случајне променљиве X , трећи централни момент се израчунава из израза:

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^3 \cdot p_i , \quad (3.26)$$

где је p_i - вероватноћа појављивања вредности x_i .

Код симетричних расподела, коефицијент асиметрије има вредност $K_A = 0$. У том случају карактеристике центра растурања, на пример случајне променљиве T , имају вредност $t_{sr} = t_{50} = M_o$. Са повећањем апсолутне вредности коефицијента асиметрије, повећава се и асиметричност расподеле.

На слици 3.2 дати су облици графика и однос карактеристика центра растурања за, под а), случај када коефицијент асиметрије има позитивну вредност (позитивна асиметрија) и под б), случај када коефицијент асиметрије има негативну вредност (негативна асиметрија).

Као што се са слике може видети, за расподеле са позитивном асиметријом важи однос $M_o < t_{50} < t_{sr}$, а за расподеле са негативном асиметријом $M_o > t_{50} > t_{sr}$.

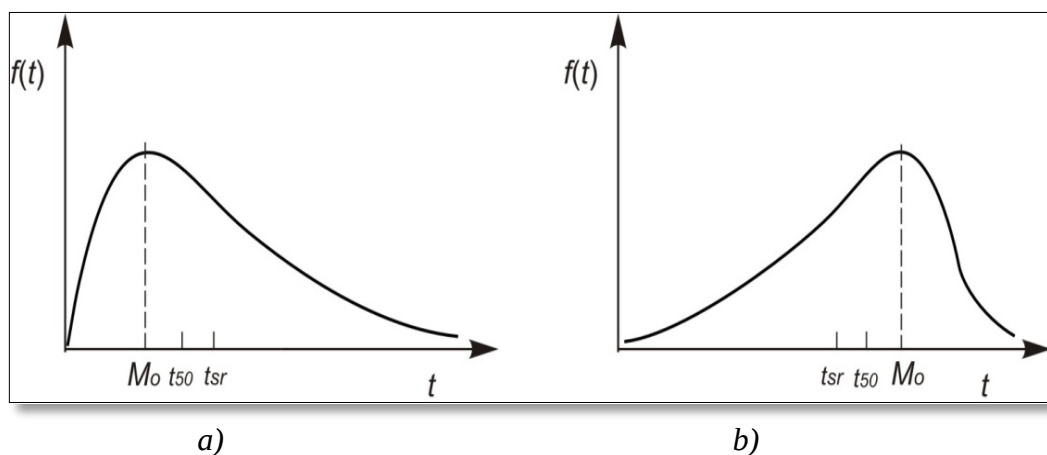
Одређивање трећег централног момента статистичког скупа података о вредностима континуалне случајне променљиве времена рада до отказа T , врши се на основу израза (3.18 и 3.19). При томе, треба узети у обзир да ли су вредности груписане по интервалима или не.

Уколико нису груписане по интервалима користи се израз 3.18

$$\mu_3 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - t_{sr})^3, \quad (3.27)$$

у колико јесу користи се израз 3.19

$$\mu_3 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^z (t_i - t_{sr})^3 \cdot m_i. \quad (3.28)$$



Слика 3.2 Илустрације графика функција густине расподеле са а) позитивном асиметријом и б) негативном асиметријом

Класификација асиметрије расподела врши се на основу апсолутне вредности коефицијента асиметрије. При томе, усвојено је следеће правило:

- ако је $0 \leq |K_A| < 0,1$ нема асиметрије,
- ако је $0,1 \leq |K_A| < 0,25$ асиметрија је мала,
- ако је $0,25 \leq |K_A| < 0,5$ асиметрија је средња и
- ако је $0,5 \leq |K_A|$ асиметрија је изразита.

• **Коефицијент спљоштености (ексцеса)** расподеле случајне променљиве дефинише се изразом:

$$K_E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \quad (3.29)$$

где је:

μ_4 - четврти централни момент, а

σ - стандардно одступање од случајне променљиве.

Четврти централни момент дискретног скупа вредности произвољне случајне променљиве X добија се из израза:

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^n [x_i - M(x)]^4 \cdot p_i, \quad (3.30)$$

где је p_i - вероватноћа појављивања вредности x_i .

Сплештеност расподеле је пропорционална парним моментима, тј. што је она већа утолико се и они повећавају. На слици 3.3 дати су графици густина расподела за различите вредности коефицијента сплештености.

За нормалну расподелу $K_E = 0$. Ако је $K_E > 0$, онда је сплештеност криве расподеле мања од нормалне, а ако је $K_E < 0$, онда је сплештеност криве расподеле већа од нормалне.

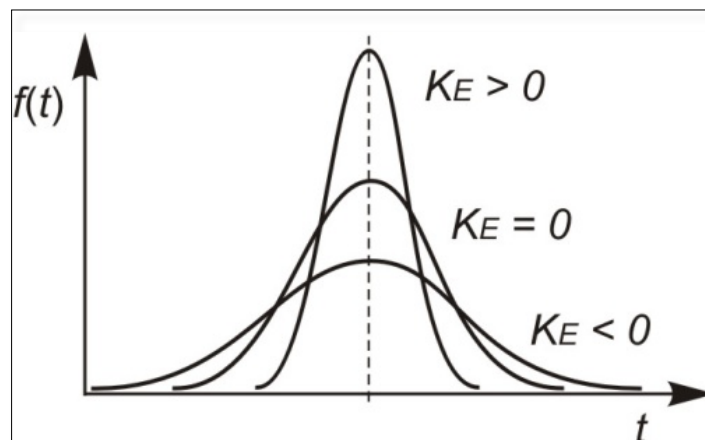
Одређивање четвртог централног момента статистичког скупа података о вредностима континуалне случајне променљиве времена рада до отказа T , може да се изврши на сличан начин као код коефицијента асиметрије. Полазећи од израза (3.30), ако вредности случајне променљиве нису груписане по интервалима, четврти централни момент је једнак:

$$\mu_4 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - t_{sr})^4. \quad (3.31)$$

У супротном, ако су вредности случајне променљиве груписане по интервалима, израз за четврти централни момент гласи:

$$\mu_4 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^z (t_i - t_{sr})^4 \cdot m_i. \quad (3.32)$$

Значење коришћених ознака је већ дато уз изразе за средње време рада до отказа.



Слика 3.3 Сплештеност расподела у функцији од коефицијента K_E

3.3 Процена вредности потпуних карактеристика времена рада до отказа

У циљу утврђивања закона расподеле случајне променљиве времена рада до отказа објеката, врши се испитивање за оцену поузданости. Најчешће не могу да се испитују сви објекти, него само њихов одређен број. Скуп свих произведених идентичних објеката назива се популација, а издвојени одређени број објеката из тог скупа назива се узорак. Испитивањем узорка могу се добити информације о понашању читаве

популације, али са одређеном тачношћу. У зависности од броја објеката у разматраном узорку, постоје два начина за процену показатеља исправног рада.

3.3.1 Мали узорак

За процену показатеља исправног рада, када је број објеката у узорку $n \leq 30$ (по неким ауторима $n \leq 50$), користи се поступак за мали узорак, тзв. рангирање. То је специјални статистички поступак, где се сваком редном броју отказа објекта додељује одређена вредност кумулативне вероватноће појаве отказа $F(t_i)$, у зависности од ранга значајности. Постоје три врсте ових рангова: 5%, 50% (медијални) и 95% ранг. Медијални ранг се користи за процену вредности функције расподеле отказа, а 5% и 95% рангови се користе за одређивање подручја поверења расподеле у целини.

Вредности рангова, за различите бројеве објеката у узорку, обично се дају табеларно. Осим табеларно изражених вредности, за одређивање медијалног ранга се користи и емпиријски образац [2]:

$$MR = \frac{i + 0,3}{N + 0,4}, \quad (3.33)$$

где је:

i - редни број времена рада до отказа сређених у растућем низу, а

n - величина узорка (број објеката у разматраном узорку).

Код малог узорка, процењена вредност функције расподеле отказа $\bar{F}(t)$ узима се да је једнака медијалном рангу. На основу тога, процењена вероватноћа исправног рада за i -то време рада до отказа је:

$$\bar{R}(t_i) = 1 - \bar{F}(t_i) = 1 - \frac{i + 0,3}{N + 0,4}. \quad (3.34)$$

На основу функционалне везе $f(t) = -dR(t)/dt$, процењена вредност густине расподеле времена рада до отказа за време t_i добија се из израза:

$$\bar{f}(t_i) = \frac{\bar{R}(t_i) - \bar{R}(t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i} = \frac{1}{(n + 0,4) \cdot (t_{i+1} - t_i)}. \quad (3.35)$$

Процењена вредност интензитета отказа за време t_i добија се на основу већ израчунатих процењених вредности густине расподеле времена рада до отказа и вероватноће исправног рада:

$$\bar{h}(t_i) = \frac{\bar{f}(t_i)}{\bar{R}(t_i)}. \quad (3.36)$$

Процењене вредности за функцију расподеле отказа $\bar{F}(t)$, функцију поузданости $\bar{R}(t)$, густину расподеле отказа $\bar{f}(t)$ и интензитет отказа $\bar{h}(t)$, могу да се представе табеларно или графички у облику полигона. На основу добијених графика може се извршити груба процена о потенцијалним теоријским апроксимативним моделима расподеле.

Пример 3.1

Ради процене основних показатеља поузданости испитује се узорак од 9 мотора СУС исте врсте. Откази мотора су настали при следећим вредностима времена рада:

Ред. број отказа	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Време рада(10^3)	2,3	5,2	7,8	8,1	9,7	10,4	11,1	12,0	14,2

Израчунати и табеларно приказати процењене вредности: вероватноће исправног рада, густине времена исправног рада и интензитет отказа.

