

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Мастер академске студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Заварене и ливене конструкције

Број индекса: 330/2014

Никола Н. Стаменковић

Решавање проблема заварених рамних носача са затвореном контуром

- мастер рад -

Комисија за преглед и одбрану:

1. **Др Иван Милетић, доцент - ментор**
2. _____
3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог мастер рада кандидат треба да обради следеће теме:

- РАВАНСКИ ГРЕДНИ НОСАЧИ,
- СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНИ СИСТЕМИ,
- КОНТИНУАЛНЕ ГРЕДЕ И ОКВИРИ
- АНАЛИТИЧКО РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА РАМНОГ НОСАЧА
- СОФТВЕРСКИ ПАКЕТ “TOWER”.

Препоручена литература:

- [1] С.П.Тимошенко, Д.Х.Јанг, Теорија конструкција, Грађевинска књига,Београд 1968,
- [2] М.Ђурић, О. Ђурић-Перић, Статика конструкција, Грађевинска књига а.д. Београд 2007
- [3] Еврокод *EC* 1993-1-1:2005, Грађевински факултет Универзитета у Београду, Јун 2017.

Крагујевац,Новембар 2017

ментор:
Др Иван Милетић

Резиме:

У овом раду су изложени аспекти рамних носача, њихова подела и примена. У првом делу рада обрађена је подела према положају оптерећења и облику, као и примњливе методе за израчунавање рамних носача. У другом делу рада обрађен је пример рамног носача аналитичким путем. У трећем делу рада обрађени су примери различитих рамних носача нумеричким путем у софтверу „TOWER“. Циљ овог рада је поређење аналитичке и нумеричке методе израчунавања и представљање софтвера као решење за скраћивање времена прорачуна и исцртавање статичких дијаграма.

Abstract:

In this paper the aspects of cantilever frame, their division and application are presented. In the first part of the paper, a division was made according to the load position and shape, as well as the applicable methods for calculating the cantilever frames. In the second part of the paper, an example of a cantilever frame has been processed analytical. In the third part of the paper, examples of different cantilever frames are processed numerically in the „TOWER“ software. The aim of this paper is to compare the analytical and numerical methods of calculating and presenting software as a solution for shortening the time of the budget and plotting static diagrams.

Изјављујем да је овај мастер рад продукт мог самосталног рада и знања, а уз коришћење искуства и наведене литературе.

Стаменковић Никола

Садржај:

1. УВОД	1
2. РАВАНСКИ ГРЕДНИ НОСАЧИ	2
2.1. Типови гредних носача	2
2.2. Оптерећење гредних носача	5
3. СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНИ СИСТЕМИ	5
4. КОНТИНУАЛНЕ ГРЕДЕ И ОКВИРИ.....	8
4.1. Једначине угиба-нагиба	8
4.2. Греде са укљештеним крајевима.....	16
4.3. Континуалне греде	22
4.4. Прости оквири са призматичним штаповима	25
5. АНАЛИТИЧКО РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА РАМНОГ НОСАЧА (Пример 1).....	35
5.1 Одређивање отпора ослонаца.....	36
6. СОФТЕРСКИ ПАКЕТ „TOWER 7“	44
6.1 Основне могућности.....	44
6.2 Графички интерфејс	46
6.3. Обрада резултата прорачуна	46
6.4 Приказ поступка рада у софтверу (Пример 2)	48
6.5 Пример 3	59
7. ЗАКЉУЧАК	65
ЛИТЕРАТУРА:	66

1. УВОД

Носачи су тела у оквиру конструкције која примају оптерећења и преносе их на друга тела односно ослонце.

Према положају оптерећења носачи се деле на:

- Раванске – имају раван симетрије и нападне линије свих сила се налазе у тој равни.
- Просторне – нападне линије сила које делују на носач не налазе се у истој равни.

Према облику носачи се деле на:

- Пуне – имају пун попречни пресек. Пуни носачи најчешће призматичног или цилиндричног облика.
- Решеткасте – састављени су од лаких носача – штапова међусобно зглобно повезаних тако да чине једну круту конструкцију.

Рамни носачи су инжењерске конструкције направљене од пуног материјала. Уопштено се могу дефинисати као систем штапова који леже у једној равни а међусобно су спојени својим крајевима, тако да стварају крут оквир. Најчешћа примена рамних конструкција је у грађевинарству.



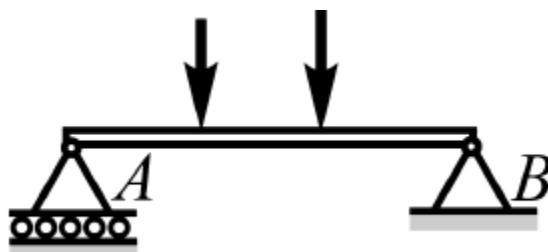
Слика 1.1

2. РАВАНСКИ ГРЕДНИ НОСАЧИ

Основни елемент раванских гредних носача је штап, који је у општем случају оптерећен произвољним раванским системом сила и спрегова. Замишљеним пресецањем таквог штапа и посматрањем једног његовог дела, дејство уклоњеног дела на посматрани, садржи унутрашње силе у попречном и уздужном правцу (трансверзална и аксијална сила) и унутрашњи спрег (нападни момент). Ове величине (трансверзална сила, аксијална сила и нападни момент) које су дефинисане готово за сваки пресек носача веома су важне за функционалност, облик и димензије самог носача и називају се пресеченим силама. Основни задатак при проучавању гредних носача је одређивање пресечних сила у свим његовим пресецима у којима су оне дефинисане.

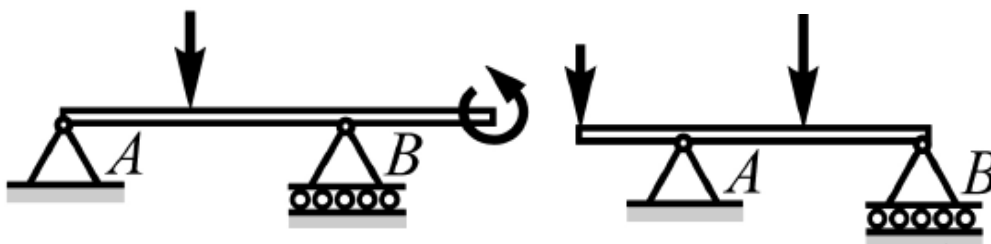
2.1. Типови гредних носача

Проста греда је носач, који се састоји од једне круте плоче, са једним непокретним и једним хоризонтално покретним ослоном. Тај носач налази велику примену у градњи свим врстама материјала. Због његове једноставности и прегледности, резултати за просту греду се користе при анализи многих сложенијих носача.[1]



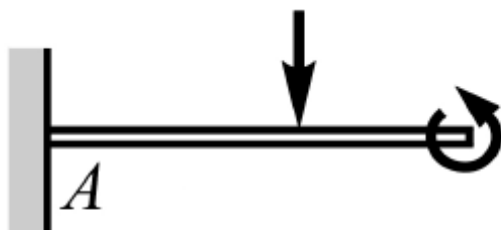
Слика 2.1.1.-Проста греда

Греда са препустима је носач за који се може сматрати да је настао од просте греде додавањем препуста на једном или на оба краја, тј. настављањем греде преко ослонаца за неке дужине Сл. 2.1.2, Сл. 2.1.3. [1]



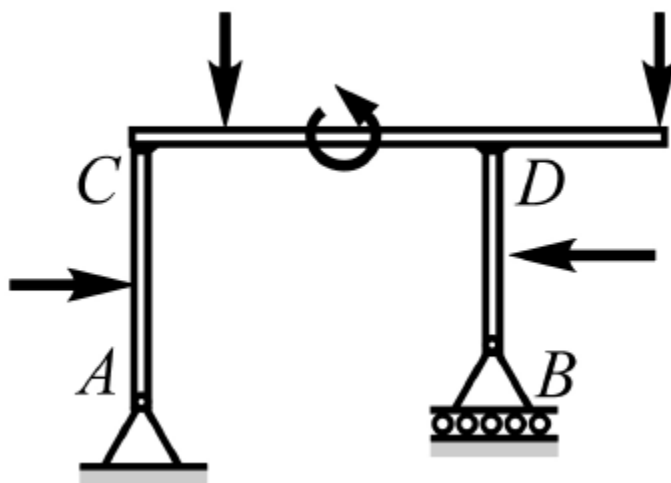
Слика 2.1.2. и 2.1.3.-Греде са препустом

Конзола је носач који се састоји од једне круте плоче, која се ослања на два ослонаца и једно укљештење. Сва три спољашња елемента налазе се у истој тачки Сл. 2.1.4. [1]



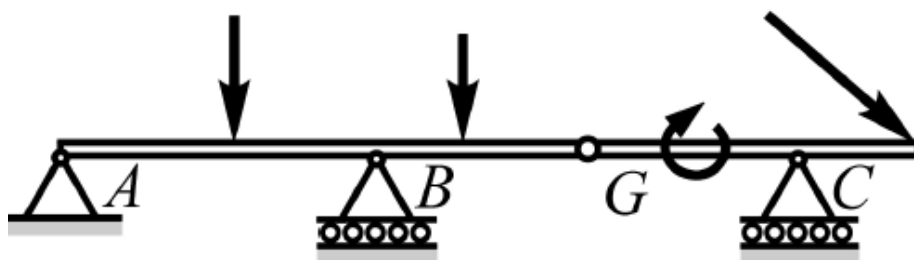
Слика 2.1.4.-Конзола

Рам, Слика 2.1.5, представља оптерећен и ослоњен (путем ослонаца или уклештења) носач који је сачињен од више штапова чије се осе секу. [1]



Слика 2.1.5.-Рам

Герберов носач, Слика 2.1.6, је носач чији су поједини делови (штапови) зглобно повезани. Зглобови, који повезују делове носача, називају се Герберовим зглобовима.



Слика 2.1.6.-Герберов носач

2.2. Оптерећење гредних носача

Осим концентрисаних сила и концентрисаних спрегова који непосредно дејствују на неке од тачака гредних носача постоје још и континуална оптерећења (непрекидно распоређена) и посредно оптерећење.

Отпори некокретних и покретних ослонаца, који се одређују из услова равнотеже, спадају у концентрисане силе. Реакције укљештења, за које се сматра да дејствују на крајњу тачку носача, чини концентрисана сила и концентрисани реактивни спрег (момент укљештења).

Континуално оптерећење се задаје специфичним оптерећењем q (оптерећењем по дужини), чија је диментија сила кроз дужину (kN/m). Оно је, у општем случају z , $q=q(z)$

Оптерећење које не дејствује непосредно на греду већ на неки придодат елемент (штап или угаоник), који је круто везан (нпр. Заварен) за греду, назива се посредно оптерећење.

3. СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНИ СИСТЕМИ

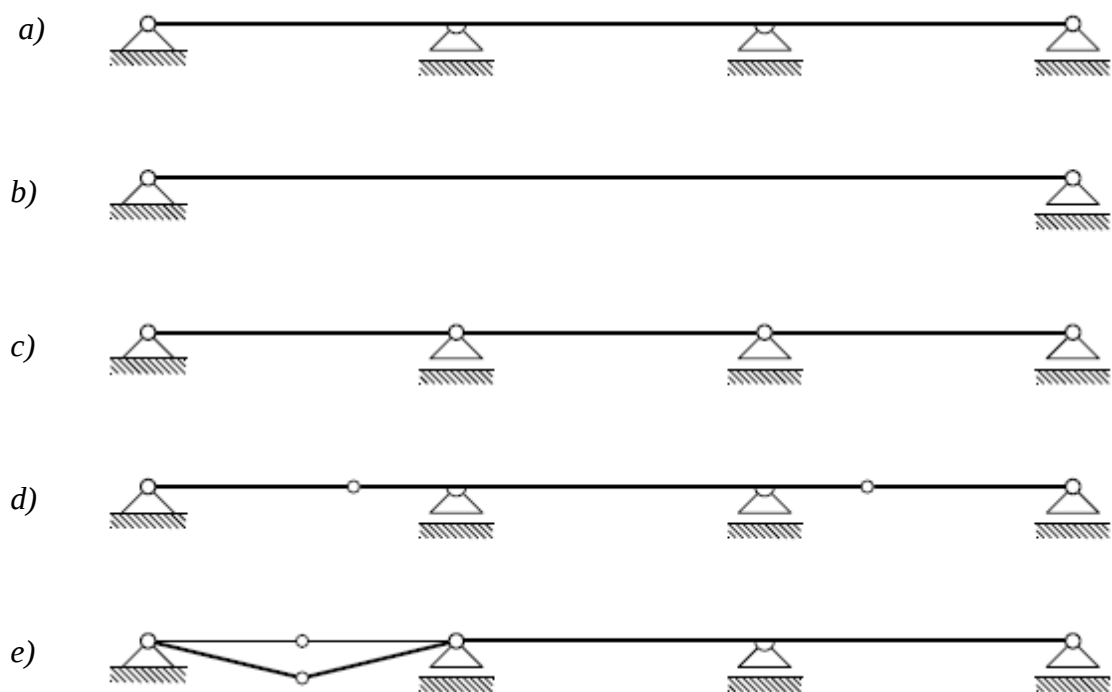
Статички неодређени систем је спојени систем који може остати у стању равнотеже при било каквом оптерећењу, али је број непознатих вредности сила у везама, спољашњим или унутрашњим, или и спољашњим и унутрашњим, већи од броја независних једначина које изражавају услове равнотеже па те услове задовољава бесконачно много вредности сила. [2]

Претходну дефиницију називамо статиком. Са кинематског гледишта статички неодређени систем геометријски непромењиви систем у којем је број веза, спољним или унутарашњим или једних и других, већи од најмањег броја дозвољених за његову геометријску непромењивост.

Статички неодређеним носачима назвају се насачи у којима реакције ослонаца, момента укљештења и силе у пресецима не могу да се одреде само из услова равнотеже тог носача. [2]

На слици 3.1а. приказан је континуирани носач преко три поља тј. четири лежаја. Тај је носач (као равнинска конструкција) два пута статички неодређени има пет непознатих реакција, а у равни се могу поставити само три независне једначине равнотеже. Лако је видети и да са, кинематичког гледишта, носач има две прекобројне везе. Уклонимо други и

трећи лежај, добићемо просту греду (слика 3.1b.). Прекобројнима можемо сматрати и унутаршње везе: убацимо ли у пресек над другим и трећим лежајем зглобове претворимо ли, другим речима, круте веза, које преносе све три унутрашње силе, у зглобне, које не преносе моменте савијања настатаће низ простих греда (слика 3.1c.). Или додавањем зглобова у два пресека у првом и трећем пољу настаје Герберов носач (слика 3.1d.).



Слика 3.1

Степен статичке неодређености једнак је разлици броја непознатих вредности сила и броја независних услова равнотеже које можемо поставити за конструкцију као целину и за поједине њене делове, посматране издвојено. Кинематски, степен статичке неодређености једнак је разлици укупног броја веза и најмањег броја потребног за геометријску непроменљивост. Тај степен једнак је броју сувишних веза. Појам „сувишне везе“ не треба схватити у значењу „непотребне везе“, те су везе сувишне само при задовољењу услова геометријске непроменљивости. Управо су због тог вишка веза неодређени носачи са гледишта геометријске стабилности повољнији од одређених, код којих не мора доћи до рушења ако се нека веза раскине.

