

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу

Филип С. Андрејевић

**Напонско-деформацијско стање зупчаника са
прслином**

Мастер рад

Крагујевац, 2019.

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Мастер академске студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Увод у механику лома

Број индекса: 421/2017

Филип С. Андрејевић

Напонско-деформацијско стање зупчаника са прслином

Мастер рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. **др Весна Марјановић -ментор**

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог мастер рада кандидат треба да:

- Укратко опише зупчасте преноснике, прикаже њихове основне појмове и дефиниције, опише процес конструисања истих и материјале који се користе.
- Прикаже основне моделе отказа зупчастих преносника.
- Објасни примену механике лома код зупчастих парова.
- Прикаже пример аналитичког прорачуна носивости зупчаника.
- Прикаже пример нумеричког прорачуна напона и деформација зупчаника са освртом на утицај појаве прслине на напон.

Препоручена литература:

- [1] D. Šumarac, D. Krajčinović, *Osnovi mehanike loma*, Građevinski fakultet, Beograd, 1990.
- [2] В. Николић, *Машински елементи–теорија, прорачун, примери*, Машински факултет, Крагујевац, 2004.
- [3] T. L. Anderson, *Fracture Mechanics – Fundamentals and Applications*, Third edition, Taylor & Francis, New York, 2005.
- [4] S, Tawez, A. D. Desai, B. P. Londhe, *Analysis of crack in a Tooth of Spur Gear Using Finite Element Analysis and Remedial action*, International Journal of Advance Engineering and Research Development , Volume 4, Issue 1, January, 2017.
- [5] Fakher. Charri, Tahar F, Mohamed Haddar, *Analytical modeling of spur gear tooth crack and influence on gear mesh stiffness*, European Journal of Mechanics, Solids 28, 2009.
- [6] D. Živojinović, *Primena mehanike loma na procenu integriteta zavarenih konstrukcija od legura aluminijuma*, Mašinski fakultet Univerzitet u Beogradu, Doktorska disertacija, Beograd, 2003.
- [7] M.Mack Aldener, *Tooth Interior Fatigue Fracture & Robustness of Gears*, Department of Machine Design, Royal Institute of Technology, S-100 44 Stockholm, Sweden, 2001.

Крагујевац, 25.05.2019.

Ментор:
др Весна Марјановић, професор

Резиме

У оквиру овог рада, обрађена је тема напона и деформација цилиндричних зупчаника са правим зупцима као елементарних представника зупчастих преносника. Како би рад у што већој мери био прилагођен сваком академском читаоцу, након увода у рад, у другом поглављу, приказане су основне поделе, појмови и дефиниције зупчастих преносника, основи конструисања истих, као и материјали који се најчешће употребљавају за њихову израду. Након тога, треће поглавље садржи основне моделе отказа зупчастих преносника како би се на њега надовезало четврто поглавље са дубљим објашњењем кроз призму теоријске механике лома. Након детаљног објашњења, рад је у петом поглављу усмерен на аналитички прорачун зупчаника употребом софтвера *Autodesk Inventor* у циљу повезивања механике лома са стандардима дефинисаног аналитичког прорачуна. Као пример, за потребе прорачуна изабран је челични цилиндрични зупчаник са правим зупцима. Након спроведеног аналитичког прорачуна, шесто поглавље укључује примену методе коначних елемената. Унутар поменутог софтвера, извршена је напонско-деформациона анализа у којој се јасно може видети расподела напона и деформација, утицаји параметара прслине, и избора материјала на напон и деформацију, као и веза нумеричког са аналитичким прорачуном, што је и објашњено у закључку.

Кључне речи: зупчасти преносници, модели отказа, механика лома, метода коначних елемената...

Abstract

In this paper, the topic of stress and deformation of straight gear cylindrical gears as elemental representatives of gear gears is discussed. In order to adapt this paper to every academic reader as much as possible, after introduction, in the second chapter, the basic divisions of gears, concepts and definitions of gears, the basics of their construction, as well as the materials commonly used for their production of them are presented. Subsequently, the third chapter contains the basic failure models of the gears in order to be followed by a fourth chapter with a deeper explanation through the prism of theoretical fracture mechanics. After a detailed explanation, the work in chapter no. 5 focuses on the analytical calculation of gears using Autodesk Inventor software in order to relate fracture mechanics and the standards of defined analytical calculation. As an example, steel cylindrical gears with straight teeth were selected for calculation purposes. After conducting the analytical calculation, the sixth chapter includes the application of the Finite Element Method. Within the aforementioned software, a stress-strain analysis was performed in which the distribution of stresses and deformations can be clearly seen, influences of crack parameters and material selection on stress and deformation as well as the connection of the numerical with the analytical calculation, which is explained in the conclusion.

Keywords: *gears, failure models, fracture mechanics, finite element method...*

САДРЖАЈ

1. УВОД	6
2. ЗУПЧАСТИ ПРЕНОСНИЦИ.....	9
2.1 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ И ДЕФИНИЦИЈЕ.....	11
2.2 КОНСТРУИСАЊЕ ЗУПЧАСТИХ ПРЕНОСНИКА	13
2.3 МАТЕРИЈАЛИ ЗА ИЗРАДУ ЗУПЧАСТИХ ПРЕНОСНИКА	16
3. МОДЕЛИ ОТКАЗА ЗУПЧАСТИХ ПРЕНОСНИКА	19
3.1 ПИТИНГ	19
3.2 МИКРО-ПИТИНГ	20
3.3 ЗАРИБАВАЊЕ	21
3.4 ХАБАЊЕ.....	21
3.5 НАСИЛАН И ЗАМОРАН ЛОМ ЗУПЦА.....	22
4. МЕХАНИКА ЛОМА КОД ЗУПЧАСТИХ ПАРОВА.....	24
4.1 ОСНОВЕ МЕХАНИКЕ ЛОМА	24
4.1.1 НАПОНИ И ПОМЕРАЊА У ТЕЛУ СА ПРСЛИНОМ	26
4.1.2 ЕЛАСТИЧНО-ПЛАСТИЧНА МЕХАНИКА ЛОМА.....	31
4.2 ЛОМ ЗУБЦА УЗРОКОВАН ПРСЛИНОМ НАСТАЛОМ УСЛЕД ЗАМОРА	40
5. ПРИМЕР АНАЛИТИЧКОГ ПРОРАЧУНА НОСИВОСТИ ЗУПЧАНИКА	42
6. АНАЛИЗА НАПОНСКО-ДЕФОРМАЦИЈСКОГ СТАЊА ЧЕЛИЧНОГ ЗУПЧАНИКА СА ПРСЛИНОМ У ПОДНОЖЈУ ЗУПЦА УПОТРЕБОМ МКЕ	51
7. ЗАКЉУЧАК	56
ЛИТЕРАТУРА.....	58

1. УВОД

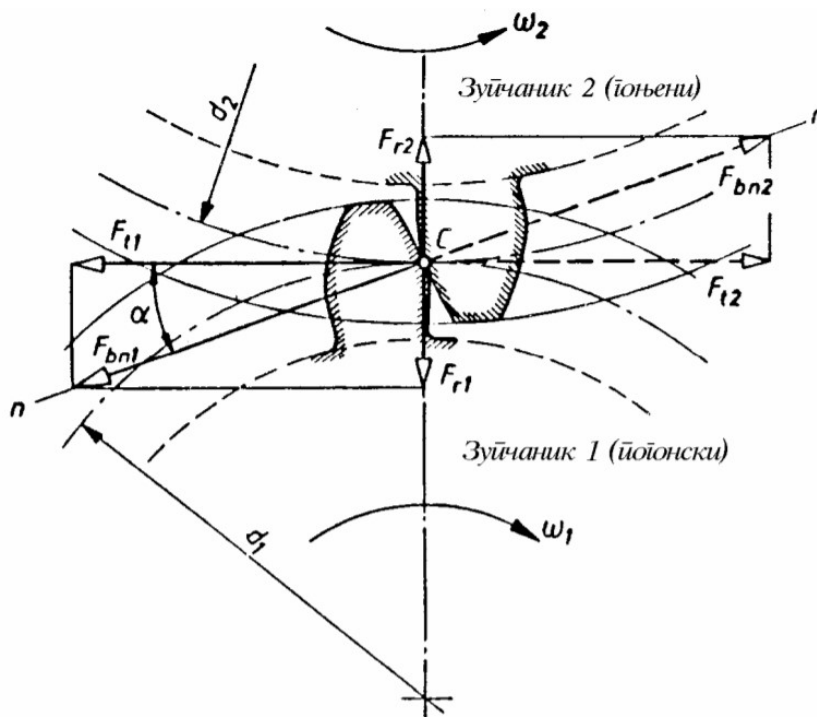
Под преносником у најширем смислу подразумева се машинска група или цела машина чији је задатак преношење механичке енергије од погонске машине (електромотор, СУС мотор, парна турбина...) ка радној машини. Помоћу њих се такође може извршити промена параметара, снаге, величине обртних момената и угаоних брзина или силе и њених брзина. Преносници могу бити механички, хидраулични и пнеуматски [1, 2].

Увођење преносника као посредника између погонске и радне машине диктирано је условима рада како радне тако и погонске машине. На првом месту потребна угаона брзина радне машине врло ретко одговара најпогоднијој угаоној брзини погонске машине (обично је много мања). Чест је случај да угаону брзину главних делова радне машине треба мењати независно од угаоне брзине погонске машине, јер мењати угаону брзину погонске машине у ширим границама или је врло неекономично, или чак и немогуће. Погонске машине имају обично константну или приближно константну угаону брзину, уз константан обртни моменат. Веће смањење минутног броја обрта код погонске машине у већини случајева доводи и до смањења обртног момента, што је врло неповољно за радну машину, јер она захтева велике обртне моменте при малим брзинама [1-4].

Код механичких преносника механичка енергија се преноси преко машинских делова, међусобним додиривањем. Механички преносници могу преносити енергију односно мењати обртни момент и угаону брзину било приањањем, било зупцима, и то или непосредним додиривањем погонског или гоњеног елемента, било преко посредника. Зупчасти преносни парови су основни представници механичких преносника. Користе се готово у свим механичким системима за пренос снаге, најчешће у редукторима, мењачима, мултипликаторима и слично [5, 6].

Зупчасти преносни парови спадају у механичке преноснике код којих се обртни момент, са једног вратила на друго, преноси посредством непосредног контакта зубаца зупчаника тако да не постоји могућност проклизавања. У току спрезања зупци погонског зупчаника делују одговарајућом силом на зупце гоњеног зупчаника и доводе га у кретање. Ако се занемари трење на боку зупца онда сила делује нормално на бок зупца и независно од положаја нападне тачке на боку зупца нападна линија силе је увек тангента на основни цилиндар. На **слици 1.1** приказана је шема оптерећења посматраног зупца код цилиндричног зупчаника са правим зупцима.

Нормална сила F_{bn} односно њене компоненте (обимна F_d и радијална F_r) оптерећују зупце (зупчаник) и потом вратило и његове ослонце. Смерови деловања сила одређују се зависно од тога који је зупчаник погонски а који гоњени и од смера окретања зупчаника. Погонски зупчаник доводи у кретање гоњени делујући на њега одговарајућом силом. Због тога се код гоњеног зупчаника обимна сила на зупцу поклапа са смером окретања зупчаника, а погонски зупчаник прима силу супротног смера (**сл. 1.1**). Радијалне силе увек делују ка осама обртања сопствених зупчаника. При прорачуну оптерећења вратила и отпора ослонаца треба користити компоненте нормалне силе на кинематској кружности.



Сл. 1.1 Силе код цилиндричних зупчаника са правим зупцима [4]

Како би се извршила напонско деформациона анализа зупчаника, неопходно је познавати интензитете и карактер оптерећења. Под претпоставком да је у спреси само један пар зубаца нормална сила на боку зупца може да се одреди према снази (обртног момента, броју обртаја, угаоној брзини...) и полупречника основних кружница.

Напон, као мера интензитета унутрашњих сила, сведена на јединицу површине, изазван је услед деловања поменуте нормалне силе. Генерално, при сваком дејству оптерећења у унутрашњости материјала се јавља напон. Од изузетног значаја за проучавање машинских елемената је одређивање тих оптерећења којима су исти изложени, тј. утврђивање стварног напонског стања. Поред наведених величина, у зависности од критичног напона погодна је одређивање степена сигурности и радног века, као и прорачун кинематских и геометријских величина.

Сваки део под дејством спољашњих сила мења у већој или мањој мери свој облик и димензије – тако и зупчаници. Та промена облика и димензија под дејством спољњег оптерећења се назива деформација. Разликују се пластична и еластична деформација које су у уској спреси са напоном. Са преласком одређене граничне вредности напона, деформација након еластичне прелази у пластичну која даље води до лома. Међутим, ретки су примери отказа зупчаника (лома зуба) настале пластичним деформисањем. Зупчаник се конструише (прорачунава/димензионише) тако да се не може пластично деформисати у најгорем могућем случају (прорачун чврстоће у корену зуба). Углавном отказ долази услед замора материјала, а испољава се у појави прелина неправилних облика различитих величина и дубина које даље доводе до лома зубаца услед изазване концентрације напона и повећања унутрашњих динамичких сила и вибрација. Због, тога сам процес конструисања је прилагођен поменутом отказу услед замора.

Постоје неколико стандардних прорачуна чврстоће зупчаника у корену зуба (DIN [7], AGMA [8], ISO [9], и тако даље.) који укључујући факторе радних услова, оптерећења и сличне узимају у обзир замор материјала и механику лома. Међутим, поступци механике лома, као дисциплине која једина омогућава прорачун века трајања од настанка прслине до лома, у споменутим стандардима нису употребљени. У њима, век трајања зависи само од тврдоће материјала зупчаника што је врло груба апроксимација.

Према достигнућима механике лома, целокупан животни век машинских елемената се може одредити као сума циклуса оптерећења потребних за иницијацију прслине и циклуса оптерећења потребних за ширење прслине од иницијације до критичне дужине [10].

У складу са наведеним развијени су разни нумерички модели који прорачунавају број циклуса потребних за иницијацију прслине у корену цилиндричног зупчаника, засновани на принципу локалне деформације – прслина се иницира на месту са највећом концентрацијом деформација (углавном у заобљењу корена зуба) као резултат циклично понављане пластичне деформације [11, 12, 13].

Број циклуса потребних за ширење прслине од иницијалне до критичне дубине може се одредити применом линеарно еластичне механике лома, а према којој је пораст дубине прслине по циклусу функција распона фактора интензитета напрезања. Код компликованијих геометрија и сложених стања напрезања, као што је случај код корена зуба зупчаника, зависност распона фактора интензитета напрезања о дубини прслине добија се помоћу методе коначних елемената. Нумеричка симулација ширења прслине се код већине истраживања [11-15] спроводи у програмском пакету *Franc2D* [16, 17], где је потребно дефинисати износ продубљења, а аутоматски се израчунава фактор интензитета напрезања и смер ширења прслине.

Због свега наведеног, како би се могла објаснити напонско-деформациона анализа зупчаника и веза са механиком лома, у оквиру овог рада обухваћене су разне области. Првом области су обухваћени основни појмови и дефиниције везани за зупчасте преноснике, њихов поступак конструисања и материјале како би рад у што већој мери био прилагођен сваком читаоцу. Пажња је посвећена цилиндричним еволвентним зупчаницама са правим зупцима јер су исти елементарни представници зупчастих преносника. Другом области су обухваћени модели отказа зупчастих преносника како би се исти касније повезали са самом механиком лома код зупчастих парова и тиме обезбедило боље разумевање самих процеса услед којих долази до отказа зупчаника. Генерисање и прорачун зупчаника у софтверу *Autodesk Inventor* су такође обухваћени овим радом у циљу даљег повезивања истог са механиком лома и стварања реалне геометрије, са познатим оптерећењем и осталим параметрима, за даљу напонско-деформациону анализу нумеричким путем. Напонско-деформациона анализа је извршена са и без апроксимиране прслине, како би се приказао утицај настанка и пропагације исте на расподелу напона.

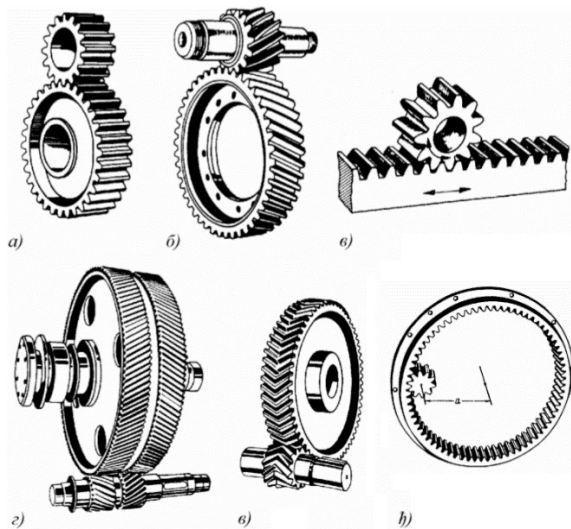
2. ЗУПЧАСТИ ПРЕНОСНИЦИ

Зупчасти преносници су механички преносници помоћу којих се кретање, односно обртни момент преноси са једног вратила на друго и трансформише непосредним додиривањем зубаца. [1, 4, 5]

Према облику зубаца, зупчаници могу бити са правим зупцима (правозуби), са косим зупцима (косозуби), са стреластим зупцима, са кривим зупцима и тако даље. Узимајући у обзир и једну и другу поделу и друге специфичности у примени су:

- 1) цилиндрични зупчаници са правим зупцима (сл. 2.1, а),
- 2) цилиндрични зупчаници са косим (хеликоидним) зупцима (сл. 2.1, б),
- 3) равни цилиндрични зупчасти парови (сл. 2.1, в),
- 4) двојни зупчаници са косим зупцима (сл. 2.1, г),
- 5) цилиндрични зупчаници са стреластим зупцима (сл. 2.1, д),
- 6) цилиндрични зупчаници са унутрашњим спрезањем (сл. 2.1, ђ),
- 7) конусни зупчаници са правим зупцима (сл. 2.2, а),
- 8) конусни зупчаници са косим зупцима (сл. 2.2, б),
- 9) конусни зупчаници са кривим зупцима (сл. 2.2, в),
- 10) хипоидни зупчаници (сл. 2.3, а),
- 11) хиперболоидни еволвентни зупчаници (сл. 2.3, б),
- 12) пужни зупчасти парови са цилиндричним пужем (сл. 2.3, в),
- 13) Пужни зупчасти парови са глобоидним пужем (сл. 2.3, г).

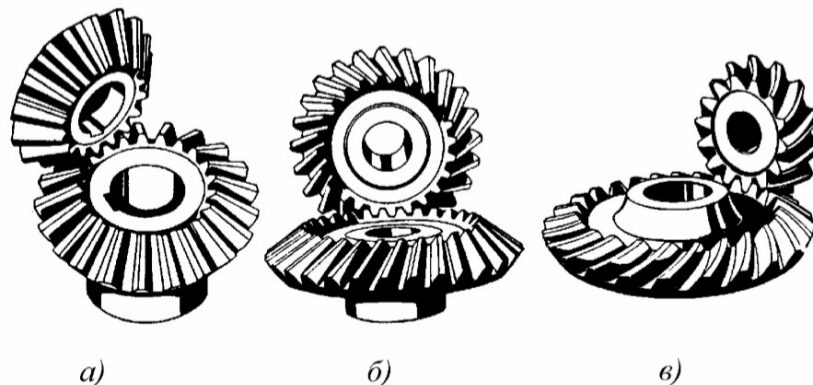
Према положају оса обртања спрегнутих зупчаника, сви зупчасти парови могу се разврстати на: зупчасте парове са паралелним осама - цилиндрични зупчасти парови (сл.2.1), зупчасте парове чије се осе обртања секу - конусни зупчасти парови (сл. 2.2) и зупчасте парове са укрштеним осама (сл. 2.3).



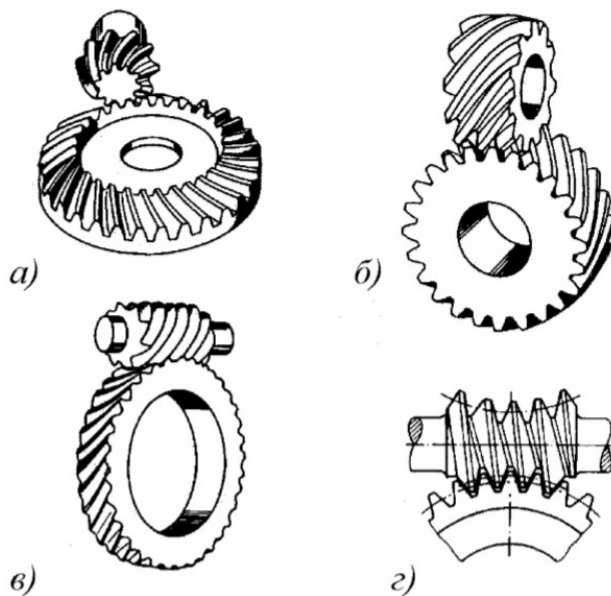
Сл. 2.1. Зупчасти парови са паралелним осама

а) цилиндрични са правим зупцима, б) цилиндрични са косим зупцима, в) равни цилиндрични пар, г) двојни цилиндрични са косим зупцима, ђ) цилиндрични са унутрашњим спрезањем [4]

Различитим повезивањем зупчастих парова, најчешће у низу, ређе паралелно образују се зупчасти преносници. То су најчешће коришћени преносници снаге који могу да се примене за све могуће положаје улазног и излазног вратила, као и за врло широки дијапазон снага, бројева обртаја и преносног односа.