Помоћу образаца на основу полазних података израчунава непоузданост:

$$\bar{F}(t) = \frac{i-0,3}{N+0,4},$$

Процењена вероватноћа исправног рада за i -то време, рада до отказа добија се на основу образаца:

$$\bar{R}(t_i) = 1 - \bar{F}(t_i) = 1 - \frac{i-0,3}{N+0,4}.$$

Процењена вредност густине добија се на основу израза:

$$\bar{f}(t_i) = \frac{\bar{R}(t_i) - \bar{R}(t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i} = \frac{1}{(n+0,4) \cdot (t_{i+1} - t_i)},$$

процењена вредност интензитета отказа за време t_i добија се на основу образаца:

$$\bar{h}(t_i) = \frac{\bar{f}(t_i)}{\bar{R}(t_i)}$$

Помоћу датих образаца добија се табеларни приказ резултата (табела 3.1)

I	t_i	$\bar{F}(t)$	$\bar{R}(t)$	$\bar{f}(t)$	$\bar{h}(t)$
1	2.300	0.07447	0.92553	0.36684E-04	0.39635E-04
2	5.200	0.18085	0.81915	0.40917E-04	0.49950E-04
3	7.800	0.28723	0.71277	0.35461E-03	0.49751E-03
4	8.100	0.39362	0.60638	0.66489E-04	0.10965E-03
5	9.700	0.50000	0.50000	0.15198E-03	0.30395E-03
6	10.400	0.60638	0.39362	0.15198E-03	0.38610E-03
7	11.100	0.71277	0.28723	0.11820E-03	0.41152E-03
8	12.000	0.81915	0.18085	0.48356E-04	0.26738E-03
9	14.200	0.92553	0.07447		

Табела 3.1 Приказ добијених резултата

3.3.2 Велики узорак

За број објеката у узорку $n > 30$ (50), користи се поступак за велики узорак. У том случају, подаци о времену рада до отказа се групишу по временским интервалима. На основу литературе из предметне области, може да се закључи да не постоје у потпуности дефинисана правила за одређивање броја интервала. У пракси, при

обради података, број интервала за груписање вредности случајне променљиве се одређује на основу једног од следећих израза [7]:

$$z = \sqrt{n}, \quad (3.37)$$

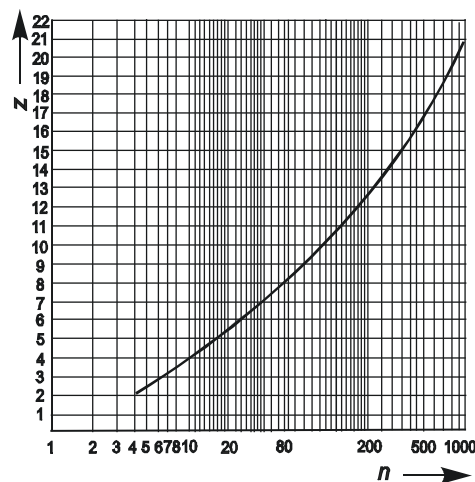
$$z = 2 \cdot \sqrt[3]{n}, \quad (3.38)$$

$$z = 1 + 3,3 \cdot \log n, \quad (3.39)$$

$$z = 5 \cdot \log n, \quad (3.40)$$

или на основу дијаграма датог на слици 3.4.

Наведене обрасце не треба шаблонски примењивати. Празне интервале треба избегавати. Број интервала треба да буде такав да се сачува временска промена статистичког обележја, која је садржана у прикупљеним подацима, и да се избегне превелико осредњавање података. Ако може да се претпостави да је емпиријска расподела симетрична, целисходно је да се усвоји непаран број интервала.



Слика 3.4 Број интервала
у функцији од величине узорка

Анализом наведених израза за одређивање броја интервала z , може да се дође до следећих закључака. За број објеката у узорку близак бројевима 30 или 50, број интервала израчунатих према различитим изразима се незнатно разликује. За већи број објеката, ова разлика је знатно изражена. Према изразу (3.33), за број објеката у узорку $n = (30 \div 1000)$, број интервала се креће од 6 до 11.

Израчуната вредност броја интервала на основу једног од израза (3.37) (3.40), или очитана вредност са дијаграма датог на слици 3.4, заокружује се на цео број.

Ширина интервала, у којима се групишу вредности случајне променљиве, одређује се из израза:

$$\Delta t = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{z}, \quad (3.41)$$

где је:

$t_{\max}$ – максимално време рада до отказа (време рада до отказа последњег објекта),

а

$t_{\min}$ – минимално време рада до отказа.

На основу израчунате вредности ширине интервала, за t_i доњу границу првог интервала t_d усвајају се заокружене вредности ових величина. У случају да се откази јављају од почетка рада објекта или је време рада до отказа првог објекта занемарљиво

мало у односу на време рада до отказа последњег објекта, вредност за доњу границу првог интервала узима се да је једнака нули.

Следећи корак у процени функционалних показатеља случајне променљиве је груписање времена рада до отказа по интервалима, односно одређивање броја вредности случајне променљиве $m(i)$ за сваки интервал посебно. На основу ових вредности, добијају се бројеви исправних објеката на границама интервала.

Средине временских интервала представљају чланове аритметичког низа, чији је општи члан:

$$t_i = t_d + \frac{2i-1}{2} \cdot \Delta t, \quad (3.42)$$

где је:

t_d – доња граница интервала, а

i - редни број интервала.

Процењена вредност броја исправних објеката за средину i -тог интервала се добија као аритметичка средина бројева исправних објеката на почетку и на крају тог интервала. Ако се са $ng(i)$ означи број исправних објеката на почетку i -тог интервала, а са $ng(i+1)$ број исправних објеката на крају тог интервала, односно на почетку суседног, процењена вредност броја исправних објеката за средину i -тог интервала је једнака:

$$\bar{n}(t_i) = \frac{ng(i) + ng(i+1)}{2}. \quad (3.43)$$

Процењена вредност вероватноће исправног рада за средину i -тог интервала је једнака:

$$\bar{R}(t_i) = \frac{\bar{n}(t_i)}{n}. \quad (3.44)$$

На основу функционалне везе густине расподеле времена рада до отказа и вероватноће исправног рада, долази се до израза за процену вредности густине расподеле времена рада до отказа за средину i -тог интервала:

$$\bar{f}(t_i) = \frac{ng(i) - ng(i+1)}{n \cdot \Delta t} = \frac{m(i)}{n \cdot \Delta t}. \quad (3.45)$$

Процењена вредност интензитета отказа за средину i -тог интервала добија се као однос већ израчунатих процењених вредности густине расподеле времена рада до отказа и вероватноће исправног рада, или на основу израза који се добија када се ове две величине замене одговарајућим изразима:

$$\bar{h}(t_i) = \frac{\bar{f}(t_i)}{\bar{R}(t_i)} = \frac{m(i)}{\bar{n}(t_i) \cdot \Delta t}. \quad (3.46)$$

Процењене вредности показатеља исправног рада $\bar{R}(t)$, $\bar{f}(t)$ и $\bar{h}(t)$ за велики узорак могу да се представе табеларно или графички у облику полигона и хистограма (терасастог дијаграма). Графички прикази процењених вредности, као и код малог узорка, представљају основу за избор теоријског апроксимативног модела емпиријске расподеле.

Пример 3.2:

У табели су дати подаци о броју отказа погонског зупчаника у 56 идентичних редуктора подвргнутих испитивању за оцену поузданости. Сматра се да отказ наступа кад се зупчаник толико похаба да се чује шум одређене јачине.

Време у 10^3 ч	0	20	40	60	80	100	120	140
Бр. Отк.	0	19	30	37	45	49	52	56

Одредити процењене вредности вероватноће исправног рада, густине расподеле времена исправног рада и интезитета отказа за сваки временски интервал и приказати их табеларно.

Први корак је одређивање процењене вредности броја исправних објеката $\bar{n}(t_i)$ на основу образаца:

$$\bar{n}(t_i) = \frac{ng(i) + ng(i+1)}{2}$$

Затим се одређује поузданост вероватноће исправног рада која се добија према образцу:

$$\bar{R}(t_i) = \frac{\bar{n}(t_i)}{n}$$

Након нађене поузданости налази се непоузданост из образаца

$$\bar{F}(t_i) = 1 - \bar{R}(t_i),$$

процењена вредност густине расподеле добија се из образаца:

$$\bar{f}(t_i) = \frac{ng(i) - ng(i+1)}{n \times \Delta t} = \frac{m(i)}{n \times \Delta t}.$$

И за крај остала је вредност интезитета отказа са за средину i -тог интервала која се рачуна према образцу:

$$\bar{h}(t_i) = \frac{\bar{f}(t_i)}{\bar{R}(t_i)} = \frac{m(i)}{\bar{n}(t_i) \times \Delta t}$$

Након ових израчунатих вредности добија се табеларни приказ резултата (табела 3.2)

I	t_i	$\bar{n}(t_i)$	$\bar{R}(t_i)$	$\bar{F}(t_i)$	$\bar{f}(t_i)$	$\bar{h}(t_i)$
1	10.000	46,5	0.83036	0.16964	0.16964E-04	0.20430E-04
2	30.000	31,5	0.56250	0.43750	0.98214E-05	0.17460E-04
3	50.000	22,5	0.40179	0.59821	0.62500E-05	0.15556E-04
4	70.000	15,0	0.26786	0.73214	0.71429E-05	0.26667E-04
5	90.000	9,0	0.16071	0.83929	0.35714E-05	0.22222E-04
6	110.000	5,5	0.09821	0.90179	0.26786E-05	0.27273E-04
7	130.000	2,0	0.03571	0.96429	0.35714E-05	0.10000E-04

Табела 3.2

3.4 Тестирање расподеле

Након одређивања хипотетичког модела расподеле емпиријског скупа података, потребно је утврдити одступања теоријске и емпиријске расподеле. Сви поступци за оцену сагласности теоријског и емпиријског модела расподеле могу да се сврстају у графичке и аналитичке методе [8].

Графичке методе су веома једноставне за примену и често се користе у инжењерској пракси. Верификација могућности примене хипотетичког модела најчешће се врши тако што се на вероватносни папир одговарајуће расподеле уносе бројне вредности трансформисаних координата. За сваки од познатих закона расподеле, конструисани су такви папири на којима су координатне осе решене тако да се график расподеле на њима јавља као права линија. Хипотетичка расподела може да се прихвати као модел, ако су све учртане тачке на вероватносном папиру линеарно распоређене. При томе, могу да се толеришу одређена одступања. Ова метода је субјективна и подложна грешкама при учртавању тачака. Потврда о линеарности је такође субјективна. Коришћење вероватносних папира је превасходно погодно за поређење више хипотетичких модела. На тај начин, расподела код које су тачке најприближније правој линији је најбоља и усваја се за апроксимативну. У овом случају не постоје квантитативни показатељи ваљаности апроксимације.

Друга могућност за оцену сагласности расподела је да се упореде графички прикази густине и интензитета отказа емпиријске расподеле (хистограми и полигони) и одговарајући графици хипотетичког теоријског модела.

Уцртавање података на вероватносни папир је једноставније и чешће се користи од цртања хистограма и полигона.

Аналитичке методе се заснивају на непараметарском тестирању хипотетичких расподела. Постоји велики број ових метода. Неке од њих могу да се примене на било коју расподелу, док су друге применљиве само за одређене моделе. Најчешће коришћени тестови за верификацију непараметарских хипотеза су тестови Пирсона (хи-квадрат тест), Романовског, Колмогорова (λ тест) и Мисеса.

3.4.1 Тест Пирсона

Тест Пирсона (К. Pearson) или χ^2 (хи-квадрат) тест представља најстарију и најчешће коришћену процедуру за проверу сагласности теоријског апроксимативног модела и емпиријске расподеле. За меру одступања између теоријске и емпиријске расподеле, Пирсон је 1900. године увео величину χ^2 , која се израчунава према изразу [6]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^z \frac{(m_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} = \sum_{i=1}^z \frac{m_i^2}{n \cdot p_i} - n, \quad (3.47)$$

где је:

z - број интервала у којима су груписане вредности случајне променљиве,
 m_i - број вредности случајне променљиве (учесталост) у i -том интервалу,
 n - величина узорка, односно укупан број вредности случајне променљиве, а
 p_i - вероватноћа реализације случајне променљиве у i -том интервалу:

$$p_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \quad (3.48)$$

Где су x_i и x_{i+1} доња и горња граница i -тог интервала, а $f(x)$ - функција густине претпостављене расподеле.