Систем је статички неодређен уколико је број независних непознатих компонената реакција везе већи од броја статичких једначина равнотеже.

n – број непознатих компонената реакција везе

r — број статичких једначина равнотеже

b – степен или број статичке неодређености (број статички неодређених величина)

$$b = n - r = n - 3$$

$n = r \quad b = 0$ -статички одређен систем

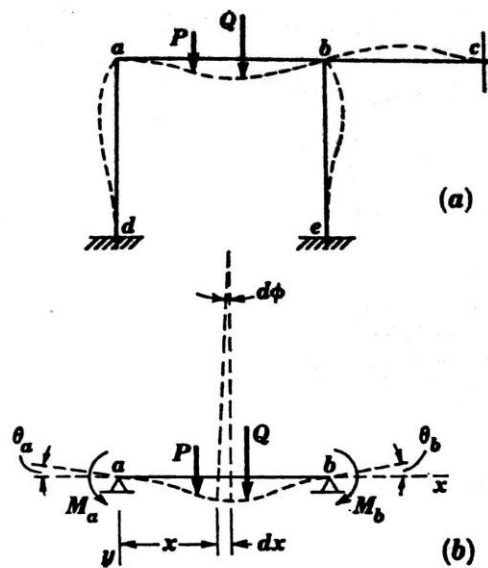
$n > r \quad b > 0$ -статички неодређен систем

$n = r + b$ - b пута статички неодређен систем

4. КОНТИНУАЛНЕ ГРЕДЕ И ОКВИРИ

4.1. Једначине угиба-нагиба

Оквирне конструкције, као што је приказана на слици (4.1.1a) обично се састоје од призматичних штапова, који се могу посматрати као греде, еластично укљештене својим крајевима. Такав један штап, као нпр. пречка ab , може се издвојити из целине онако, како је то приказано на слици. (4.1.1b), а на место еластичних укљештења на крајевима уводе се спрегови M_a и M_b . На тај начин се проблем своди на случај просте греде, попречно оптерећене силама и ослоначким моментима. Под оваквим оптерећењем греда се угиба, а тангенте на њеним крајевима се заокрећу за мале углове θ_a и θ_b како је то на слици приказано. Да би олакшали даља излагања, установићемо аналитичку узајамну везу између тих углова, ослоначких момената и попречних оптерећења. Таква аналитичка повезаност се изражава кроз једначину нагиба-угиба, чије ћемо извођење сада размотрити. [3]



Слика 4.1.1

Узимајући да се греда савија у својој главној равни, те занемарујући деформације услед смицања, закривљеност еластичне линије у било ком пресеку је дата познатом једначином [3]

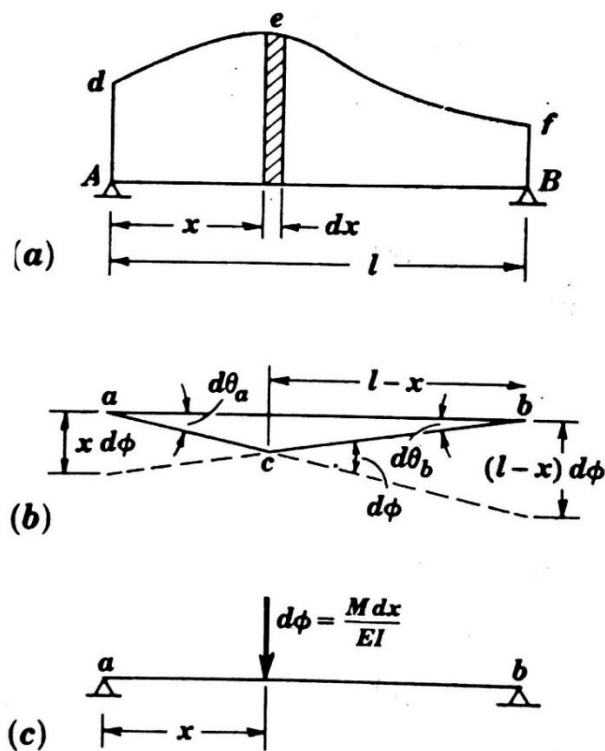
$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad (a)$$

у којој је M моменат савијања, а EI је крутост на савијање у посматраном пресеку. Примењујући ту једначину, узима се подужна оса посматране греде за x -осу, а сматраћемо и да је y -оса позитивна у смеру на доле. Осим тога сматра се да су угиби греде тако мали да се може узети да је елемент еластичне линије једнак дужини dx његове пројекције на x -осу. Под тим условима је мали угао $d\varphi$ између два суседна попречна пресека након савијања дат изразом[3]

$$d\varphi = \frac{dx}{r} = \frac{M dx}{EI} \quad (b)$$

На слици *a* крива *def* представља моментну линију попречно оптерећене просте греде *AB*. Ако претпоставимо да је од целе те греде само један инфинитесимални елемент dx еластичан, док остали делови греде остају апсолутно крути, онда ће еластична линија *acb* бити онаква, како је приказана на слици 4.1.26. Та линија се састоји од два права дела *ac* и *cb*, који захтевају између себе угао $d\varphi$, дефинисан једначином Б. Услед овог угиба, леви крај греде, као што се то види на слици, заокреће се за један бескрајно мали угао, који је дат изразом[3]

$$d\theta_a = \frac{l-x}{l} d\varphi \quad (c)$$



Слика 4.1.2

Узимајући да је окретање у смеру казаљке позитивно, сматра се да је израз (с) позитиван. Крај b греде се заокреће у смеру, супротном од кретања казаљке, па је стога његов заокрет дат изразом

$$d\theta_b = -\frac{x}{l} d\phi \quad (d)$$

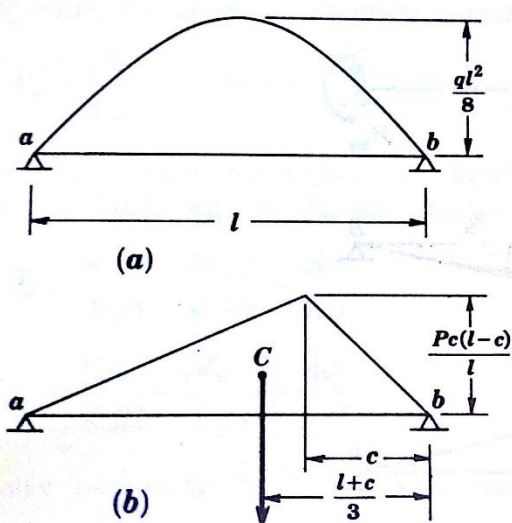
Изрази (с) и (д) се могу врло просто протумачити. Замислимо једну просто ослоњену греду, оптерећену фиктивним оптерећењем $d\phi = \frac{M dx}{EI}$ које делује онако, како је то приказано на слици 4.1.2с. Сада нам изрази (с) и (д) престављају смичуће силе на крајевима наше греде, изазване дејством овог фиктивног оптерећења. [3]

Сада када располажемо угловима заокретања ослоначких пресека на крајевима наше греде, насталим услед савијања само једног елемента греде, може се лако доћи и до укупних углова ротације, сумирањем израза (c) и (d) по целој дужини греде. Тако добијамо

$$\theta_a = \int_0^1 \frac{l-x}{l} d\varphi = \int_0^1 \frac{l-x}{l} \frac{Mdx}{EI} \quad (e)$$

$$\theta_a = - \int_0^1 \frac{x}{l} d\varphi = - \int_0^1 \frac{x}{l} \frac{Mdx}{EI} \quad (e)$$

Ако уочимо да је $M dx$ површина једне елементарне траке на моменталној површини са сл. 4.1.2a, а да је EI константа за греде непроменљивог пресека долазимо до закључка да углове заокретања крајева овакве греде можемо добити тако што ћемо моментну површину $AdefB$ сматрати фиктивним оптерећењем, а затим ћемо смичуће силе на крајевима те греде, проузроковане тим фиктивним оптерећењем, поделити са EI . [3]



Слика 4.1.3

Ако се узме равномерно оптерећена проста греда, видеће се да је моментна површина параболични сегмент (слика 4.1.3a) чија је величина дата изразом[3]

$$A = \frac{2l}{3} \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{12}$$

Ако ову површину сматрамо фиктивним оптерећењем, онда ће односне реакције на ослонцима греде бити $\frac{ql^3}{24EI}$, па тако добијамо даље[3]

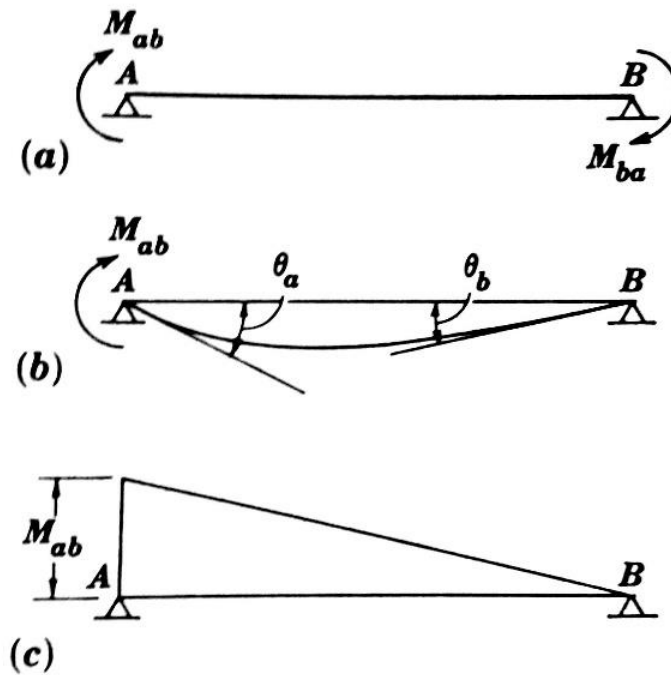
$$\theta_a = \frac{ql^3}{24EI} \quad \theta_a = -\frac{ql^3}{24EI} \quad (f)$$

Узмемо ли случај оптерећења наше просте греде једном концентрисаном силом P , удаљеном од десног ослонца за дуж c , моментна површина је представљена троуглом са сл. 4.1.3b. Посматрајући тај троугао као фиктивно оптерећење, добијамо изразе за углове заокрета ослонаца[3]

$$\theta_a = \frac{Pc(l^2 - c^2)}{6lEI} \quad (g)$$

$$\theta_b = -\frac{Pc(l - c)(2l - c)}{6lEI} \quad (g)$$

Проматрањем пецифичног случаја савијања просте греде AB , изложене дејству два момента, који делују према сл. 4.1.4a. Овакве моменте у даљем излагању ће се називати крајњим моментима, а обележаваће се симболима Mab и Mba , с тим да прва слова доњег индекса означавају односи краја греде, како је то назначено на сл. 4.1.4. Моменте, који делују у смеру казаљке на сату сматраћемо позитивним. То значи да ће при уобичајеном давању знака моментима савијања, крајњи момент Mba бити идентичан са моментом савијања у A , док крајњи моменат Mba бити једнак по величини, али супротан по свом знаку моменту савијања у B . [3]



Слика 4.1.4.

Почињући са случајем када делује само моменат M_{ab} (сл. 3.1.4b), те уочавајући троугласти облик моментне површине (сл. 4.1.4c), добијамо[3]

$$\theta_a = \frac{M_{ab}l}{3EI} \quad (h)$$

$$\theta_b = -\frac{M_{ab}l}{6EI} \quad (h)$$

На сличан начин добијамо и обрасце када делује само момент M_{ba} . Комбинујући дејства ова два крајња момента (сл. 4.4.a), добијамо[3]

$$\theta_a = \frac{M_{ab}l}{3EI} - \frac{M_{ba}l}{6EI} \quad (4.1.1a)$$

$$\Theta_b = \frac{M_{ba}l}{3EI} - \frac{M_{ab}l}{6EI} \quad (4.1.1a)$$

Решавајући ове две једначине по M_{ab} и M_{ba} , добијамо[3]

$$M_{ab} = \frac{2EI}{l}(2\Theta_a + \Theta_b) \quad (4.1.1b)$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{l}(2\Theta_b + \Theta_a) \quad (4.1.1b)$$

Из горњих двеју једначина можемо израчунати величине крајњих момената ако су нам познати углови ротација Θ_a и Θ_b крајњих тангенти. [3]

Сада ћемо размотрити општији случај када је греда оптерећена и попречним оптерећењем, а и крајњим моментима као на сл. 4.1.5a. Углови ротације проузроковани самим крајњим моментима дати су нам изразима (4.1.1a). Да бисмо дошли до углава ротација, проузрокованих попречним оптерећењем, ми ћемо посматрати односну моментну линију, дату на сл.4.1.5b. Означавајући са c и d удаљености вертикале, повучене кроз тежиште C моментне површине од десног, односно левог ослонца греде, а са A величину саме моментне површине, наћи ћемо да овакво фиктивно оптерећење даје на крајевима греде следеће фиктивне реакције[3]

$$R_a = \frac{Ac}{l}$$

$$R_b = \frac{Ad}{l}$$

Док су одговарајући углови ротације на ослонцима

$$\Theta_a = \frac{Ac}{EI} \quad (i)$$

$$\Theta_b = -\frac{Ad}{EI} \quad (i)$$

Комбинујући сада ове углове са угловима, изазваним крајњим моментима, [једн. (4.1.1a)], добијамо следеће вредности укупних углова ротације

$$\Theta_a = \frac{M_{ab}l}{3EI} - \frac{M_{ba}l}{6EI} + \frac{Ac}{EI} \quad (4.1.2a)$$

$$\Theta_b = \frac{M_{ba}l}{3EI} - \frac{M_{ab}l}{6EI} - \frac{Ad}{EI} \quad (4.1.2a)$$

Решавајући ове једначине по M_{ab} и M_{ba} , добијамо

$$M_{ab} = \frac{2EI}{l} (2\Theta_a + \Theta_b) - \frac{2A}{l^2} (2c - d) \quad (4.1.2b)$$

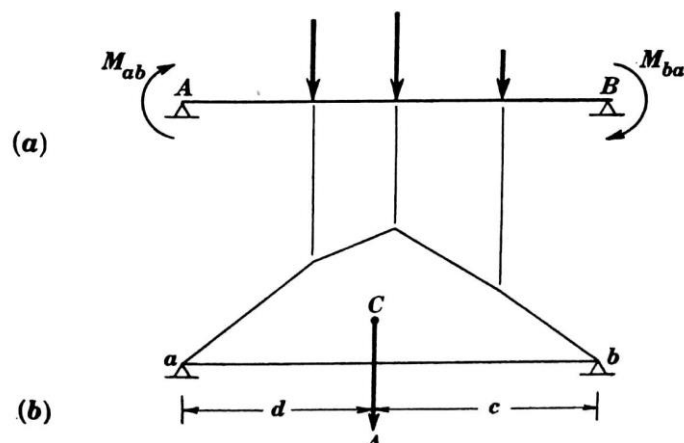
$$M_{ba} = \frac{2EI}{l} (2\Theta_b + \Theta_a) + \frac{2A}{l^2} (2d - c) \quad (4.1.2b)$$

Из горњих једначина можемо лако изнаћи величине крајњих момената ако су нам познати углови ротације на крајевима греде и ако имамо моментну линију услед попречног оптерећења.

Понекад се греда, услед померања ослоња, окреће и као круто тело осим окретања крајева услед савијања, такве ротације означавамо са Θ_{ab} , а сматрамо их позитивним ако иду у смеру кретања казаљке. У том случају ће нам укупни углови ротације крајњих пресека бити дати изразима[3]

$$\Theta_a = \frac{M_{ab}l}{3EI} - \frac{M_{ba}l}{6EI} + \frac{Ac}{EI} + \Theta_{ab} \quad (4.1.3a)$$

$$\Theta_b = \frac{M_{ba}l}{3EI} - \frac{M_{ab}l}{6EI} - \frac{Ad}{EI} + \Theta_{ab} \quad (4.1.3a)$$



Сл. 4.1.5

Решавајући горње једначине по крајњим моментима добијамо

$$M_{ab} = \frac{2EI}{l} (2\theta_a + \theta_b) - \frac{2A}{l^2} (2c - d) - \frac{6\theta_{ab}EI}{l} \quad (4.1.3b)$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{l} (2\theta_b + \theta_a) + \frac{2A}{l^2} (2d - c) - \frac{6\theta_{ab}EI}{l} \quad (4.1.3b)$$

Једначине (4.1.1) до (4.1.3) представљају тражене једначине угиба-нагиба, које су у тако великој, општој примени при решавању оквирних конструкција. [3]

4.2. Греде са укљештеним крајевима

Користећи се једначинама угиба-нагиба, развијеним у претходном члану, ми можемо лако решавати различите случајеве статички неодређених греда. Овде ће се приказати само неколико посебних случајева, нарочито интересантних с обзиром на решавање оквира. [3]

Почињемо са гредом, која је на једном свом крају круто укљештена, а на другом слободно ослоњена, као на сл.4.2.1.a

Узимајући да нам је величина активног крајњег момента M_{ab} позната решаваћемо задатак налажења одговарајуће величине реактивног крајњег момента M_{ba} , узрокованог на уклештеном крају греде B . Исто тако тражићемо и однос између активног момента M_{ab} и угла ротације θ_a . Уочавајући да се крај B греде не може заокренути, те стога уводећи $\theta_a=0$ у другу од једначина (4.1.1a) налазимо

$$M_{ba} = \frac{1}{2} M_{ab} \quad (a)$$

Из тога видимо да када на слободном крају једне овакве греде делује активни моменат M_{ab} , онда се на круто уклештеном крају B јавља реактивни момент $M_{ab}/2$. Овај последњи моменат је посебно интересантан при решавању крутих оквира, а називамо га *преносним моментом*.

Уводећи величину $\theta_b=0$ у прву од једначина (4.1.1b), добијамо

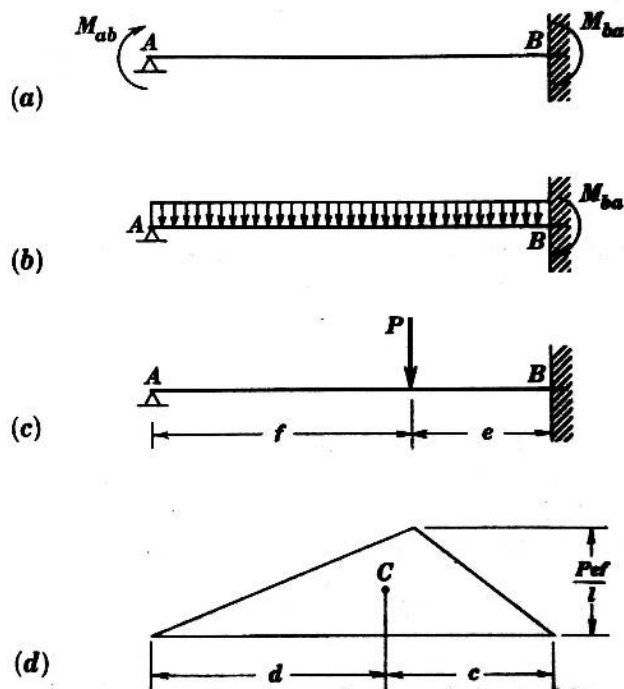
$$M_{ab} = \frac{4EI}{l} \theta_a \quad (b)$$

Из ове једначине лако израчунавамо величину момента M_{ab} , ако нам је познат угао ротације θ_a .

Интересантно је уочити да је код просто ослоњене греде однос између крајњег момента M_{ab} и угла ротације θ_{ab}

$$M_{ab} = \frac{3EI}{l} \theta_a \quad (c)$$

Из овога видимо да када помоћу угла θ_a израчунавамо M_{ab} , убацивање зглоба у B јесте еквивалентно смањивању крутости на савијање EI греде на $3EI/4$.



Слика 4.2.1.

Посматрајући попречно оптерећење, може се запазити да код равномерно оптерећене просте греде (сл.4.2.1.b) реактивни момент M_{ba} се налази из друге од једначина (4.1.2a) уводећи у ту једначину

$$M_{ba} = 0 \quad \theta_b = 0 \quad A = \frac{ql^3}{12} \quad d = \frac{l}{2}$$

Добија се

$$M_{ba} = \frac{ql^2}{8}$$

овај крајњи моменат има исту величину као и моменат на половини распона просте греде.