Сл. 2.2. Зупчасти парови чије се осе обртања секу
а) конусни зупчаници са правим зупцима, б) конусни зупчаници са косим зупцима,
в) конусни зупчаници са кривим зупцима [4]



Сл. 2.3. Зупчасти парови са укрштеним осама;
а) хипоидни зупчаници б) хиперболоидни еволвентни зупчаници,
в) пужни зупчасти пар са цилиндричним пужем, г) пужни зупчасти пар са глобоидним пужем [4]

Зупчасти парови имају широку примену. Саставни су део сваке трансмисије, редуктора, мултипликатора и тако даље. Предности зупчастих преносника су једноставно извођење, тачан кинематски преносни однос, мале димензије, високи степен искоришћења (изузимајући пужне преноснике). Недостаци зупчастих преносника су велика крутост у преношењу снаге, вибрације и бука у току рада. Због тога захтевају еластичну спојницу на улазу или погон преко каишног преноса. Такође, у поређењу са фрикционим и каишним преносницима имају већи шум, релативно скупљу израду и крутост.

2.1 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ И ДЕФИНИЦИЈЕ

Зупчаник је машински део који чини тело зупчаника и озубљени венац. Венац зупчаника састоји се од зубаца и међузубља, а ограничен је теменом и подножном површином (сл. 2.4) односно чеоним површинама у аксијалном правцу. Зупци и међузубља ограничени су бочним површинама - десном и левом. Линија пресека бочне површине зупца са равни која је управна на осу обртања зупчаника представља профил зупца [1, 4, 5].

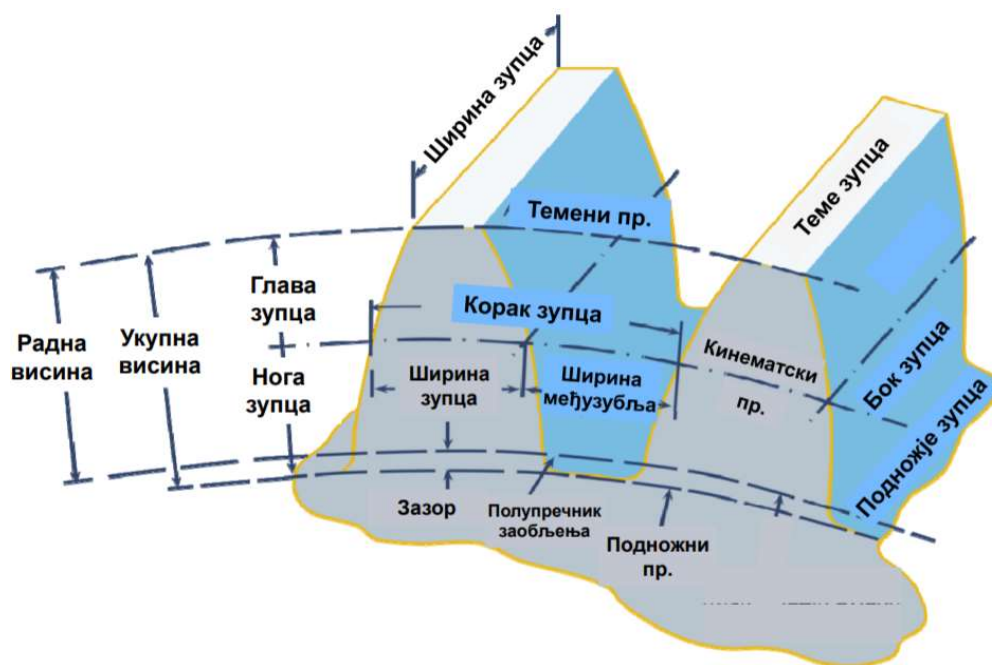
Корак профила зупца је лучно растојање између суседних истоимених бокова. Величина корака зависи од величине кружнице на којој се врши мерење (сл. 2.4), те је овај појам увек повезан са одговарајућом кружницом. Корак је једнак збиру лучне дебљине зупца и лучне ширине међузубља. Подеона раван односно подеони цилиндар дели зупце на темени део (глава зупца) и на подножни део (нога зупца). Пресецањем теменог, подеоног, подножног и других цилиндара чеоном равни добија се темена, подеона односно подножна кружница. Ако се обим подеоне кружнице пречника d изједначи са обимом који се добија као производ корака на подеоној кружници p и броја зубаца зупчаника z следи:

$$O = p \cdot z = d \cdot \pi \quad (2.1)$$

односно пречник подеоне кружнице је:

$$d = \frac{p \cdot z}{\pi} = m \cdot z \quad (2.2)$$

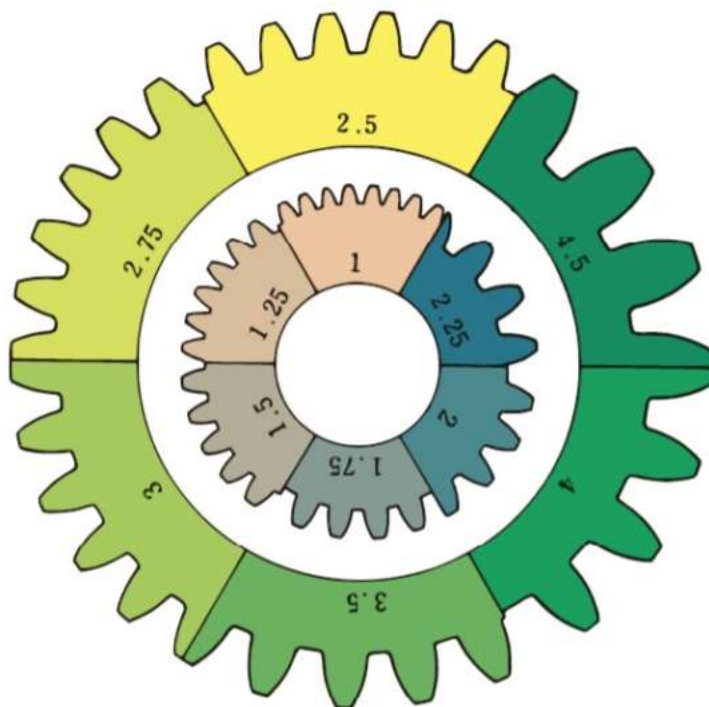
На слици 2.4 приказан је исечак цилиндричног зупчаника са правим зупцима као примера геометријски најједноставнијег зупчастог преносника.



Сл. 2.4 Ознаке код цилиндричних зупчаника са правим зупцима [6]

У изразу (2.2) са m је означен модул зупчаника који представља основни параметар зупчаника преко кога се одређују скоро све димензије зубаца и зупчаника. Ради ограничавања броја алата и прибора за израду и контролу зупчаника, величине модула су стандардизоване.

Стандардни модули распоређени су у два степена приоритета. При прорачуну првенствено треба користити вредности за модуле I степена приоритета. Вредности за модуле II степена приоритета треба користити само у изузетним случајевима. На **слици 2.5** илустроване су неке од стандардних вредности модула зупчаника.



Сл. 2.5 Сликавита приказ стандардних вредности модула [7]

Зупчасти пар чине два зупчаника истог модула који преносе оптерећење спрезањем - додиривањем зубаца. Један од зупчаника је погонски а други је гоњени. Погонски зупчаник преноси кретање и обртни момент на гоњени. Поред тога уобичајени су и називи мали и велики зупчаник. Мали зупчаник има мањи број зубаца, мањи пречник и мањи обртни момент али већу угаону брзину. Велики зупчаник се окреће спорије, има већи број зубаца односно већи пречник. Услед ових разлика зупчасти парови при преносу оптерећења и кретања мењају њихове карактеристике, односно трансформишу их. Ова трансформација сразмерна је преносном односу. При спрезању зупци спрегнутих зупчаника додирују се преко бочних површина. Део бочне површине по коме се врши додиривање у току спрезања назива се активни део бока зупца, и он игра најважнију улогу у кинематици зупчаника јер се преко њега преноси обимна сила и кретање. Остале површине зупца су од секундарног значаја. Бочна површина зупца је преко прелазног дела бока зупца спојена са подножном површином.

2.2 КОНСТРУИСАЊЕ ЗУПЧАСТИХ ПРЕНОСНИКА

При конструисању зупчаника, конструктори често требају узети у обзир доста различитих захтева попут преносног односа, момента, брзина, монтажних димензија, ефикасности, буке и чврстоће. Избор типа зупчаника зависи од појединачних захтева које конструктор има од случаја до случаја. На пример, бука коју зупчаници стварају може да има благу предност у односу на остале захтеве при избору зупчаника код аутомобилских мењача док при избору зупчаника мењача тешких камиона императив је чврстоћа (носивост). Често се носивост и бука поклапају као главни захтеви при избору те су у употреби чешћи зупчаници са косим зупцима (или кривим). Они су погодни јер код њих додир почиње у подножју зупца погонског зупчаника, шири се дијагонално по ширини зупца и завршава се на врху зупца. Код гоњеног зупчаника додир почиње на врху зупца на пример код предње чеоне површине, линија додир се затим дијагонално шири дуж бока зупца, а завршава се у подножју зупца код задње чеоне површине. Због тога оптерећење зупца није истовремено по целој ширини зупца већ постепено и дијагонално, што омогућује већу носивост зупчаника. Истом аналогijом, због постепеног „улаза у контакт“ смањује се бука [1-6].

Након избора типа зупчаника, а пре самог прорачуна конструктор мора изабрати основне величине. У даљем тексту, избор основних величина односиће се на цилиндрични зупчаник, као основни елемент у групи зупчастих преносника. Он се може сматрати основним јер је аналогija прорачуна за све остале врсте исте. На пример, прорачун носивости конусних зупчаника идентичан је као и прорачун носивости цилиндричних зупчаника, али се при томе прорачун изводи за еквивалентни цилиндрични зупчасти пар у средњем пресеку.

Дакле, при избору основних величина зупчаника полази се од ограничења која се при томе постављају, а која су најчешће везана за пречник вратила малог зупчаника, расположиви простор за уградњу преносника односно за унапред дефинисано осно растојање, могућност коришћења квалитетних материјала, и др. У случају да није познато осно растојање, онда се димензије преносника одређују на основу искуствених података о цилиндричним преносницима. При томе се најпре одређује пречник подеоне кружнице погонског зупчаника.

Избор ширине зупчаника у односу на пречник, модул или осно растојање је такође основна величина коју конструктор треба изабрати. Однос ширине и подеоног пречника се може усвојити према препорукама у зависности од врсте материјала и начина улежиштења.

Избор броја зубаца има битан утицај на носивост зупчаника. За исто осно растојање и исти преносни однос, могуће је променом модула, померања профила и угла нагиба добити различите бројеве зубаца зупчаника. При томе се мења и носивост зупчаника у односу на издржљивост бокова, подножја и у односу на заривавање. На број зубаца поред осталог утичу преносни однос и број обртаја, односно обимна брзина.

Погодним избором померања профила и применом V-нултих и V зупчастих парова може знатно да се утиче на носивост зупчаника. Развијен је читав низ система за избор померања профила, при чему критеријум за избор може да буде - иста брзина клизања на теменим деловима зубаца малог и великог зупчаника или њихова иста носивост у односу на заривавање, - исто напрезање подножја зубаца малог и великог зупчаника. Према стандарду DIN 3992 избором збира померања профила постиже се:

- висока носивост $x_1 + x_2 = 1$ (0,7...1,2);
- високи степен спрезања $x_1 + x_2 = -0,2$ (-0,4...0);
- уједначено озубљење $x_1 + x_2 = 0,3$ (0,2...0,4).

Као што је приказано у поглављу 2.1 вредности модула су стандардизоване. Међутим могуће је за исто осно растојање, променом броја зубаца и померања профила, варирати и вредност модула зупчаника. Зупчаници са већим модулима имају веће зупце (видети **слику 2.5**), а самим тим и већу носећу ширину у односу на зупчанике са мањим модулима. Због тога се вредности модула дају у зависности од ширине зупчаника. Са друге стране код зупчаника са косим зупцима повећањем вредности модула, опада степен спрезања бочних линија.

Од преносног односа зависе димензије зупчастог пара, а самим тим и преносника у целини. Због тога се понекад двостепеним преносницима могу постићи мање димензије преносника него једностепеним. Уколико не постоје друга ограничења, преносни однос се бира тако да буде „разломљен“ број. На овај начин се избегава периодично спрезање истих парова зубаца, тако да је хабање свих бокова зубаца равномерно. Поред наведених основних величина за цилиндричне, код косих се бира и угао нагиба зубаца. Након избора основних величина зупчаника приступа се прорачуну носивости.

Прорачун носивости зупчаника базира се на теоријским и експерименталним истраживањима која су извршена у већем броју института у свету. Основе ових истраживања углавном су дате у документима ISO/DIS 6336/I-IV од 1992. године, као и у стандарду DIN 3990 од 1992.године[1-9].

У току рада на зупцима зупчаника настају више врста оштећења. Које оштећење ће при одређеним радним условима бити критично зависи од већег броја фактора. Пракса међутим показује да су оштећења зубаца међусобно зависна. Појава једне врсте оштећења доводи до повећања опасности од појаве друге врсте оштећења. Тако се практично често јавља ситуација да се на зупцима зупчаника јавља цео низ у трећем поглављу наведених оштећења. У таквим условима врло је тешко открити прво оштећење, од кога је кренуо кружни ток оштећења. Због тога је неопходно да се прорачуном обухвате сви важнији критеријуми прорачуна. Теоријски су развијени и експериментално верификовани следећи критеријуми прорачуна зупчаника:

- прорачун носивости зупчаника по критеријуму издржљивости бокова зубаца;
- прорачун носивости зупчаника по критеријуму издржљивости подножја зубаца;
- прорачун носивости зупчаника у односу на заривавање;
- прорачун носивости зупчаника у односу на хабање.

За сваки од наведених прорачуна носивости, потребно је дефинисати и одредити оптерећење. Као основа за прорачун носивости зупчаника користе се номинална оптерећења која потичу од номиналног обртног момента радне машине. То је уствари радни обртни момент који одговара максимално дозвољеном за који је дата машина предвиђена. На пример то би било максимално трајно оптерећење дизалице односно њена називна носивост, или обртни момент код максимално дозвољене силе код маказа за сечење лимова и тако даље. Номинално оптерећење може се узети и према снази и броју обртаја погонске машине.

Додатно, потребно је знати да за прорачун носивости зупчаника је меродавно максимално локално напрезање на боку или у подножју зупца зупчаника. Због тога се номинално оптерећење увећава множењем факторима оптерећења:

- фактором радних услова;
- фактором унутрашњих динамичких сила;
- фактором расподеле оптерећења дуж бочне линије и
- фактором расподеле оптерећења на парове зубаца.

У наведеном стандарду (DIN 3990 или ISO/DIS 6336/I-IV), налазе се методе (препоруке) за одређивање ових фактора [4, 7, 9]:

1. Метода А: Фактори се одређују тачним мерењем и/или детаљним прорачуном уз анализу и симулацију рада комплетног система. За извођење ове методе неопходно је познавање свих конструкционих и технолошких података о преноснику као и података о оптерећењу и експлоатационим условима. Због тога се у пракси ова метода ређе примењује.

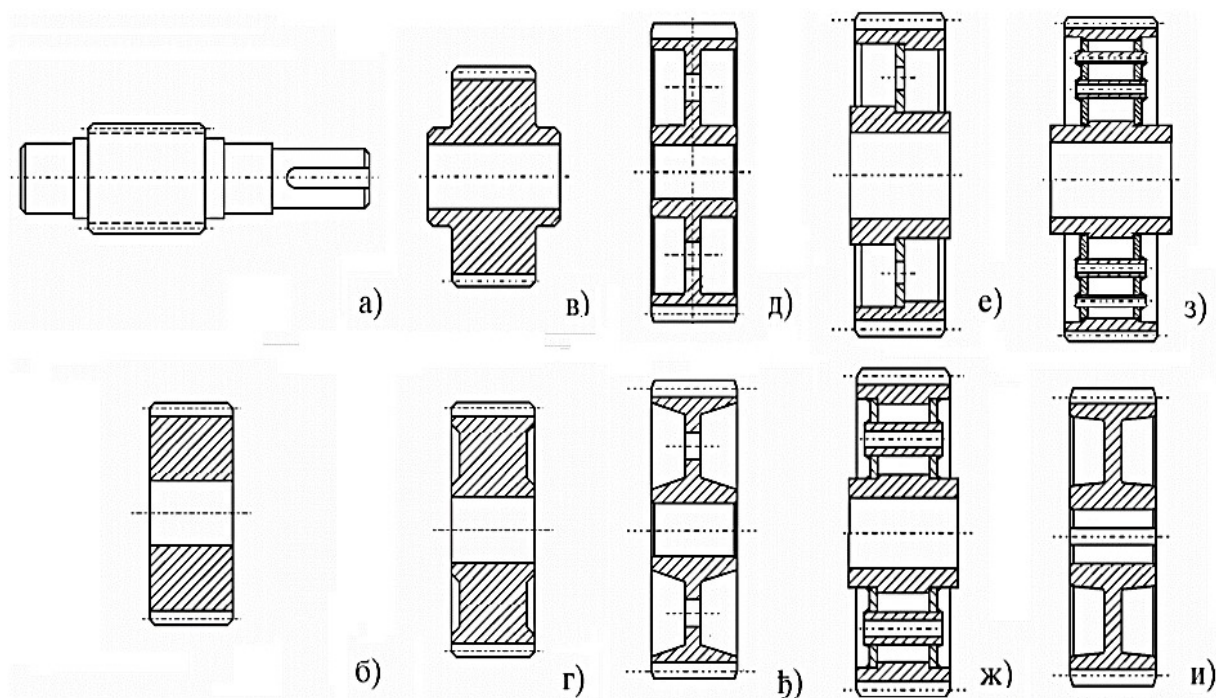
2. Метода В: Фактори се одређују уз одговарајућа упрошћења, али за већину практичних примена ова метода даје задовољавајуће резултате. Тако на пример уводи се претпоставка да зупчасти пар чини прост осцилаторни систем састављен од маса малог и великог зупчаника, уз занемаривање утицаја осталих степена преносника.

3. Метода С: У односу на методу В уводи се даље поједностављење прорачуна појединих фактора: узима се да зупчасти пар ради само у подкритичном подручју бројева обртаја, да су зупчаници израђени из пуног материјала са углом профила алата 20° , да су одступања подеоног корака иста као и одступања спрежног корака, и тако даље.

4. Метода D: Уз поједностављења дата за методу С уводе се још нека, као на пример да се прорачун изводи за константно јединично оптерећење од 350 N/mm^2 .

Према томе најтачнији прорачун носивости зупчаника је према методи А, а најприближнији према методи D. Излагање свих напред наведених метода захтевало би сувише велики простор што превазилази оквире овог рада.

По завршетку прорачуна носивости, усваја се конструктивни облик у зависности од габарита зупчаника и функције склопа у којем се налази. На конструкциони облик зупчаника битан утицај такође имају величина оптерећења, употребљени материјал, начин израде и термичка обрада, предвиђени радни век, предвиђена тачност и број комада. Неки од основних конструктивних облика цилиндричних зупчаника су приказани на **слици 2.6**.



Сл. 2.6 Конструктивни облици зупчаника [4]

Предходно наведени прорачуни, на бази DIN 3900 стандарда су имплементирани у разне CAD (Computer Aided Design) софтвере као што су: Autodesk Inventor, Solid Works, CATIA V6 (специјални макрои), Creo и тако даље. У њима, поред генерисања зупчаника могуће је извршити и њихов прорачун. Такође, постоје специјализовани софтвери за прорачун зупчаника (и осталих машинских елемената) као што су: KISSsoft, ZAR1, Gear Design Calculator и тако даље. У њима је могуће варирати разне параметре до добијања њихових жељених (оптималних) вредности. Неретко су софтвери развијани за посебне прорачуне зупчаника од стране стручњака у тој области [18-21].

2.3 МАТЕРИЈАЛИ ЗА ИЗРАДУ ЗУПЧАСТИХ ПРЕНОСНИКА

За израду зупчаника примењују се велики број различитих материјала, почев од сивог лива, челичног лива, нодуларног лива, преко обичних конструкционих челика, побољшаних челика па све до легираних челика за цементацију и нитрирање. Примењују се такође и нечелични материјали, као што су титан и алуминијумске легуре, као и разне врсте пластичних маса. Због техничких и економских разлога највећу примену имају челични материјали [1-6].

На избор материјала који ће се применити утичу велики број фактора, и то пре свега карактеристике издржљивости односно захтеви везани за квалитет материјала, затим цена материјала, начин израде и завршна термичка и механичка обрада, величина серије као и бука и вибрације у току рада.