Величина χ^2 , израчуната према изразу (3.47), представља случајну величину, чији закон расподеле не зависи од теоријске функције расподеле $F(x)$. Са повећањем величине узорка n , ова расподела тежи хи-квадрат расподели [8, 9]. Познато је да

функција густине хи-квадрат расподеле зависи само од једног параметра, и то од броја степени слободе:

$$k = z - l - 1, \quad (3.49)$$

где је z , као што је већ речено, број интервала у којима су груписане вредности случајне променљиве, а l - број параметара претпостављене расподеле.

У предметној литератури, у табели са вредностима вероватноћа за хи-квадрат расподелу, дате су вредности $\chi^2_{\alpha,k}$ у функцији од вероватноће α и броја степени слободе k , за које је:

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}) = \alpha. \quad (3.50)$$

Вероватноћа α се назива критичним коефицијентом хипотезе о сагласности теоријске и емпиријске расподеле.

Поступак спровођења хи-квадрат теста се састоји из следећих корака:

1. Бројне вредности случајне променљиве из статистичког скупа се групишу у z интервала. Интервали не морају да буду једнаке ширине, али мора да буде испуњен услов да је број интервала $z \geq 5$.

2. Одређује се учесталост m_i случајне променљиве у сваком од z интервала. При томе, мора да буде задовољен услов да је $m_i > 5$ за све интервале. Међутим, у практичној примени често се дешава да у почетним и крајњим интервалима има мање од 5 вредности случајне променљиве. У том случају, врши се обједињавање два или више суседних интервала да би се задовољио тражени услов.

3. Коришћењем израза (3.48), израчунава се величина $n \cdot p_i$ за вероватноћу реализације p_i . Слично претходном кораку за m_i , за све интервале мора да буде испуњен услов да је $n \cdot p_i > 5$. Приликом обједињавања интервала ради задовољења услова, број и ширина интервала морају да буду идентични за емпиријску и теоријску расподелу.

4. Коришћењем једначине (3.47), израчунава се величина χ^2 .

5. Према изразу (3.49), одређује се број степени слободе k претпостављене расподеле.

6. На основу усвојене вредности за вероватноћу α и броја степени слободе k из табеле за χ^2 расподелу читава се вредност $\chi^2_{\alpha,k}$.

7. Ако је задовољен услов да је $\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha,k}$, нема основа за одбијање хипотетичке расподеле. У супротном, ако је израчуната вредност $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}$, хипотетички теоријски модел се одбија као неадекватан на нивоу значајности $100 \cdot \alpha$ процената.

Уместо табличних вредности $\chi^2_{\alpha,k}$, за проверу сагласности хипотетичког теоријског модела и емпиријске расподеле могу да се користе коефицијент тачности и критеријум В. И. Романовског [9].

Према коефицијенту тачности, израчунава се величина:

$$H = \frac{\chi^2}{k}. \quad (3.51)$$

Хипотетичка расподела се прихвата уколико је $H < 2$.

Према критеријуму Романовског, упоредна величина за тестирање расподеле дефинише се као:

$$R_o = \frac{|\chi^2 - k|}{\sqrt{2k}}. \quad (3.52)$$

У овом случају, хипотетичка расподела се прихвата уколико је задовољен услов да је $R_o < 3$.

Предност Пирсоновог теста, у односу на остале статистичке тестове, је његова флексибилност. Тест може да се користи за проверу сагласности теоријске и емпиријске расподеле, како за континуалне, тако и за дискретне случајне променљиве.

Највећи недостатак Пирсоновог теста је да се не може применити на узорке са $n < 25$ вредности случајне променљиве. Осим тога, честа потреба да се подаци групишу у интервале различите ширине, како би се задовољио услов теста да број вредности случајне променљиве по интервалима за емпиријску и теоријску расподелу буде већи од 5, може да има утицај на резултате испитивања.

3.4.2 Тест Колмогорова

Уколико је хипотетички теоријски модел емпиријске расподеле континуална функција, за верификацију теоријског модела расподеле може да се користи тест Колмогорова или λ тест, како се другачије зове. За меру одступања између емпиријске и теоријске расподеле узима се максимална вредност апсолутне разлике између емпиријске функције расподеле $F_e(x)$ и теоријске функције расподеле $F_t(x)$, на целокупном интервалу могућих вредности случајне променљиве x [6]:

$$D_n = \max_{-\infty < x < \infty} |F_e(x) - F_t(x)|. \quad (3.53)$$

А. Н. Колмогоров је доказао да за произвољну функцију расподеле $F_t(x)$ непрекидне случајне променљиве x , када величина узорка односно број података о вредности случајне променљиве n тежи бесконачности, вероватноћа да ће бити задовољена неједначина [10]:

$$D_n \cdot \sqrt{n} < \lambda \quad (3.54)$$

тежи граничној вредности:

$$Q(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot e^{-2k^2 \lambda^2}, \quad (3.55)$$

где је $Q(\lambda)$ функција која се даје табеларно.

Математички облик теста Колмогорова за оцену сагласности теоријске и емпиријске расподеле гласи [2]:

$$P\{D_n \cdot \sqrt{n} \leq \lambda\} = Q(\lambda). \quad (3.56)$$

У складу са овим критеријумом, хипотетички теоријски модел се одбацује као неадекватан са нивоом значајности α уколико је:

$$D_n \cdot \sqrt{n} \geq \lambda_\alpha, \quad (3.57)$$

где је:

λ_α - критична вредност критеријума која се одређује из табеле за $Q(\lambda)$ у зависности од нивоа значајности $\alpha = 1 - Q(\lambda)$.

Ако се пође од претпоставке да је у претходном поступку статистичке обраде података већ извршена процена емпиријске функције расподеле $F_e(x_i)$ и да су израчунати параметри хипотетичког модела расподеле и вредности функције

расподеле $F_t(x_i)$ у карактеристичним тачкама, поступак теста Колмогорова спроводи се на следећи начин [6, 8]:

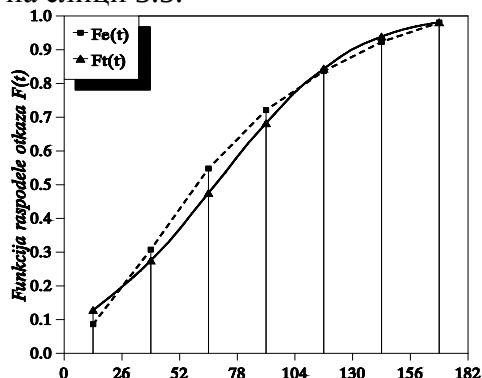
1. Одређује се D_n као максимална вредност апсолутне разлике између емпиријске и теоријске функције расподеле.

2. За усвојени ниво значајности α , из табеле за $Q(\lambda)$, одређује се критична вредност разлике λ_α .

3. Уколико је израчуната вредност $D_n \cdot \sqrt{n} < \lambda_\alpha$, нема основа за одбијање хипотетичке расподеле. У супротном, ако је $D_n \cdot \sqrt{n} \geq \lambda_\alpha$, са степеном ризика α хипотетичка теоријска расподела се сматра неприхватљивом.

На основу претходног поступка, повећањем вероватноће реализације $Q(\lambda)$, односно смањењем нивоа значајности, повећава се вероватноћа прихватања неодговарајуће расподеле и смањује се ризик да се одбаци "добра" расподела. На основу тога може да се закључи да већу тежину имају оне расподеле са већим нивоом значајности α .

Поступак максималне апсолутне разлике D_n може да се убрза уколико постоји упоредни графички приказ емпиријске расподеле и теоријског апроксимативног модела, као што је приказано на слици 3.5.



Слика 3.5 Графички приказ одступања апроксимативне од емпиријске расподеле

Тест Колмогорова спада у групу најчешће коришћених статистичких тестова за проверу сагласности теоријског и емпиријског модела расподела. Метода је релативно једноставна за примену и нема ограничења у погледу величине узорка. Теоријски, могућа је примена теста и за број објеката у узорку $n = 1$. У поређењу са хи-квадрат тестом, λ тест је прикладнији за употребу, јер захтева мање израчунавања и може да се примени како на велики, тако и на мали узорак.

3.4.3 Тест Мисеса

Проблем формирања квантитативних критеријума за оцену сагласности теоријске апроксимативне расподеле и емпиријске расподеле континуалне случајне променљиве, проучавао је већи број научника. Тако на пример, Мисес (R. Mises) је 1931. године за меру одступања теоријске расподеле $F(x)$ од емпиријске расподеле $F_e(x)$ статистичког скупа података о вредностима случајне променљиве предложио величину, која се израчунава према изразу [11]:

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F_e(x) - F(x)]^2 dF(x). \quad (3.58)$$

Решавајући интеграл из израза (5.26), Н. В. Смирнов је дошао до израза погодног за непосредну примену:

$$\omega^2 = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [F(x_i) - W_i]^2, \quad (3.59)$$

где је:

n - број података о вредностима случајне променљиве (величина узорка),

$F(x_i)$ - функција теоријске расподеле за i -ту вредност случајне променљиве, а

$W_i = \frac{i - 0,5}{n}$ - процењена вредност функције расподеле за i -ту вредност случајне

променљиве.

Величина ω^2 , из израза (3.59), представља случајну променљиву чија расподела не зависи од облика функције теоријске расподеле $F(x)$. Доказано је да, када величина узорка n тежи бесконачности, производ $n \cdot \omega^2$ тежи граничној функцији.

Теоријска расподела задовољава тест Мисеса уколико је:

$$n\omega^2 < n\omega^2(\alpha). \quad (3.60)$$

Вредности $n\omega^2(\alpha)$, у функцији од нивоа значајности α , дате су у табели 3.2.

Табела 3.2 Критичне вредности $n\omega^2(\alpha)$ у зависности од нивоа значајности α

α	0,001	0,01	0,02	0,03	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$n\omega^2(\alpha)$	1,1679	0,7435	0,6198	0,5489	0,4614	0,3473	0,2412	0,1843	0,1467	0,1184

Тест Мисеса се одликује потпуним искоришћавањем расположивих информација о случајној променљивој, као и релативном једноставношћу примене. Једна од основних предности, у односу на остале статистичке тестове, је што нема груписања података по интервалима. У случајевима великих узорака ово може да буде и недостатак.