Ако концентрисана сила P делује на греду (сл. 4.2.1c), онда је моментна линија за одговарајучу поросту греду представљена троуглом са (сл. 4.2.1d), и тако се добија

$$A = \frac{Pef}{2} \quad d = \frac{l+f}{3}$$

Друга од једначина (4.1.2b) са $\Theta_b = 0$ и $M_{ba} = 0$ нам тада даје

$$M_{ba} = \frac{3Ad}{l^2} = \frac{Pf(l^2 + f^2)}{2l^2}$$

Ако уклештени крај B греде буде изложен вертикалном померању Δ надоле, али без ротације, онда се величина крајњег момента M_{ba} , изазваног тим померањем добија помоћу једначина (4.1.3b). Замењујући у првој од тих једначина

$$M_{ba} = 0 \quad \Theta_b = 0 \quad A = 0 \quad \Theta_{ab} = \frac{\Delta}{l}$$

Добија се

$$\Theta_{ab} = \frac{3\Delta}{2l}$$

Уносећи ову вредност у другу од једначина (4.1.3b) налазимо

$$M_{ba} = -\frac{3EI\Delta}{l} \frac{1}{l} \quad (d)$$

Када имамо обострано уклештену греду (сл.4.2.2a), оптерећену попречним оптерећењем, ми се користимо једначинама (4.1.2b) да бисмо изнашли статички неодређене моменте. С обзиром на пуно уклештења оба ослонца, ми у те једначине уводимо $\Theta_a = \Theta_b = 0$, па тако добијамо

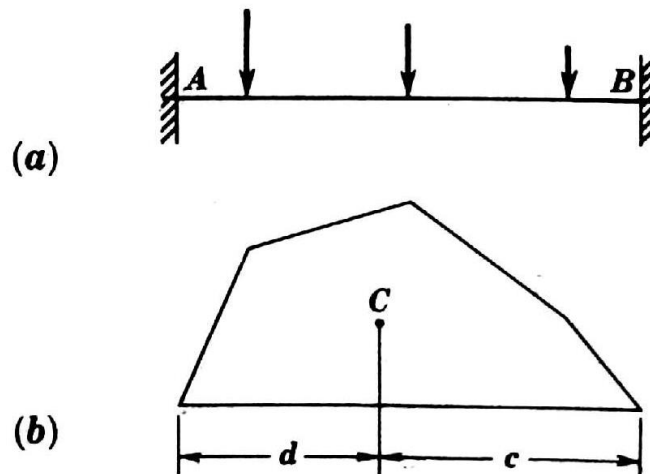
$$M_{ab} = -\frac{2A}{l^2}(2c - d) \quad (4.2.1)$$

$$M_{ba} = -\frac{2A}{l^2}(2d - c) \quad (4.2.1)$$

За било какво попречно оптерећење може се конструисати моментна линија за одговарајућу просту греду (сл 4.2.1b) па се може изнаћи и величина моментне површине, као и удаљености њеног тежишта c и d од ослонаца. Уносећи те количине у једначину (4.2.1) долазимо до вредности крајњих момената. Те моменте. Узроковане обострано и круто уклештеној греди датим попречним оптерећењем називамо *моментима уклештења*, па ћемо их у нашем даљем раду означавати готским симболима M_{ab} и M_{ba} . Имајући у виду да се и они сматрају позитивнима када делују у смеру кретања казаљке, ми закључујемо да је M_{ab} идентичан са моментом савијања на крају A греде, док је M_{ba} нумерички једнак, али по знаку супротан моменту савијања на крају B исте греде. [3]

Ако имамо случај равномерног оптерећења круто уклештене греде по целој њеној дужини, онда је моментна површина дата изразом $A = \frac{ql^3}{12}$ а, $c = d = \frac{l}{2}$, те нам тако једначина (4.2.1) постаје

$$M_{ab} = -\frac{ql^2}{12} \quad M_{ba} = -\frac{ql^2}{12} \quad (4.2.1a)$$



Слика 4.2.2

Када се оптерећење састоји од једне концентрисане силе P , удаљене на одстојању e од десног ослонаца B , моментна површина има облик троугла (сл.4.2.1d), па тако добијамо, $A = \frac{Pfe}{2}$, $c = \frac{l+e}{3}$ и $d = \frac{l+f}{3}$. Уносећи те вредности у једначини (4.2.1) налазимо

$$M_{ab} = -\frac{Pe^2f}{l^2} \quad M_{ba} = \frac{Pef^2}{l^2} \quad (3.2.1b)$$

За било коју вредност растојања e , лако се израчунавају моменти уклештења.

А сада ћемо размотрити случај савијања уклештене греде, узрокованог неједнаким слегањем ослонаца. Узимамо да се ослонац B слегао за величину Δ док се ослонац A није померио нимало. Исто тако, узимамо да ни на једном од ослонаца током тог померања није било никакве ротације. Тада, при рачунању крајњих момената, узрокованих таквим слегањем, примењујемо једначину (4.1.3b). Уносећи у те једначине вредности $\theta_a = \theta_b = 0$ и $A = 0$, те уз запажање да је $\theta_{ab} = \Delta/l$ добијамо

$$M_{ab} = M_{ba} = -\frac{6EI\Delta}{l^2} = -\frac{6EI}{l} \theta_{ab} \quad (4.2.2)$$

А сада уводећи ознаку $k=EI/l$ за такозвани фактор крутости греде, те служећи се ознаком M за моменат уклештења, пише се једначина нагиба-угиба (4.1.3) у облику

$$M_{ab} = 2k(2\theta_a + 2\theta_b) + M_{ab} - 6k\theta_{ab} \quad (4.2.3)$$

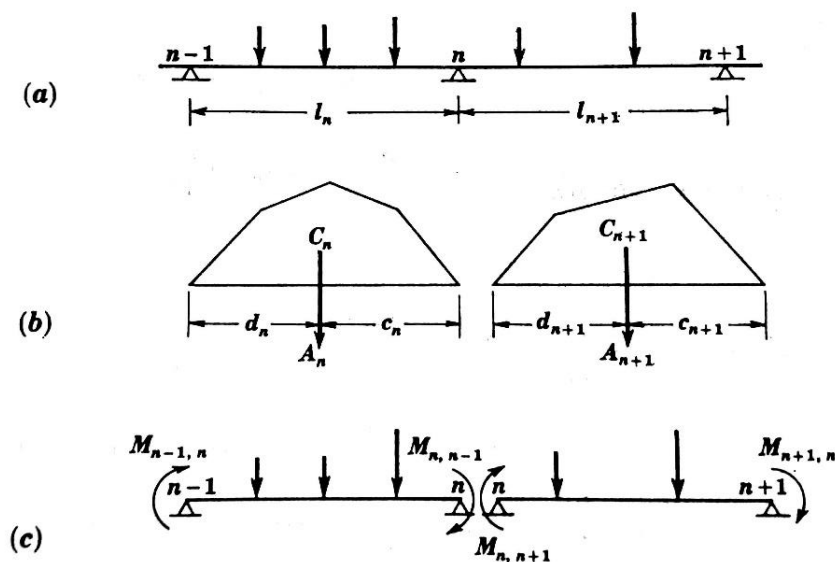
$$M_{ba} = 2k(2\theta_b + 2\theta_a) + M_{ba} - 6k\theta_{ab} \quad (4.2.3)$$

Ове једначине налазе своју најширу примену при решавању оквира.

4.3 Континуалне гредe

Једначине (4.1.2a), изведене у чл. 4.1 веома су корисне при решавању континуалних гредa. Полазећи од левог краја гредe, узастопне ослонцe обележавамо са $0, 1, 2, \dots$, дужине поља са $l_1, l_2, \dots$, и са $I_1, I_2, \dots$ односне моменте инерције попречних пресека гредa, узимајући да је у сваком од поља попречни пресек непроменљив. [3]

Након тога, посматрају се два суседна поља l_n и l_{n+1} као што је приказано на слици 4.3.1a, затим се конструишу одговарајуће моментне линије као за две суседне просте гредe, за попречна оптерећења, приказана на слици 4.3.1b. Површине тих моментних линија означавају се са A_n и A_{n+1} , а положаје њихових тежишта C_n и C_{n+1} дефинишемо односним удаљеностима од десног и левог ослонца са c_n, d_n, c_{n+1} и d_{n+1} . [3]



Слика 4.3.1

Посматрањем савијања оба распона, узимају се у обзир не само дејства попречних оптерећења на оба поља, већ и утицаји крајњих момената, који представљају дејства суседних поља на посматрано поље. Величине тих момената за распон l_n , означава се са $M_{n-1,n}$ и $M_{n,n-1}$, а за распон l_{n+1} са $M_{n,n+1}$ и $M_{n+1,n}$ како је то назначено на слици 4.3.1a. Једначине за израчунавање тих момената могу се написати на основу услова континуитета еластичне линије. Из тог услова континуитета проистиче да угао ротације $\Theta_{n,n-1}$ десног краја отвора l_n мора бити једнак углу ротације $\Theta_{n,n+1}$ левог краја отвора l_{n+1} . Ови углови ротације се налазе у једначинама (4.1.2a) које дају

$$\Theta_{n,n-1} = \frac{M_{n,n-1}l_n}{3EI_n} - \frac{M_{n-1,n}l_n}{6EI_n} - \frac{A_nd_n}{l_nEI_n} \quad (a)$$

$$\Theta_{n,n+1} = \frac{M_{n,n+1}l_n}{3EI_{n+1}} - \frac{M_{n+1,n}l_{n+1}}{6EI_{n+1}} - \frac{A_{n+1}c_{n+1}}{l_{n+1}EI_{n+1}} \quad (a)$$

Након тога се уводе конвенционални моменти савијања M_{n-1} , M_n и M_{n+1} над ослоњцима, који долазе на место крајњих момената који су претходно означавани у индексима, а значили су крајеве суседних поља. [3]

Узимајући као позитивни смер крајњих момената смер казаљке и држећи се конвенционалног правила о знаку момента савијања, добијају се следеће једнакости:

$$M_{n-1,n} = +M_{n-1} \quad M_{n+1,n} = -M_{n+1}$$

$$M_{n,n+1} = +M_n \quad M_{n,n-1} = -M_n$$

Тако да изрази (a) добијају нов облик

$$\Theta_{n,n-1} = -\frac{M_nl_n}{3EI_n} - \frac{M_{n-1}l_n}{6EI_n} - \frac{A_nd_n}{l_nEI_n}$$

$$\Theta_{n,n+1} = \frac{M_nl_{n+1}}{3EI_{n+1}} - \frac{M_{n+1}l_{n+1}}{6EI_{n+1}} - \frac{A_{n+1}c_{n+1}}{l_{n+1}EI_{n+1}}$$

Изједначавањем та два угла добија се *једначина три момента*

$$M_{n-1} \frac{l_n}{I_n} - 2M_n \left(\frac{l_n}{I_n} + \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}} \right) + M_{n+1} \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}} = - \frac{6A_n d_n}{l_n I_n} - \frac{6A_{n+1} c_{n+1}}{l_{n+1} I_{n+1}} \quad (4.3.1)$$

Оваква једначина се може написати за свако од средњих поља континуалне греде, ако су њени крајњи ослонци слободно належајући, онда је број једначина једнак броју статички неодређених ослоначких момената. Сада има довољан број једначина које омогућавају решавање свих статички неодређених величина. [3]

Ако би леви крај греде био уклештен у свој ослонац O , онда се тиме добија једна статички непозната величина више, али и једна једначина више, која говори да се леви крај греде не може заокренути. По раније усвојеном начину обележавања, значи да је угао θ_0 једнак нули.

Користећи прву од једначина (4.1.2a) види се да тај услов постаје

$$\frac{M_{0,1} l_1}{3EI_1} - \frac{M_{1,0} l_1}{6EI_1} + \frac{A_1 c_1}{l_1 EI_1} = 0$$

Увођењем момента савијања изнад ослонца добија се

$$2M_u + M_1 = - \frac{6A_1 c_1}{l_1^2} \quad (4.3.2)$$

Као што је већ поменуто, уклештени крај греде доноси једну нову непознату M_0 , али истовремено и једну допунску једначину (4.3.2). Према томе је број непознатих опет изједначен са бројем једначина. Ако је и десни крај греде уклештен, лако се долази до једначине сличне једначини (4.3.2) која омогућава решавање десног момента уклештења. [3]

Понекад се примењују и једначине, које уместо три суседна ослоначка момента, садрже три угла ротације над три суседна ослонца. Посматрајући поново три узастопна ослоначка пресека, а два суседна поља, (сл.4.3.1c), добија се

$$M_{n,n-1} = 2k_n(2\theta_n + \theta_{n-1})\mathfrak{M}_{n,n-1} - 6k_n\theta_{n,n-1}$$

$$M_{n,n+1} = 2k_{n+1}(2\theta_n + \theta_{n+1})\mathfrak{M}_{n,n+1} - 6k_{n+1}\theta_{n,n+1}$$

Ако је $M_{n,n-1} = -M_{n,n+1}$

добива се

$$\begin{aligned} 2k_n\theta_{n-1} + \theta_n(k_{n,n} + k_{n+1}) + 2k_{n+1} + \theta_{n+1} \\ = -(\mathfrak{M}_{n,n-1} + \mathfrak{M}_{n,n+1}) + 6(k_n\theta_{n,n-1} + k_{n+1}\theta_{n,n+1}) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Ово се назива *једначина три угла*.

4.4 Прости оквири са призматичним штаповима

При решавању простих оквира користе се једначине нагиба-угиба које су изведене у поглављу. 4.1. [3]

Разматрањем овкавих оквира, врше се иста упрошћавања као и раније, а утицај аксијалних сила биће занемарен на деформације оквира.

За први пример узет је симетричан оквир АВС, зглобасто ослоњен у А и С, а оптерећен према цртежу 4.4.1а. Занемаривши скраћење штапа ВС услед аксијалног притиска, не долази до померања чвора В. Применом једначине (4.1.2а) за штап АВ,

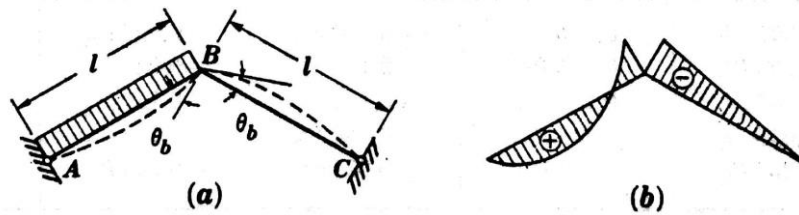
$$\theta_b = \frac{M_{bal}}{3EI} - \frac{ql^3}{24EI}$$

а за штап ВС ћемо имати

$$\theta_b = \frac{M_{bc}l}{3EI}$$

Изједначавањем ова два израза за углове, из услова равнотеже чвора В, да је $M_{ba} = -M_{bc}$ добијамо

$$\frac{2}{3} \frac{M_{bc}l}{EI} = -\frac{ql^4}{24EI}$$



Слика 4.4.1

Пошто је крајњи моменат M_{bc} идентичан са моментом савијања M_b , добија се

$$M_b = -\frac{ql^2}{16}$$

Одговарајућа моментна линија приказана је на слици (4.4.1b).

Услов континуитета у чвору В је исти онакав како је примењиван у извођењу једначине три момента, што упућује да и при решавању оквира применимо једначине три момента. Ако се оквир ABC третира као континуална греда са два отвора, и када би се применила једначина трију момената (4.3.1a), непосредно би добили

$$4M_b l = -\frac{ql^4}{4}$$

А то даје исту вредност за M_b .

Након проналажења величине момента савијања M_b , помоћу статике се проналазе аксијалне силе притиска у штаповима AB и BC , као и односна мала померања крутог чвора B , који је занемарен приликом претходног решавања. Када се уведу допунски углови ротације два штапа, узроковани померањима чвора B , добија се корекција раније израчунате вредности M_b , применом једначине (4.1.3a). Оваква корекција је обично врло мала, тако да се може занемарити при практичном прорачунавању. [3]

У случају симетричног оквира, оптерећеног шрема цртежу 4.4.2 неће бити бочног померања, тако да се примењује једначина три момента при проналажењу момената савијања у крутим чворовима B и C . Користећи се једначином (4.3.1). Уочавајући из услова симетрије да је $M_b = M_c$, добија се

$$2\left(\frac{hI_2}{I_1} + l\right) + M_b l = -\frac{3Pl^3}{8} \quad (a)$$

Уз ознаке,

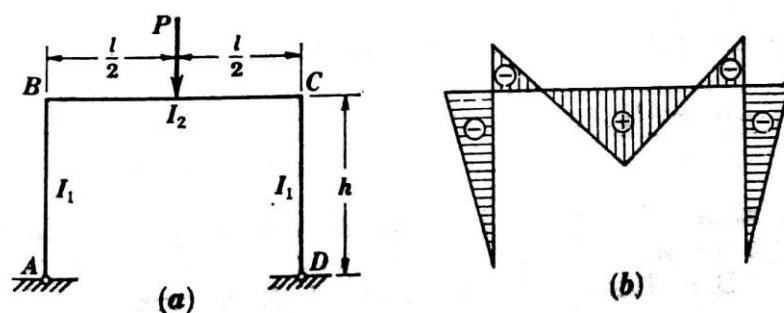
$$\alpha = \frac{h}{l}$$

$$\frac{h}{l} = \gamma$$

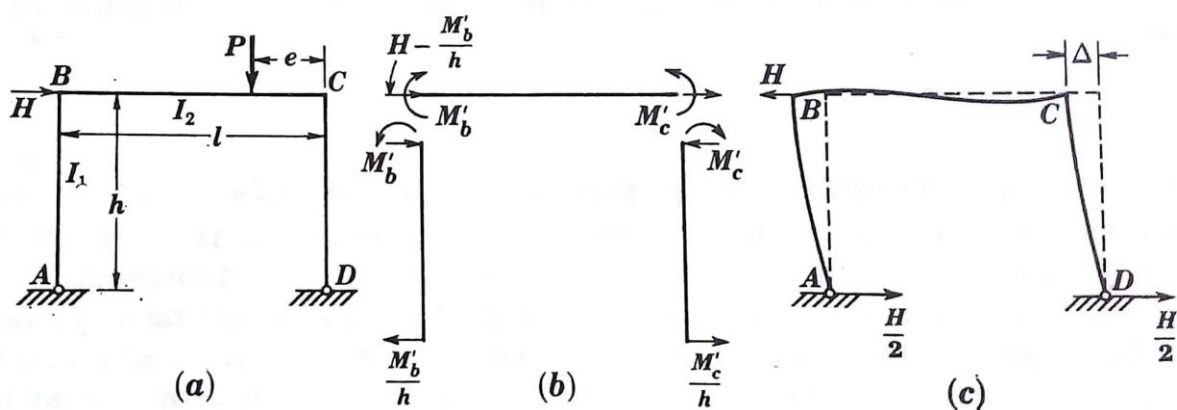
Проналази се да је

$$M_b = M_c = \frac{3Pl}{8} \frac{1}{2\alpha\gamma + 3} \quad (b)$$

Односна моментна линија дата је на сл. 4.4.2b.