Општа тенденција за смањењем димензија зупчаника као и могућност веома квалитетне термичке и механичке обраде, довела је до широке примене квалитетних и термички обрађених материјала. При томе највећу примену имају челици за цементацију, док се у мањој мери примењују пламено и индукционо каљени челици, односно челици за нитрирање.

При избору материјала малог и великог зупчаника треба имати на уму да је мали зупчаник угроженији у радним условима због већег броја обртаја, као и могућности појаве питинга. Због тога се за мали зупчаник бира нешто бољи квалитет материјала. У случају зупчастог пара где су оба зупчаника израђена од истог челика за побољшање потребно је да тврдоћа бокова малог зупчаника буде за 30...40 *HV* већа у односу на тврдоћу бокова великог зупчаника.

Користи се и комбинација да мали зупчаник буде израђен од челика, а велики од сивог лива, челичног лива или нодуларног лива. Код преносника већих снага (на пример турбински преносник), тело и венац великог зупчаника израђују се од различитих материјала. Тело зупчаника ради се на пример од челичног лива, а на њега се затим навлачи озубљени венац израђен од квалитетног челика.

При избору комбинације материјала цементиран и нитриран челик / побољшани челик, брушени бок зупца од отвореног материјала у току спрезања глача бок зупца од побољшаног челика, чиме се смањује опасност од појаве питинга. Код зупчастих парова са малом обимном брзином ($v_t < 0,5 \text{ m/s}$) користе се најчешће исте тврдоће бокова великог и малог зупчаника.

Преглед материјала за израду зупчаника и њихове основне карактеристике поседује већина софтвера за генерисање истих. При избору врсте материјала за израду зупчаника треба имати у виду њихове следеће карактеристике.

Сиви лив се примењује за мања оптерећења и мале бројеве обртаја ($v_t < 2 \text{ m/s}$), за зупчанике са компликованим обликом и већим модулима. Лако се обрађује, пригушује буку али је осетљив на ударна оптерећења.

Нодуларни лив примењује се за израду зупчаника за већа оптерећења и код њега је могућа термичка обрада.

Црни темпер лив користи се за израду зупчаника мањих димензија и има бољу чврстоћу и жилавост у односу на сиви лив.

Челични лив се користи за израду зупчаника великих димензија, али се у односу на сиви лив теже лије. Користи се за израду ваљаних и кованих зупчаника. Има ниску цену и могућност термичке обраде као код челика.

Челик се највише примењује за средње и високо напегнуте зупчанике. Овај материјал омогућује различите видове термичке и механичке обраде, чиме се добијају жељене карактеристике издржљивости. Обични конструкциони челици примењују се за средња оптерећења.

Челици за побољшање могу бити легирани и нелегирани, и зависно од свог хемијског састава (нарочито $\geq 0,3 \text{ \%C}$) примењују се у отвореном стању (висока тврдоћа бокова) или у побољшаном стању (висока жилавост). Побољшање се изводи пре израде озубљења, тако да не долази до промене димензија зупчаника услед побољшања, чиме је елиминисана и завршна механичка обрада. Челици за побољшање, који садрже потребну количину угљеника (0,35...0,5%), могу индукционо или пламено да се кале.

Код **индукционог каљења** зупчаник се загрева индуктивним путем помоћу електричне струје. При томе се користе два фреквентна поља: - средња фреквенца (500...10000 Hz) и - висока фреквенца (100...500 kHz). За постизање исте дебљине окаљеног слоја ова два поља се у извесној мери преклапају. При томе се користе технолошки поступци каљења померањем, каљења међузубља и каљење целог венца зупчаника. По достизању температуре каљења врши се хлађење водом.

Код **пламеног каљења**, загревање се врши мешавином кисеоника и горућег гаса. Зупчанике мањих димензија ($d \leq 200 \text{ mm}$; модул $m_n < 6 \text{ mm}$) могуће је загревати по целом венцу истовремено, а затим се по достизању температуре каљења врши хлађење водом. Код зупчаника већих димензија ($d \leq 3000 \text{ mm}$; $m_n > 8 \text{ mm}$) врши се појединачно каљење зубаца, при чему се дуж површине зупца креће пламеник а иза њега глава за хлађење.

Код пламено и индукционо каљених зупчаника најчешће није неопходна завршна обрада брушењем.

Нитрирање је термохемијски поступак отврдњавања где у чисте и потпуно обрађене бокове зубаца продире азот на повишеним температурама.

Код **нитрирања у гасу** процес се изводи најчешће у атмосфери амонијака на температури од 500...530 °C. Време трајања овог процеса је релативно дуго (до 180 сати за око 0,6 mm дубине отврдњавања). Време отврдњавања може одређеним поступцима јонизације да се смањи.

Код **нитрирања у кади**, поступак се изводи у кади са одговарајућим солима (цијанидима), на температури 520...580°C и траје 2...3 сата. Нитрирање у кади може да се примени за зупчанике средње величине ($d \leq 600 \text{ mm}$; $m_n < 10 \text{ mm}$).

Поступком нитрирања добијају се јако тврде површине бокова, са релативно малом дебљином отврднутог слоја, а долази и до повећања динамичке издржљивости зупчаника. При томе скоро да нема промена димензија зупчаника, што искључује завршну механичку обраду.

Челици за нитрирање су специјално за нитрирање припремљени челици у побољшаном стању.

Челици за цементацију су нелегирани и ниско легирани челици (Mn, Cr, Mo, Ni) са ниским садржајем угљеника (0,1 ...0,25 %C). У току цементације у површинске слојеве оваквог челика продире угљеник (0,8 ... 0,9 %C). Поступак може да се изведе средствима у облику прашка, течности (сона када) или гаса на температури од 850...950 °C, а затим се врши хлађење у уљу на 150...200 °C. На овај начин добијају се врло тврде површине бокова зубаца, а побољшавају се и карактеристике издржљивости зупчаника. У току цементације долази до извесне промене димензија зупчаника, тако да је касније неопходна завршна обрада брушењем врло тврдих површина бокова зубаца (на пример за $m_n < 10 \text{ mm}$ додатак за брушење износи (0,11+0,015 m_n)).

У новије време у примени је и завршна обрада финим глодањем, тако да се у великој мери скраћује и појевтињује завршна обрада цементираних зупчаника. Цементација може да се примени и за зупчанике већих димензија ($d \leq 3000 \text{ mm}$).

3. МОДЕЛИ ОТКАЗА ЗУПЧАСТИХ ПРЕНОСНИКА

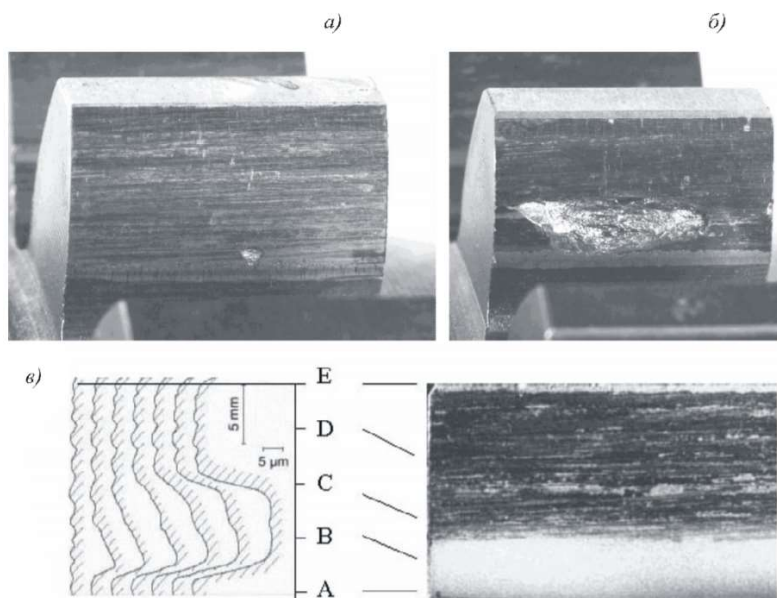
Статистичка анализа о оштећењима код зупчастих преносника снаге показује да 60% од свих оштећења код преносника отпада на зупчанике, 20% на лежаје, а 20% на све остале делове преносника. Овај податак указује на потребу да се појавама оштећења и разарања зубаца посвети посебна пажња, са циљем да се оне избегну.

У току рада зупци зупчаника преко својих бокова преносе оптерећења уз међусобно релативно кретање бокова зубаца праћено клизањем и котрљањем. Услед ових оптерећења на боковима зубаца јављају се напрезања површинских слојева изазвана контактним притисцима уз истовремено релативно клизање бокова зубаца. У подножју зубаца се при томе јавља напрезање на савијање. Зависно од врсте оптерећења и радних услова на зупцима зупчаника могу да се појаве већи број различитих видова оштећења (преко 20). Овде ће бити речи само о најважнијим врстама оштећења. [4, 22-25].

3.1 ПИТИНГ

Питинг преставља разарање бокова зубаца и карактерише се појавом малих јамица и рупица (величине од неколико десетина μm до $0,2mm$). Разарање настаје као последица великих површинских притисака на боковима зубаца, што доводи до замора материјала односно до појаве микропрслина испод бочне површине зупца. Назив потиче од енглеске речи "pitting" који је усвојен као технички израз за ову врсту оштећења. Разликује се почетни питинг (енг. *initial pitting*) и прогресивни питинг (енг. *progresive pitting*).

Почетни питинг (сл.3.1, а) јавља се на почетку рада новог зупчастог пара. Уствари тада долази до изравнања неравнина, које су последица храпавости, и стварања довољно велике површине ношења. После стварања довољно велике површине ношења, која може да пренесе целокупно оптерећење без оштећења, престаје даље ширење почетног питинга.



Сл.3.1. Оштећење бока зупца услед питинга:

а) почетни питинг; б) велико оштећење од питинга; в) микро-питинг [4]

Међутим врло често се догађа, најчешће због великих површинских притисака, да се и после изравнања почетних неравнина бокова настави даље оштећење бокова, односно долази до појаве прогресивног питинга. После дужег времена рада зупчаника оштећење бокова зубаца је толико, да преостали неоштећени део зупца не може више да пренесе оптерећење, па врло брзо после тога настаје разарање (дробљење) површине бокова (сл.3.1,б).

Питинг се појављује после одређеног периода рада. Скоро је немогуће, у нормалним условима, да дође до појаве питинга при броју промена оптерећења мањим од 10^4 . Најчешће се јавља после 10^5 до 10^7 броја промена оптерећења, односно броја спрезања.

Механизам настајања питинга објашњава се на следећи начин. Површине бокова зубаца су у току спрезања изложене притиску (Херцов притисак) и смицању (због међусобног клизања бокова зубаца). Нормални и тангентни напони који се при томе јављају могу бити већи од границе издржљивости материјала, што доводи до појаве микропрслина најчешће испод површине зупца. Прслина се шири према површини зупца под углом 5 до 20° у смеру клизања бокова. Узрок појаве микропрслина може бити и зарез као последица храпавости, који се јавља као извор концентрације напона. У овако настале прслине улази уље које у току спрезања бива затворено и притиснуто бочном површином зупца спрегнутог зупчаника, при чему притисак уља јако расте. Сталним затварањем и поновним отварањем у току спрезања ове прслине се даље повећавају ломљењем делића материјала на њиховим ивицама, и испадањем одломљених делова. Уље изазива ширење прслина све док оне не постану довољно велике да дође до истицања уља из зоне притиска бокова. У овом периоду откинути делови материјала имају троугласти облик, а почетне прслине прелазе у јамице. Даље ширење ових јамица изазвано је контактним напрезањима и тангентним напонима у смеру клизања. Овај механизам настајања јамица карактеристичан је за тврде површине бокова зубаца. Меке површине се у току рада пластично деформишу.

Појава питинга условљена је величином контактних притисака и сила трења. Сила трења пак зависи од храпавости бокова зубаца и од подмазивања. Према томе код бољег квалитета обраде површине бокова зубаца и бољег подмазивања смањује се и сила трења па је самим тим мања и опасност од појаве питинга. Термичком обрадом (цементација, нитрирање, каљење) повећава се чврстоћа површинских слојева, а тиме се повећава и отпорност према померању површинских слојева материјала услед силе трења.

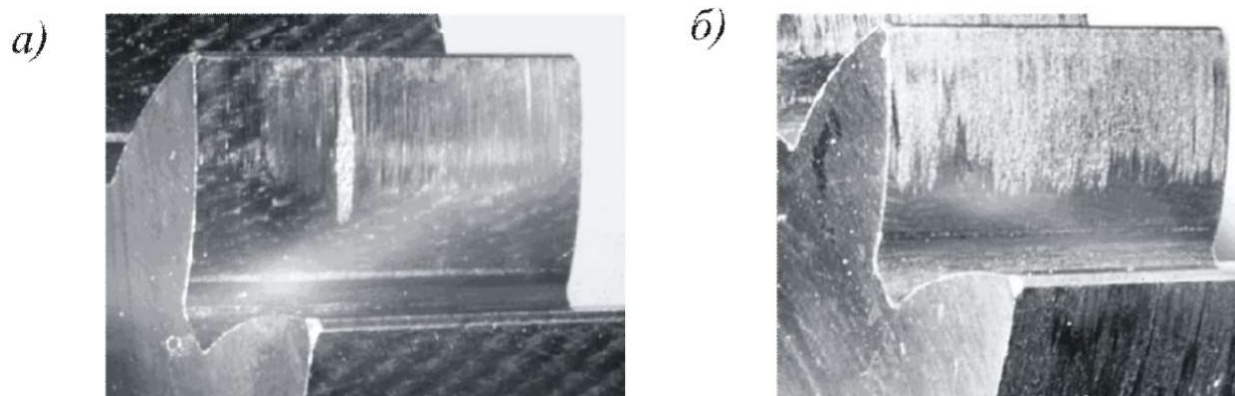
3.2 МИКРО-ПИТИНГ

Микро-питинг (нем. Graufleckigkeit, енгл. *micro pitting*) је оштећење које се јавља код отврднутих бокова зубаца као последица утицаја средства за подмазивање. Оштећење се манифестује као низ пора које настају на површини бока зупца. Површина при томе добија тамнији изглед. Ово оштећење има утицај као и одступање облика бока зупца (сл.3.1,в) и утиче на касније настајање питинга.

Код напрегнутог стадијума долази до микро-разарања и разугљенисавања површинских слојева. Дакле последица микро-питинга је заморно скидање површинских слојева. Разугљенисавање и промена облика профила зупца настаје у подножном делу зупца (између тачака А и С сл.3.1, в) и најпре почиње у подручју са негативним специфичним клизањем.

3.3 ЗАРИБАВАЊЕ

Зарибавање је оштећење бокова зубаца које настаје при деловању високих површинских притисака и великих брзина клизања, а манифестује се као специјални облик хабања са браздама, зарезима и пругама у смеру брзине клизања (сл. 3.2). Разликује се топло и хладно зарибавање.



Сл. 3.2 Оштећење бока зупца услед зарибавања
а) почетни стадијум; б) напреднути стадијум [4]

Хладно зарибавање је релативно редак облик оштећења, које се јавља при малим обимним брзинама (испод 4 m/s) и то махом код побољшаних челика нижег квалитета израде.

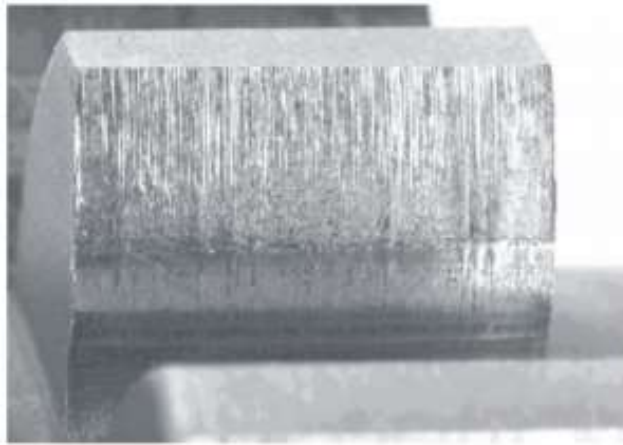
Топло зарибавање настаје при великим брзинама клизања и високим површинским притисцима, махом код термички обрађених зупчаника. Најчешће се јавља код цилиндричних и код хипоидних зупчаника.

До зарибавања долази због прекида уљног филма на боковима зубаца, изазваног преоптерећењем и великим брзинама клизања. Прекидом уљног филма долази до непосредног додира металних површина, при чему због трења долази до наглог повећања температуре. Раст температуре на појединим местима је толики, да долази до локалног заваривања површина бокова зубаца, које се у следећем тренутку одвајају уз кидање делова метала. Откинути делићи материјала даље оштећују бокове зубаца, тако да овакви услови спрезања врло брзо доводе до стварања изразито храпавих површина.

3.4 ХАБАЊЕ

Због клизања које се јавља између оптерећених бокова зубаца долази до хабања додирних површина (сл.3.3). Хабање се јавља код свих зупчастих парова, и у периоду разраде ова врста оштећења има позитиван ефекат на расподелу оптерећења. Међутим код спороходних преносника (са обимним брзинама мањим од 0,5 m/s), где је дебљина уљног филма на боку зупца испод 0,1 μm , долази до већег хабања које после одређеног периода рада достиже критични обим. Обим скидања материјала површинских слојева бока зупца може бити толики, да буде поремећено исправно спрезање зупчаника.

Хабање се манифестује као издубљење у зони високе брзине клизања, и најпре се јавља између подножне и кинематске кружнице, а затим и између кинематске и темене кружнице. После тога долази до хабања по целој активној висини зупца. Код зупчаника од материјала исте тврдоће хабање има приближно једнак облик и сличан интензитет на зупцима оба зупчаника (нешто већа промена облика је на малом зупчанику). Код зупчаника са различитом тврдоћом бокова зубаца, веће хабање јавља се код мекшег зупчаника. Због већег броја промена оптерећења код мањег зупчаника, његови бокови израђују се са већом тврдоћом у односу на велики зупчаник.



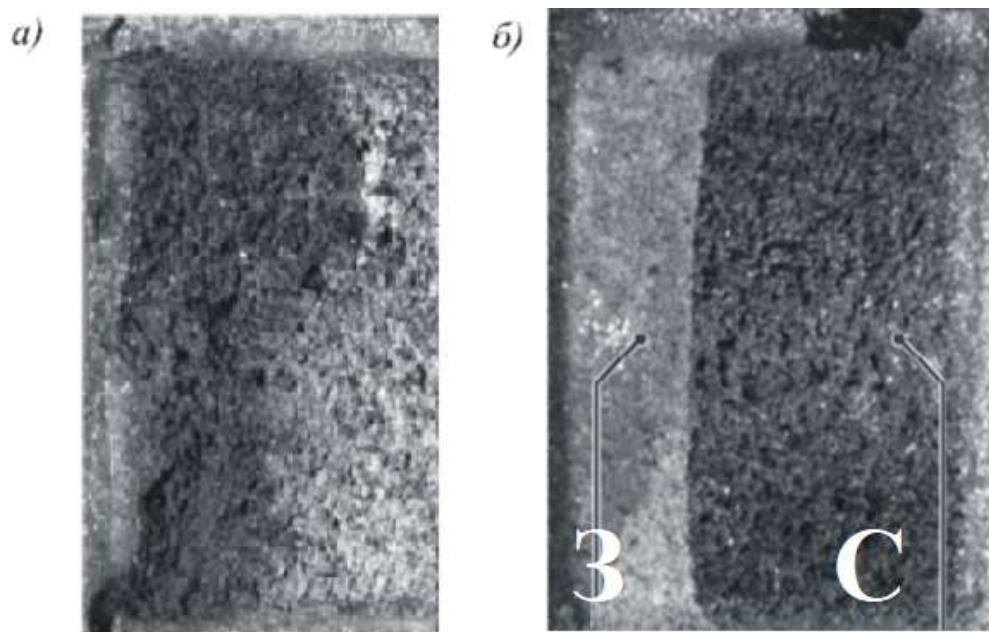
Сл. 3.3 Пример изгледа похабаног зупца цилиндричног еволвентног зупчаника [4]

Поред нормалног клизног хабања, о чему је напред било речи, постоји и такозвано абразивно (брусно) хабање, које изазивају мале тврде честице у уљу (преостали опиљци од обраде, минералне честице и др.). Честице могу бити и од хабања бокова зубаца и лежаја, од песка или струготине, као и осталих нечистоћа које се налазе у ваздуху. С обзиром да абразивно хабање врло брзо разара бокове зубаца, неопходно је обезбедити чисто уље применом одговарајућих филтера и заптивања.

3.5 НАСИЛАН И ЗАМОРАН ЛОМ ЗУПЦА

Једно од врло честих оштећења зубаца зупчаника је лом зупца. До лома најчешће долази у подножју, али он може да наступи и на теменом делу зупца. Услед оптерећења бокова спрегнутих зубаца, у подножју зупца јавља се сложено напонско стање, где доминира напрезање на савијање. Ломови зубаца који се јављају услед ових напона могу бити насилни и заморни.