4. МОДЕЛИ РАСПОДЕЛЕ

За прогнозирање понашања објекта с гледишта појаве отказа, неопходно је математички описати закон расподеле и густину расподеле отказа [1]. Основни задатак при проучавању поузданости је одабрати такав облик функције $F(t)$ и $f(t)$ тако да оне одржавају стварну слику. У теорији вероватноће познат је већи број различитих закона расподеле случајних величина, који се могу успешно користити за решавање задатака поузданости. Функција поузданости и функција интензитета отказа су јединствене, тј. одређеној функцији поузданости одговара само одређена функција интензитета отказа и обрнуто. Зато познавањем законитости $f(t)$ (густине расподеле времена рада до отказа), могуће је одредити и функционалне зависности $F(t)$ (расподелу времена рада до отказа) као и интензитета отказа $\lambda(t)$.

4.1 Случајне величине и закони њихове расподеле

Основни појам у теорији вероватноће је појам догађаја. Под појмом догађај у неком експерименту подразумева се свака чињеница која може да произађе или не из тог експеримента. Карактеристично за догађаје разних врста је да они имају неку меру (степен) могућности да се остваре. Да би се омогућило да се догађаји упоређују по степену могућности да се остваре, неопходно је да се са догађајем повеже одређени број, који је утолико већи, уколико је већа могућност остварења тог догађаја. За поређење разних догађаја по вероватноћи, усвојена је јединица мерења: вероватноћа извесног догађаја, тј. догађаја који ће сигурно произићи. За вероватноћу таквог догађаја усвојен је број 1, а сви остали догађаји који су могући, али не и извесни, имају вероватноћу мању од 1. Догађају који у датом експерименту уопште не може да се оствари, додељена је вероватноћа једнака нули, што је сасвим природно у односу на вероватноћу извесног догађаја.

Израчунавање вероватноће случајног догађаја базира се на закону великих бројева, према коме се, при неограниченом повећавању броја опита, може тврдити са практичном сигурношћу да се учесталост догађаја мало разликује од његове вероватноће појављивања у једном опиту. Учесталост догађаја (или статистичка вероватноћа) дефинисана је на основу резултата опита и израчунава се из израза:

$$P_s = \frac{m}{n}, \quad (4.1)$$

где је:

m - број појављивања догађаја, а

n - укупан број извршених опита.

Не одређује се вероватноћа сваког догађаја преко резултата опита. У теорији вероватноће постоје многе методе за посредно одређивање вероватноће једних догађаја преко вероватноће других, али и у таквом поступку у крајњој линији се долази до коришћења резултата опита.

Поред основног појма догађај, у теорији вероватноће један од најважнијих појмова је појам случајне величине.

Случајна величина је величина, која као резултат опита може да добије неку вредност која се унапред не може предвидети.

У класичној теорији вероватноће оперисало се са догађајима, док се у савременој ради са случајним величинама, што је у решавању многобројних задатака из праксе погодније.

Најчешће се израчунавање вероватноће неког догађаја везује за неку случајну величину или систем случајних величина, на основу чијих особина се изражава и вероватноћа случајног догађаја.

У теорији поузданости изводе се операције са случајним величинама да би се добили показатељи поузданости.

4.2 Функција и низ расподеле

Да би се могло оперисати са случајним величинама, дају се начини, помоћу којих се случајна величина може описати и окарактерисати.

Случајна величина X (прекидна и непрекидна) потпуно је окарактерисана, с тачке гледишта вероватноће, функцијом расподеле, која изражава вероватноћу догађаја да се оствари неједнакост:

$$X < x, \quad (4.2)$$

где је x - текућа променљива.

Вероватноћа P овога догађаја је функција променљиве x и означава се са $F(x)$:

$$F(x) = P(X < x). \quad (4.3)$$

Функција расподеле $F(x)$ назива се често још и интегралном функцијом расподеле или интегралним законом расподеле.

За дискретне случајне величине постоји још један специјални облик закона расподеле, који даје везу између могућих вредности случајне величине и одговарајућих вероватноћа. Форма задавања закона расподеле дискретне случајне величине може да буде двојака:

- у виду табеле у којој су дате вредности случајне величине и одговарајуће вероватноће (низ расподеле случајне величине X),
- хистограм расподеле, који представља графички приказ закона расподеле, где се на оси апсцисе представљају могуће вредности случајне променљиве (x_i), а на ординати одговарајуће вероватноће.

За непрекидне случајне променљиве облик закона расподеле, као што је низ расподеле, не постоји. Међутим функција расподеле $F(x)$ је универзална и потпуна карактеристика свих случајних величина (прекидних и непрекидних).

Опште особине функције расподеле су следеће:

1. $F(x)$ је неоппадајућа функција аргумента x , $F(x_2) > F(x_1)$, ако је $x_2 > x_1$,
2. $F(-\infty) = 0$,
3. $F(+\infty) = 1$.

Ако се зна низ расподеле дискретне случајне променљиве, лако се може формирати функција расподеле:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i), \quad (4.4)$$

где неједнакост у знаку суме означава да се сумирање вероватноћа односи на све вредности x_i које су мање од x . На тај начин се увек може формирати функција расподеле за прекидну случајну величину.

У вези изучавања случајних променљивих, у пракси се често јавља проблем да се израчуна вероватноћа да случајна величина X узме неку вредност из задатог интервала $[a, b]$. Проблем се своди на одређивање вероватноће P следећег догађаја: $a \leq X < b$.

Вероватноћа тог догађаја може се изразити преко функције расподеле случајне величине X . Да би се то учинило, треба посматрати три следећа догађаја:

- догађај А: $X < b$,
- догађај Б: $X < a$,
- догађај В: $a \leq X < b$.

Догађај А ће произаћи ако се догоди било догађај Б, било догађај В, одакле, према основним правилима алгебре случајних догађаја, следи:

$$A = B + B, \quad (4.5)$$

односно:

$$P(A) = P(B) + P(B), \quad (4.6)$$

или

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \leq X < b). \quad (4.7)$$

Како је:

$$P(X < b) = F(b), \quad (4.8)$$

и

$$P(X < a) = F(a), \quad (4.9)$$

из релације (4.7) следи:

$$F(b) = F(a) + P(a \leq X < b), \quad (4.10)$$

односно:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \quad (4.11)$$

На основу релације (4.11) може се одредити и вероватноћа да ће случајна величина X добити једну одређену вредност, односно да ће пасти на одређени бесконачно мали интервал. Ако се у релацији (4.11) узме гранична вредност $b \rightarrow a$, добија се:

$$\lim_{b \rightarrow a} P(a \leq X < b) = \lim_{b \rightarrow a} (F(b) - F(a)). \quad (4.12)$$

Гранична вредност израза (4.12) зависи од природе функције расподеле, односно да ли је $F(x)$ непрекидна функција или има скокове. Ако је $F(x)$ у тачки $x = a$ непрекидна, тада је та гранична вредност једнака нули. Другим речима, ако је функција расподеле $F(x)$ увек непрекидна, тада је вероватноћа било које издвојене вредности случајне величине једнака нули.

4.3 Густина расподеле

Ако је функција расподеле $F(x)$ случајне величине X непрекидна и диференцијабилна, може се израчунати вероватноћа да ће та случајна величина узети неку вредност из интервала $[x, x + \Delta x]$.

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x). \quad (4.13)$$

Вероватноћа по изразу (4.13) представља прираштај функције расподеле у том интервалу. Однос ове вероватноће према дужини интервала у граничном прелазу када $\Delta x \rightarrow 0$, представља извод функције расподеле:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x). \quad (4.14)$$

Извод функције расподеле, који се означава са $f(x)=F'(x)$, је карактеристика у извесном смислу густине са којом су расподељене вредности случајне величине у тачки x . Због тога се та функција назива густином расподеле непрекидне случајне величине. За исту функцију постоји још и назив “диференцијална функција расподеле” или “диференцијални закон расподеле”.

Густина расподеле $F(x)$ је такође један од облика закона расподеле случајне променљиве, али за разлику од функције расподеле $F(x)$, тај облик није универзалан, јер постоји само за непрекидне случајне променљиве.

Вероватноћа да ће случајна величина X узети неку вредност на елементарном одсечку dx дата је изразом:

$$f(x) dx. \quad (4.15)$$

Вероватноћа да ће величина X пасти на одсечак $[a, b]$ може се изразити преко густине расподеле:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (4.16)$$

Функција расподеле $F(x)$ може се на основу израза (4.16) изразити преко густине расподеле:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (4.17)$$

Основне особине густине расподеле следе из особина функције расподеле и претходно наведених релација између ове две функције:

1. Густина расподеле је ненегативна функција:

$$f(x) \geq 0, \quad (4.18)$$

што следи из особине функције $F(x)$ да је неоппадајућа функција.

2. Особина:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (4.19)$$

следи из релације (4.17) и из особине $F(\infty) = 1$.

График који представља густину расподеле, назива се кривом расподеле.

4.4 Континуални закони расподеле појављивања отказа

Функција поузданости и функција интензитета отказа су јединствене, тј. одређеној функцији поузданости одговара само одређена функција интензитета отказа и обрнуто. У овом одељку ће бити дате функције густине отказа за Вејбулову расподелу, заједно са функцијом поузданости и функцијом интензитета отказа које се на њих односе. Исто тако, биће дати изрази за очекивано време безотказног рада за сваки од ових случајева.

4.4.1 Вејбулова расподела

Функција густине отказа за Вејбулову (Weibull) расподелу гласи:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta}}, \quad t \geq \gamma, \quad \beta > 0, \quad \eta > 0, \quad (4.30)$$

где је:

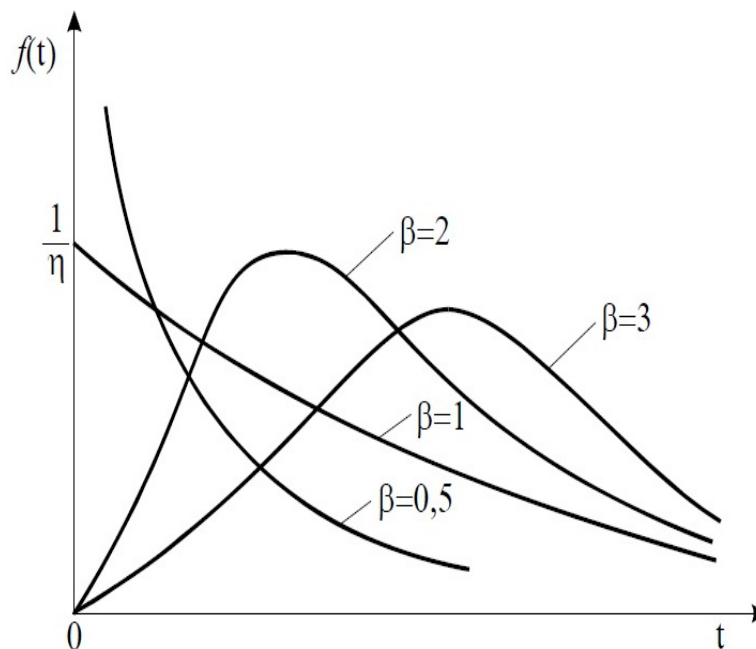
t – време рада до отказа,
 γ - параметар положаја,
 β - параметар облика и
 η - параметар размере.