Слика 4.4.2



Слика 4.4.3

Ако симетрије нема, онда се врх оптерећеног оквира помера и бочно, а померање се мора узимати у обзир када се израчунавају моменти савијања у крутим чворовима.

Случај приказан на сл. 4.4.3а, где терет P делује несиметрично. Да би се решио овај проблем уз помоћ једначина трију момената, узима се да на оквир делује једна хоризонтална сила H у чвору B , а да је њена величина баш толика, колико је потребно да се спречи бочно померање врха оквира. [3]

Приступањем на сличан начин као и пре, добијају се моменти савијања M_b' и M_c' у крутим чворовима B и C из следећих једначина трију момената:

$$2 M'_b \left(\frac{h}{I_1} + \frac{l}{I_2} \right) + M'_c \frac{l}{I_2} = \frac{P_e(l^2 - e^2)}{I_2 l} \quad (c)$$

$$M'_b \frac{l}{I_2} + 2M'_c \left(\frac{l}{I_2} + \frac{h}{I_1} \right) = -\frac{P_e(l - e)(2l - e)}{I_2 l} \quad (c)$$

Након проналажења величине момената савијања M'_b и M'_c , могу се израчунати величине аксијалних сила које делују на хоризонталну пречку оквира BC , помоћу једначина статике. Те силе, уз претпоставку да су моменти савијања M'_b и M'_c позитивни, индицирани су на слици 4.4.3. Из услова равнотеже добија се:

$$H - \frac{M'_b}{h} + \frac{M'_c}{h} = 0$$

А сила, потребна да спречи бочно померање оквира је

$$H = -\frac{M'_b - M'_c}{h} \quad (d)$$

Да би се нашле величине M_b и M_c момената савијања када нема хоризонталне силе, која би спречила бочно померање, решавамо помоћни проблем, приказан на слици 4.4.3с. Тражени моменти ће бити пронађени суперпонирањем овог случаја и оног са слике 4.4.3а. Ако са M''_b и M''_c обележе моменти савијања у B и C за случај са слике 4.4.3с, онда добијамо

$$M_b = M'_b + M''_b$$

$$M_c = -M'_c + M''_c \quad (e)$$

Савијање оквира је у овом случају веома просто, јер ће због симетрије оквира хоризонталне реакције оба ослоначка зглоба A и D бити подједнаке и износити $H/2$. Према томе,

$$M_b'' = -M_c'' = -\frac{hH}{2}$$

Уносећи за H величину дату у једначини (d) добија се

$$M_b'' = -M_c'' = \frac{M_c' + M_d'}{2} \quad (f)$$

Па нам једначина (e) даје

$$M_b = M_c = \frac{M_b' + M_c'}{2} \quad (g)$$

Суму момената M_b' и M_c' добијамо сабирајући једначине (c) што нам даје

$$M_b' + M_c' = -\frac{3P_e(l-e)}{l\left[3 + 2\left(\frac{h}{l}\right)\left(\frac{I_2}{I_1}\right)\right]}$$

Према томе, тражено решење је

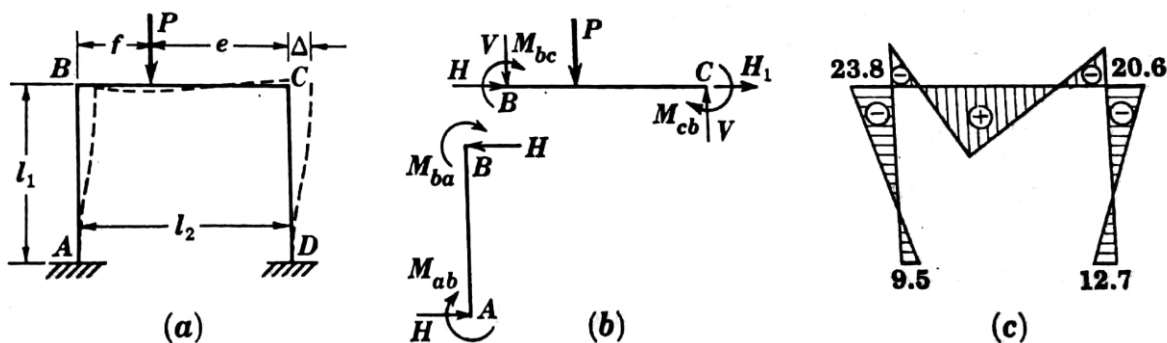
$$M_b = M_c = -\frac{3P_e(l-e)}{2l\left[3 + 2\left(\frac{h}{l}\right)\left(\frac{I_2}{I_1}\right)\right]} \quad (h)$$

У претходном примеру до решења смо дошли суперпозицијом два посебна проблема, приказаних на сл.4.4.3 *a* и *b*. У првом од проблема имали смо спречено бочно померање, а у другом је размотрен само утицај бочног померања. [3]

Може се и на други начин приступити, записивањем директно, помоћу једначина нагиба-угиба, све једначине, потребне за одређивање момената савијања у крутим чворовима, као и бочног померања оквира. [3]

Узимамо, на пример, симетрични оквир, дат на слици 4.4.4a, уз поставку да ће се његов горњи део бочно померити под дејством силе P , и то за величину Δ удесно. Тада уз следеће ознаке

$$k_1 = k_3 = \frac{EI_1}{l_1} \quad k_2 = \frac{EI_2}{l_2} \quad \theta = \frac{\Delta}{l_1} \quad (i)$$



Слика 4.4.4

Постављају се једначине нагиба-угиба уз помоћ једначине (4.2.3)

$$\begin{aligned} M_{ab} &= 2k_1\theta_b - 6k_1\theta \\ M_{ba} &= 3k_1\theta_b - 6k_1\theta \\ M_{bc} &= 2k_2(2\theta_b + \theta_c) + M_{bc} \\ M_{cd} &= 2k_2(2\theta_c + \theta_b) + M_{cb} \\ M_{cd} &= 4k_1\theta_c - 6k_1\theta \\ M_{dc} &= 2k_1\theta_c - 6k_1\theta \end{aligned} \quad (j)$$

Као што видимо, сви крајњи моменти су изражени помоћу три величине Θ_b, Θ_c и Θ . Да бисмо пронашли њихове величине, пре свега уочавамо да је

$$M_{ba} = -M_{bc} \quad M_{bc} = -M_{cd}$$

Што нам, после замене једначина (j) даје

$$4(k_1 + k_2)\Theta_b + 2k_2\Theta_c = 6k_1\Theta - \mathfrak{M}_{bc} \quad (k)$$

$$2k_2\Theta_b + 4(k_1 + k_2)\Theta_c = 6k_1\Theta - \mathfrak{M}_{cb}$$

Да би се добила и трећа једначина, посматра се равнотежа пречке BC под дејством хоризонталних сила, пренетих на њу преко стубова оквира. Из дејства крајњих момената вертикалног штапа AB (слика 4.4.4b) закључујемо да у A и B морају деловати извесне хоризонталне смичуће силе

$$H = \frac{M_{ba} + M_{ab}}{l_1} \quad (l)$$

На сличан начин добијамо и за штап CD

$$H_1 = \frac{M_{cd} + M_{dc}}{l_1} \quad (m)$$

А сада, разматрајући услове равнотеже греде BC закључујемо да је

$$H + H_1 = \frac{1}{l_1} (M_{ba} + M_{ab} + M_{cd} + M_{dc}) = 0$$

Заменом величина за крајње моменте из једначине (j) добијамо

$$\Theta_b + \Theta_c = 4\theta \quad (n)$$

Величине углова ротације Θ_b, Θ_c и θ можемо пронаћи помоћу једначина (k) и (n).

Они су дати следећим изразима:

$$\begin{aligned} \Theta_b &= -\frac{\mathfrak{M}_{bc} + \mathfrak{M}_{cb}}{2(k_1 + 6k_2)} + \frac{\mathfrak{M}_{cb} + \mathfrak{M}_{bc}}{4(2k_1 + k_2)} \\ \Theta_c &= -\frac{\mathfrak{M}_{bc} + \mathfrak{M}_{cb}}{2(k_1 + 6k_2)} + \frac{\mathfrak{M}_{cb} + \mathfrak{M}_{bc}}{4(2k_1 + k_2)} \\ \theta &= -\frac{\mathfrak{M}_{cb} + \mathfrak{M}_{bc}}{4(k_1 + 6k_2)} \end{aligned} \quad (o)$$

За означено оптерећење, вредности момената укљештења су

$$\mathfrak{M}_{bc} = -\frac{Pe^2f}{l_2^2} \quad \mathfrak{M}_{cb} = -\frac{Pf^2e}{l_2^2}$$

Па тако једначине (o) добијају следећи облик:

$$\begin{aligned} \Theta_b &= \frac{Pef(e-f)}{2l_2^2(k_1 + 6k_2)} - \frac{Pef}{4l_2(2k_1 + k_2)} \\ \Theta_c &= \frac{Pef(e-f)}{2l_2^2(k_1 + 6k_2)} - \frac{Pef}{4l_2(2k_1 + k_2)} \\ \theta &= \frac{Pef(e-f)}{4l_2^2(k_1 + 6k_2)} \end{aligned} \quad (p)$$

Уношењем ових вредности у једначине (j) добијамо:

$$\begin{aligned}
 M_{ab} &= -\frac{Pef(e-f)}{2l_2^2\left(1+\frac{6k_2}{k_1}\right)} + \frac{Pef}{2l_2(2+k_2/k_1)} \\
 M_{bc} = -M_{ba} &= -\frac{Pef(e-f)}{2l_2^2\left(1+\frac{6k_2}{k_1}\right)} - \frac{Pef}{l_2\left(2+\frac{k_2}{k_1}\right)} \\
 M_{cb} = -M_{cd} &= -\frac{Pef(e-f)}{2l_2^2\left(1+\frac{6k_2}{k_1}\right)} + \frac{Pef}{l_2\left(2+\frac{k_2}{k_1}\right)} \\
 M_{dc} &= -\frac{Pef(e-f)}{2l_2^2\left(1+\frac{6k_2}{k_1}\right)} - \frac{Pef}{2l_2(2+k_2/k_1)}
 \end{aligned} \tag{q}$$

Користећи се овим обрасцима могу се пронаћи крајњи моменти, и тако се може конструисати и моментна линија за дати оквир, за било који положај терета P на пречки.

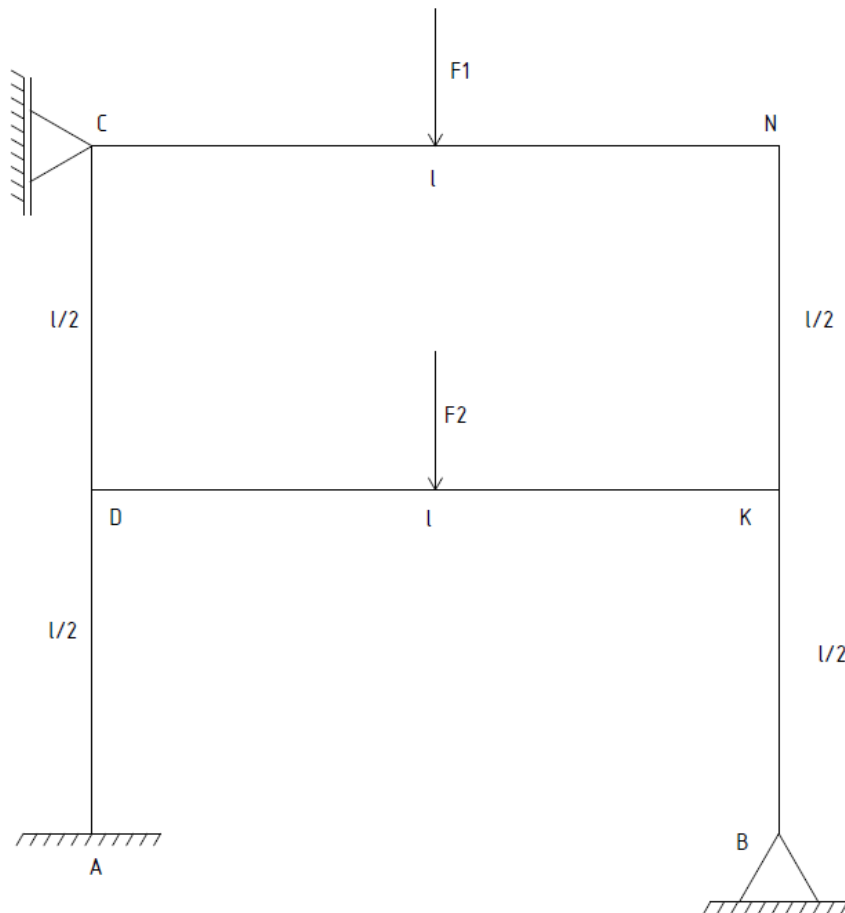
Као што се видело до сад, моменти зависе једино од односа k_1/k_2 , а не и од вредности тих величина.

5. АНАЛІТИЧКО РЕШАВАННЯ ПРОБЛЕМА РАМНОГ НОСАЧА (Пример 1)

Улазні подаци (табела 5.1 ; слика 5.2):

Табела 5.1 Улазні подаци

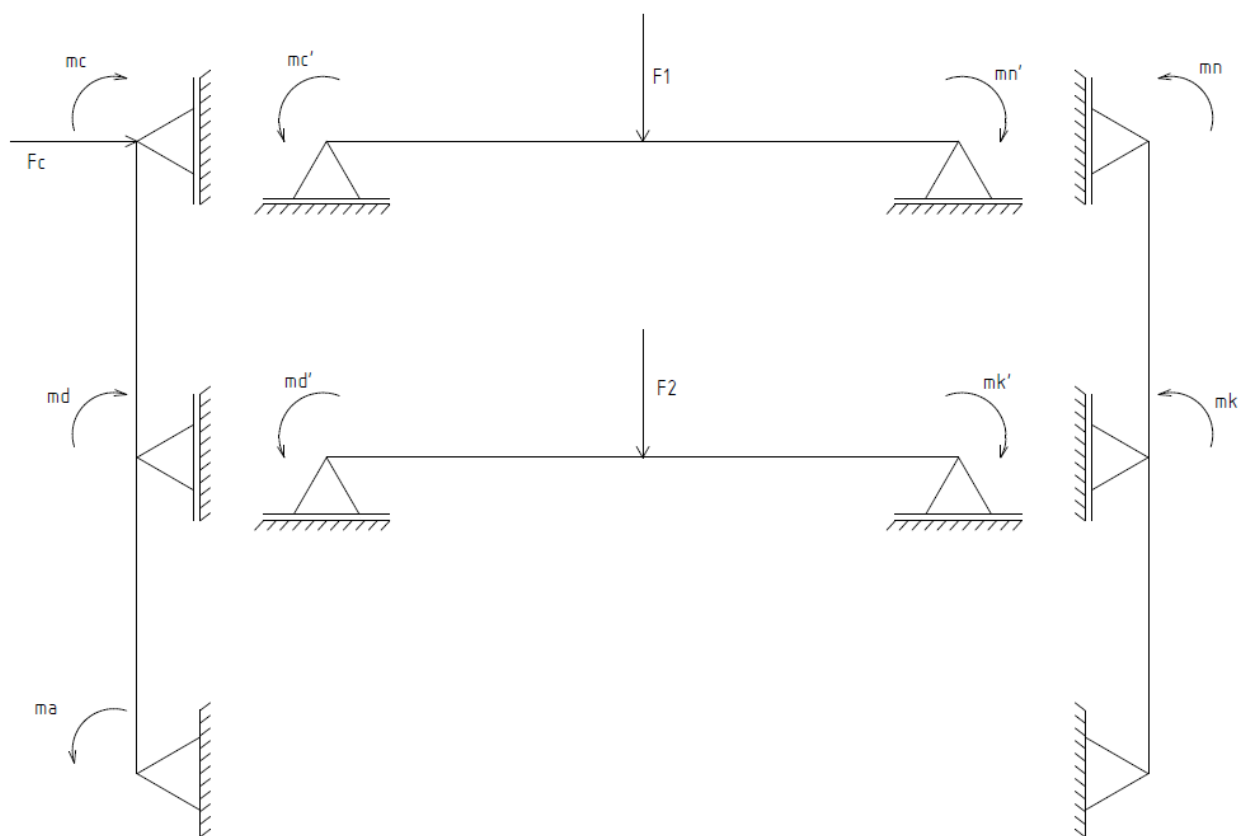
F_1	10 kN
F_2	10 kN
l	8 m



Слика 5.2

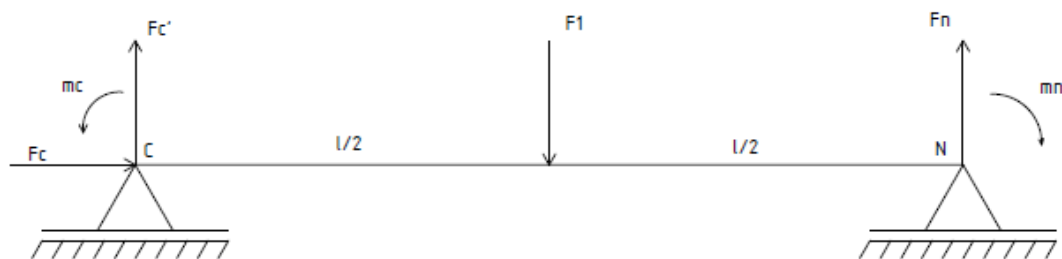
5.1 Одређивање отпора ослонаца

Решавање задатка почињемо тако што задати рам делимо на просте греде (слике 5.1.1 и 5.1.9) а након тога исписујемо статичке једначине за одређивање отпора ослонаца.