Насилни ломови су последица непредвиђених ударних оптерећења, при чему се у подножју зупца јављају напони који су већи од статичке чврстоће. Преломна површина има крупнозрнасту структуру (сл.3.4), и најчешће лом иде преко целог попречног пресека зупца. На насилан лом утичу и динамички ефекти, где се поред ударних оптерећења убрајају колебање обртног момента, деформације кућишта, велики угиби вратила, истрошеност лежаја, неизбалансираност маса, и тако даље. Оштећења бокова такође увећавају динамичка оптерећења.



Сл. 3.4 Насилан (а) и заморни (б) лом зупца [18]
З – зона заморног лома; С – зона статичког лома

Оптерећења која доводе до насилног прелома су два до четири пута већа од оптерећења која доводе до заморног лома.

Заморни ломови настају као последица замора материјала услед динамичких оптерећења, при чему су напони у подножју зупца већи од трајне динамичке издржљивости. На преломној површини могу да се уоче две различите зоне (сл. 3.4,б): зона заморног лома (З) која је глатка односно има ситнозрнасту структуру, и зона насилног прелома (С) са крупнозрнастом структуром. Услед ширења заморног лома смањује се носећа површина у подножју зупца, тако да у једном тренутку преостала површине више не може да пренесе оптерећење, па долази до насилног прелома. Почетна прслина махом се јавља на прелазном делу бока у подножну површину и најчешће је последица зареза (као извора концентрације напона), напрслине изазване брушењем бокова, слабих места и неметалних укључака у материјалу, погрешне термичке обраде односно наглог прелаза између тврдог и меког слоја материјала, као и оштећења услед питинга.

Посматрањем преломне површине може да се уочи и узрок настанка почетне микро прслине, а то је најчешће концентрација напона због зареза који је настао из напред наведених разлога. Чест узрок лома услед замора је зарез на прелазу између бочне и подножне површине зупца. У случају да су бокови брушени, а да пре тога није остављен додатак за брушење, онда на прелазном делу између бока зупца и подножне површине настаје зарез. Ситне микропрслине на боку зупца могу бити и последица погрешне термичке обраде, али су оне погодне за настанак почетне прслине од замора. Могући узрок настанка прслине од замора су и локална преоптерећења, при чему се било на површини било испод површине јавља почетна прслина. Прслина испод површине се најпре шири према површини, а затим лагано напредује ка језгру зупца.

4. МЕХАНИКА ЛОМА КОД ЗУПЧАСТИХ ПАРОВА

4.1 ОСНОВЕ МЕХАНИКЕ ЛОМА

Механика лома проучава настанак прслине, затим праћење ширења и развоја прслине у материјалу све док она не узрокује лом, а њен темељ лежи у томе да ниједан материјал није у потпуности идеалан, већ да је кроз све процесе добијања материјала и његове обраде морало доћи до појаве грешака у истом, које су облика прслина, "мехура" или се могу поистоветити с њима.

Осим тога, обухвата и део науке о отпорности материјала који се односи на завршну фазу процеса деформисања под дејством оптерећења. Класичан приступ отпорности материјала је да у близини отвора, жлебова и сл. може доћи до појаве напрезања које прелазе напон на граници течења, односно напон на граници еластичности, али да у таквим случајевима долази до једноставне пластичне деформације и прерасподеле напона. Такав приступ се у великом броју случајева показао нетачним, јер једноставно у појединим врстама материјала не долази до прерасподеле напона, због чега се приликом повећања концентрације напона у близини прслина појављује нестабилно ширење саме прслине што може узроковати лом и код већина напрезања мањих од границе течења [25,26].

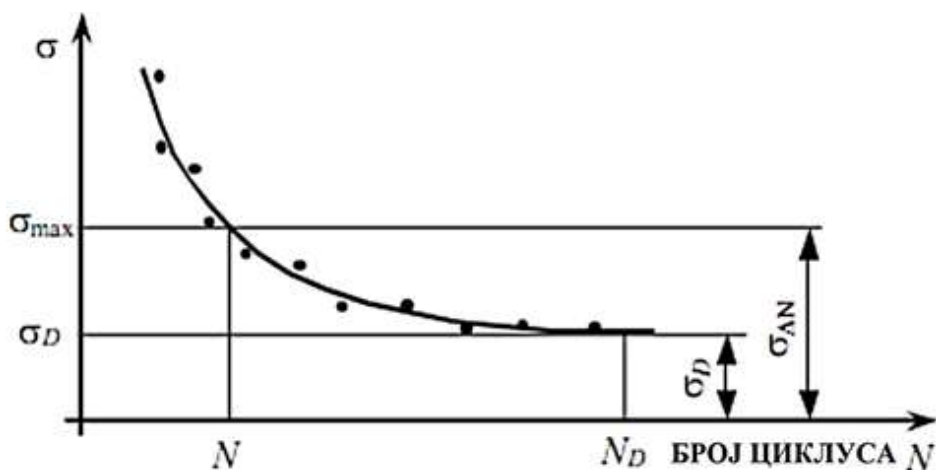
Појава таквих ломова би се могла избећи проналажењем свих критичних прслина. У експлоатацији се детекција истих показала као врло захтеван и тешко остварљив задатак. Због тога је потребно окренути се рационалном начину проналаска утицаја присутности микро или макропрслина које је врло тешко детектовати. Тим задатком се бави механика лома, тј. успостављањем квантитативних величина које карактеришу понашање материјала у присутности прслина [25].

Према механици лома напрезање које метал може поднети, а да не дође до лома, обрнуто је пропорционално величини прслине. Управо због овог својства прво се проверава да ли материјал садржи прслине које су критичних величина или веће од њих. Уколико их нема, може се рећи да неће доћи до лома, машинског елемента или конструкције при дејству предвиђених оптерећења.

Развој механике лома започиње почетком 20. века када је запажено да се делови машинских конструкција, који су подвргнути временски променљивим оптерећењима, ломе при напрезањима која су знатно мања од саме статичке чврстоће материјала. Овакви ломови, за разлику од ломова при статичком оптерећењу, у већини случајева настају без претходне пластичне деформације и то без обзира на врсту напрезања и карактеристике материјала.

Темеље механике лома је 1920-их поставио А.А. Griffith који се бавио кртим ломом, тј. ломом коме претходи само еластична деформација. Касније, немачки инжењер Вилер(*Wöhler*) уочивши проблем при лому вагонских осовина при вишеструко мањим напрезањима од затезне чврстоће, а при дејству статичког оптерећења, извршио је анализу и закључио: осовине вагона су уз статичко оптерећење биле подвргнуте временски променљивим напрезањима која су узроковала стварање и ширење прслине замором материјала; издржљивост осовина, изражена у броју остварених циклуса напрезања већа је што је мањи интензитет напрезања.

При томе постоји вредност максималног напрезања циклуса за коју је трајност практично неограничена. Та вредност је названа трајном динамичком чврстоћом. На **слици 4.1** приказана је Вилерова крива динамичке чврстоће настала као продукт испитивања издржљивости материјала на променљива динамичка оптерећења.

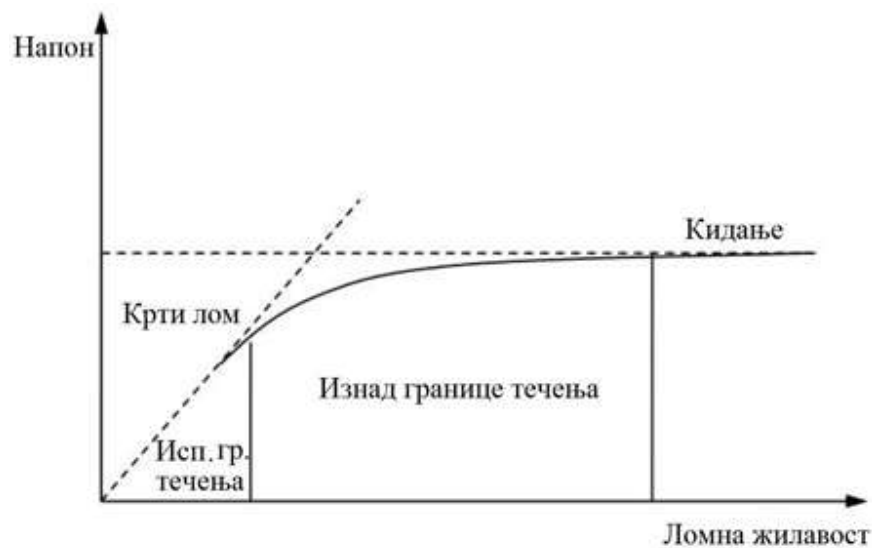


Сл. 4.1 Вилерова крива динамичке чврстоће [5]

Механика лома се данас дели на две основне гране:

- механика лома при линеарној еластичности (појава лома након еластичних деформација) –LEFM (*eng. Linear Elastic Fracture Mechanics*)
- механика лома изнад границе течења материјала (појава лома након еласто-пластичних деформација) –EPFM (*eng. Elastic-Plastic Fracture Mechanics*)

Са обзиром на таква механичка понашања материјала могуће је помоћу дијаграма приказати каква ће се врста лома појавити па самим тим које је принципе потребно користити приликом израде прорачуна (**Слика 4.2**).



Сл.4.2 Дијаграм утицаја својства ломне жилавости и напона на врсту лома [25]

Осим њих, обухвата и појаве лома као последице деловања променљивог оптерећења (заморни лом) и лома који настаје услед дејства корозионих утицаја на елементе конструкција (нпр. напонске корозије), а укључује и посебне случајеве лома (нпр. лом костију) [26,27].

Такође, механика лома има важну примену како у пројектовању нових конструкција, провери поузданости постојећих, тако и у провери поузданости и процени преосталог века трајања конструкција у којима су се појавиле иницијалне прслине [28].

4.1.1 НАПОНИ И ПОМЕРАЊА У ТЕЛУ СА ПРСЛИНОМ

4.1.1.1 ЛИНЕАРНО - ЕЛАСТИЧНА МЕХАНИКА ЛОМА

Линеарно еластична механика лома се темељи на претпоставци да је материјал изотропан и линеарно еластичан. Осим тога, за развој прслине и појаву лома, веома је битна расподела напрезања на месту зачећа прслине.

Др. Грифит (*Griffith*) је први показао да постојање прслина у материјалу доприноси концентрацији напона као и смањењу отпорности материјала. У својим истраживањима се бавио проблемом укупне енергије плоче с прслином, као и проблемом кртог лома те је поставио решење које за нестабилан раст прслине, тј. за крти лом гласи:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2 E \gamma}{\pi a}} \quad (4.1)$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2 E \gamma}{(1 - \nu^2) \pi a}} \quad (4.2)$$

где је:

a -ширина прслине,

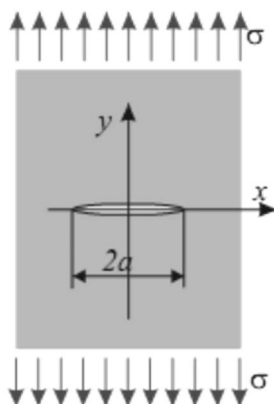
E -модул еластичности,

γ -енергија површинске напетости по јединици дебљине плоче (потребна енергија да се створе две нове површине прелома),

ν -поасонов коефицијент,

σ_c -критична затезна чврстоћа при којем се лом даље одвија без додатног утрешка енергије.

Наведене једначине (4.1) и (4.2) служе за одређивање критичне величине напона на затезање при којем се лом и даље одвија без додатног утрешка енергије. До решења задатка бесконачне еластичне плоче са елиптичним отвором, која је напрегнута у бесконачности једнолико распоређеним напрезањем σ (слика4.1). Грифит је дошао на начин тако да мања оса елипсе тежи ка нули. Тако се добија расподела напрезања у бесконачној плочи са зарезом дужине $2a$.



Сл. 2.1 Грифитова прслина-прслина ширине $2a$ у бесконачној плочи, оптерећеној управно на смер прслине [26]

Грифитова теорија је дала добро објашњење за чврстоћу кртих материјала, али њена примена на материјале са израженом пластичношћу захтева модификацију коју даје Ирвин (*Irwin*). Према њему, критична вредност напрезања за материјале са средишњим прслинама је:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E G}{\pi a}} \quad (4.3)$$

при чему је:

$$G = \frac{K^2}{E} \quad (4.4)$$

$$G = \frac{K^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (4.5)$$

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (4.6)$$

где је:

- G јединица повећања дужине прслине,
- K фактор интензитета напона,
- ν поасонов коефицијент,
- E модул еластичности.

У експерименту који је извео Ирвин, закључено је да се значајна енергија троши на развој пластичне деформације око прслине, где је локално прекорачена граница течења па укупна енергија при лому мора бити значајно већа од површинске енергије. Енергија пластичне деформације и енергија површинске деформације карактеризују отпорност материјала на лом и не зависе од почетне дужине прслине. Уколико је при томе подручје пластичне деформације мало, према дужини прслине и ширини плоче, могуће је користити релације линеарне еластичности. То значи да је Грифитов критеријум могуће проширити увођењем енергије потребне за рад пластичне деформације која претходи нестабилном развоју прслине (**слика 4.2**). Израз (4.7) представља укупну потенцијалну енергију плоче с прслином.

$$U = U_0 - U_a + U_\gamma \quad (4.7)$$

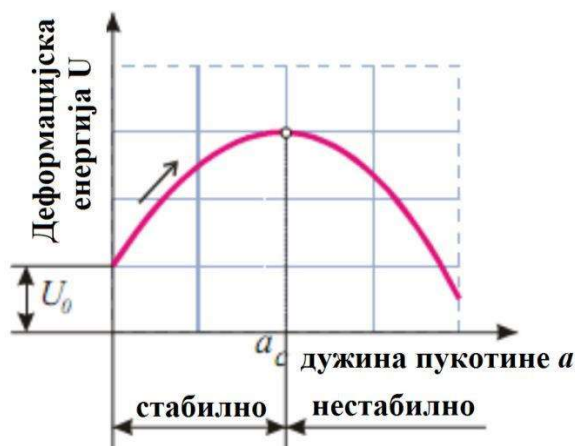
где је:

U_0 енергија деформације плоче,

U_a губитак енергије настао релаксацијом напрезања,

U_γ пораст енергије настао стварањем површинске напетости на новим слободним површинама.

$$U = U_0 - (1 - \nu^2) \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} 4a\gamma \quad (4.8)$$



Сл. 4.2 Енергија деформисања плоче с прслином у зависности од дужине прслине [26]

Услов преласка између стабилног и нестабилног ширења прслине гласи:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0 \quad (4.7)$$

где је:

U укупна потенцијална енергија плоче са прслином,

a дужина прслине.

Последице кртог лома на конструкције су често катастрофалне, што је показало познавање механичких својстава конструкцијских материјала, те је ради тога потребно пронаћи могућности избегавања кртог лома.

Из тог разлога се проучавају услови који одговарају настанку кртог лома:

1. Велике брзине деловања оптерећења, што узрокује онемогућавање настанка пластичне деформације;
2. Изражена концентрација напрезања на местима геометријских дисконтинуитета;
3. Употреба конструкционих материјала на температурама нижим од температуре пластичности.

Пошто су проблем кртог и квази кртог лома засновани на глобалном приступу и не могу се применити на анализу локалног понашања, било је потребно усмерити механику лома на анализу напрезања око врха прслине [26-29].

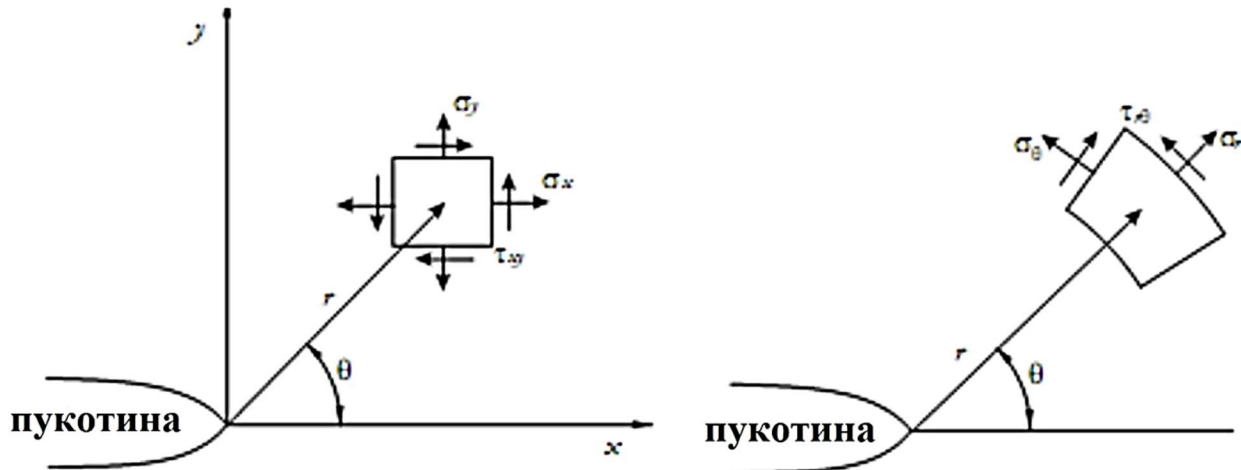
4.1.1.2 АНАЛИЗА НАПРЕЗАЊА У БЛИЗИНИ ВРХА ПРСЛИНЕ

Ако се постави поларни координатни систем са центром у врху прслине тада се поље напона линеарно еластичног тела с прслином може описати изразом:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}}\right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (4.10)$$

где је:

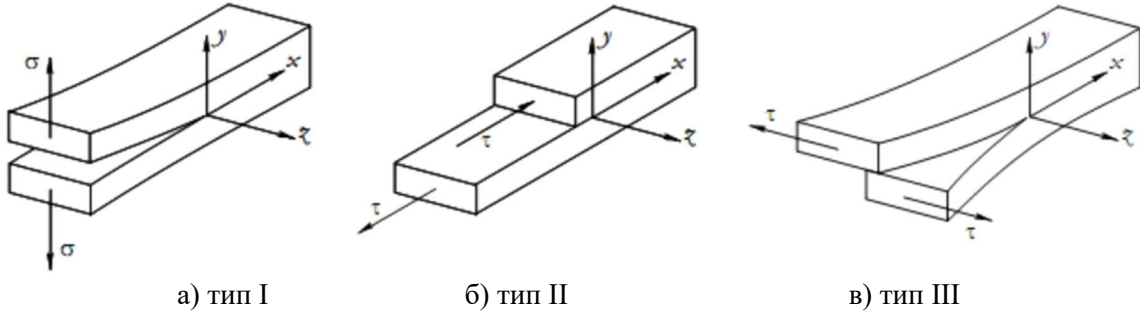
σ_{ij}	тензор напрезања,
r	координата у поларноцилиндричном координатном систему дефинисаном у врху прслине (слика4.3)
θ	координата у поларноцилиндричном координатном систему дефинисаном у врху прслине (слика4.3)
k	константа,
$f_{ij}(\theta)$ и $g_{ij}(\theta)$	бездимензијске функције зависне од θ .



Сл.4.3 Постављање координатног система [26]

Делови израза вишег реда зависе од геометрије. Решење за било коју геометрију увек садржи израз пропорционалан $1/\sqrt{r}$.

Када $r \rightarrow 0$ први део израза (4.10) тежи у бесконачност, а остали делови израза су константни или теже нули. Дакле, израз (4.10) описује сингуларност напрезања, будући да је $r = 0$ асимптота напрезања. Позната су три главна типа (мода) отварања прслине приказана на **слици4.4**. То су тип I или одцепљени тип, тип II или клизни тип, и тип III или расцепљени тип. [27].



Сл.4.4 Основни типови оптерећења са одговарајућим типовима прслине [25]

Сваки начин отварања прслине производи $1/\sqrt{r}$ сингуларитет у врху прслине, а константа k и функција f_{ij} зависи од начина отварања прслине. Константа k се замењује са фактором интензитета напона K .

$$K = k\sqrt{2\pi} \quad (4.11)$$

Фактору интензитета напона додају се индекси тако да се назначи начин отварања прслине. Тада се појава напрезања око врха прслине за изотропни линеарно еластични материјал може описати следећим изразима [25,30]:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta) \quad (4.12)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\theta) \quad (4.13)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\theta) \quad (4.14)$$

У случају кад постоји више начина отварања прслине, тада се збрајањем добија поље напрезања

$$\sigma_{ij}^{(ukupno)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (4.15)$$

Аналитичко решење расподеле напрезања око врха прслине додано је изразима:

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] - \left[K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \right\} \quad (4.16)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] + \left[K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \quad (4.17)$$

$$\tau_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \left[K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \right\} \quad (4.18)$$

За стање раванске деформације:

$$\sigma_z = \vartheta(\sigma_z + \sigma_z) \quad (4.19)$$

у поларном координатном систему стање напона око врха прслине је:

$$\sigma_\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos \frac{\theta}{2} - 3 K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.20)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (4.21)$$

$$\tau_{r\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (4.22)$$

Претходни изрази вреде у околини блиској врху прслине. Ова могућност описивања стања око врха прслине само с једним параметром важна је карактеристика механике лома. Помаци су такође у потпуности описани фактором интензитета напона:

$$u = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(k - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(k + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right]} \quad (4.23)$$

$$u = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi} \left[K_I \sin \frac{\theta}{2} \left(k + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(k + 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right]} \quad (4.24)$$

$$k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad (4.25)$$

$$k = 3 - 4\nu \quad (4.26)$$

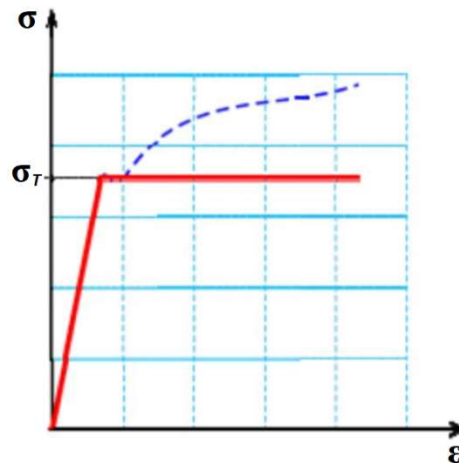
4.1.2 ЕЛАСТИЧНО-ПЛАСТИЧНА МЕХАНИКА ЛОМА

Појава великих пластичних деформација око врха прслине онемогућује описивање појаве око врха прслине линеарном механиком лома. Зато је потребно увести параметре који нису ограничени линеарно еластичним понашањем материјала, као што су отварање врха прслине и J интеграл.