Негативна вредност параметра γ би значила да систем може да откаже пре почетка коришћења. У моменту пуштања система у рад параметар γ једнак је 0, а време отказа t увек је веће или једнако γ .

Коришћењем везе дате једначином функцијом расподеле случајне променљиве (4.4), функција поузданости се може добити у следећем облику:

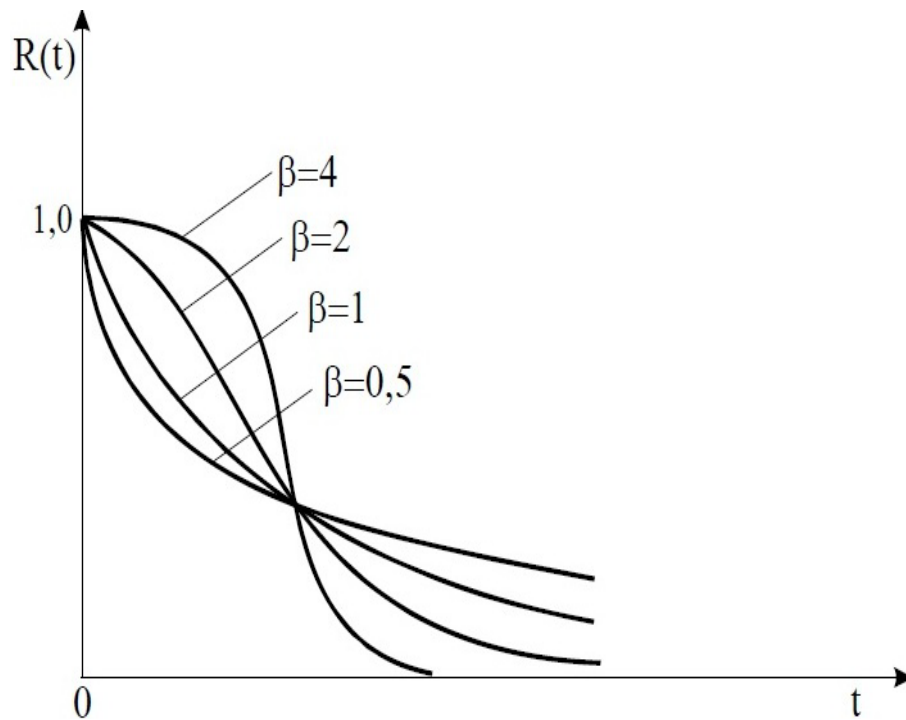
$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}. \quad (4.31)$$

Облик функција $f(t)$, $R(t)$ и $\lambda(t)$ веома зависи од параметара γ , β и η . На слици 4.1 приказани су разни облици функције густине отказа зависно од вредности параметра β , при чему је $\gamma = 0$ и $\eta = \text{const.}$



за $\gamma = 0$, $\eta = \text{const.}$ и разне вредности параметра β

На слици 4.2 дат је изглед функције поузданости зависно од параметра β .



Слика 4.2 Функција поузданости у случају Вејбулове расподеле за $\gamma = 0$, $\eta = \text{const.}$ и разне вредности параметра β

Функција интензитета отказа биће једнака:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1}. \quad (4.32)$$

Вејбулова расподела је веома сложеног облика, и зависно од својих параметара може прећи у неку једноставнију расподелу. Тако за $\gamma = 0$ и $\beta = 1$ она прелази у експоненцијалну расподелу чији је параметар λ у том случају једнак $1 / \eta$, а када је $\gamma = 0$ и $\beta = 2$ добија се тзв. Релејева расподела.

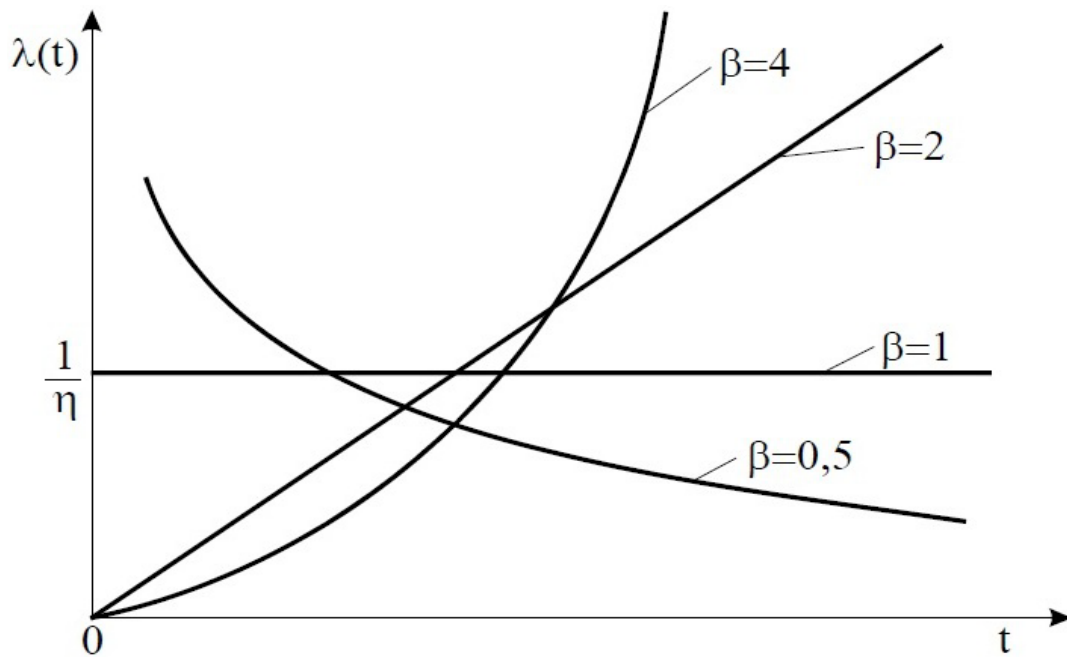
Када је $0 < \beta < 1$ функција интензитета отказа опада са временом, када је $\beta = 1$ интензитет отказа не зависи од времена (експоненцијална расподела), а када је $\beta > 1$ функција интензитета отказа је растућа.

Израз за очекивано време безотказног рада гласи:

$$T_{sr} = \gamma + \eta \Gamma \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right), \quad (4.33)$$

где је $\Gamma \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right)$ тзв. гама функција од $\left(\frac{1}{\beta} + 1 \right)$.

На облик функције интензитета отказа највећи утицај има параметар β (слика 4.3).



Слика 4.3 Функција густине Вејбулове расподеле
за $\gamma = 0$, $\eta = \text{const.}$ и разне вредности параметра β

Вејбулова расподела се упркос своје сложености веома често користи у практичним применама. Разлог је у томе што се многи облици отказа могу њоме веома добро апроксимирати. Док је примена експоненцијалне расподеле ограничена због претпоставке о константној вредности интензитета отказа, дотле Вејбулова расподела може да укључи опадајуће, константне и растуће функције интензитета отказа. Како многи откази у практичним ситуацијама, нарочито у случајевима неелектронских система, показују растућу тенденцију у току времена, примена Вејбулове расподеле, омогућује разматрање облика оваквих отказа.

5. ПРОГРАМ ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ ПРОЦЕЊЕНИХ ВРЕДНОСТИ ПОКАЗАТЕЉА ИСПРАВНОГ РАДА

Мајкрософт ексел (Microsoft Excel) је програм за табеларне калкулације софтверске куће Мајкрософт. Један је од најзаступљенијих програма те врсте, како у приватном тако и у пословном сегменту. Популарност ексела је заснована на веома прихватљивом концепту на којем почивају програми за рад са унакрсним табелама, чији је ексел представник. Ова класа програма представља спој строге структуре и велике слободе. Може се користити за радне листове, али и исказати у облику табела, листа, графикана, формула и других структура.

У овом завршном раду представљен је програм, који је направљен у Мајкрософт екселу, за табеларни приказ великог и малог узорка, ради једноставнијег израчунавања и приказа података захтеваних датим задатком. Такође, Мајкрософт ексел омогућава графички приказ добијених података, са могућношћу графичког приказа на Вејбуловом вероватносном папиру.

У наредном приказу биће представљено неколико основних корака како би се објаснила основна функција датог програма и његова примена.

Корак 1 : Покренути програм Rad.exe, након чега се отвара следећи дијалог прозор на слици 5.1.



Слика 5.1 Дијалог прозор почетног менија програма

Корак 2: Из дијалог прозора левим кликом миша изабрати мали или велики узорак, при чему се отвара изабрани програм у екселу.

НАПОМЕНА

Након основна два корака биће приказани примери за мали узорак и велики узорак.

5.1 Пример за мали узорак

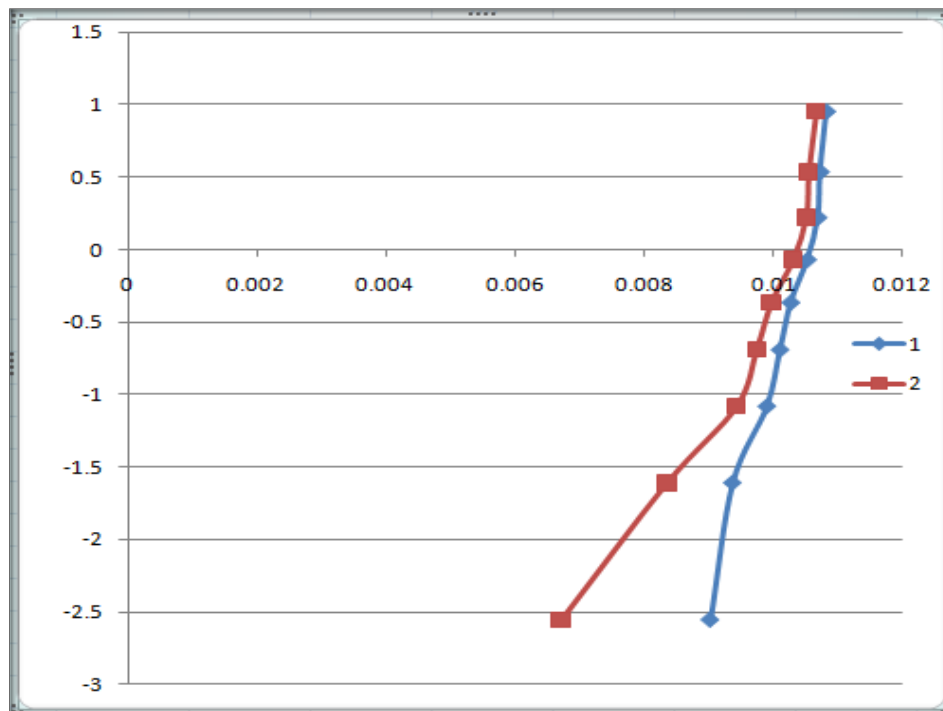
Пример 5.1: Ради процене основних показатеља поузданости испитује се узорак од 9 склопова рукавац – клизно лежиште. Откази склопова су настали при следећим вредностима часова рада: 8.200; 11.600; 19.800; 24.300; 28.700; 37.200; 43.800; 45.400 и 50.100.