Слика 5.1.1

Почињемо са првом хоризонталном гредом (слика 5.1.2).



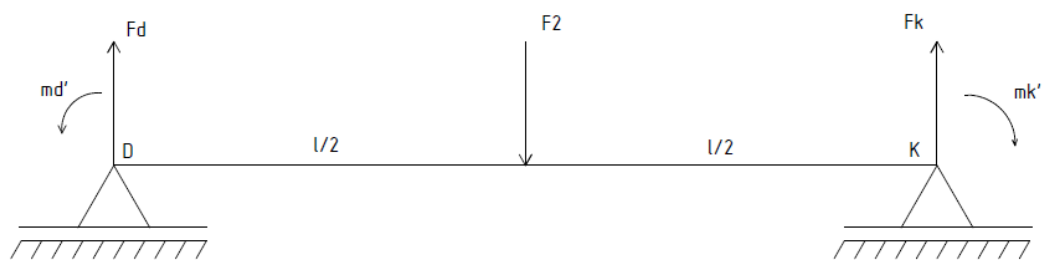
Слика 5.1.2

$$1.) \sum x_i = 0; F_C = 0$$

$$2.) \sum y_i = 0; -F_1 + F_N = 0 \Rightarrow F_N = F_1$$

$$3.) \sum M_C = 0; F_1 \cdot \frac{l}{2} - F_N \cdot l - m_C + m_N = 0$$

Након постављања прве три једначине прелазимо на другу хоризонталну греду и постављамо следеће једначине:

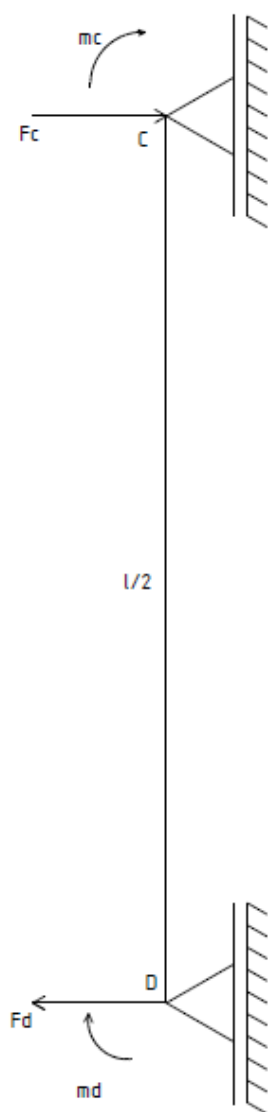


Слика 5.1.3

$$4.) \sum x_i = 0; 0 = 0$$

$$5.) \sum y_i = 0; F_D - F_2 + F_K = 0 \Rightarrow F_D + F_K = F_2$$

$$6.) \sum M_D = 0; -m_D' + F_2 \cdot \frac{l}{2} - F_K \cdot l + m_K'$$

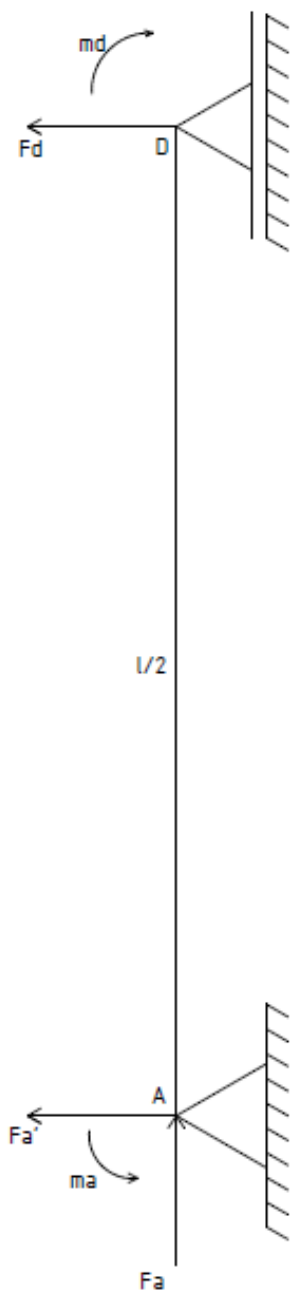


$$7.) \Sigma x_i = 0; 0 = 0$$

$$8.) \Sigma y_i = 0; -F_C + F_D = 0 \Rightarrow F_D = F_C$$

$$9.) \Sigma M_C = 0; F_D \cdot \frac{l}{2} + m_D + m_C$$

Слика 5.1.4

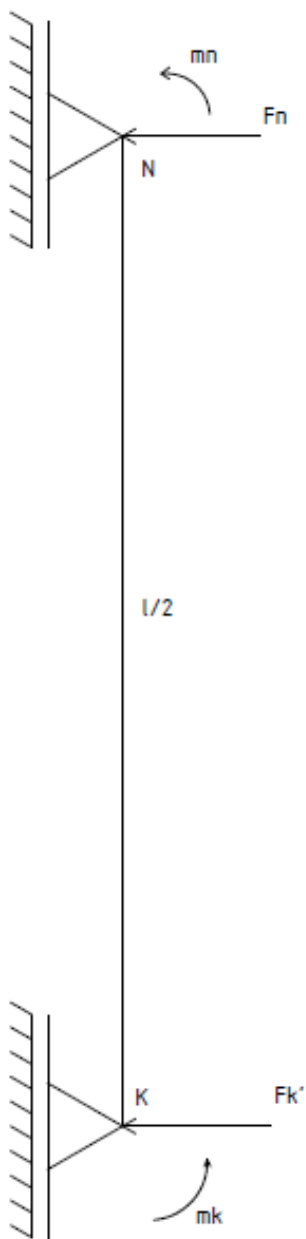


$$7.) \Sigma x_i = 0; F_A' = 0$$

$$8.) \Sigma y_i = 0; F_A + F_D = 0 \Rightarrow F_D = -F_A$$

$$9.) \Sigma M_A = 0; -m_A + m_D - F_D \cdot \frac{l}{2} = 0$$

Слика 5.1.5

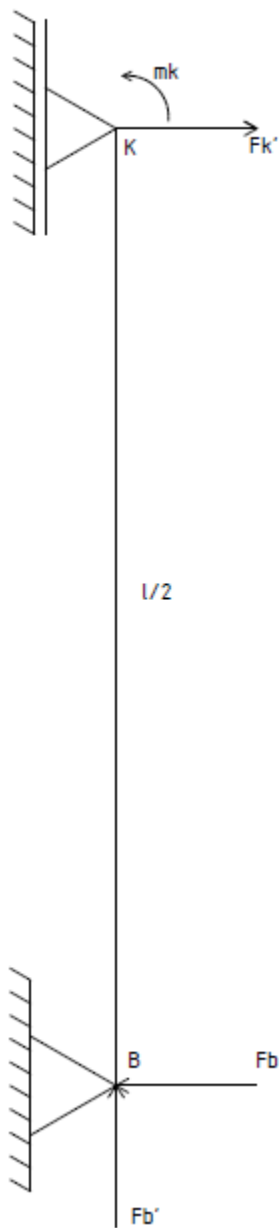


$$10.) \Sigma x_i = 0;$$

$$11.) \Sigma y_i = 0; -F_N' - F_K' = 0 \Rightarrow -F_N' = F_K'$$

$$12.) \Sigma M_K = 0; -m_K' + m_N' - F_N' \cdot \frac{l}{2} = 0$$

Слика 5.1.6



$$13.) \sum x_i = 0; F_B' = 0$$

$$14.) \sum y_i = 0; -F_B - F_K' = 0 \Rightarrow F_B = F_K'$$

$$15.) \sum M_B = 0; F_K' \cdot \frac{l}{2} - m_K = 0$$

Слика 5.1.7

Након исписивања основних једначина равнотеже, потребно је написати и допунске једначине.

$$\alpha_C = \alpha_C^{(m_C)} + \alpha_C^{(F)} + \alpha_C^{(m_N)}$$

$$\alpha_D = \alpha_D^{(m_{D'})} + \alpha_D^{(F)} + \alpha_D^{(m_{K'})}$$

$$\alpha_C^{(m_C)} = -\frac{m_C \cdot l}{3\mathbb{B}}$$

$$\alpha_D^{(m_C)} = -\frac{m_{D'} \cdot l}{3\mathbb{B}}$$

$$\alpha_C^{(F)} = -\frac{F \cdot l^2}{24\mathbb{B}}$$

$$\alpha_D^{(F)} = -\frac{F \cdot l^2}{24\mathbb{B}}$$

$$\alpha_C^{(m_N)} = -\frac{m_N \cdot l}{6\mathbb{B}}$$

$$\alpha_D^{(m_N)} = -\frac{m_{K'} \cdot l}{6\mathbb{B}}$$

$$\beta_N = \beta_N^{(m_C)} + \beta_N^{(F)} + \beta_N^{(m_N)}$$

$$\beta_K = \beta_K^{(m_{D'})} + \beta_K^{(F)} + \beta_K^{(m_{K'})}$$

$$\beta_N^{(m_C)} = \frac{m_C \cdot l}{6\mathbb{B}}$$

$$\beta_K^{(m_{D'})} = \frac{m_{D'} \cdot l}{6\mathbb{B}}$$

$$\beta_N^{(F)} = -\frac{F \cdot l^2}{24\mathbb{B}}$$

$$\beta_K^{(F)} = -\frac{F \cdot l^2}{24\mathbb{B}}$$

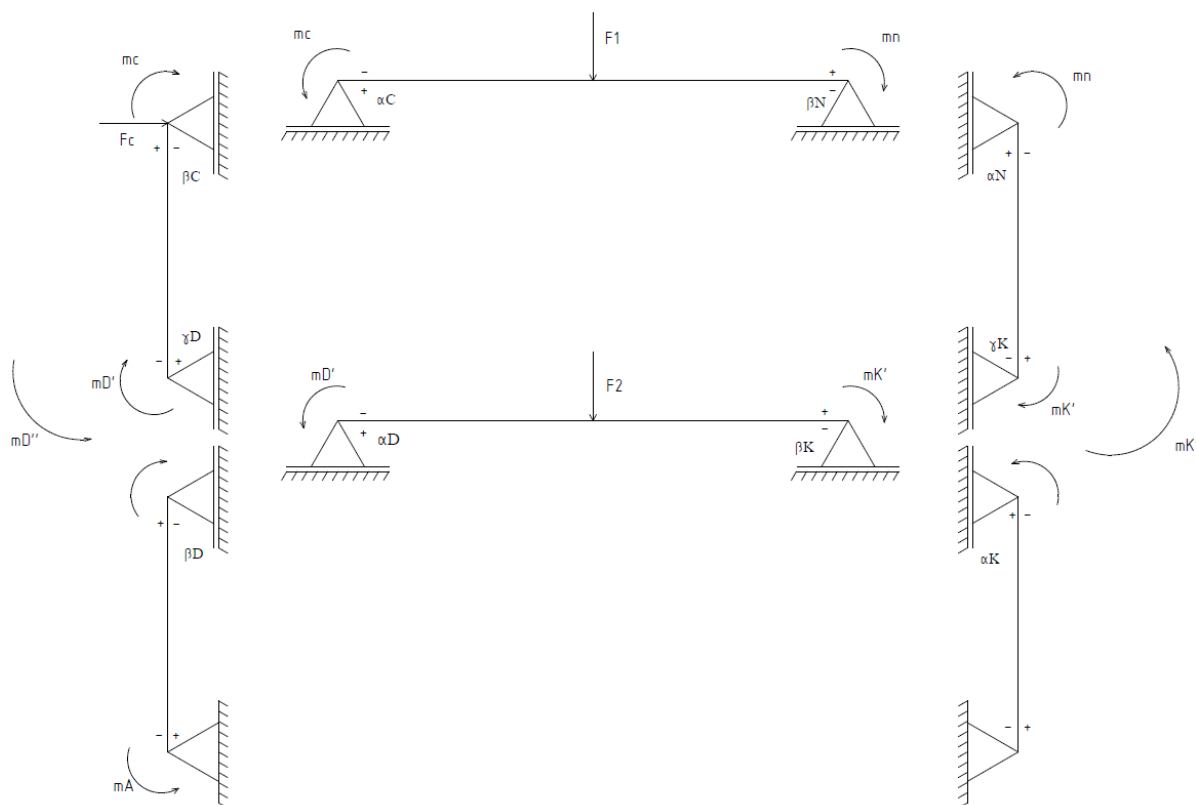
$$\beta_N^{(m_N)} = \frac{m_C \cdot l}{3\mathbb{B}}$$

$$\beta_K^{(m_{K'})} = \frac{m_{K'} \cdot l}{3\mathbb{B}}$$

Допунске једначине за овај оквир су дате у табели 5.1.8,

Табела 5.1.8

1.	$\alpha_A = 0$
2.	$\alpha_D = \beta_D$
3.	$\alpha_D = \gamma_D$
4.	$\beta_K = \alpha_K$
5.	$\beta_K = \gamma_K$
6.	$\alpha_N = \beta_N$
7.	$\alpha_C = \beta_C$



Слика 5.1.9

Након исписивања и допунских једначина израчунавањем добијамо:

$$m_A, m_{D'}, m_{D''}, m_{K'}, m_{K''}, m_N, m_C$$

6. СОФТЕРСКИ ПАКЕТ „TOWER 7“

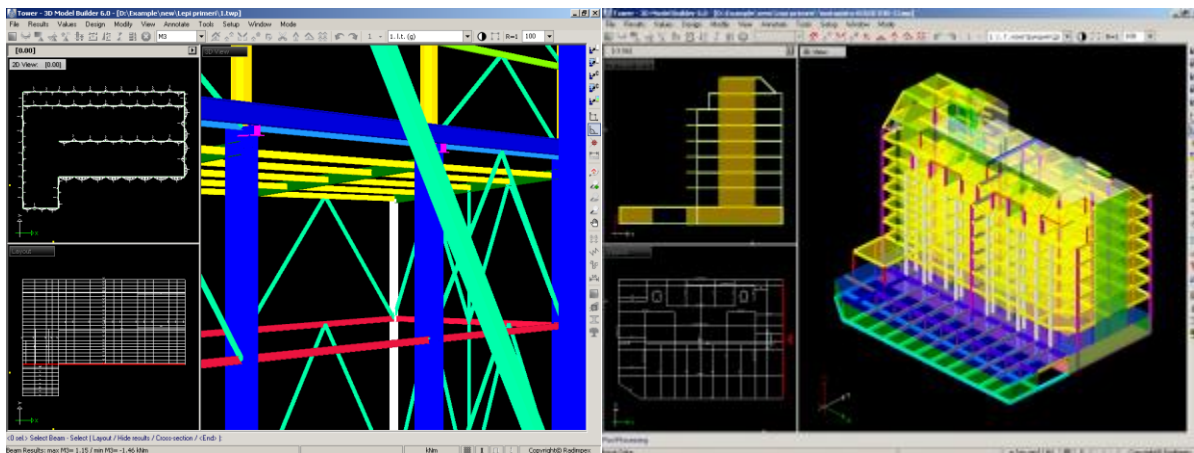
„Tower 7“, програм за статичку и динамичку анализу конструкција и димензионисање бетонских, челичних и дрвених елемената.

„Tower 7“ је програм за свеобухватну анализу утицаја у раванским и просторним конструкцијама. Обезбеђујући снажне алате који су аутоматизовани, интегрисани, свеобухватни и интуитивни, овај програм омогућава инжењерима повећање брзине и квалитета пројектовања. Верзија 7 је високо-професионалан алат високих перформанси, заснован на вишегодишњем искуству и најновијим сазнањима екипе експерата, инжењера и врхунских програмера [4].