Целокупна анализа код еласто-пластичних материјала заснована је на претпоставци да је радијус заобљења врха прслине једнак нули – тј. да је прслина оштра. Оваква претпоставка доводи до теоријски бесконачно великих вредности напона на самом врху прслине, што се не може тумачити и на начин да код тела ослабљених прслином, долази до лома и при малим вредностима оптерећења. У реалним конструкцијама јавља се коначна оштрина (затупљеност) врха прслине па самим тим и напони у тој области морају бити коначни. Јасно је да материјали поседују коначну чврстоћу и да увек постоји нека зона пластификације око врха прслине [30, 31].

4.1.2.1 ИРВИНАВА АПРОКСИМАЦИЈА

Ирвин је 1961. године предложио да се дужина зоне пластификације у смеру ширења прслине апроксимира тако да се претпостави да њена величина зависи од расподеле еластичних напрезања око врха прслине (слика 2.5).

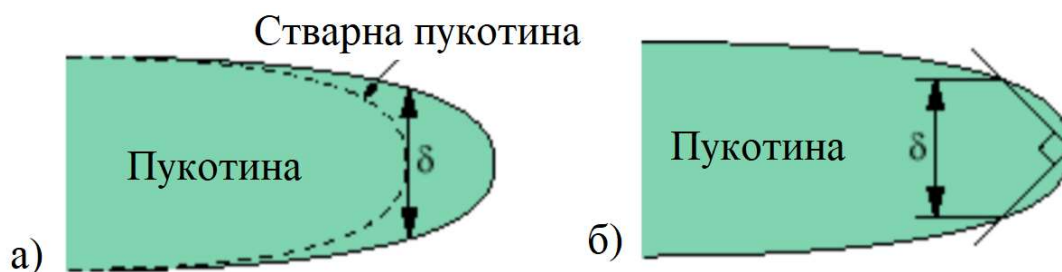


Сл.4.5 Дијаграм напрезање-дилатација (σ - ϵ) идеално еластично-пластични материјал [26]

4.1.2.2 ОСНОВНИ ПАРАМЕТРИ ЕЛАСТО-ПЛАСТИЧНЕ МЕХАНИКЕ ЛОМА

Отварање врха прслине CTOD

Најважнија карактеристика прслине са широм пластичном деформацијом је постојање коначног отвора при врху прслине за разлику од „тачкастог отвора” код еластичне прслине. Тај је отвор, према *Burdekinu* и *Wellsu* назван CTOD помаком (енг. *Crack Tip Opening Displacement*). Постоје две заједничке дефиниције отварања прслине CTOD које су еквивалентне ако прслина отупљује у полукругу (Слика 4.8).

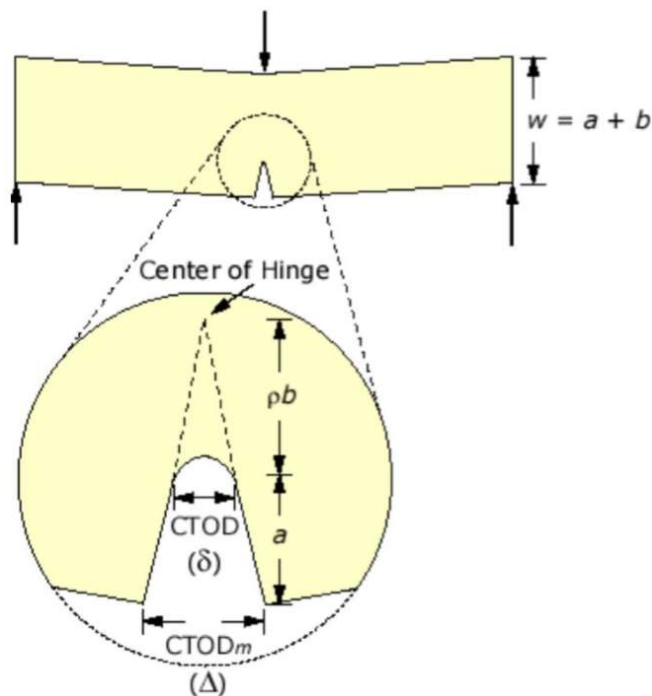


Сл. 4.6 Приказ модела проширења врха прслине

а) Изворни облик отварања врха прслине б) Отварање врха прслине у тачки где линије бокова прслине заклапају угао од 90 [25]

Један од начина да се при процени интегритета конструкције узме у обзир пластичност материјала, је одређивање параметра отварања врха прслине CTOD. CTOD нема чврсту теоријску основу, али има велику практичну примену јер се једноставно одређује, било да се ради о аналитичком или нумеричком приступу [25, 26, 31].

Отварање прслине (CTOD) код савијања узорка у три тачке (Слика 4.7)



Сл.4.7 Отварање врха прслине код савијања епрувете у три тачке [26]

$$CTOD = \frac{\rho b}{a + \rho b} CTOD_m \equiv \delta = \frac{\rho b}{a + \rho b} \Delta \quad (4.27)$$

где је:

CTOD _m	измерена вредност отварања врха прслине близу ивице испитиваног узорка ради лакшег приступа,
CTOD	прави помак отварања прслине,
<i>a</i>	дужина прслине,
<i>b</i>	ширина узорка,
ρ	бездимензиони фактор.

Поједнастављено:

$$\delta \approx \frac{b}{2a + b} \Delta \quad (4.28)$$

Изнад спојница модел можда неће бити тачан јер је помак углавном еластичан. Тачнији приступ је раздвајање CTOD у пластични и еластични део:

$$\delta = \delta_{elastic} + \delta_{plastic} = \frac{K_I^2}{m \sigma_{ys} E} + \frac{\rho_{plastic} b}{a + \rho_{plastic} b} \Delta \quad (4.29)$$

где је:

σ_{ys} напон;
 m бездимензиона константа која зависи од својства материјала и стања напрезања.

Веза између J и CTOD

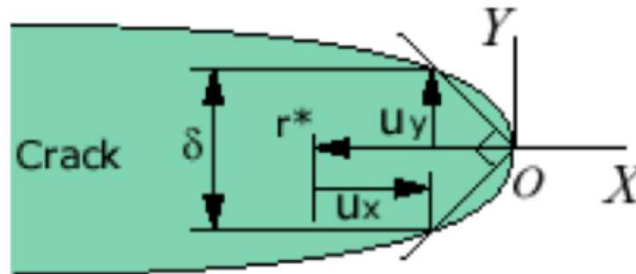
Узму ли се у обзир линеарно-еластично тело с прслином, J-интеграл и CTOD (сл.4.7), могуће је написати везу:

$$J = \frac{K^2}{E} = m \sigma_{yz} \delta \quad (4.30)$$

где су σ_{yz} и m дефинисани након израза (4.29).

За раванско напрезање и $m=1$, за прслину у бесконачној плочи помак отварања прслине δ , дефинисан је изразом (4.31)

$$\delta = \frac{K_1^2}{\sigma_y E} = \frac{\pi a \sigma^2}{\sigma_y E} = \frac{G}{\sigma_y} = \frac{J}{\sigma_y} \quad (4.31)$$



Сл.4.8 Отварање врха прслине - веза J-интеграла и CTOD [26]

Ших, (Shih, CF) 1981.године, отишао је корак даље и показао да постоји јединствени однос између J и CTOD изван граница LEM [26, 31].

Поље помака је дато изразом:

$$u_i = \frac{\alpha \sigma_{ys}}{E} = \left(\frac{E J}{\alpha \sigma_{ys}^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} r \tilde{u}_i(\theta, n) \quad (4.32)$$

CTOD се оцењује од u_x и u_y до $r=r^*$ и $\theta = \pi$.

$$\frac{\delta}{2} = u_y(r^*, \pi) = r^* - u_x(r^*, \pi) \quad (4.33)$$

$$r^* = \left(\frac{\alpha \sigma_{ys}}{E} \right)^{\frac{1}{n}} \{u_x(\pi, n) + u_y(\pi, n)\}^{\frac{n+1}{n}} \frac{J}{\sigma_{ys} I_n} \quad (4.34)$$

Следи CTOD, δ у облику

$$\delta = \frac{d_n}{\sigma_{ys}} J = \frac{2 \tilde{u}(\pi, n) \left\{ \frac{\alpha \sigma_{ys}}{E} [\tilde{u}_x(\pi, n) + \tilde{u}_y(\pi, n)] \right\}^{\frac{1}{n}}}{\sigma_{ys} I_n} \quad (4.35)$$

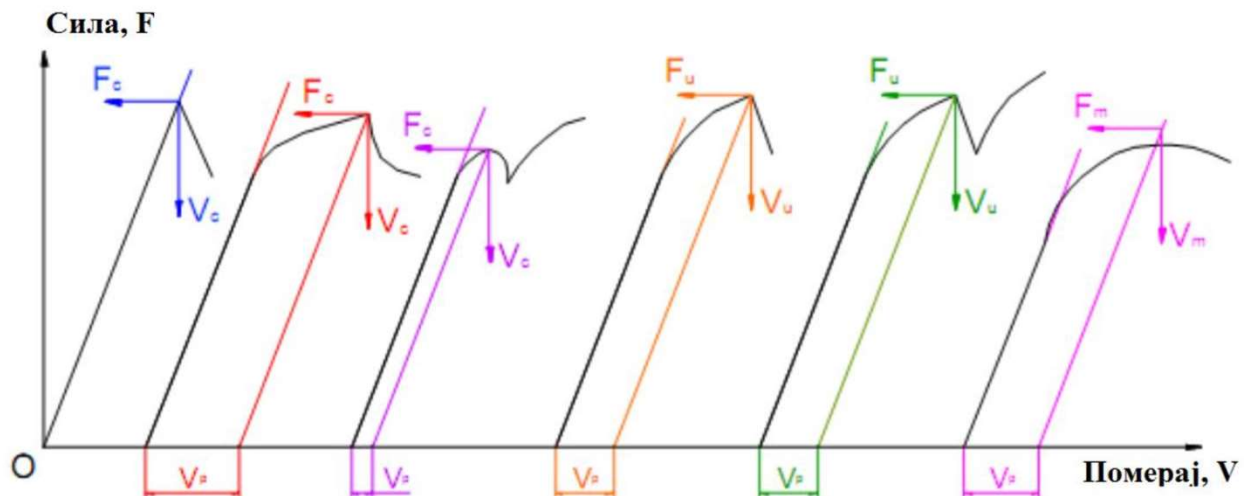
Одређивање критичног отварања прслине

Да би одредили критично отварање врха прслине потребно је утврђивање почетка раста прслине тј. потребно је утврдити вредност користећи дефиниције према BS 7448.

δ_c – вредност δ_t при иницијацији нестабилног раста или скока прслине $\Delta a < 0,2mm$

δ_u – вредност δ_t при иницијацији нестабилног раста или скока прслине $\Delta a > 0,2mm$

δ_m – вредност δ_t при достизању највећег оптерећења у зони пластичности.



Сл.4.9 Отварање врха прслине - веза J-интеграла и CTOD [26]

За прорачун меродавне вредности отварања врха прслине δ_t потребно је одредити одговарајуће вредности силе F и померај нападне тачке q или V .

За дијаграме од 1-5 приказане на **сл.4.9** вредности одговарајуће вредности силе и помака нападне тачке су (F_c , V_c) или (F_u , V_u) зависно од тога да ли је Δa мање, веће или једнако 0,2 mm, а које одговарају једној од следеће три варијанте лома прве појаве скока прслине:

- првом већем скоку прслине пре лома, према дијаграмима 3 или 5 приказаним на **сл.4.9**, или пре првог достизања максималне силе, при смањењу најмање за 5%;
- лому, када се вредности скока прслине пре лома одговарају смањењу силе мањем од 5%.

За дијаграм 6 са **сл. 4.9** одређују се вредности (F_m , V_m) које одговарају максимално достигнутој величини силе, ако се пре тога не појави лом или скок прслине.

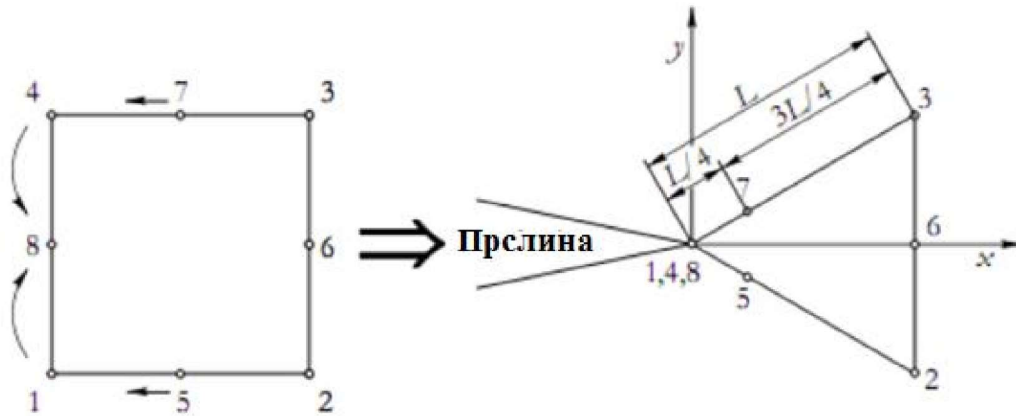
Осим као критична вредност параметра лома, отварање врха прслине може се користити за одређивање криве отпорности материјала на раст прслине [26,32].

Фактор интензитета напона

Фактор интензитета напона је зависан од дужине и оријентације прслине, геометрије машинског дела, расподеле оптерећења, и уопштено има облик:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a Y} \quad (4.36)$$

где је Y фактор облика, којим се узима у обзир утицај геометрије елемената, дужине прслине и типа оптерећења. Фактор облика $Y=1$ за прслину у бесконачној плочи оптерећену једносмерно. У литератури се налазе аналитички и емпиријски изрази за израчунавање фактора интензитета напрезања за узорке једноставне геометрије са различитим облицима прслина, те за различита оптерећења. Како машински делови најчешће нису једноставне геометрије, те су најчешће подвргнути сложеном стању напрезања, развијене су методе израчунавања фактора интензитета напона методом коначних елемената (МКЕ). Како је код еластичних материјала немогуће постићи "*1/r сингуларност*" стандардним елементима, развијени су хибридни елементи, тј. сингуларни изопараметарски квадратни елементи. Сингуларни изопараметарски квадратни елемент је добијен из изопараметарског 8-чворног квадратног елемента, на начин да се чворови 1,4 и 8 групишу у врху прслине, а чворови са средине странице премештају на четвртину дужине странице као што је приказано на **сл.4.10**.



Сл. 4.10 Изопараметарски 8-чворни квадратни елемент и сингуларни изопараметарски четвртински елемент [25]

Постоји низ метода за израчунавање фактора интензитета напрезања коришћењем методе коначних елемената, а најчешће су коришћене следеће методе:

- Метода корелација помака (енг. *Displacement Correlation Technique - DCT*);
- Фактор ослобођене потенцијалне енергије добијен методом модификованог интеграла затварања прслине (енг. *Modified Crack Closure Integral Technique - MCC*);
- Метода J интеграла добијеног помоћу еквивалентног површинског интеграла (енг. *Equivalent Domain Integral - EDI*).

Брзина ширења прслине

Уколико је пластична зона испред врха прслине релативно мала у односу на дужину прслине, стање око врха прслине може се описати само с једним параметром - фактором интензитета напона. [26, 32]

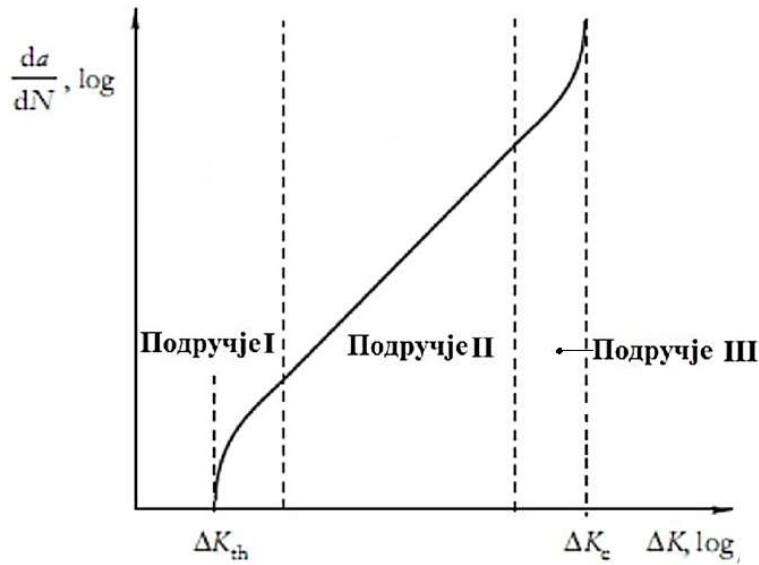
Примена механике лома при израчунавању брзине ширења прслине заснована је на принципу сличности. Према принципу сличности две прслине оптерећене променљивим оптерећењем, са циклусом једнаког константног распона фактора интензитета напона, имају једнако поље напона и деформација око врха прслине, из чега произилази да ће се и брзина ширења те две прслине бити једнака. Дакле, пораст дужине прслине по циклусу је функција распона фактора интензитета напона.

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R) \quad (4.37)$$

где је:

$$\Delta K = K_{max} - K_{min}$$

$$R = K_{min} / K_{max}$$



Сл.4.11 Крива раста прслине у металима [30]

Уочљиво је да ширење прслине на почетку убрзано (подручје I), затим прелази у фазу стабилног раста (подручје II), да би коначно прешло у фазу критичног ширења прслине (подручје III). У подручју I брзина ширења прслине тежи нули како се распон фактора интензитета напона приближава прагу ширења прслине:

$$\Delta K_{th} = K_{th,max} - K_{th,min} = \Delta \sigma \sqrt{\pi a_{th} Y} \quad (4.38)$$

где је a_{th} дужина зачећа прслине,

У подручју II прслина расте линеарно у log-log дијаграму, па се може описати једначином:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (4.39)$$

где су C и m константе материјала које се експериментално одређују.

У подручју III прслина убрзано расте како се распон фактора интензивности напрезања приближава K

$$\Delta K_c = K_{IC} - K_{c,min} = \Delta \sigma \sqrt{\pi a_c Y} \quad (4.40)$$

где је:

a_c критична дужина прслине,

K_{IC} ломна жилавост или критична вредност фактора интензитета напона

McEvily је развио израз који важи за читаву криву раста прслине и који, за разлику од претходних емпиријски добијених једначина, заснован на једноставном физичком моделу:

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K - K_{th})^2 \left(1 + \frac{\Delta K}{K_{IC} - K_{max}} \right) \quad (4.41)$$

Из свих ових једначина интеграцијом се може добити време потребно за раст прслине од неке произвољне дужине до критичне дужине. Такође, сви наведени изрази важе у случају оптерећења типа I.

Испитивање оптерећењем мешовитог типа (тип I и тип II) уочено је да и мали распон фактора интензивности напрезања типа II значајно повећава брзину ширења прслине. Због тога су развијени модели који узимају у обзир и допринос оптерећења типа II коришћењем еквивалентног фактора интензитета напона у Парисовој једначини

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eq})^m \quad (4.42)$$

Идеја коришћења еквивалентног фактора интензитета напона је погодна јер је већина података о материјалима подвргнутих променљивом оптерећењу добијена испитивањима оптерећењима константне амплитуде типа I, те би било од велике важности кад би се ти подаци могли користити у конструисању с обзиром на умор и у случају оптерећења мешовитог типа.

За одређивање еквивалентног фактора интензитета напона може се користити критеријум максималног циркуларног напрезања, те је у том случају израз:

$$\Delta K_{eq} = \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \left(\Delta K_I \cos \frac{\theta_0}{2} - 3 \Delta K_{II} \sin \frac{\theta_0}{2} \right) \quad (4.43)$$

где је θ_0 смер ширења прслине добијен из MCN-критеријума.