На приказаној слици 5.2 дата је табела у коју уносимо улазне податке.

i	t_i	$F(t_i)$	$R(t_i)$	$f(t_i)$	$h(t_i)$
1	8200	0.07447	0.92553	3.12891E-05	3.38066E-05
2	11600	0.18085	0.81915	1.29735E-05	1.58378E-05
3	19800	0.28723	0.71277	2.36407E-05	3.31675E-05
4	24300	0.39362	0.60638	2.41779E-05	3.98724E-05
5	28700	0.50000	0.50000	1.25156E-05	2.50313E-05
6	37200	0.60638	0.39362	1.61186E-05	4.095E-05
7	43800	0.71277	0.28723	6.64894E-05	0.000231481
8	45400	0.81915	0.18085	2.26347E-05	0.000125156
9	50100	0.92553	0.07447		
	N				
	9				

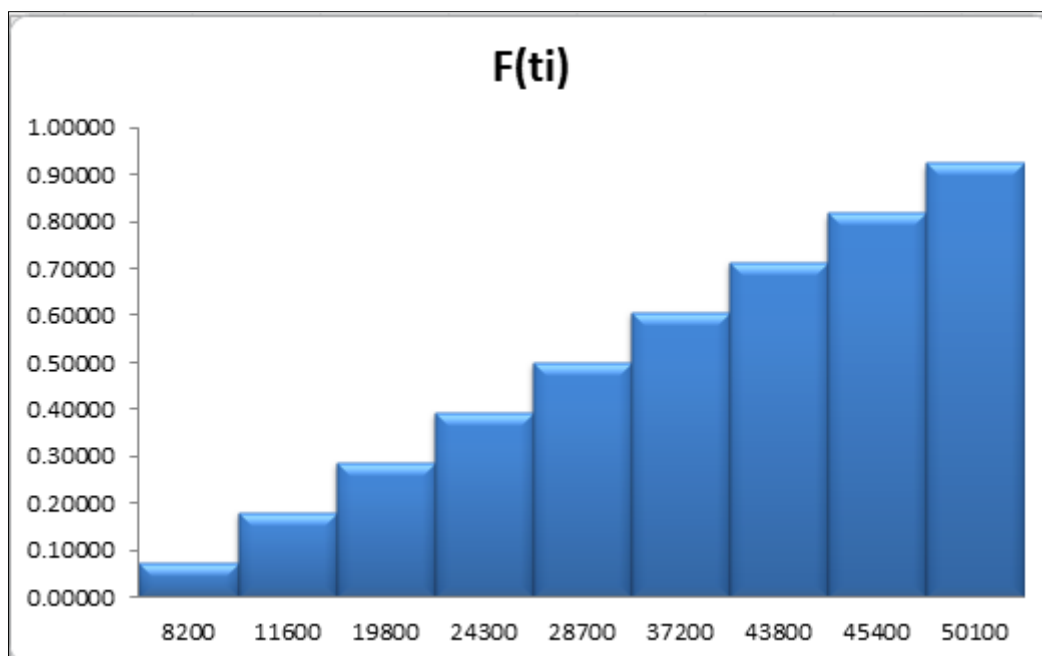
Слика 5.2 Улазни подаци

На самом почетку треба унети укупан број објеката у пољу N, који у овом случају износи 9, уколико постоји више од 9 објеката у колони i треба назначити. Затим се уносе подаци у колону t_i који представљају време рада до отказа i -тог објекта а програм сам рачуна вредност за остале параметре. Након ових унетих вредности програм има могућност да формира график на Вејбуловом вероватносном папиру (слика 5.3). На овом графику црвена линија представља вредност функције расподеле $F(t_i)$ за вредност гама параметра за $\gamma=0$ а плава линија представља гама параметар који је добијен на основу прорачуна.



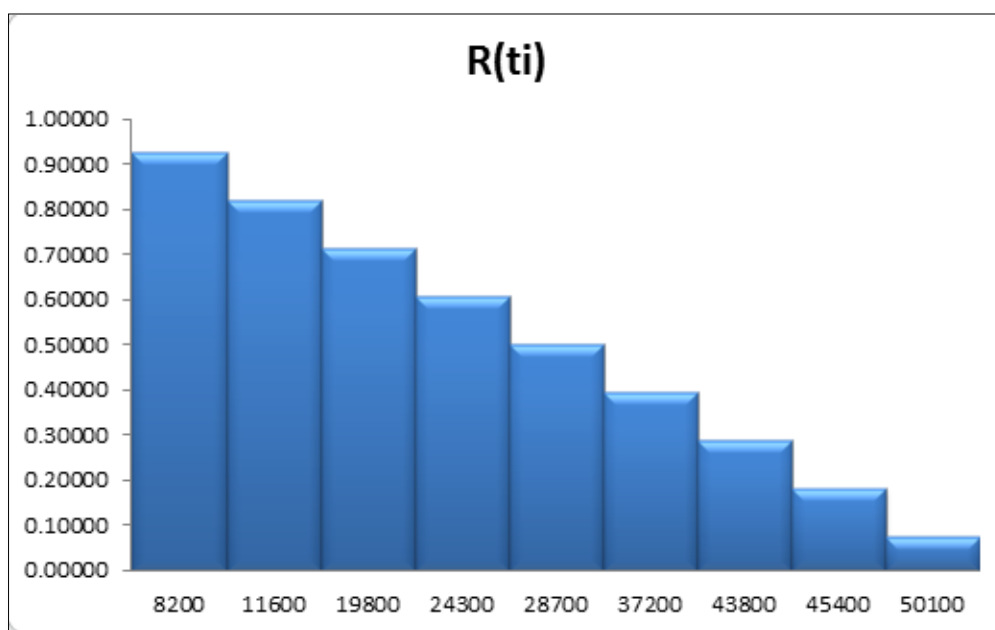
Слика 5.3 Графички приказ тачака на Вејбуловом вероватносном папиру

На слици 5.4 представљен је хистограм процењених вредности непоузданости. Са слике се може закључити да се са порастом временског интервала непоузданост ($F_{(ti)}$) повећава.



Слика 5.4 Хистограм непоузданости

На слици 5.5 представљен је хистограм процењених вредности поузданости. Са слике се може закључити да се са порастом временског интервала поузданост ($R(t_i)$) смањује.



Слика 5.5 Хистограм поузданости

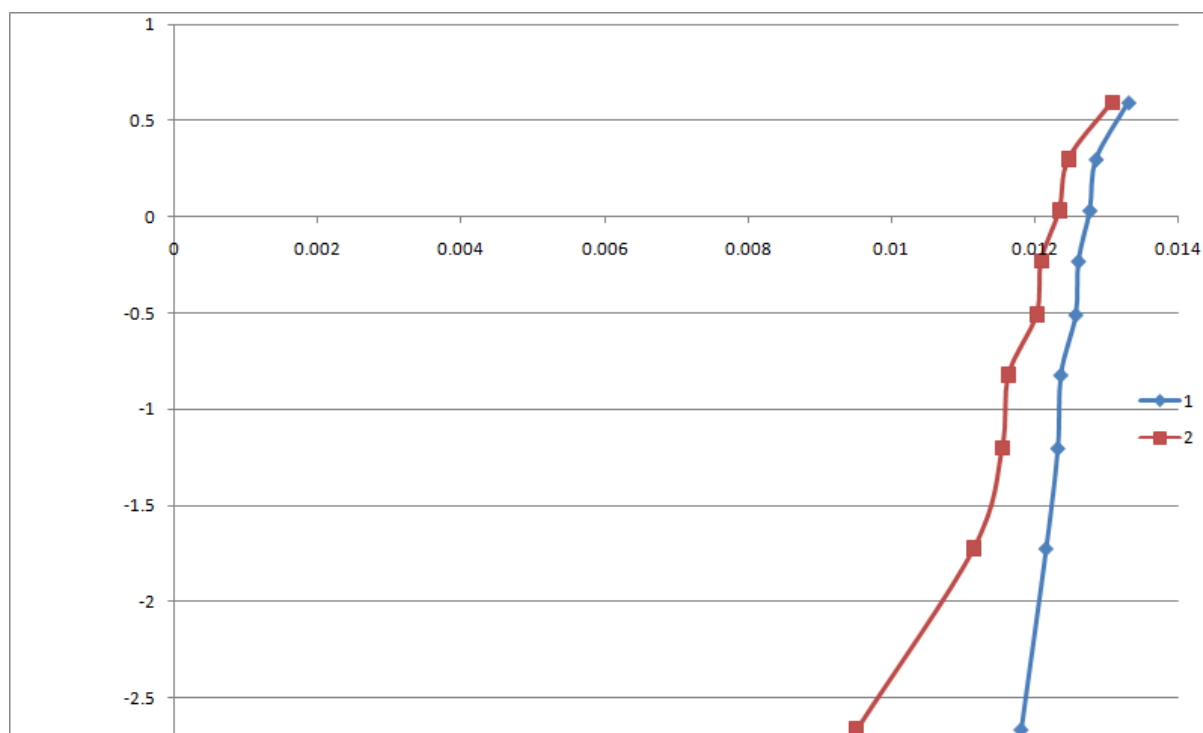
Пример 5.2: У експлоатационим условима вршена су испитивања поузданости главе управљача система за управљање камиона. При томе су добијене следеће вредности времена рада до отказа у километрима пређеног пута: 224.909; 298.675; 382.066; 666.540; 190.558; 288.008; 599.607; 349.835; 233.870; 134.880.

- Израчунати и табеларно приказати процењене вредности: верованоће исправног рада, густине времена исправног рада и интензитета отказа,
- Графичким путем наћи закон расподеле поузданости главе управљача.

У програму ексел неопходно је унети почетне вредности датог задатка као што су N (број узорака), t_i (време рада до отказа), на основу којих вредности захтеване задатком ($F(t_i)$, $R(t_i)$, $f(t_i)$, $h(t_i)$).

i	t_i	$F(t_i)$	$R(t_i)$	$f(t_i)$	$h(t_i)$	$tsr-t_i^2$	y	x	gama	1
1	134880	0.06731	0.93269	1.72628E-06	1.85086E-06	1.83E+10	-2.66384	0.011812	121392	0.00951
2	190580	0.16346	0.83654	2.85925E-06	3.41796E-06	6.335E+09	-1.72326	0.012158		0.011145
3	224209	0.25962	0.74038	9.95278E-06	1.34427E-05	2.113E+09	-1.20202	0.01232		0.011541
4	233870	0.35577	0.64423	1.77609E-06	2.75691E-06	1.318E+09	-0.82167	0.012363		0.011631
5	288008	0.45192	0.54808	9.01414E-06	1.64469E-05	318087225	-0.5086	0.012571		0.012023
6	298675	0.54808	0.45192	1.87947E-06	4.15883E-06	812364004	-0.23037	0.012607		0.012086
7	349835	0.64423	0.35577	2.98327E-06	8.38541E-06	6.346E+09	0.032925	0.012765		0.012339
8	382066	0.74038	0.25962	4.42003E-07	1.70253E-06	1.252E+10	0.299033	0.012853		0.012471
9	599607	0.83654	0.16346	1.43657E-06	8.78842E-06	1.085E+11	0.593977	0.013304		0.013078
10	666540	0.93269	0.06731			1.571E+11	0.992689	0.01341		0.013209
	N									
	10									

Слика 5.6 Добијени резултат за мали узорак



5.7 Графички приказ на Вејбуловом вероватносном папиру

На овом графику црвена линија представља вредност процењене вредности функције расподеле $F_{(t)}$ за гама параметра за $\gamma=0$ а плава линија представља график процењених вредности функције расподеле $F_{(ti)}$ за гама параметар који је добијен на основу прорачуна.