6.1 Основне могућности

- Анализа статичких утицаја у конструкцији по теорији I и II реда, са линеарним, нелинеарним и еластопластичним понашањем
- Прорачун стабилности конструкције (одређивање критичних сила и дужина извијања)
- Прорачун својствених вредности (форме и периоди осциловања конструкције)
- Генерисање сеизмичког оптерећења по различитим стандардима (JUS, EC8, SNIP...)
- Аутоматско генерисање мреже коначних елемената
- Аутоматско генерисање маса у свим чворовима модела
- Анализа утицаја кроз дефинисане фазе грађења објекта (монтажне конструкције, спрегнуте конструкције, итд.)
- Фундирање на еластичној подлози и могућност моделирања тла у виду еластичног полупростора са дефинисањем слојева различитих својстава и топологије преко произвољног броја бушотина
- Моделирање монтажних таваница ортотропним плочама
- Греде и стубови променљивог попречног пресека (греде са вутама, призматични стубови, ламелирани дрвени носачи, итд.),
- Моделирање крутих веза у чворовима греда (офсет греда - дијаграми у светлим отворима),
- Ексцентрично постављање греда и стубова (реално моделирање подвлака у плочама, стубови скоковите промене попречног пресека, итд.),

- Анализа утицаја у преднапрегнутим елементима конструкције (произвољна геометрија каблова и прорачун губитака силе преднапрезања),
- Задавање потпуно произвољног карактера и правца деловања оптерећења
- Анализа утицаја од покретног оптерећења (дефинисање потпуно произвољне шеме и путање покретног оптерећења) као и прорачун утицајних линија за пресечне силе, деформације и реакције ослонаца уз одређивање критичног положаја покретног оптерећења и "пешачке навале",
- Аутоматско генерисање оптерећења на ротационо симетричним деловима модела услед различитих природних појава: сопствена тежина, снег, притисак, вода, земља, ветар,
- Прорачун услед температурних утицаја и померања ослонаца,
- Прорачун релативног угиба у плочама и гредама.,
- Аутоматско димензионисање армирано бетонских конструкција (JUS, EUROCODE, SNIP, DIN, BS, ACI, итд.),
- Аутоматско димензионисање челичних конструкција (JUS, EUROCODE),
- Аутоматско димензионисање дрвених конструкција (JUS, EUROCODE),
- Лако креирање квалитетне пројектне документације са заглављем, текстуалним извештајима и графичким блоковима . [4]



Слика 6.1.1 Примери радова у програму TOWER 7

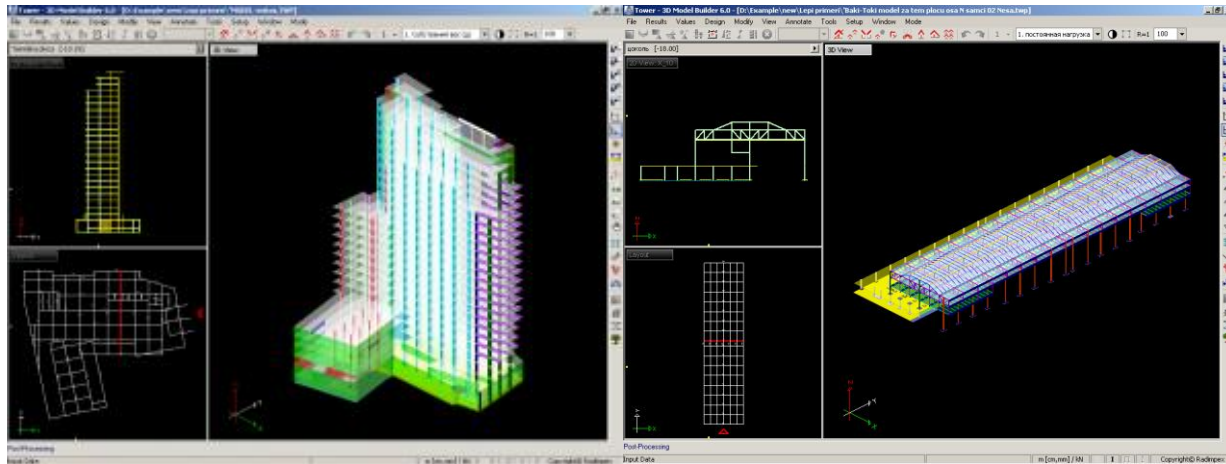
6.2 Графички интерфејс

- Дефинисање произвољних равни за цртање
- Симултано коришћење раванског и просторног цртања
- Прецизан избор тачака са цртежа (динамички оснап са комбиновањем критеријума)
- Динамички зум и пан. Динамичка ротација изометријског приказа модела (орбит)
- Манипулација са елементима цртежа (копирање, осно пресликавање, брисање, ротирање, продужавање, скраћивање, комплетан ундо/редо систем обнављања цртежа, итд.)
- Аутоматско генерисање вертикалних елемената конструкције
- Аутоматско генерисање ротационо симетричних тела (сфера, купа, свод, спирала)
- Рад са блоковима цртежа (снимање и учитавање произвољно одабраних делова модела)
- Груписање произвољно одабраних делова модела у целине и укидање видљивости осталим деловима модела (видљиви само стубови, зидови, типски спратови, штапови испуне, главни носачи, итд.)
- Визуелизација модела (Direct X рендер, шетање камером кроз објекат). [4]

6.3. Обрада резултата прорачуна

- Брзо проналажење екстремних вредности утицаја на целом моделу или пак само на одабраној групи елемената (екстремне вредности нормалних сила само у стубовима, максимални моменти савијања у плочама типског спрата, максимална померања само зидова, итд.)
- Приказ резултата, како на целом просторном моделу, тако и на његовим појединим деловима (у одабраном раму, зиду, таваници, темељима, произвољно дефинисаном погледу, итд.)
- Приказ резултата у површинским елементима путем изолинија и дијаграма дуж произвољно задате линије пресека
- Приказ утицаја у линијским елементима путем дијаграма и путем градијента боје
- Приказ реакција ослонаца са смером и интензитетом

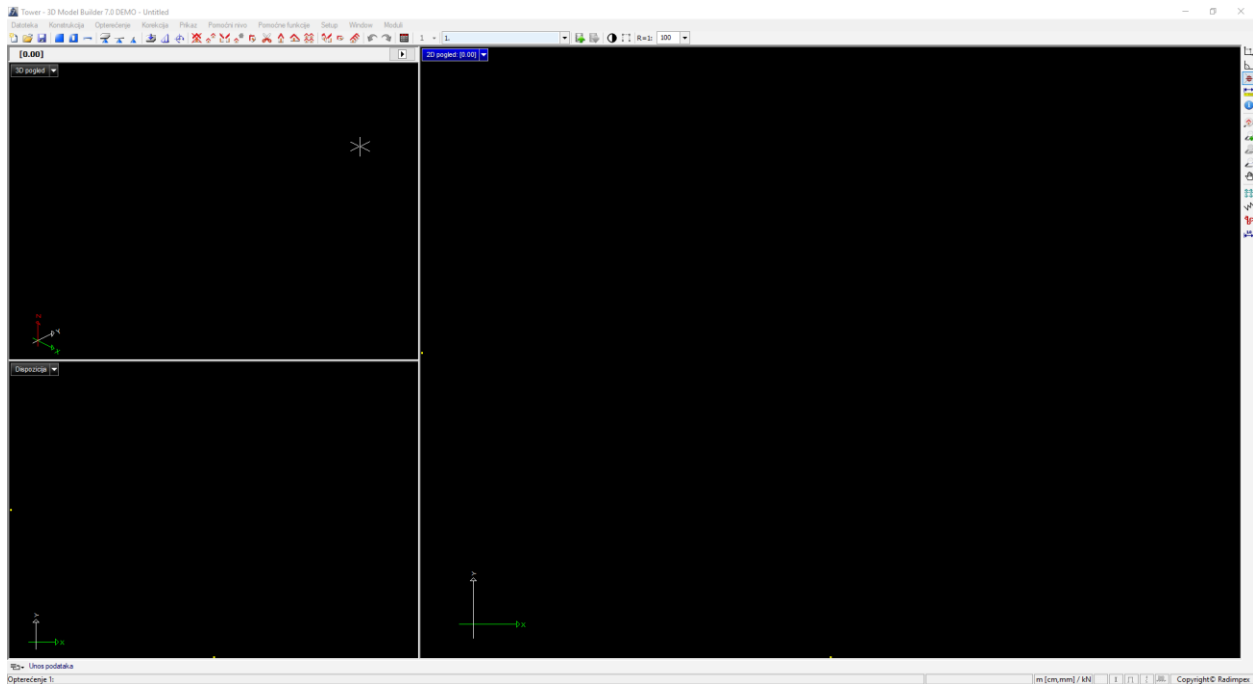
- Дијаграми расподеле напона у спрегнутим попречним пресецима кроз дефинисане фазе грађења
- Утицаји у појединачним деловима спрегнутог попречног пресека
- Једновремени приказ утицаја у свим стубовима и зидовима једног нивоа (увид у расподелу утицаја од сеизмике на све стубове и зидове једног спрата, прерасподела нормалних сила од вертикалног оптерећења на стубове и зидове датог нивоа, итд.)
- Приказ и анимација форми осциловања и деформисаног модела
- Потпуно аутоматизовано димензионисање армирано бетонских, челичних и дрвених конструкција (JUS, EUROCODE, SNIP, DIN, итд.)
- Усвајање арматуре у армирано бетонским конструкцијама са аутоматским креирањем детаља армирања и екпортом у наш програм "ArmCad 2005".
- Осим основне 32-битне, доступна је и 64-битна верзија програма са још већим капацитетом прорачуна и обраде резултата, повећане брзине и оптимизованих перформанса. [4]



Слика 6.3.1 Примери радова у програму TOWER 7

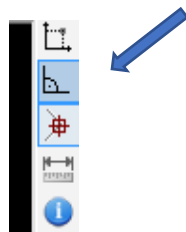
6.4 Приказ поступка рада у софтверу (Пример 2)

Приликом стартовања софтвера појављује се радна површина која је приказана на сл. 6.4.1



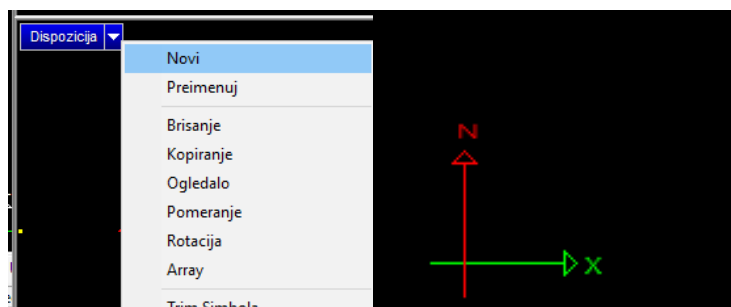
Слика 6.4.1 радна површина софтвера „tower“

Након појављивања радне површине прво се дефинише вертикална раван у којој у којој ћемо нацртати рамни носач. Опцију „OSNAP“ угасити на иконицу приказану на слици 6.4.2



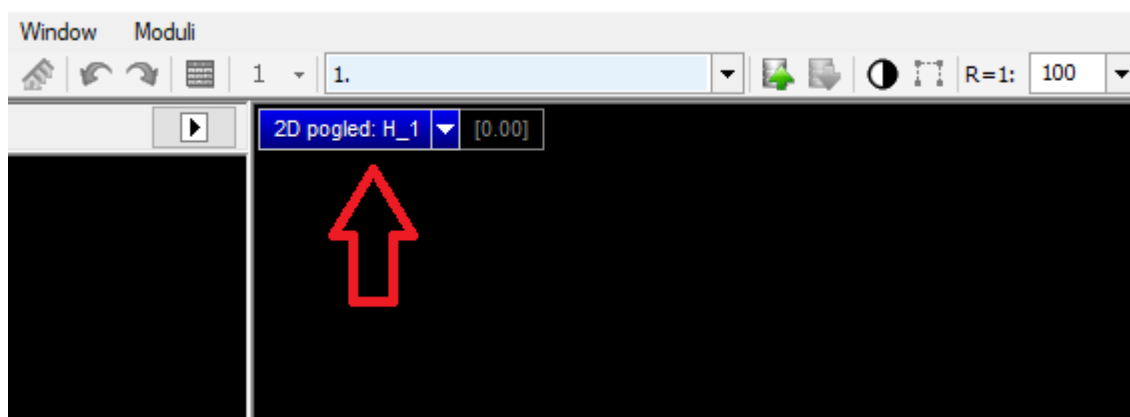
Слика 6.4.2 Опција „OSNAP“

Након тога, десним кликом на диспозицију отварамо падајући мени у којем кликом на „Нови“ генеришемо главну осу повлачењем једне хоризонталне линије слика 6.4.3.



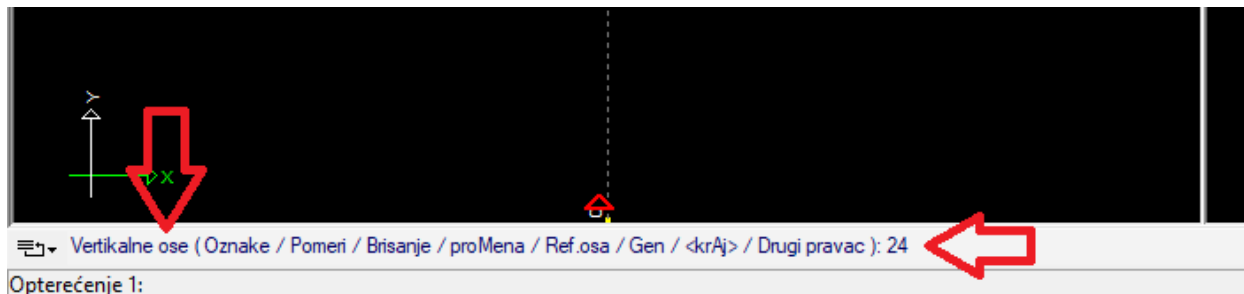
Слика 6.4.3 Мени диспозиције и главна оса

Кликом на 2D поглед прелази се на десни део приказа у коме се уносе помоћне осе за исцртавање. У десном делу екрана налази се иконица „ОСЕ“  чијим активирањем добијамо две осе приказано на слици 6.4.4.



Слика 6.4.4 Приказ 2D погледа

На дну екрана нам се налази опција где уносимо колико вертикалних оса желимо да унесемо (слика 6.4.5), у овом случају то је још једна вертикална оса на удаљености од 24m чији се приказ може видети на слици 6.4.6.



Слика 6.4.5 Задавање вертикалне осе



Слика 6.4.6 Приказ добијене осе

Након добијених вертикалних оса мења се правац како би задали и хоризонталне осе. То се постиже кликом на други правац и укуцавањем растојања од почетне осе, слика 6.4.7.



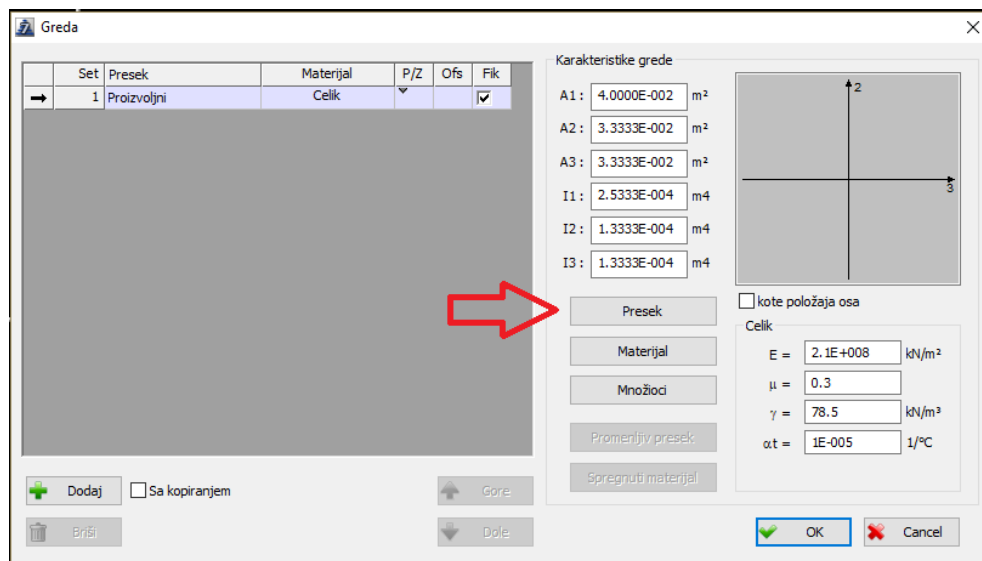
Слика 6.4.7. Задавање хоризонталне осе

Након генерисања оса потребно је дефинисати и носач. То се постиже кликом на иконицу греда која се налази у палети алата. Након тога потребно је дефинисати прву тачку греде и идемо на опцију „SET“, након чега се отвара прозор за дефинисање профила који ће се користити у задатку.