Танака је развио модел заснован на претпоставци да пластичне деформације због променљивог оптерећења на истезање не утичу на пластичне деформације због променљивог смицајућег напрезања и обрнуто, те да је резултујуће поље помака збир помака услед оба типа оптерећења.

$$\Delta K_{eq} = \sqrt[4]{\Delta K_I^4 + 8 \Delta K_{II}^4} \quad (4.44)$$

Мешовити тип оптерећења се, осим еквивалентним фактором интензитета напона, може узети у обзир и помоћу фактора густине енергије деформисања, па се у том случају модификује Парисова једначина и гласи

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta S)^m \quad (4.45)$$

при чему је:

$$\Delta S = 2[a_{11}(\theta_0)\Delta K_I \overline{K_I} + a_{12}(\theta_0)(\Delta K_I \overline{K_{II}} + \Delta K_{II} \overline{K_{I+I}}) + a_{22}(\theta_0)\Delta K_{II} \overline{K_{II}}] \quad (4.46)$$

где су:

θ_0 смерови ширења прслине;

a_{11}, a_{12}, a_{22} фактори добијени заменом угла θ_0 у изразе;

ΔK_I и ΔK_{II} распони;

K_I и K_{II} средње вредности [26].

4.2 ЛОМ ЗУБЦА УЗРОКОВАН ПРСЛИНОМ НАСТАЛОМ УСЛЕД ЗАМОРА

Лом зубаца може бити подељен на лом услед замора и остале. Лом зуба услед замора је најчешћи тип лома. Већина модела отказа зупчастих преносника, већ објашњених у трећем поглављу, се заснивају на лому зуба услед замора, односно лому иницираном у микро прслини (насталом хабањем, савијањем, комбинацијом и тако даље). Постоје више типова лома услед замора.

Доминантан тип лома услед замора је услед савијања зуба у корену (енг. *Tooth root bending fatigue cracks*). Развој лома у корену услед замора савијањем зуба се одвија у три фазе:

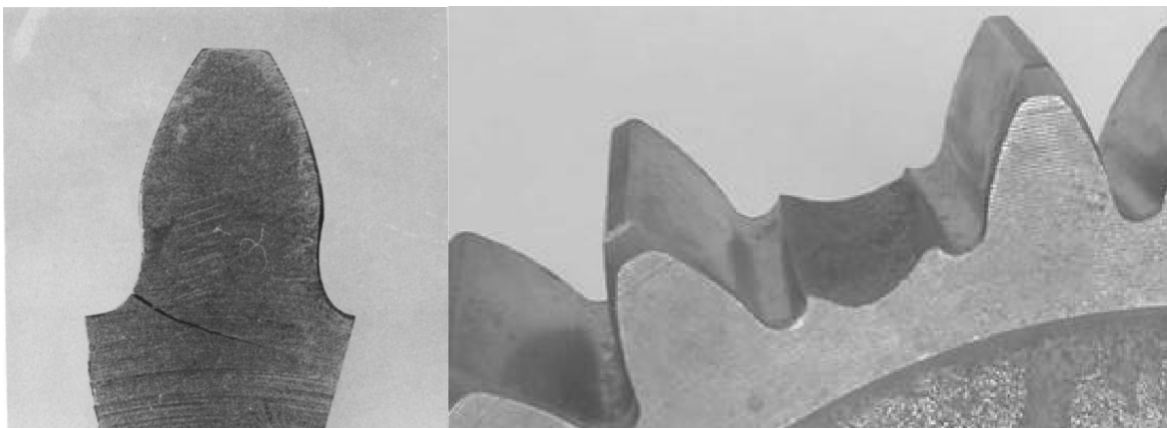
- иницијација прслине,
- ширење прслине,
- лом зуба зупчаника [33,34].

Лом углавном започиње у тангенти подножја зуба која гради угао од 30° са осом симетрије зуба (слика 4.12). [33, 34] Другим речима, у заобљењу у подножју зуба се јавља највећи напон услед чега је највећа шанса да до иницијалне прслине дође у истом. [33, 34] На напон и брзину отказа утиче велики број параметара међу којима су они што су везани за прслину следећи: ширина венца, угао ширења прслине, дубина иницијалне прслине, и тако даље.



Сл. 4.12 Генерални положај иницијалне прслине услед савијања у корену [33]

Типичан изглед лома у корену зуба насталог услед замора савијањем приказан је на слици 4.13. У левом делу слике 4.13 је приказан изглед зуба са прслином док је у десном делу приказан изглед зупчаника са изломљеним зубом. Најчешће, замор услед савијања претежно узрокује једну прслину која се шири у основи (корену) зуба.

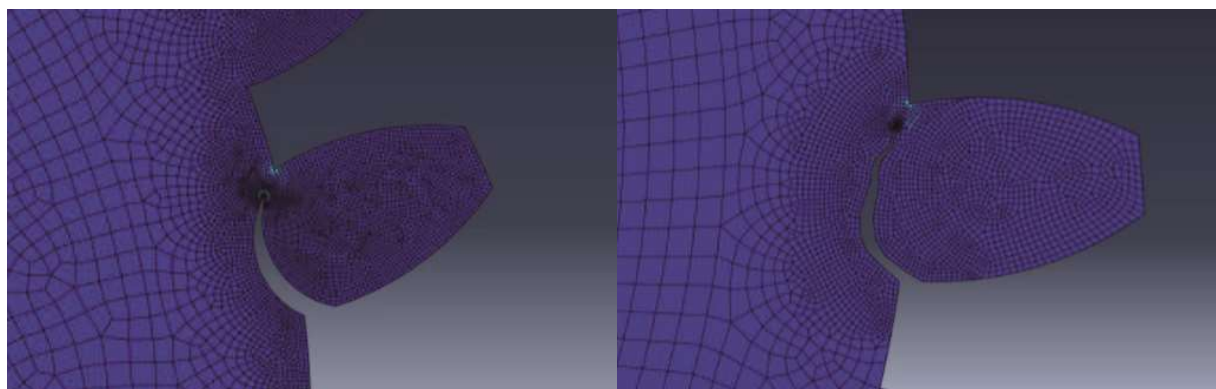


Сл. 4.13 Типичан изглед лома у корену зуба услед замора савијањем [34]

Заједничко за контактни замор и замора услед савијања зуба је да се иницијација догађа на површини. Ако се прслина појави у унутрашњости зуба, углавном је последица процеса термичке обраде те се не може сматрати прслином насталом услед замора.

Постоје системи за праћење (мониторинг) који могу спречити отказ система (тотални лом зуба и даље отказ). Брзо детектовање штете услед замора у механичком систему може спречити катастрофалне отказе читавог система. Рано упозорење о стању зупчаника у систему, односно њиховом потенцијалном отказу се може постићи праћењем, тј. неким од система за праћење, попут система вибрационе анализе [35-38]. Поуздана предиктивна методологија (систем за мониторинг) је последично неопходна да квалитативно процени потребу за одржавањем машинских система (промена или репарација зупчаника у овом случају).

Поред система за праћење, код замора услед савијања постоје нумеричке методе засноване на механици лома (претежно на механици лома при линеарној еластичности - енг. *Linear Elastic Fracture Mechanics*) које на основу обртног момента, напона и других параметара, рачунају брзину ширења прслине, односно отказа посматраног система (животног века) [39]. Пример МКЕ анализе пропагације прслине приказан је на **слици 4.14**.

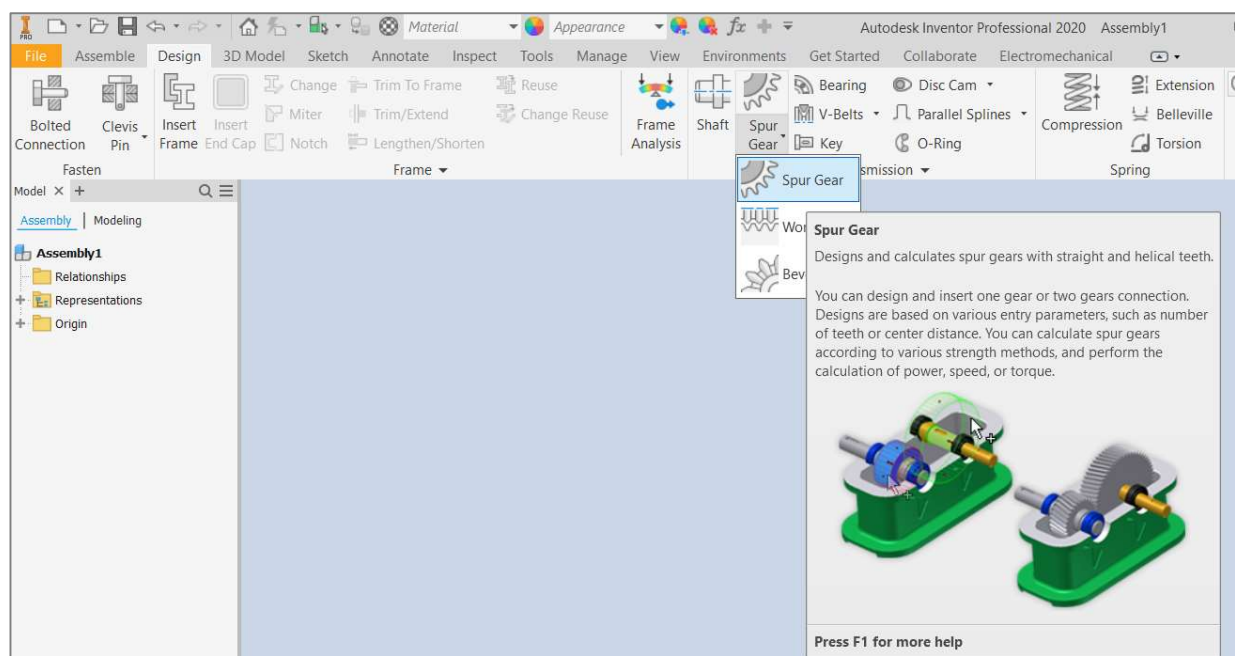


Сл. 4.14 МКЕ анализа пропагације прслине у корену зуба [39]

5. ПРИМЕР АНАЛИТИЧКОГ ПРОРАЧУНА НОСИВОСТИ ЗУПЧАНИКА

Као што је већ наведено у поглављу 2.3, избор материјала зависи од више фактора као што су: оптерећење, цена, начин израде, квалитет, величина серије, бука и вибрације у току рада и тако даље. Најчешћи материјали у употреби су челик, сиви лив, црни темпер лив, алуминијум и тако даље. Од свих наведених, челик је свакако најупотребљивији. Претежно због свог односа цене и квалитета, као и могућности постизања жељених карактеристика (тврдоће, жилавости, носивости и тако даље.) поступцима механичке и термичке обраде. Такође, у поглављу 2.2 је већ наведено да се цилиндрични зупчаник може сматрати елементарним зупчаником у групи зупчастих преносника. Због свега тога, за пример аналитичког прорачуна одабран је челични цилиндрични зупчasti пар са правим зупцима. [4,5,6]

Као алат за генерисање геометрије и прорачун према наведеним стандардима из поглавља 2.2 (DIN и ISO), изабран је софтверски пакет *Autodesk Inventor*. Поменути софтвер садржи модул *Design Accelerator* намењен прорачуну машинских елемената међу којима су и зупчаници. У овом примеру, као већ што је наведено, изабрани су цилиндрични зупчаници (енг.*Spur Gear*) (сл. 5.1).



Сл. 5.1 Алат за генерисање зупчастих парова

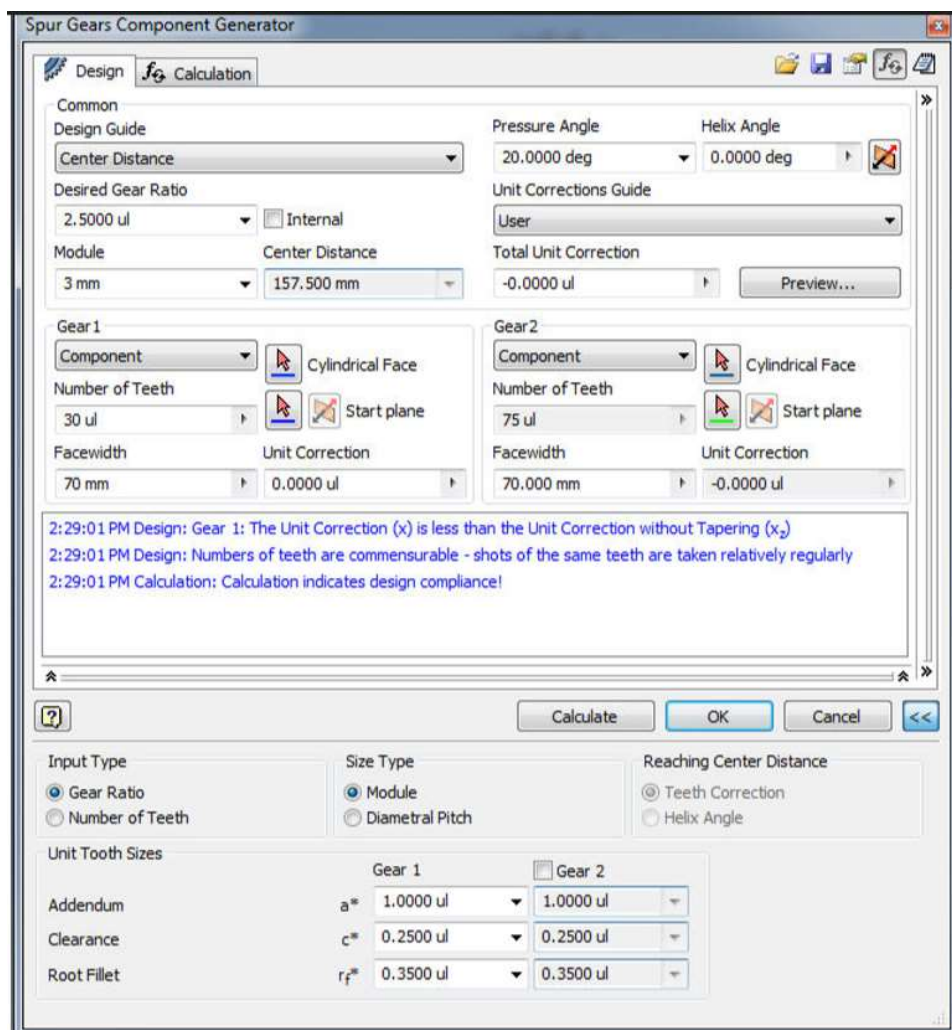
На слици 5.2 и 5.3 су приказане картице прозора (енг. *Spur Gears Component Generator*) који се отварају покретањем модула приказаном на слици 5.1. Картица са слике 5.2 се односи на дизајн који може бити дефинисан (енг. *Design Guide*) према изабраном модулу и броју зубаца или само броју зубаца/само модулу/осном растојању. На слици 5.3 је приказана картица (енг. *Calculation*) у којој се спроводи прорачун на основу унетих оптерећења, изабраних материјала и фактора радних услова. Целокупан прорачун (сл. 5.3) се изводи према изабраном стандарду (DIN, ISO, ANSI и тако даље.).

Сл. 5.2 Картица за дизајн цилиндричног зупчастог пара

Унутар прозора (сл. 5.2) се налазе сви параметри чијим се варирањем добијају жељене димензије приказане у десном делу прозора. Са изабраним димензијама, прелази се на следећу картицу за прорачун. Унутар методе за прорачун (сл.5.3) (енг. *Method and Strength Calculation*) бира се жељени стандард (нпр.DIN 3990), након чега се задају оптерећења (момент, снага, број обртаја), карактеристике материјала, фактори и тако даље. Даље, кликом на дугме *Calculate* врши се прорачун. Ако није задовољавајући, за изабране вредности оптерећења и материјал, параметре са претходне картице (сл.5.2) је потребно варирати.

Сл. 5.3 Картица за прорачун цилиндричног зупчастог пара

На слици 5.4 и 5.5 су приказани изглед картице „Дизајн“ и „Прорачун“ са унетим првим вредностима параметара прорачуна, изабраним стандардом и материјалима за овај изабрани пример. Као што се може видети са слика, поред унетог модула и преносног односа у картици „Дизајн“, у прозор прорачун унете су изабране вредности снаге 15kW и номинални број обртаја од 1500 min^{-1} . Кликном на дугме *Calculate* добијају се резултати. Са десне стране су приказани резултати, односно могу се видети вредности радијалне, нормалне и обимне силе, вредности степена сигурности гоњеног и погонског зупчаника. Ако поједини степени сигурности немају задовољавајуће вредности (означени су црвеном бојом), онда је потребно кориговати унете податке (на пример, повећање димензија зупчаника, изабрати „јачи“ материјал и тако даље.). Улазни параметри су варијани док нису добијени задовољавајуће вредности. Као материјал изабран је 16MnCr5 (Č4320) из понуђене базе материјала у програму *Autodesk Inventor*.



Сл. 5.4 Унети геометријски параметри зупчаника

Са слике 5.4 може се видети изабрани почетни модул $m=3 \text{ mm}$, преносни однос $i=2.5$ и ширина зупчаника $b=70 \text{ mm}$. Вредности је потребно варирати до добијених жељених вредности који издржавају задата оптерећења.

Method of Strength Calculation
ISO 6336:1996

Loads

	Gear 1	Gear 2
Power	P 20 kW	19.600 kW
Speed	n 1500 rpm	852.94 rpm
Torque	T 127.324 N m	219.436 N m
Efficiency	η 0.980 ul	

Material Values

Gear 1 ☒ DIN 16MnCr5

Gear 2 ☒ DIN 16MnCr5

	Gear 1	Gear 2
Bending Fatigue Limit	σ_{Flim} 700.0 MPa	700.0 MPa
Contact Fatigue Limit	σ_{Hlim} 1270.0 MPa	1270.0 MPa
Modulus of Elasticity	E 206000 MPa	206000 MPa
Poisson's Ratio	μ 0.300 ul	0.300 ul
Heat Treatment	4 ul	4 ul

Required Life L_h 10000 hr

Factors Accuracy

2:50:45 PM Design: Gear 1: The Unit Correction (x) is less than the Unit Correction without Tapering (x_p)
2:50:45 PM Calculation: Calculation indicates design compliance!

Results

Gear 1	
F_t	1756.192 N
F_r	639.202 N
F_a	0.000 N
F_n	1868.901 N
v	11.388 mps
n_{E1}	6455.843 rpm
S_H	1.910 ul
S_F	7.230 ul
S_{Hst}	4.030 ul
S_{Fst}	15.371 ul
Gear 2	
S_H	1.962 ul
S_F	7.548 ul
S_{Hst}	4.138 ul
S_{Fst}	15.940 ul

Calculate OK Cancel

Type of Load Calculation
☒ Power, Speed --> Torque
☐ Torque, Speed --> Power
☐ Power, Torque --> Speed

Type of Strength Calculation
Check Calculation

Limit Values

	Contact	Bending
Minimal Factor of Safety	1.200 ul	1.300 ul

Сл. 5.5 Изабрани стандард, вредности оптерећења и материјал

Са аспекта механике лома, односно стандардног прорачуна носивости зупчаника делом заснованог на механици лома, фактори оптерећења имају врло важну улогу. Методе њихових одређивања су објашњене у поглављу 2.1. Поред њих постоје и фактори контакта и фактори савијања, у нашој литератури познатији као корекциони фактори. Њихово одређивање је тема разних научних истраживања. [4, 7, 40-42] Због теме и обима овог рада одређивање фактора неће бити саставни део истог.

Сви наведени фактори су обухваћени у софтверу. Софтвер поседује могућност да прорачуна корекционе факторе на основу изабраног стандарда а у зависности од унешених параметра оптерећења, материјала зупчаника и њихове геометрије.

Кликом на дугме „Factors“ покреће се нови прозор приказан на **слици 5.6**. Као што је већ речено, у њега је могуће унети више врста фактора, као на пример:

- Факторе оптерећења: факторе радних услова, унутрашњих динамичких сила, расподеле оптерећења дуж додирне линије бокова, расподеле оптерећења на парове зубаца.
- Корекционе факторе за прорачун напона на боку зупца зупчаника: фактор облика бока зупца, фактор еластичности материјала, фактор степена спрезања бока зупца, радног века, подмазивања, храпавости, обимне брзине, утицаја разлике тврдоћа спрегнутих бокова и величине зубаца.
- Корекционе факторе за прорачун напона у подножју зупца зупчаника: фактор облика зупца, концентрације напона, степена спрезања, радног века, концентрације напона опитног зупчаника, осетљивости материјала на концентрацију напона, храпавости и величине пресека.