5.2 Пример за велики узорак

Пример 5.3: У циљу одређивања закона расподеле времена рада до отказа зглоба споне система за управљање моторних возила извршено је праћење рада ових елемената у експлоатационим условима. Подаци о броју отказа по временским интервалима дати су у табели.

Пређ. пут у 10^3 км	16÷50	50÷84	84÷118	118÷152	152÷186	186÷220	220÷254
Бр. отказа	13	11	25	16	5	5	2

а) Израчунати и табеларно приказати процењене вредности: вероватноће исправног рада, густине времена исправног рада и интензитета отказа;

б) На основу графика процењених вредности густине и интензитета отказа предложити могући теоријски модел за апроксимацију времена рада до отказа

У ћелији на слици 5.8 унети број узорака који се испитују,

N = 77

Слика 5.8 Број објеката за велики узорак

затим у ћелији на слици 5.9 унети ширину интервала:

delta t =	100
-----------	-----

Слика 5.9 Ширина интервала за велики узорак

Након ових корака уписујемо у колону t_i -време рада до отказа i -тог објекта као на слици 5.10:

t_i
33000
67000
101000
135000
169000
203000
237000

Слика 5.10 Колона времена рада до отказа i -тог објекта

и на крају се уноси број отказа у колони на слици 5.11 и добијају се резултати са графицима за велики узорак:

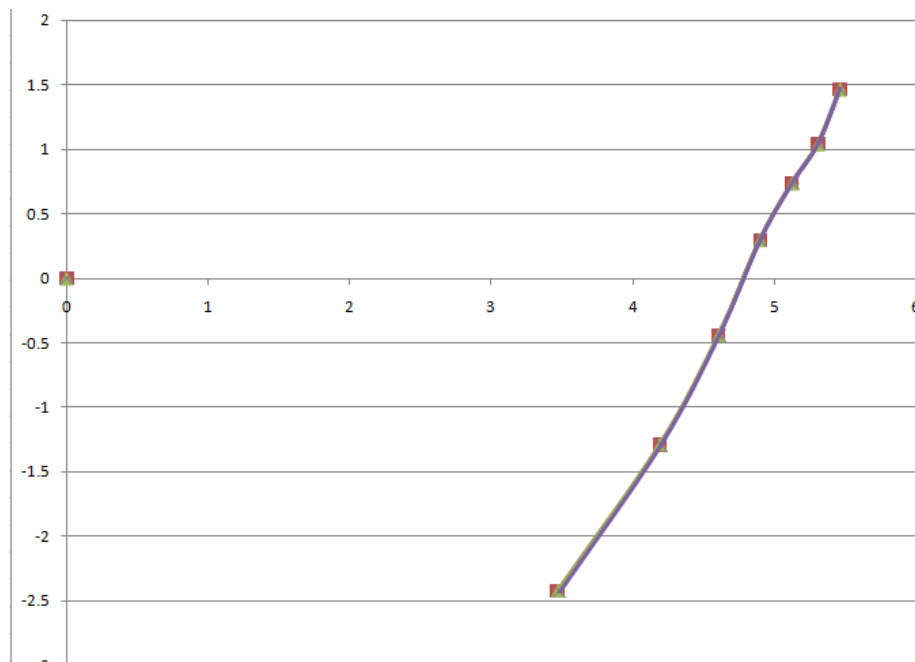
m_i
13
11
25
16
5
5
2

Слика 5.11 Број отказа у временском интервалу

	N =	77	delta t =	100							prva int				
I	t_i	m_i	$n_i(t_i)$	$R(t_i)$	$F(t_i)$	$f(t_i) \cdot 10^3$	$h(t_i)$	$m_i \cdot t_i$	$(t_i - t_{sr})^2 \cdot m_i$	y	$\gamma =$	1000	950	850	450
1	33000	13	70.5	0.915584	0.084416	1.688312	1.843972	429000	5.37E+09	6.98E+10	-2.42823	3.465736	3.467297	3.470412	3.482777
2	67000	11	58.5	0.75974	0.24026	1.428571	1.880342	737000	1.54E+09	1.7E+10	-1.29179	4.189655	4.190412	4.191925	4.197954
3	101000	25	40.5	0.525974	0.474026	3.246753	6.17284	2525000	28076235	7.02E+08	-0.44238	4.60517	4.60567	4.606669	4.610655
4	135000	16	20	0.25974	0.74026	2.077922	8	2160000	8.24E+08	1.32E+10	0.298676	4.89784	4.898213	4.898959	4.901936
5	169000	5	9.5	0.123377	0.876623	0.649351	5.263158	845000	3.93E+09	1.97E+10	0.738366	5.123964	5.124262	5.124856	5.127232
6	203000	5	4.5	0.058442	0.941558	0.649351	11.11111	1015000	9.35E+09	4.68E+10	1.043708	5.308268	5.308515	5.30901	5.310987
7	237000	2	1	0.012987	0.987013	0.25974	20	474000	1.71E+10	3.42E+10	1.468751	5.463832	5.464044	5.464467	5.46616
8				0	1	0	#DIV/0!	0	1.13E+10	0	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!
9				0	1	0	#DIV/0!	0	1.13E+10	0	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!
			tsr =	106298.7 [h]											
			G =	51129.34 [h]											

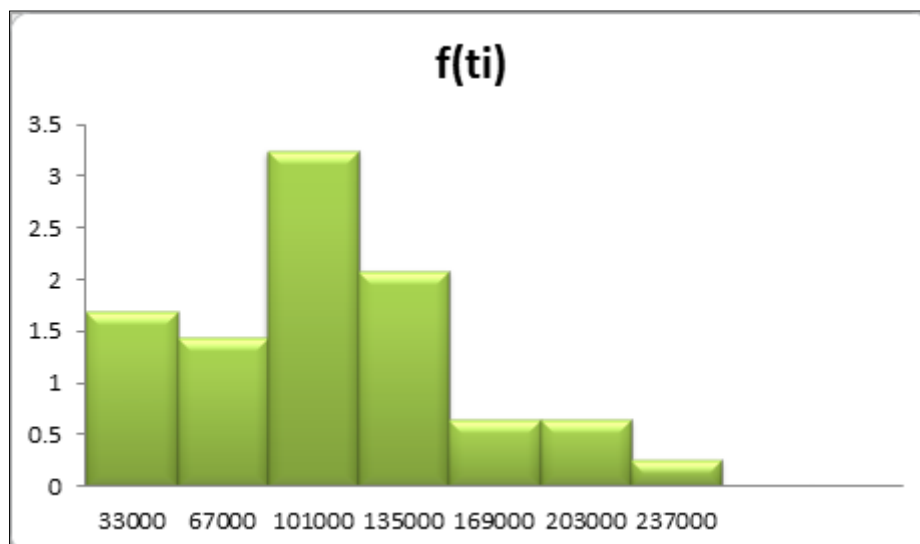
Слика 5.12 Добијене бројне вредности за велики узорак

На слици 5.13 представљен је приказ графика процењених вредности фуцкије расподеле $F(t)$ на Вејбуловом вероватносном папиру за гама вредност 400.

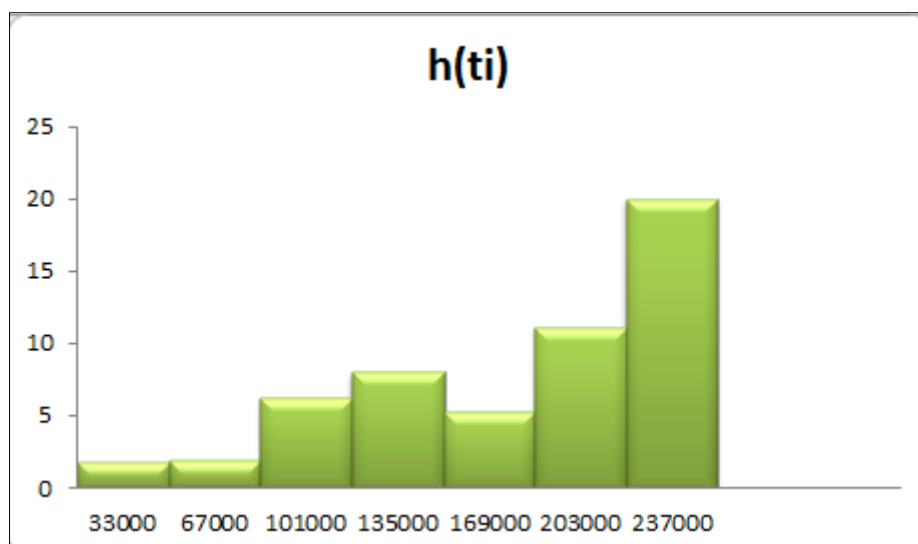


Слика 5.13 Распоред тачака на Вејбуловом вероватносном папиру

На слици 5.14 дат је хистограм процењених вредности густине случајне променљиве времена рада до отказа зглоба споне система за управљање, а на слици 5.15 хистограм интезитета отказа.



Слика 5.14 Хистограм густине зглоба споне система за управљање



5.15 Хистограм интензитета отказа зглоба споне система за управљање

Пример 5.4: У експлоатационим условима вршена су испитивања поузданости узорка $n=250$ еластичних спојница. Подаци о броју отказа по интервалима су дати у табели.