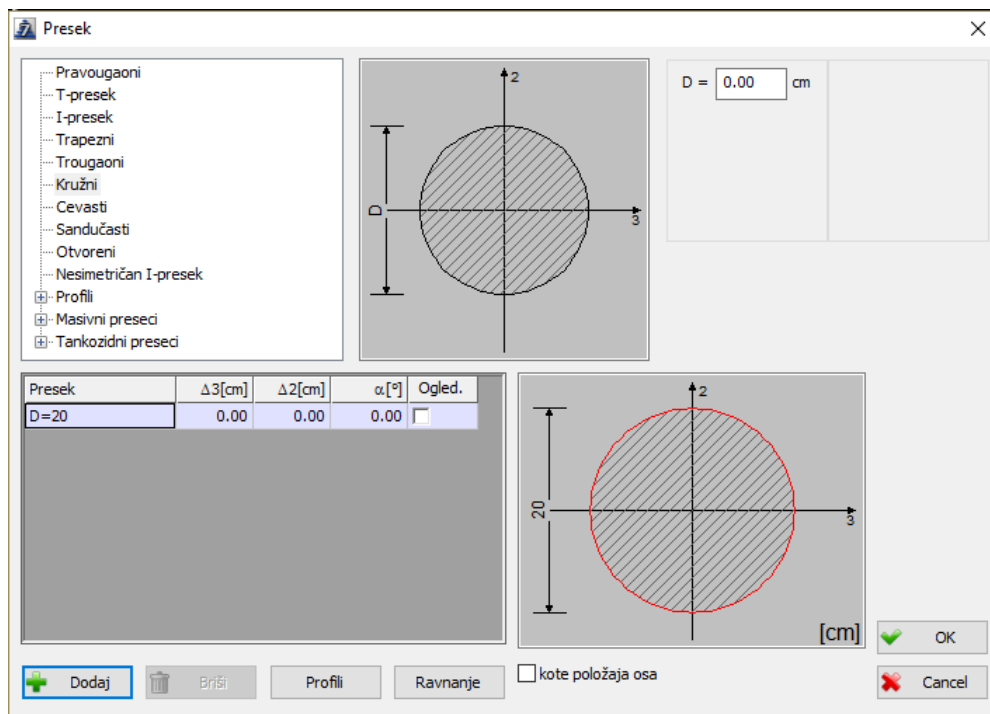


Слика 6.4.8. Опција „SET“

Материјал греда мењамо кликом на опцију Материјал, у овом случају је то челик, а кликом на опцију Пресек се може изабрати потребан профил који задовољава конструкцију слика 6.4.9., у случају овог задатка то је кружни пресек пречника 20cm. Слика 6.4.10.



Слика 6.4.9. Мени дефинисања материјала



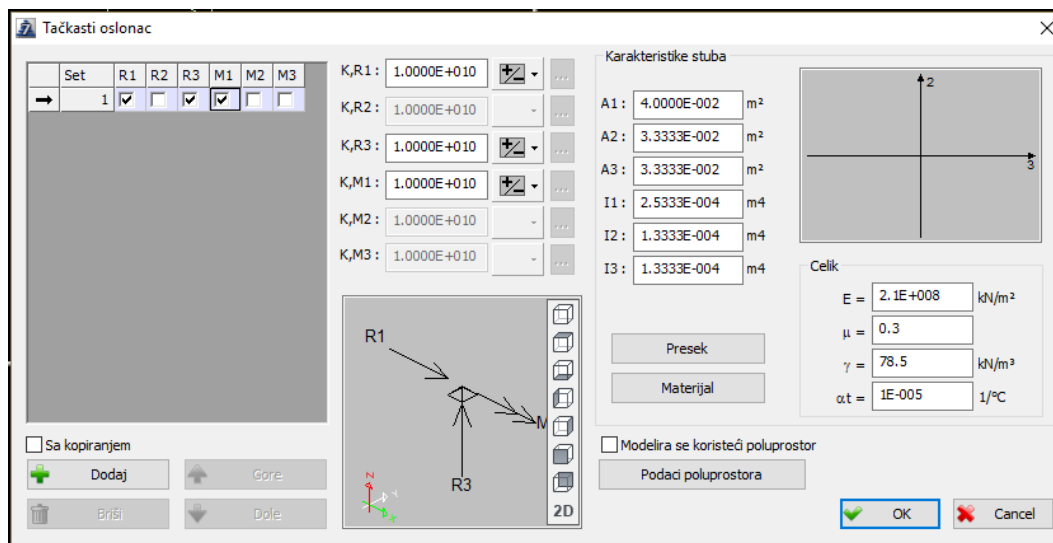
Слика 6.4.10. Дефинисање пресека профила

Након дефинисања профила крећемо да дефинишемо греде тако што идемо од пресека до пресека задатих помоћних линија. Што је приказано на слици 6.4.11.



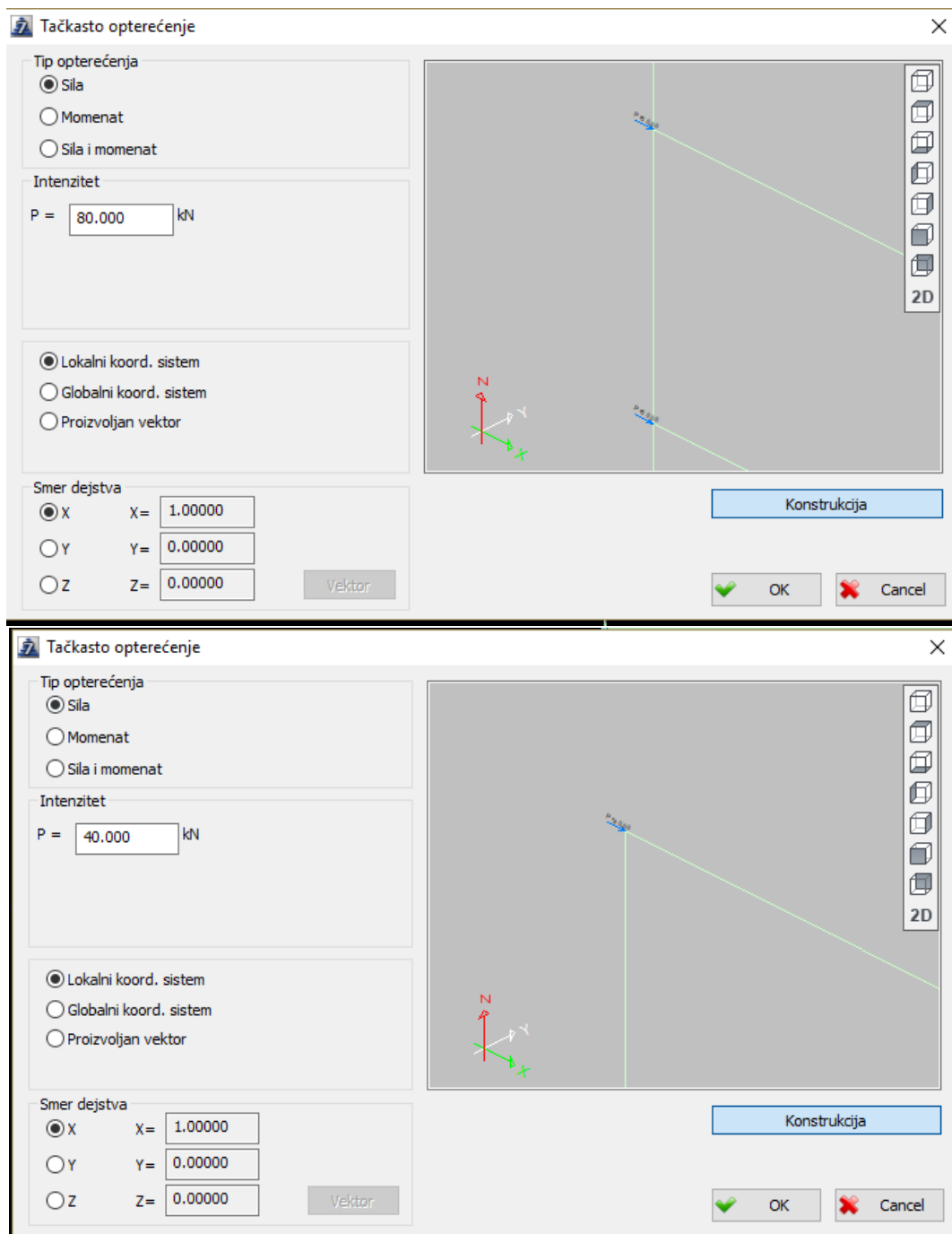
Слика 6.4.11. Исцртавање греда

Након успешног уношења греда потребно је задати и ослонаце кликом на иконицу „Тачкасти ослонац“. Отворимо прозор и кликом на „SET“ отварамо даље поље где се уносе леви и десни ослонац. Након уношења кликнемо на ОК, слика 6.4.12.



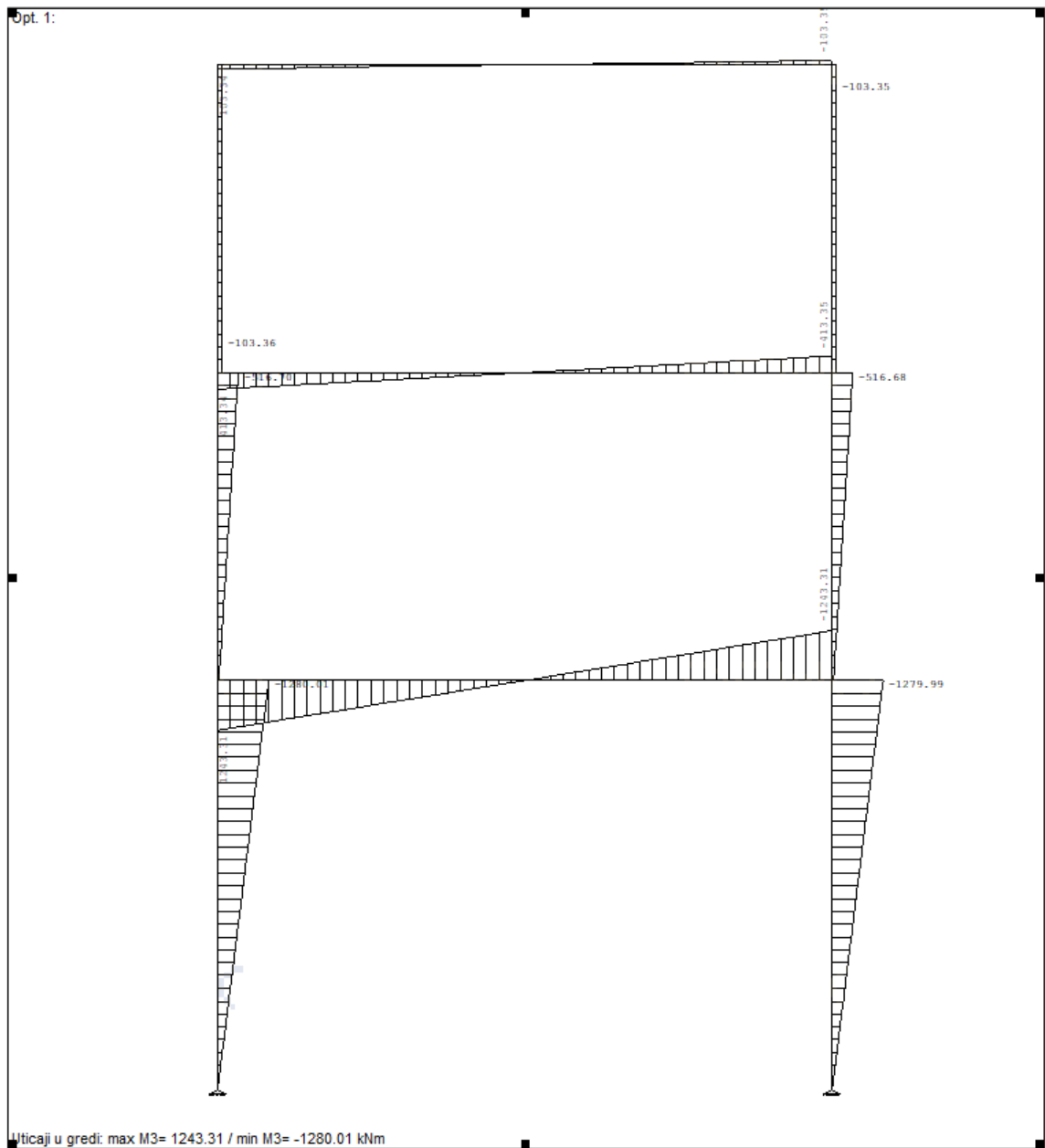
Слика 6.4.12. Задавање ослонаца

Након задавања ослонаца прелазимо на задавање оптерећења. У задатку су дефинисане три силе које делују у леву вертикалну греду. Две силе су од 80kN а једна је од 40 kN. Кликом на тачкасто оптерећење отвара се прозор у коме уносимо задате вредности. Потребно је и дефинисати смер дејства сила према задатом координатном систему. Слика 6.4.13.



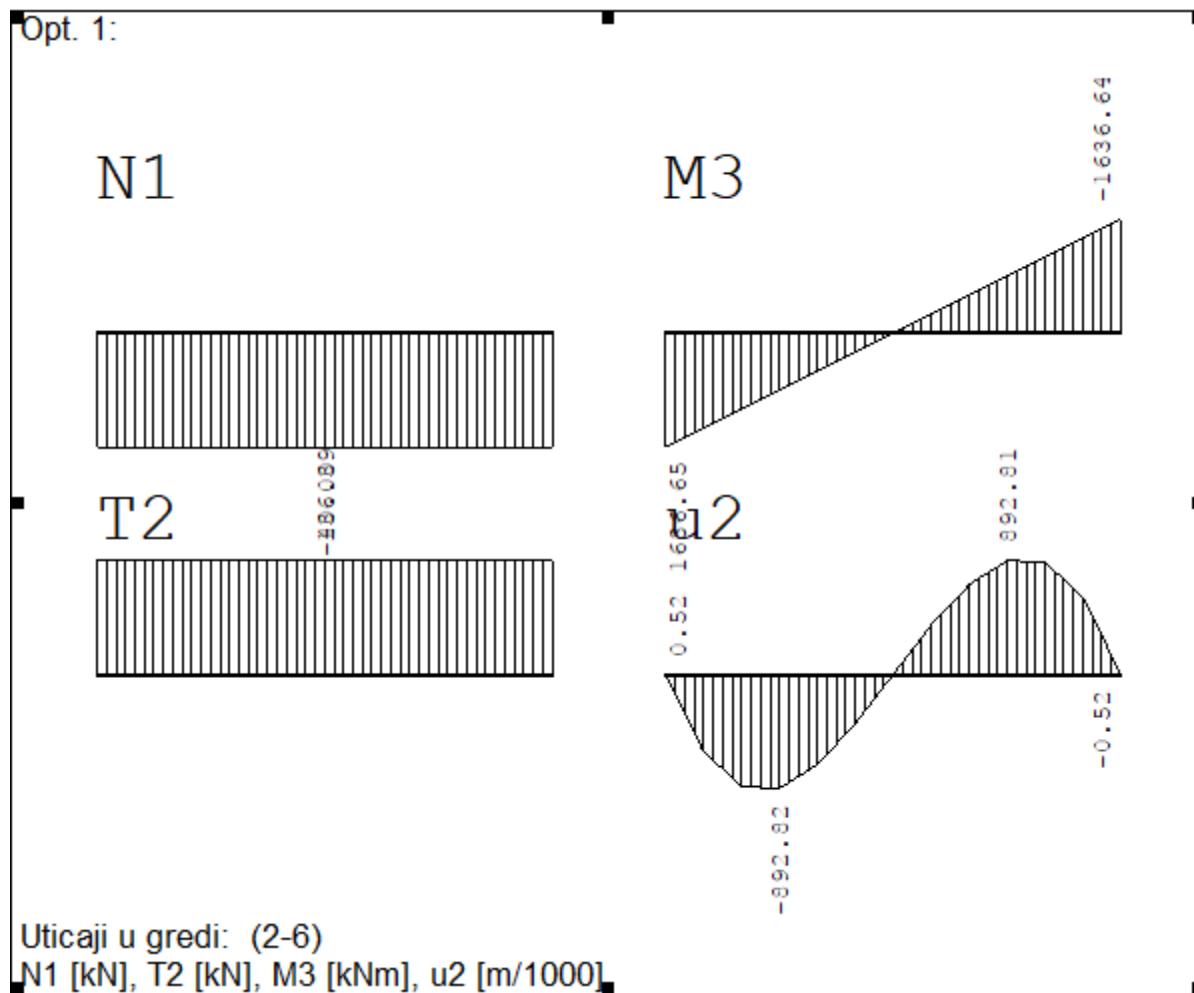
Слика 6.4.13. задавање оптерећења

Завршили смо са дефинисањем рама сада покрећемо у падајућем менију „Модули“, па на опцију „формирање мреже“, када је активирамо идемо на опцију „Прорачун“, где ће се порачун конструкције обрадити и после читавамо утицаје рама. (Слика 6.4.14.)



Слика 6.4.14

Кликом на иконицу „Утицаји у гредама“ , а затим десним кликом на било коју од греда можемо учитати графике за сваку греду засебно, (слика 6.4.15).



Слика 6.4.15

Кликом на падајући мени „Вредности“ а након тога на опцију „текстуални извештај“ укључујемо табелу са резултатима. (слика 6.4.16, 6.4.17)

Presečne sile u gredama - Ekstremne vrednosti - Opterećenje: 1					
Oznaka	LC	x [m]	N1 [kN]	T2 [kN]	M3 [kNm]
(2 - 1)	1	16.000	+213.33	-100.00	0.000
(4 - 2)	1	12.000	+76.946	-60.000	36.639
(5 - 4)	1	12.000	+21.390	-19.999	-16.688
(6 - 3)	1	16.000	-213.33	-99.999	0.000
(7 - 6)	1	12.000	-76.946	-60.000	36.650
(2 - 6)	1	24.000	-39.999	136.39	-1636.6
(4 - 7)	1	24.000	-39.999	55.556	-666.68
(8 - 7)	1	12.000	-21.390	-20.001	-16.674
(5 - 8)	1	24.000	-20.001	21.390	-256.68
(2 - 6)	1	24.000	-39.999	+136.39	-1636.6
(4 - 7)	1	24.000	-39.999	+55.556	-666.68
(5 - 8)	1	24.000	-20.001	+21.390	-256.68
(2 - 1)	1	16.000	213.33	-100.00	0.000
(6 - 3)	1	16.000	-213.33	-99.999	0.000
(7 - 6)	1	12.000	-76.946	-60.000	36.650
(4 - 2)	1	12.000	76.946	-60.000	36.639
(8 - 7)	1	12.000	-21.390	-20.001	-16.674
(5 - 4)	1	12.000	21.390	-19.999	-16.688
(2 - 6)	1	0.000	-39.999	136.39	+1636.6
(4 - 7)	1	0.000	-39.999	55.556	+666.67
(5 - 8)	1	0.000	-20.001	21.390	+256.68
(7 - 6)	1	12.000	-76.946	-60.000	+36.650
(4 - 2)	1	12.000	76.946	-60.000	+36.639
(2 - 6)	1	24.000	-39.999	136.39	-1636.6
(2 - 1)	1	0.000	213.33	-100.00	-1600.0
(6 - 3)	1	0.000	-213.33	-99.999	-1600.0
(4 - 2)	1	0.000	76.946	-60.000	-683.36
(7 - 6)	1	0.000	-76.946	-60.000	-683.35
(4 - 7)	1	24.000	-39.999	55.556	-666.68
(5 - 8)	1	24.000	-20.001	21.390	-256.68
(5 - 4)	1	0.000	21.390	-19.999	-256.68

Слика 6.4.16.