Factors

Factors of additional Load

	Contact	Bending
Application Factor	K_A 1.200 ul	
Dynamic Factor	K_{Hv} 0.000 ul	0.000 ul
Face Load Factor	$K_{H\beta}$ 0.000 ul	0.000 ul
Transverse Load Factor	$K_{H\alpha}$ 0.000 ul	0.000 ul
One-time Overloading Factor	K_{AS} 1.000 ul	

Factors for Contact

	Gear 1	Gear 2
Zone Factor	Z_H 0.000 ul	
Contact Ratio Factor	Z_e 0.000 ul	
Single Pair Tooth Contact Factor	Z_B 0.000 ul	0.000 ul
Life Factor	Z_N 0.000 ul	0.000 ul
Lubricant Factor	Z_L 0.000 ul	
Roughness Factor	Z_R 1.000 ul	
Velocity Factor	Z_v 0.000 ul	
Helix Angle Factor	Z_β 0.000 ul	
Size Factor	Z_x 1.000 ul	1.000 ul
Work Hardening Factor	Z_W 1.000 ul	

Factors for Bending

Form Factor	Y_{Fa} 0.000 ul	0.000 ul
Stress Correction Factor	Y_{Sa} 0.000 ul	0.000 ul
Teeth with Grinding Notches Factor	Y_{Sag} 1.000 ul	1.000 ul
Helix Angle Factor	Y_β 0.000 ul	
Contact Ratio Factor	Y_e 0.000 ul	
Alternating Load Factor	Y_A 1.000 ul	1.000 ul
Production Technology Factor	Y_T 1.000 ul	1.000 ul
Life Factor	Y_N 0.000 ul	0.000 ul
Notch Sensitivity Factor	Y_δ 0.000 ul	0.000 ul
Size Factor	Y_x 1.000 ul	1.000 ul
Tooth Root Surface Factor	Y_R 1.000 ul	

Results

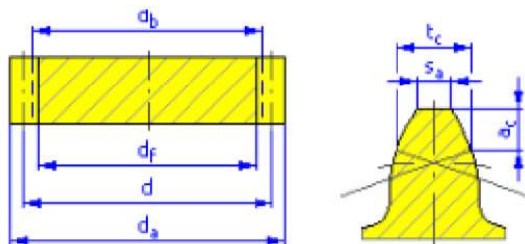
Z_E	0.000 ul
Gear 1	
S_H	0.000 ul
S_F	0.000 ul
S_{Hst}	0.000 ul
S_{Fst}	0.000 ul
Gear 2	
S_H	0.000 ul
S_F	0.000 ul
S_{Hst}	0.000 ul
S_{Fst}	0.000 ul

☒ User Factors

OK Cancel

Сл.5.6 Фактори

Кликом на иконицу „Results“ у горњем десном углу, добија се извештај са свим подацима везаним за зупчасти пар.



▣ Loads

		Gear 1	Gear 2
Power	P	20.000 kW	19.600 kW
Speed	n	1500.00 rpm	852.94 rpm
Torque	T	127.324 N m	219.436 N m
Efficiency	η	0.980 ul	
Radial Force	F_r	639.202 N	
Tangential Force	F_t	1756.192 N	
Axial Force	F_a	0.000 N	
Normal Force	F_n	1868.901 N	
Circumferential Speed	v	11.388 mps	
Resonance Speed	n_{E1}	6455.843 rpm	

Сл. 5.7 Изглед дела извештаја

Унаредним табелама су приказане све улазне и излазне вредности прорачуна у софтверу. У табели 5.1 приказане су димензије зупчаника, док су у табели 5.2, 5.3, 5.4 и 5.5 приказане вредности резултата добијених прорачуном у већ поменутом софтверу.

Табела 5.1Добијене димензије погонског и гоњеног зупчаника

		Зупчаник 1	Зупчаник 2
Преносни однос	u	1,759	
Модул	m	5 mm	
Угао основног профила	α	20°	
Угао додирнице	α_w	20°	
Угао нагиба зубаца	β	0°	
Осно растојање	a	200 mm	
Број зубаца	z	29	51
Пречник подеоног круга	d	145 mm	255 mm
Ширина зупчаника	b	20 mm	20 mm
Материјал		16MnCr5 (Č 4320)	16MnCr5 (Č 4320)

Табела 5.2 Оптерећење зупчаника

		Зупчаник 1	Зупчаник 2
Снага	P	20 kW	19,6 kW
Број обртаја	n	1500 min ⁻¹	852,94 min ⁻¹
Обртни момент	T	127,32 Nm	219,44 Nm
Обимна сила	F_t	1756,19 N	
Радијална сила	F_r	639,20 N	
Нормална сила	F_n	1868,9 N	

Табела 5.3 Фактори оптерећења

Фактор радних услова	K_A	1,2
Фактор унутрашњих динамичких сила	K_V	1,32
Фактори расподеле оптерећења дуж додирне линије бокова	$K_{H\beta}$	1,85
	$K_{F\beta}$	1,18
Фактори расподеле оптерећења на парове зубаца	$K_{H\alpha}$	1,1
	$K_{F\alpha}$	1,08

Табела 5.4 Корекциони фактори за прорачун напона на боку зупца зупчаника

Фактор облика бока зупца	Z_H	1,2
Фактор еластичности материјала	Z_E	1,32
Фактор степена спрезања бока зупца	Z_ϵ	1,85
Фактор радног века	Z_{NT}	1
Фактор подмазивања	Z_L	0,97
Фактор храпавости	Z_R	1
Фактор обимне брзине	Z_V	1,004
Фактор утицаја разлике тврдоћа спрегнутих бокова	Z_W	1
Фактор величине зубаца	Z_X	1

Табела 5.5 Корекциони фактори за прорачун напона и подножју зупца зупчаника

		Зупчаник 1	Зупчаник 2
Фактор облика зупца	Y_{Fa}	2,56	2,34
Фактор концентрације напона	Y_{Sa}	1,63	1,73
Фактор степена спрезања	Y_ϵ	0,69	
Фактор радног века	Y_{NT}	1	
Фактор концентрације напона опитног зупчаника	Y_{ST}	1	
Релативни фактор осетљивости материјала на концентрацију напона	$Y_{\delta relT}$	1,184	1,184
Релативни фактор храпавости	Y_{RrelT}	1	
Фактор величине пресека	Y_X	1	

Софтверским прорачуном се добијају информације о геометрији, силама, факторима и тако даље. Додатно, ако прорачун задовољава, то значи да су радни напони мањи од дозвољене вредности (да су прорачунати степени сигурности већи од усвојених) али се не приказује прорачуната вредност радног напона.

Он се може срачунати додатно на основу познатих вредности критичног напона и степена сигурности. Следећи изрази (5.1 – 5-6), дефинисани DIN и ISO стандардима [7,8], се употребљавају како би се срачунао поменути радни напон. Такође, користе се за прорачунавање степена сигурности, како би се извршила додатна провера поклапања резултата добијених софтверским прорачуном (сл.5.5).

$$\sigma_{H0} = Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u} \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{H\alpha} \cdot K_{H\beta}} \quad (5.1)$$

$$\sigma_{H0} = 2,49 \cdot 189,81 \cdot 0,875 \cdot \sqrt{\frac{1756,19}{145 \cdot 20} \cdot \frac{1,76+1}{1,76} \cdot 1,2 \cdot 1,46 \cdot 1,08 \cdot 1,28}$$

$$\sigma_{H0} \approx 630 \frac{N}{mm^2}$$

Вредност критичног напона се рачуна на основу израза:

$$[\sigma_{H0}] = \sigma_{Hlim} \cdot Z_{NT} \cdot Z_L \cdot Z_R \cdot Z_V \cdot Z_W \cdot Z_X \quad (5.2)$$

где је за изабрани материјал:

$$\sigma_{Hlim} = 1270 \frac{N}{mm^2}$$

$$[\sigma_H] = 1270 \cdot 1 \cdot 0,97 \cdot 1 \cdot 1,004 \cdot 1 \cdot 1$$

$$[\sigma_H] = 1233 \frac{N}{mm^2}$$

Степен сигурности против разарања бокова зубаца се рачуна на основу израза (5.3). Може се приметити да је резултат исти као унутар софтвера (сл. 5.5):

$$S_H = \frac{[\sigma_H]}{\sigma_{H0}} = \frac{1233}{630} \quad (5.3)$$

$$S_H = 1,96 > S_{Hmin} = 1,25$$

Радни напон у подножју зубаца се рачуна на основу израза:

$$\sigma_F = Y_{Fa} \cdot Y_{Sa} \cdot Y_\varepsilon \cdot \frac{F_t}{b \cdot m} \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta} \quad (5.4)$$

Вредност радног напона у подножју зубаца за погонски зупчаник је:

$$\sigma_{F1} = 2,562 \cdot 1,632 \cdot 0,691 \cdot \frac{1756,192}{20 \cdot 5} \cdot 1,2 \cdot 1,461 \cdot 1,08 \cdot 1,19$$

$$\sigma_{F1} = 114,328 \frac{N}{mm^2}$$

Вредност критичног напона у подножју зубаца се рачуна на основу израза:

$$[\sigma_F] = \sigma_{Flim} \cdot Y_{NT} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{\delta relT} \cdot Y_{RelT} \cdot Y_X \quad (5.5)$$

где је за изабрани материјал:

$$\sigma_{Flim} = 700 \frac{N}{mm^2}$$

Вредност критичног напона у подножју зубаца за погонски зупчаник износи:

$$[\sigma_F]_1 = 700 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1,176 \cdot 1 \cdot 1$$

$$[\sigma_F]_1 = 823 \frac{N}{mm^2}$$

Степен сигурности напона у подножју зубаца се рачуна на основу израза:

$$S_F = \frac{[\sigma_F]}{\sigma_F} \quad (5.6)$$

Степен сигурности напона у подножју зубаца за погонски зупчаник износи:

$$S_{F_1} = \frac{823}{114,33}$$

$$S_{F_1} = 7,2 > S_{Fmin} = 1,25$$

Радни напон у подножју зубаца гоњеног зупчаника је:

$$\sigma_{F_2} = 2,34 \cdot 1,73 \cdot 0,69 \cdot \frac{1756,19}{20 \cdot 5} \cdot 1,2 \cdot 1,46 \cdot 1,08 \cdot 1,19$$

$$\sigma_{F_2} = 110,31 \frac{N}{mm^2}$$

Вредност критичног напона у подножју зубаца гоњеног зупчаника је:

$$[\sigma_F]_2 = 700 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1,18 \cdot 1 \cdot 1$$

$$[\sigma_F]_2 = 828,8 \frac{N}{mm^2}$$

Степен сигурности у подножју зубаца за гоњени зупчаник је

$$S_{F_2} = \frac{828,8}{110,31}$$

$$S_{F_2} = 7,51 > S_{Fmin} = 1,25$$

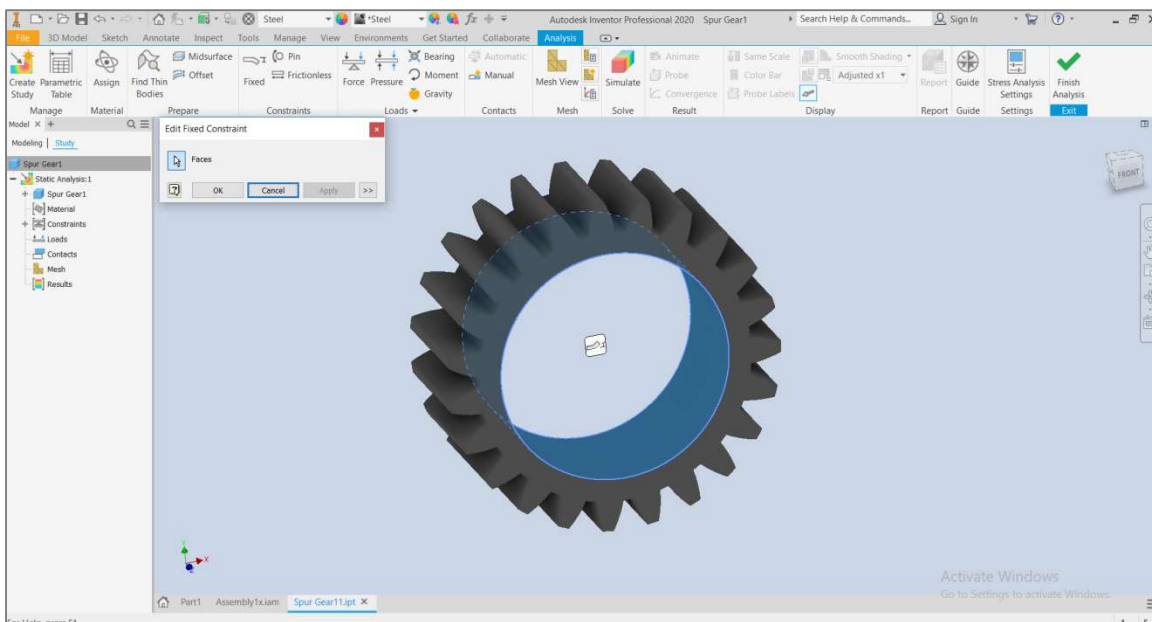
Као што је и добијено софтверским прорачуном (**слика 5.5**), вредности степена сигурности за погонски и гоњени зупчаник су веће од препоручене вредности, па у току рада неће доћи до лома зубаца у подножју. Такође се може приметити да се софтвером добијене вредности поклапају са вредностима срачунатим претходним изразима.

6. АНАЛИЗА НАПОНСКО-ДЕФОРМАЦИЈСКОГ СТАЊА ЧЕЛИЧНОГ ЗУПЧАНИКА СА ПРСЛИНОМ У ПОДНОЖЈУ ЗУПЦА УПОТРЕБОМ МКЕ

Коришћењем стручне (научне) терминологије, метода коначних елемената (МКЕ – енг. **Finite Element Method – FEM**) се може описати као метода која користи различите типове варијационих метода, примењених на дискретном моделу за структурну анализу континуума. Континуум се дискретизује коначним бројем елемената и степени слободне кретања. Успех примене методе је у квалитету изабраних апроксимација коначних елемената постављеног модела. Погодност методе је у вредностима варијационе методе. Задатак се описује системом диференцијалних једначина које се формирају из услова минимума функционала конструкције. Овај задатак је рутински, а решавање система диференцијалних једначина иде матричним методама, врло погодним за третман рачунаром. Тачност израчунавања је дефинисана квалитетом изабраних функција облика (интерполационих функција), мрежом и типом коначних елемената. Зависно од изабраних независно-променљивих величина и начина формирања једначина, постоје четири основне методе: метода померања (метода деформација), метода сила, мешовита и хибридна метода. Формирање једначина се изводи применом основних закона механике. Тако, рецимо, код методе померања користи се принцип о минимуму функционала (пуне енергије система). Код методе силе, користи се принцип о минимуму комплементарне енергије система

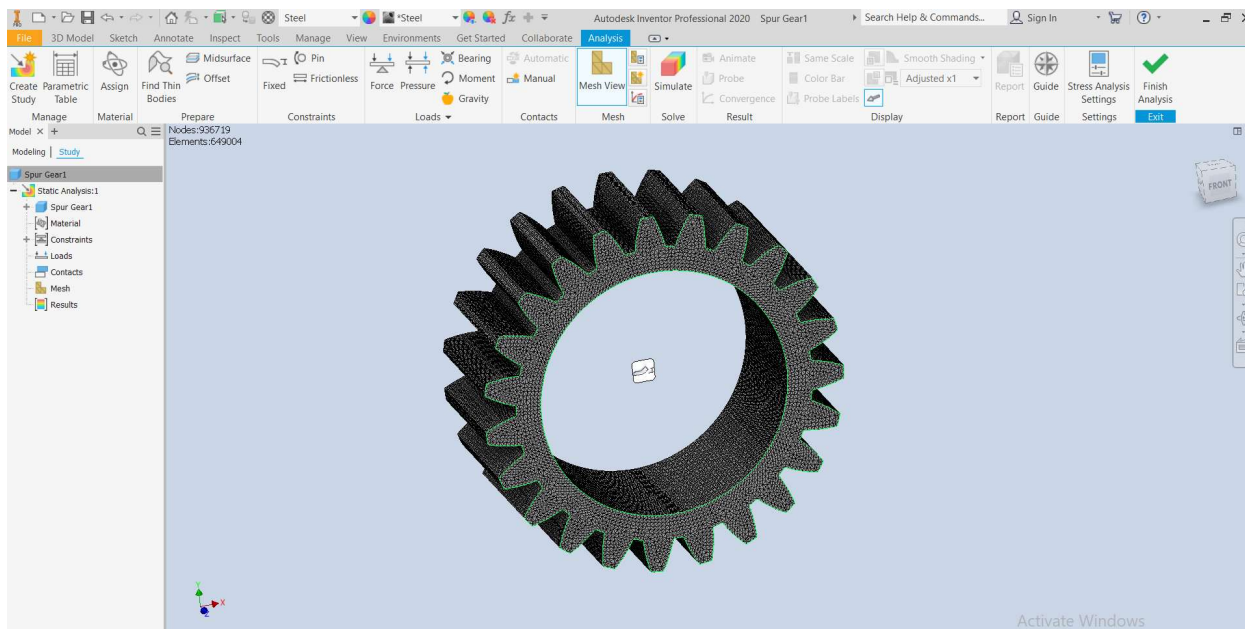
Упрошћено речено, метода коначних елемената је једна од најшире прихваћених савремених метода за прорачун разних конструкција, кретања флуида, таласа и тако даље, као и осталих проблема у теоријској и примењеној физици. За разлику од аналитичких, овом методом се могу решавати нестандартни, сложени проблеми који укључују сложене геометријске облике и др. Услед своје комплексности, примена ове нумеричке методе захтева примену рачунара. У овом раду је коришћена за потребе прорачуна напона и деформација код цилиндричног зупчастог пара [43 - 45],

За одређивање напона код цилиндричног зупчастог пара са правим зупцима, према хипотези раванског стања деформација, погодна је 2Д метода коначних елемената [38, 39]. За потребу овог рада коришћена је 3Д метода коначних елемената због погодности прорачуна већ генерисаног и аналитички прорачунатог зупчастог пара у софтверу *Autodesk Inventor*. Другим речима, као пример изабране је случај из претходног поглавља. Мањи зупчаник је у исто време и оптерећенији, те се према томе прорачун спроводи над њим. Након преласка у модул за статичку анализу, потребно је креирати 3Д елементе (мрежу), дефинисати материјал, ограничења и оптерећења. За целокупни прорачун довољно је посматрати један зуб зупчаника у одабраном случају. За одабрани случај изабрано је да је зупчаник фиксиран у контакту са вратилом (на пример услед блокаде система у којем се налази). За оптерећење зуба зупчаника, постављена је нормална сила, добијена претходним аналитичким прорачуном – претпостављено је да је у спрези само један пар зубаца. За тачку деловања силе одабрана је геометријска средина бока зупца. На слици 6.1 приказан је начин ограничавања померања према наведеном случају.



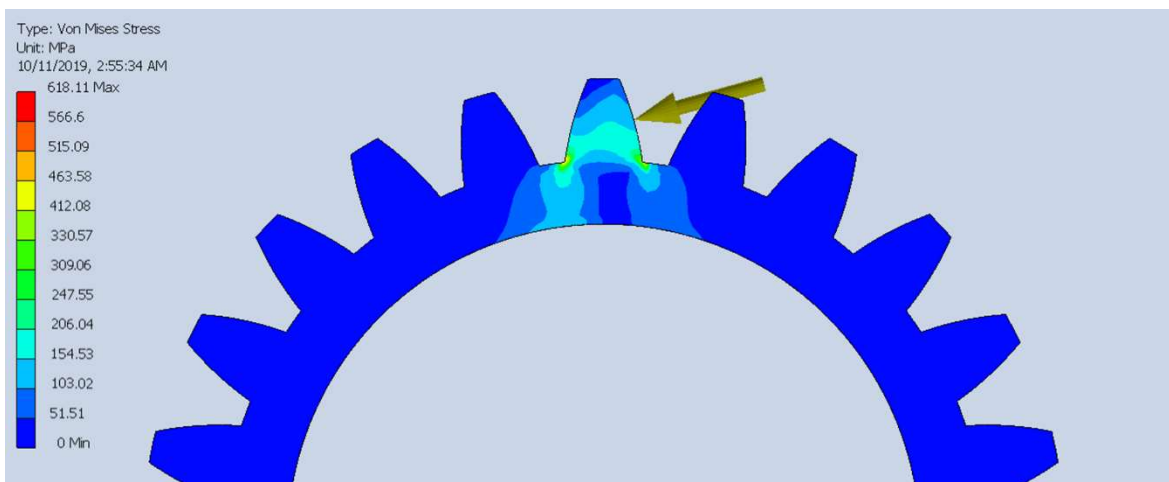
Сл. 6.1 Ограничавање померања

Аутоматски је генерисана мрежа са најмањом могућом величином коју софтвер допушта (видети слику 6.2) како би се расподела напона видела што јасније и резултат био што прецизнији. Елементи који се аутоматски генеришу су тетраедри без средишњег чвора.