Време (y 10 ³ h)	6,0÷6,4	6,4÷6,8	6,8÷7,2	7,2÷7,6	7,6÷8,0	8,0÷8,4	8,4÷8,8	8,8÷9,2	9,2÷9,6
Бр.отк.	14	18	25	29	45	49	33	20	17

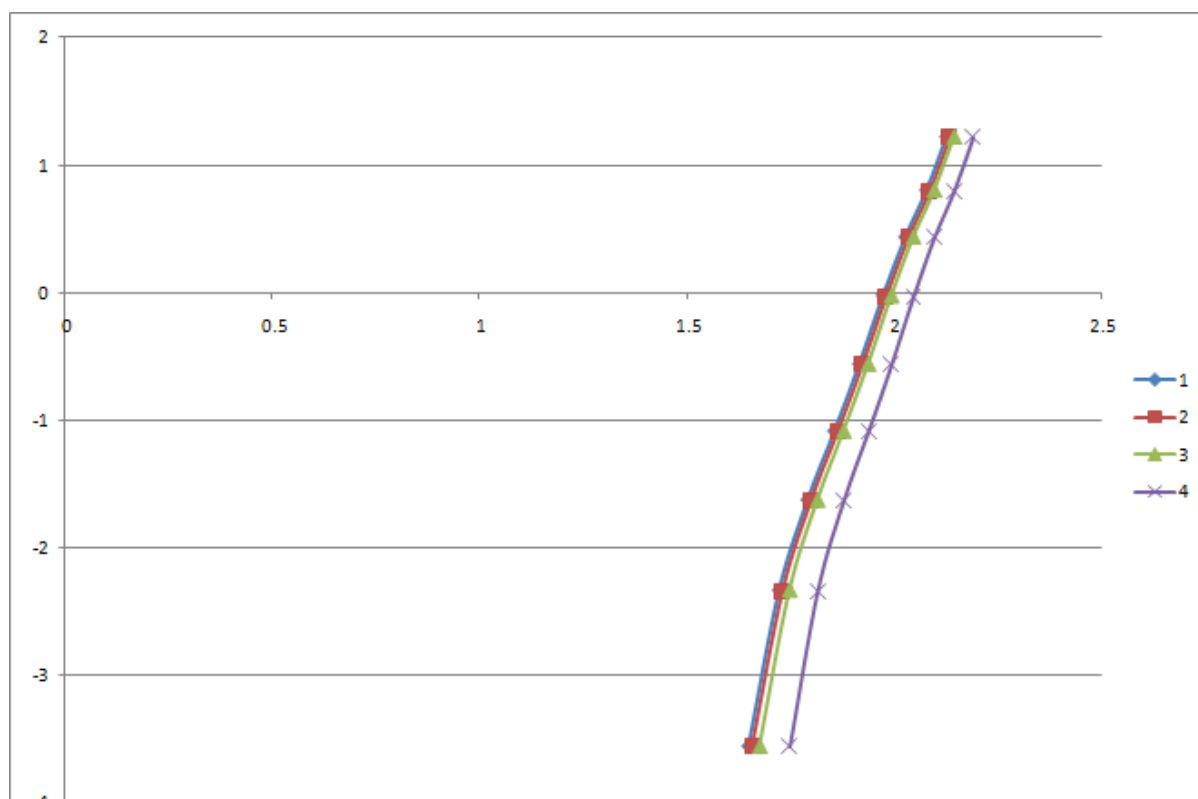
Израчунати и табеларно и графички приказати процењене вредности: вероватноће исправног рада, густине времена исправног рада и интензитета.

У програму ексел неопходно је унети почетне вредности датог задатка као што су N (број узорака), ширину интервала (Δt), t_i (време рада до отказа), m_i (број отказа у датим временским интервалима) на основу којих вредности захтеване задатком ($F_{(ti)}$, $R_{(ti)}$, $n_{i(ti)}$, $f_{(ti)}$, $h_{(ti)}$) као на слици 5.15.

		N =	250		delta t =	400								prva int				
I	ti	mi	ni(ti)	R(ti)	F(ti)	f(ti)*10 ⁻³	h(ti)		mi*ti	(ti- tsr)^2	*mi		y	gamma =	1000	950	850	450
1	6200	14	243	0.972	0.028	0.14	0.144033		86800	2843945	39815229		-3.56138	1.648659		1.658228	1.677097	1.7492
2	6600	18	227	0.908	0.092	0.18	0.198238		118800	1654825	29786849		-2.3381	1.722767		1.731656	1.7492	1.816452
3	7000	25	205.5	0.822	0.178	0.25	0.304136		175000	785705	19642624		-1.62956	1.791759		1.800058	1.816452	1.879465
4	7400	29	178.5	0.714	0.286	0.29	0.406162		214600	236585	6860964		-1.08805	1.856298		1.86408	1.879465	1.938742
5	7800	45	141.5	0.566	0.434	0.45	0.795053		351000	7464.96	335923.2		-0.56359	1.916923		1.924249	1.938742	1.9947
6	8200	49	94.5	0.378	0.622	0.49	1.296296		401800	98344.96	4818903		-0.02751	1.974081		1.981001	1.9947	2.047693
7	8600	33	53.5	0.214	0.786	0.33	1.542056		283800	509225	16804424		0.432937	2.028148		2.034706	2.047693	2.098018
8	9000	20	27	0.108	0.892	0.2	1.851852		180000	1240105	24802099		0.800037	2.079442		2.085672	2.098018	2.145931
9	9400	17	8.5	0.034	0.966	0.17	5		159800	2290985	38946744		1.218288	2.128232		2.134166	2.145931	2.191654
			tsr =	7886.4 [h]														
			G =	852.7925 [h]														

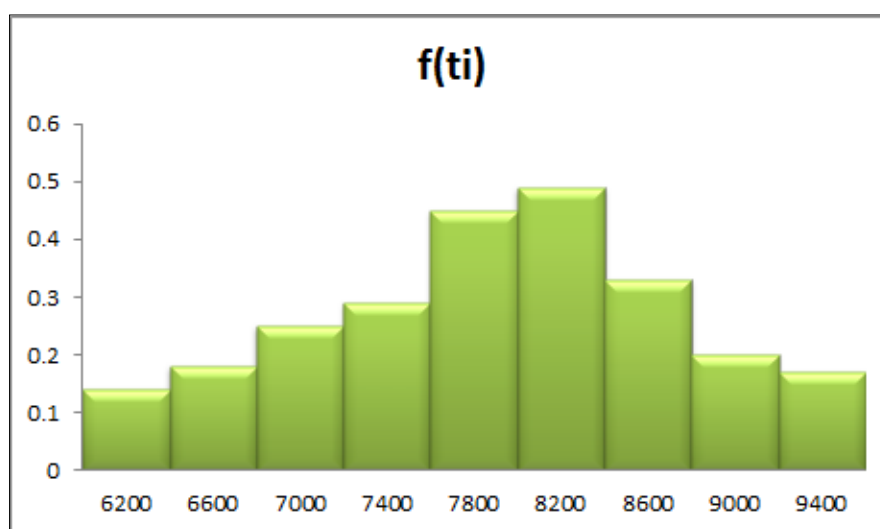
Слика 5.15 Табела процењених вредности

Плава линија на графику на слици 5.16 представља вредност $F(t)$ за вредност $\gamma = 1000$, црвена линија за вредност $\gamma = 950$, зелена линија за вредност $\gamma = 850$, љубичаста линија за вредност $\gamma = 450$.

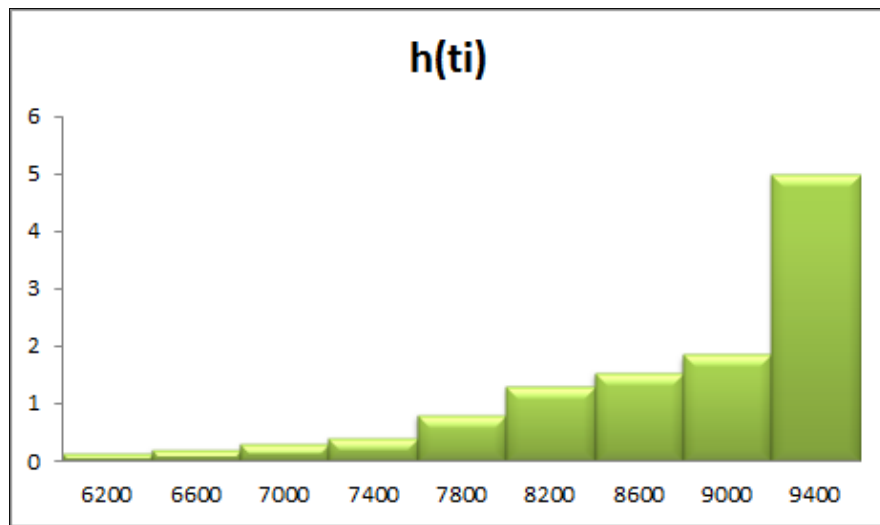


Слика 5.16 Распоред тачака на Вејбуловом вероватносном паиру

На слици 5.17 дат је хистограм процењених вредности густине случајне променљиве времена рада до отказа еластичних спојница, а на слици 5.18 хистограм интензитета отказа.



Слика 5.17 Графички приказ густине еластичних спојница



Слика 5.18 Графички приказ интезитета отказа еластичних спојница

6. Закључак

Вејбулова двопараметарска расподела се без сваке сумње далеко највише користи у подручју поузданости. То непосредно проистиче из њеног параметарског карактера и широких могућности да се, избором одговарајућих вредности ових параметара, интерпретирају веома различити закони случајно променљивих величина. Она је развијена за статистичку обраду резултата испитивања елемената у техници, конкретно резултата испитивања елемената на замор односно трајност.

Основна предност Вејбулове анализе је способност да обезбеди разумно прецизну анализу неуспеха и неуспех прогнозе са малим и великим узорцима. Велики и мали узорак такође омогућавају исплативо тестирање компоненти

Ако су сви лежајеви су тестирани на неуспех, трошкови и време потребни много су већи. Још једна предност Вејбулове анализе је да омогућава једноставан и користан графички заплет неуспеха података као што је дато у овом завршном раду.

7. Литература

- [1] Рамовић, Р., Поузданост система (електронских, телекомуникационих и информационих), Катедра за Микроелектронику и техничку физику, Београд, 2005.
- [2] Јовичић, С., Основи поузданости машинских конструкција, ИДП „Научна књига“, Београд, 1990.год.
- [3] Ћатић, Д., Развој и примена метода теорије поузданости, Машински факултет Крагујевац, Крагујевац, 2005.год.
- [4] Кнежевоћ Ј., Управљање процесима одржавања и обнављања техничких система на основу теорије поузданости, ОМО, Београд 1988.
- [6] Вукадиновић С., Елементи теорије вероватноће и математичке статистике, Привредни преглед, Београд 1990.год
- [7] Камберовић Б., Станивуковић Д., Кецојевић С., Утврђивање поузданости која најбоље апроксимира емпиријске податке, I југословенско савјетовање “Сигурност и поузданост у техници“, Цавтат, 1988.
- [8] Вујановић Н., Теорија поузданости техничких система, Војноиздавачки и новински центар Београд, 1990.
- [9] Петрић Ј., Јевтић М., Стојановић В., Анализа поузданости, Савремена администрација, Београд, 1979.
- [10] Аронов И. З., Бурдасов Е. И., Оценка надежности по результатам сокращенных испытаний, Издательство стандартов, Москва, 1987
- [11] Папић Љ., Примена Мисесовог непараметарског критеријума у анализи поузданости, Зборник радова научно-стручног скупа, индустријски системи-ИС 1987, Нови Сад, 1987.