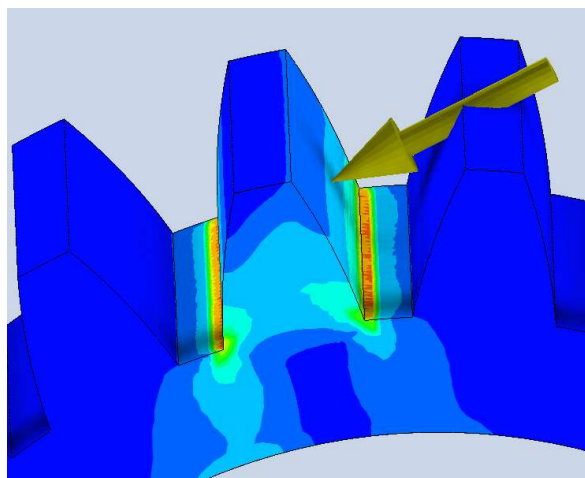
Сл. 6.2 Генерисана мрежа

Након дефинисања мреже (коначних елемената), постављена је нормална сила посредством команде „Loads/Force“ и извршена је статичка анализа. Добијене вредности напона као и расподела истог је приказана на слици 6.3. Добијене вредности напона су у складу са претходним аналитичким прорачуном.

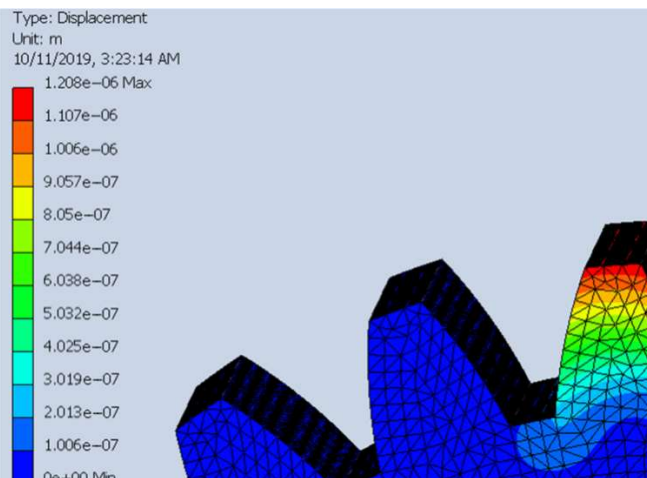


Сл. 6.3 Расподела напона услед деловања нормалне силе за изабране услове

Са **слике 6.4** се јасније може приметити да је највећи напон остварен у подножју зуба. То је било и очекивано. Зубац се може апроксимирати са конзолом оптерећеном нормалном силом разложеном на трансфензалну и аксијалну, односно обимну и радијалну (F_t и F_r) респективно. Деформација која настаје деловањем нормалне силе је приказана на **слици 6.4**. Аналогно расподели напона, расподела деформација приказана на **сл.6.5** је одговарајућа већ поменутој апроксимираној конзоли. Управо због тога, јасно је да ће највећа деформација увек бити на самом врху зуба. Интензитети деформације су такође приказани на **слици 6.5**.



Сл. 6.4 Просторни приказ расподела напона услед деловања нормалне силе

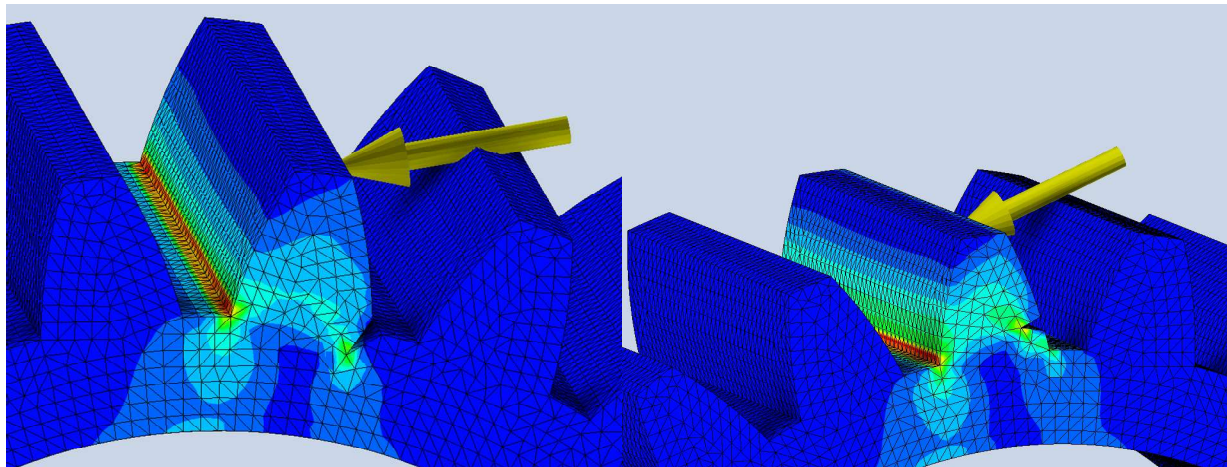


Сл.6.5 Деформација зупца

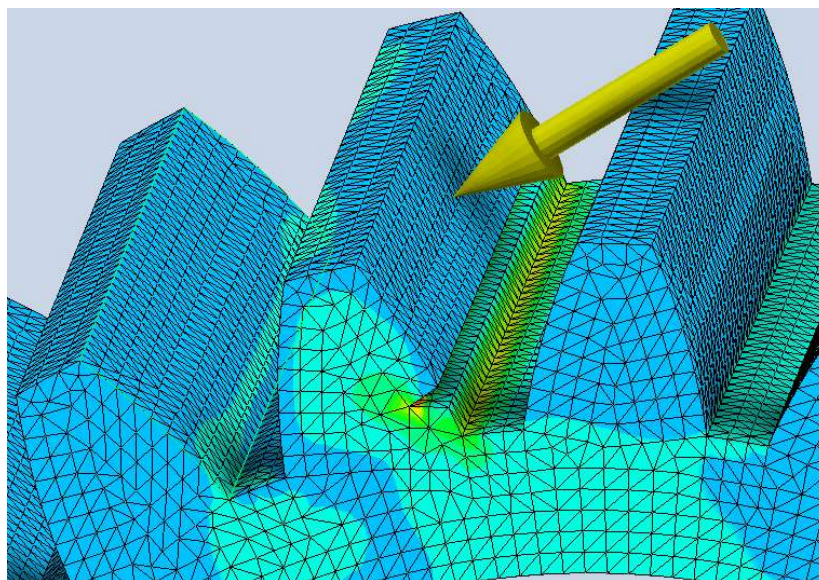
Са аспекта механике лома, интересантно је видети разлику у расподели и вредности напона између зупчаника који нема и зупчаника који има прслину. Зато је извршена анализа оба случаја. За оба случаја се задају иста оптерећења, материјал и ограничења.

Прслина је постављена на две различите позиције. Прва позиција (сл. 6.6 – десно) је очекивано место иницијације прслине [33, 34, 46]. Друга позиција је на боку зуба (сл. 6.6 – лево), одабрана произвољно како би се видео утицај исте на самом боку.

На слици 6.6 може се приметити да је расподела напона промењена у односу на случај са слике 6.4. и да се максимални напон јавља унутар прслине (чак и када је постављена на самом боку зуба) уместо у подножју зуба на страни где је прслина постављена. Такође, са слике 6.7 се може приметити да се иницијални максимални напон јавља у самој прслини.



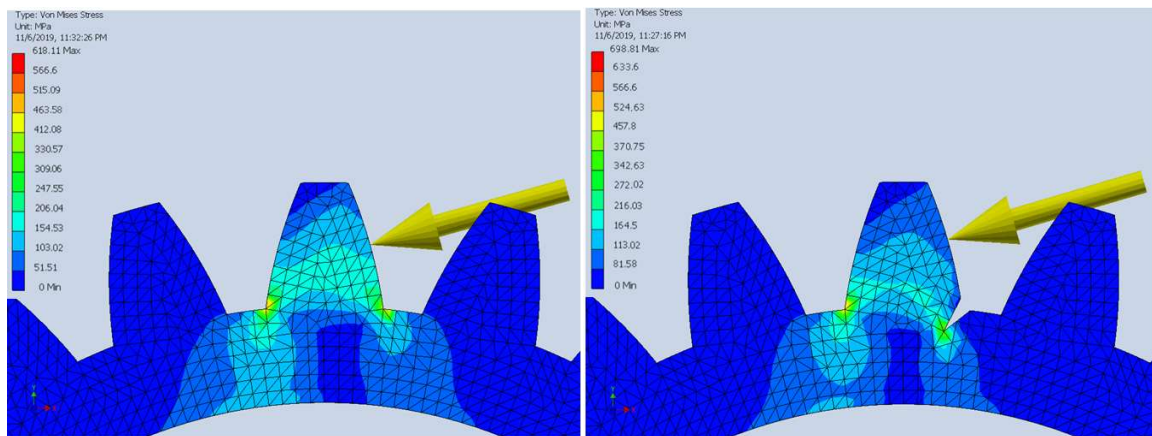
Сл. 6.6 Расподела напона у зубу са прслином



Сл. 6.7 Расподела иницијалних напона у елементу са прслином

Приказано је да појава прслине утиче на расподелу напона, који услед концентрације у самој прслини проузрокује даљу пропацију исте. У исто време, сама прслина делује на интензитет напона. Постоје разна истраживања утицаја величине, облика и оријентације прслине на интензитете напона и брзину отказа [46], [17-20, 38]. Такође, параметри попут материјала, величине венца и зуба су такође укључени у иста истраживања.

На **слици 6.8** може се уочити конкретна разлика у вредностима напона за случај без прслине (лево) и са прслином (десно) за прорачунати пример челичног зупчаника. У корену зупца са прслином, као што је и очекивано јавља се већи напон.



Сл.6.8 Разлика напона између зуба без прслине (лево) и са прслином (десно)

У **табели 6.1** приказане су максималне вредности напона из предходне анализе са **слике 6.8**, као и њихова процентуална разлика.

Табела 6.1 Разлика напона између зуба без прслине и са прслином за конкретни случај

	Без прслине	Са прслином	Процентуална разлика
Вредност максималног напона [MPa]	618,11	698,81	+13%

7. ЗАКЉУЧАК

Са паралелним развојем науке у разним областима, почевши од обраде и производње машинских материјала па до механике лома, усавршавани су, на први поглед, финални стандардни прорачуни зупчастих парова. Почетком развоја ових стандардних прорачуна, зупчаници су били димензионисани не узимајући у обзир замор материјала.

У садашњости, конструисање зупчастих парова или другим речима прорачун носивости зупчаника базира се на теоријским и експерименталним истраживањима која су извршена у већем броју института у свету. Основе ових истраживања углавном су дате у документима ISO/DIS 6336/I-IV као и у стандарду DIN 3990 који се и даље усавршавају. Усвајањем одговарајућих фактора оптерећења, узет је у обзир доминантни тип лома услед замора (услед савијања зуба у корену). Прорачун истих не подразумева ништа друго до одређивања граничних вредности напона и деформација, који се даље умањују дељењем са поменутим факторима оптерећења, што је детаљније објашњено у другом поглављу, а приказано примером аналитичког прорачуна у петом поглављу овог рада.

Јасно је да у току рада на зупцима зупчаника настају више врста оштећења. Које оштећење ће при одређеним радним условима бити критично зависи од већег броја фактора. Пракса међутим показује да су оштећења зубаца међусобно зависна. Појава једне врсте оштећења доводи до повећања опасности од појаве друге врсте оштећења. Тако се практично често јавља ситуација да се на зупцима зупчаника јавља цео низ у трећем поглављу наведених оштећења. У таквим условима врло је тешко открити прво оштећење, од кога је кренуо кружни ток оштећења. Због тога је неопходно да се прорачуном обухвате сви важнији критеријуми. Један од критеријума је и број циклуса (број радних сати). Ту наступа механика лома (детаљније обрађена у четвртом поглављу) и њена примена унутар нумеричких симулација.

У оквиру механике лома одређују се поља локалних напрезања и деформација око врха прслине помоћу глобалних параметара, као што су оптерећење и геометрија зупчаника. Принципи одређивања поља локалних напрезања и деформација најчешће се деле на линеарно еластични приступ и нелинеарни приступ. Нумеричке методе засноване на линеарно еластичној механици лома довољно прецизно одређују број радних сати, односно број циклуса који зупчаник може да издржи а да не дође до прслине и број циклуса који зупчаник може да издржи од настанка прслине па до лома. Јасно је да су зупчаници подвргнути цикличним (динамичним) оптерећењима где се исти ломе при напонима знатно мањим од статичке чврстоће па чак и границе течења материјала – што је директна последица замора материјала. Лом услед замора је последица поступног слабења материјала. Макроскопско посматрање машинског дела, пре самог лома услед замора, открива микропрслину, чија интеракција води стварању макропрслине одговорне за лом.

Према великом броју нумеричких модела заснованих на механици лома, до иницијације прслине долази у тачки корена зуба цилиндричног зупчаника у којој је највећа вредност максималног главног напрезања.

У оквиру шестог поглавља овог рада, нумеричком симулацијом у софтверу *Autodesk Inventor* је извршена напонско-деформациона анализа претходно аналитички прорачунатог челичног цилиндричног зупчаника са правим зупцима, како би се јасно видела расподела и положај максималних напона. Према обрађеним литературним изворима, прслине се најчешће јављају на местима деловања максималних главних напона. Напонском анализом је то и потврђено, као и интензитет радних напона између аналитичког и нумеричког прорачуна (разлика између вредности је унутар опсега од 5%).

Такође, је извршена симулација расподеле напона код зупчаника са прслином у зависности од положаја исте. Приказано је да појава прслине утиче на расподелу напона, који услед концентрације у самој прслини проузрокује даљу пропагацију исте. У исто време, сама прслина делује на интензитет напона. Постоје разна истраживања утицаја величине, облика и оријентације прслине на интензитете напона и брзину отказа. Такође, параметри попут материјала, величине венца и зуба су такође укључени у иста истраживања.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. Nikolić, *Mašinski elementi*, Mašinski fakultet, Univerzitet u Kragujevcu, Kragujevac 2014.
- [2] S. Kuzmanović, *Mašinski elementi-oblikovanje, proračun i primena*, FTN Novi Sad, Novi Sad, 2012.
- [3] B. Marković, M. Blagojević, Z. Đorđević, M. Rackov, Ž. Mišković, A. Košarac, *Mašinski elementi – priručnik*, Mašinski fakultet, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Istočno Sarajevo 2015.
- [4] V. Miltenović, *Mašinski elementi*, MF Niš, Niš, 2009.
- [5] M. Ognjanović, *Mašinski elementi*, MF Beograd, Beograd, 2008.
- [6] S. Kuzmanović, R. Trbojević, M. Rackov, *Zbirka zadataka iz mašinskih elemenata*, FTN Novi Sad, Novi Sad, 2006.
- [7] DIN 3990 Teil 3, *Tragfähigkeitsberechnung von Stinrädern*, Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit, Beut Verlag GMBH, Berlin, 1987.
- [8] AGMA 6033/2-AXX, *Standard for Marine Gear Units: Part 2*, Rating, 1992.
- [9] ISO 6336-3, *Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears – Part 3, Calculation of Tooth Bending Strength*, London, 1996.
- [10] Vasudevan, A.K., Sadananda, K., Glinka, G., *Critical Parameters for Fatigue Damage*, International Journal of Fatigue, 2001.
- [11] Glodež, S., Šraml, M., Kramberger, J., *A Computational Model for Determination of Service Life of Gears*, International Journal of Fatigue, 2002.
- [12] Jelaska, D., Glodež, S., Kramberger, J., Podrug, S., *Numerical Modelling of Gear Tooth Root Fatigue Behaviour*, Proc. OF THE Int. Conf. On Fatigue Crack Paths (FCP 2003), Parma, 2003.
- [13] Jelaska, D., Glodež, S., Kramberger, J., Podrug, S., *Numerical Modelling of the Crack Propagation Path at Gear Tooth Root*, Proc. of the ASME Int. 2003 DETC, Chicago, 2003.
- [14] Lewicki, D.G., Ballarini, R., *Rim Thickness Effects on Gear Crack Propagation Life*, International Journal of Fatigue, 87, 1997.
- [15] Kramberger, J., Šraml, M., Potrč, I., Flašker, J., *Numerical Calculation of Bending Fatigue Life of Thin-Rim Spur Gears*, Ljubljana, 2004.
- [16] FRANC2D, *User's Guide, Version 2.7*, Cornell University, 1993.
- [17] Bittencourt, T.N., Wawrzynek, P.A., Ingraffea, A.R., Sousa, J.L., *Quasi-Automatic Simulation of Crack Propagation for 2D LEFM Problems*, Engineering Fracture Mechanics, 55 (2), 1996.

- [18] S. Tawez, A. D. Desai, B. P. Londhe *Analysis of crack in a Tooth of Spur Gear Using Finite Element Analysis and Remedial action*, International Journal of Advance Engineering and Research Development , Volume 4, Issue 1, January, 2017.
- [19] R. Basan, M. Franulović, B. Kržan, *Development of Custom Gear Design and Modelling Software Solution*, Department of Mechanical Engineering Design, Faculty of Engineering, University in Rijeka, 2015.
- [20] Z. Yang, M. Ahmat, M. Geni, *Dynamics numerical simulation of planetary gear system for wind turbine gearbox*, Indian Journal of Engineering & Materijals Sciences, 2015.
- [21] M.A.Ghaffari, E.Pagl. S.Xiao, *Three dimensional fatigue crack initiation and propagation analysis of a gear tooth under various load conditions and fatigue life extension with boron/epoxy patches*, Engineering Fracture Mechanics, 2015.
- [22] Rexnord Industries, LLC, Gear Group, *FAILURE ANALYSIS GEARS-SHAFTS-BEARINGS-SEALS*, Milwaukee USA, 1978.
- [23] M. Fraunolović, R. Basan. R. Kunc, I. Prebil, *Numerical modeling of life prediction of gears*, Elsevier, 2011.
- [24] T.L. Anderson, *Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications - Third Edition*, Taylor & Francis, New York, 2005.
- [25] Шумарац Д., Д.Крајчиновић, *Основи механике лома*, Научна књига, Београд, 1990.
- [26] Јовичић Г., Живковић М., Вуловић С., *Прорачунска механика лома и замора*, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац 2012.
- [27] М. Frantz, *Mehanička svojstva materijala*, FSB, Zagreb, 1988.
- [28] М. Husnjak, *Mehanika loma*, FSB Zagreb, 2009.
- [29] Ћулафић, В.Б., *Увод у механику лома*, Универзитет Црне Горе, Машински факултет, Подгорица, 1999.
- [30] Седмак, С., З. Радаковић, *From Fracture Mechanics to Structural Integrity Assessment*, Monograph of IFMASS8, Београд, 2004.
- [31] C. Ruggieri, *Significance of J and CTOD estimation procedures for common fracture specimens: the SE(T) configuration revisited*, Italia, Giugno 2011.
- [32] Хедрих Стевановић, К., Д.Б. Јовановић, *Механика лома и оштећења – Математичка теорија – Речник појмова и прилози*, Машински факултет, Ниш, 2003.
- [33] Fakher. Charri, Tahar F, Mohamed Haddar, *Analytical modeling of spur gear tooth crack and influence on gear mesh stiffness*, European Journal of Mechanics, 2009.
- [34] L.E. Alban, *Systematic Analysis of Gear Failures*, American Society for Metals, 1993.
- [35] P. D. McFadden, *Detecting fatigue cracks in gears by amplitude and phase demodulation of the meshing vibration*, J. Vibr. Acoust. Stress Reliability Design 108, 1986.

- [36] P. D. Mc Fadden, *Examination of a technique for the early detection of failure in gears by signal processing of the time domain average of the meshing vibration*, Me&. Syst. Signal Processing, 1987.
- [37] G. Dalpiaz, *Early detection of fatigue cracks in gears by vibration analysis techniques*, ht. Ing. Arch. Z., 1999
- [38] G. Nicoletto, *Approximate stress intensity factors for cracked gear teeth*, Engineering Fracture Mechanics, Great Britain, 1993.
- [39] H. Mozafari, S. Najafian, *Stress Analysis and Study the Fracture Mechanics in Planetary Gear Set Using FEM*, Acta Mechanica Slovaca, 2013.
- [40] F. Cura, *Method for calculating the application factor KA in gears subjected to variable working conditions*, 3rd International Conference on Material and Component Performance under Variable Amplitude Loading, 2015
- [41] Доступно на: https://www.kggear.co.jp/en/wp-content/themes/bizvektor-global-edition/pdf/10.1_Calculation-of-strength-for-Spur-and-Helical-gears_TechnicalData_KGSTOCKGEARS.pdf, приступљено 10.10.2019.
- [42] Доступно на: https://khkgears.net/new/gear_knowledge/gear_technical_reference/bending-strength-of-spur-and-helical-gears.html, приступљено 10.10.2019.
- [43] G. Singh, *Finite Element Analysis of Spur Gear*, University of Technology, Sydney, February 2017.
- [44] S.P. Shinde, A.A. Nikam, T.S. Mulla, *Static Analysis of Spur Gear Using Finite Element Analysis*, Journal of Mechanical and Civil Engineering, 2010.
- [45] V.S.N K. Bommisetty, *Finite Element Analysis of Spur Gear Set*, Cleveland State University, 2012.
- [46] S. Tawez, A. D. Desai, B. P. Londhe, *Analysis of crack in a Tooth of Spur Gear Using Finite Element Analysis and Remedial action*, International Journal of Advance Engineering and Research Development, January, 2017.