Deformacija greda L.K.S. - Ekstremne vrednosti - Opterećenje: 1			
Oznaka	LC	x [m]	u2 [mm]
(5 - 4)	1	0.000	+20027
(8 - 7)	1	0.000	+20027
(4 - 2)	1	0.000	+18508
(7 - 6)	1	0.000	+18508
(2 - 1)	1	0.000	+14631
(6 - 3)	1	0.000	+14631
(2 - 6)	1	18.000	+892.81
(4 - 7)	1	18.000	+363.47
(5 - 8)	1	18.000	+139.73
(5 - 8)	1	0.000	+0.696
(2 - 6)	1	6.000	-892.82
(4 - 7)	1	6.000	-363.45
(5 - 8)	1	6.000	-139.70
(5 - 8)	1	24.000	-0.696
(4 - 7)	1	24.000	-0.657
(2 - 6)	1	24.000	-0.517

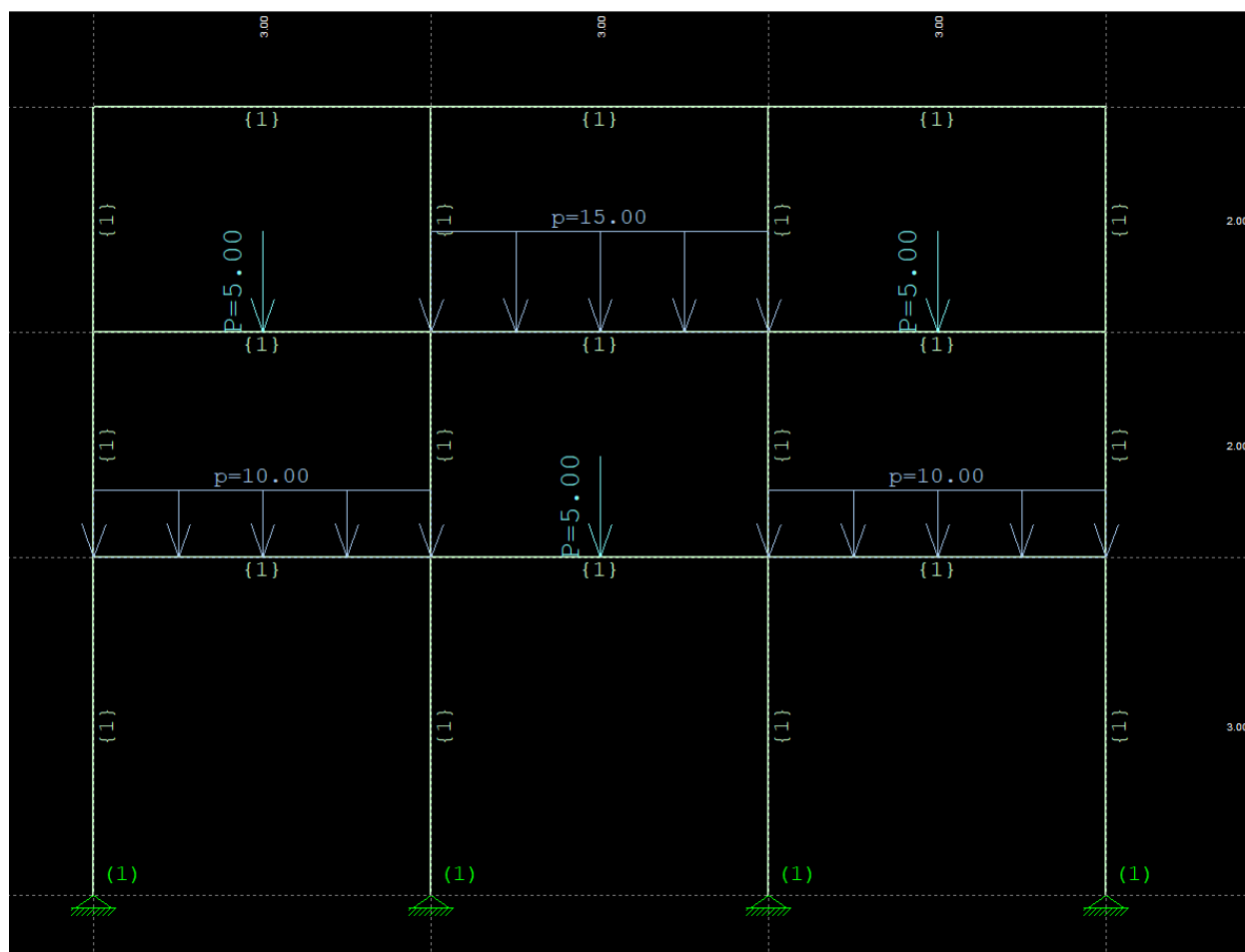
Deformacija greda GLO - Ekstremne vrednosti - Opterećenje: 1			
Oznaka	LC	x [m]	Xp [mm]
(5 - 4)	1	0.000	+20027
(8 - 7)	1	0.000	+20027
(4 - 2)	1	0.000	+18508
(7 - 6)	1	0.000	+18508
(2 - 1)	1	0.000	+14631
(6 - 3)	1	0.000	+14631

Слика 6.4.17.

6.5 Пример 3

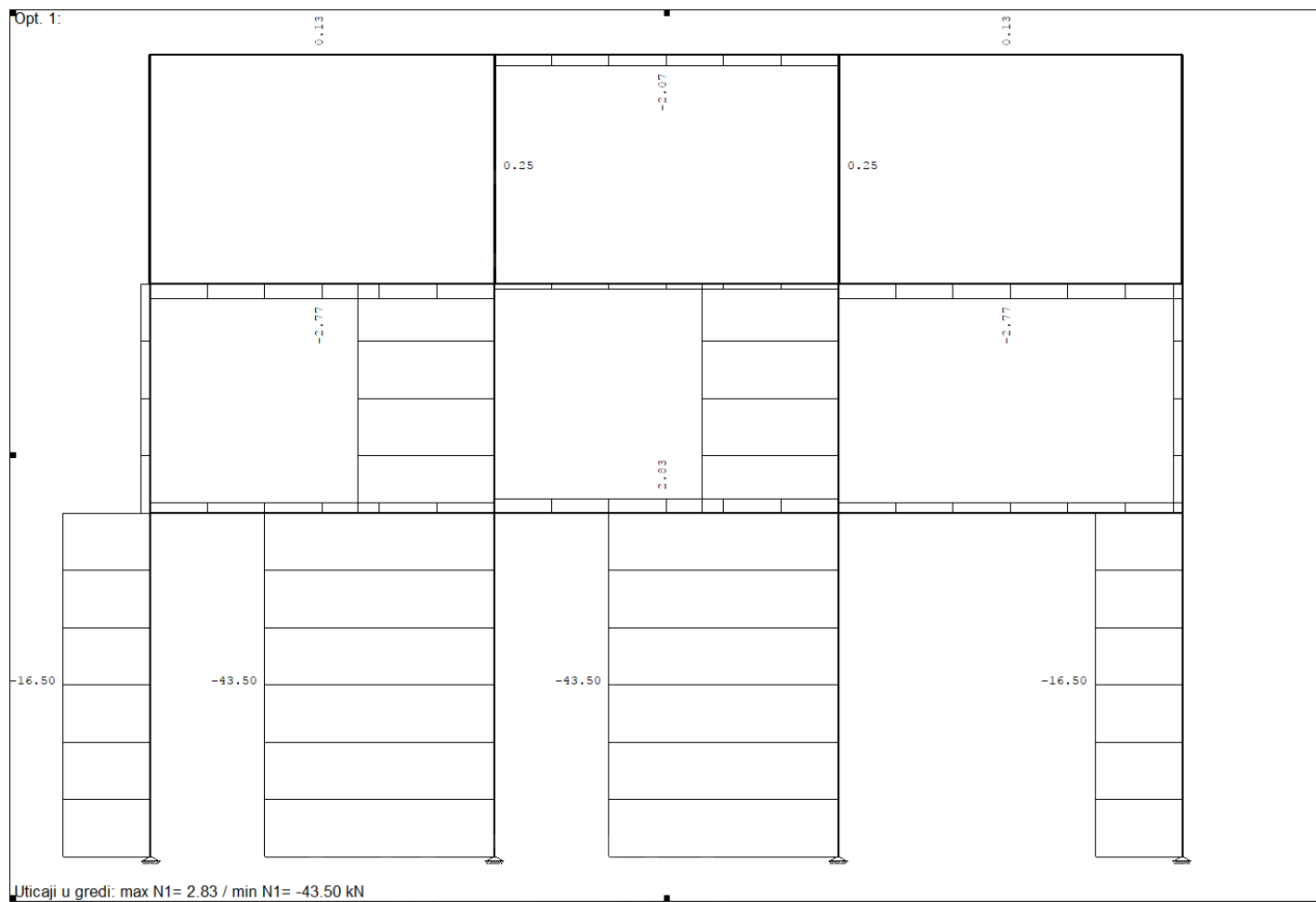
Табела 6.5.1 – улазни подаци

F_1	$5kN$
F_2	$5kN$
F_3	$5kN$
q_1	$10kN$
q_2	$15kN$
q_3	$10kN$
l_1	$9m$
l_2	$7m$



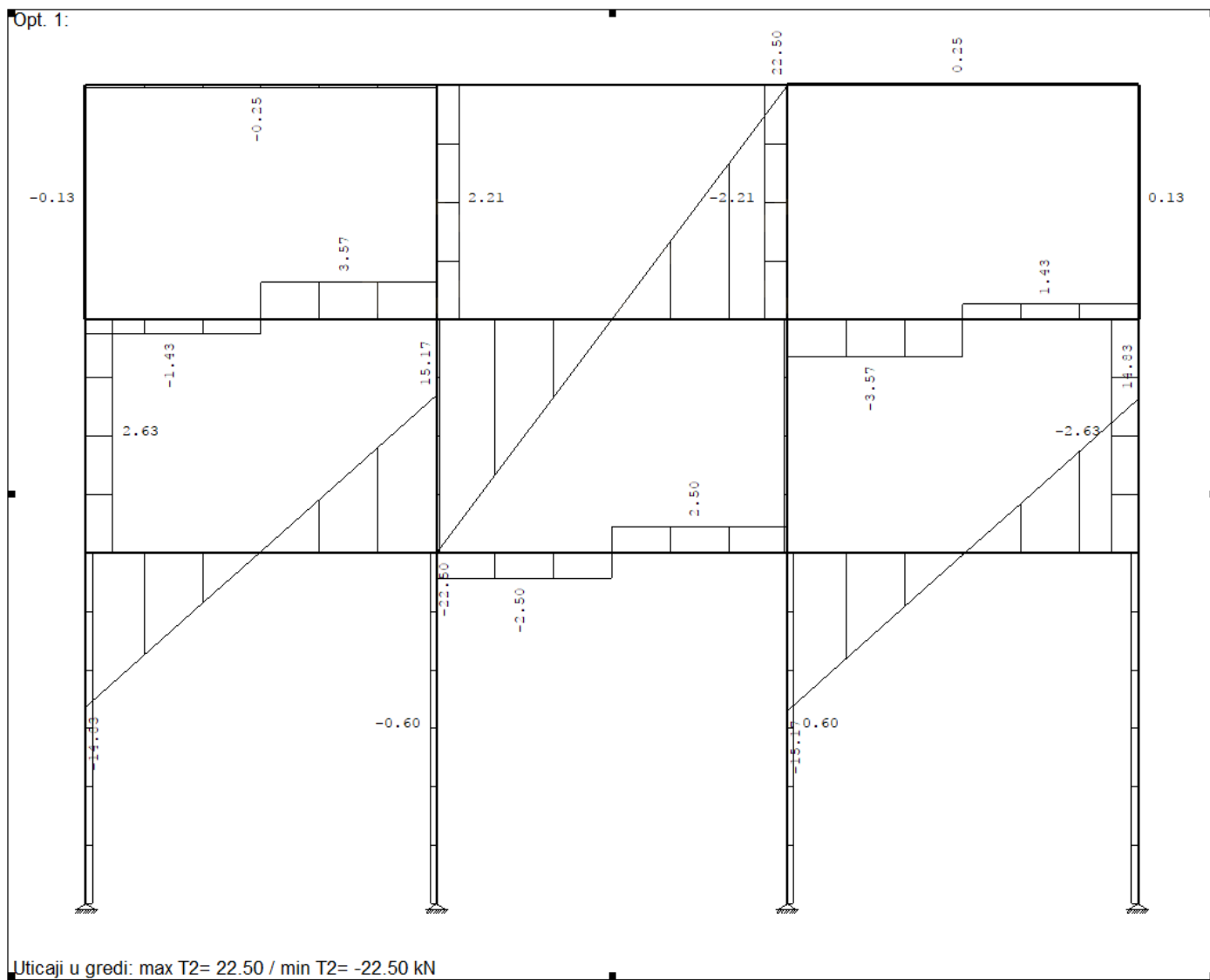
Слика 6.5.1

На слици 6.5.1 је приказан распоред задатих оптерећења и сила.



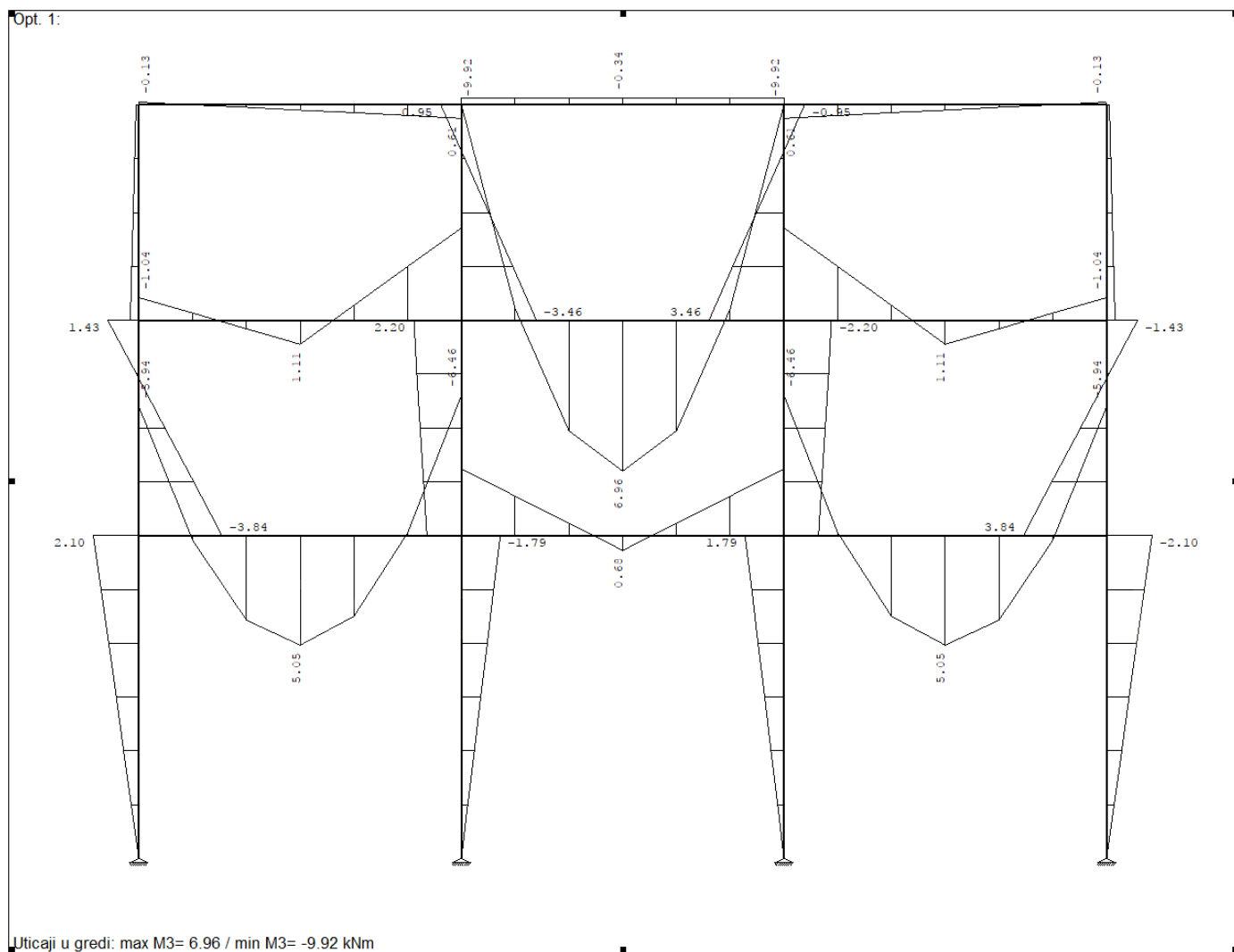
Слика 6.5.2.

На слици 6.5.2 су приказани дијаграми нормалних сила датог оквира.



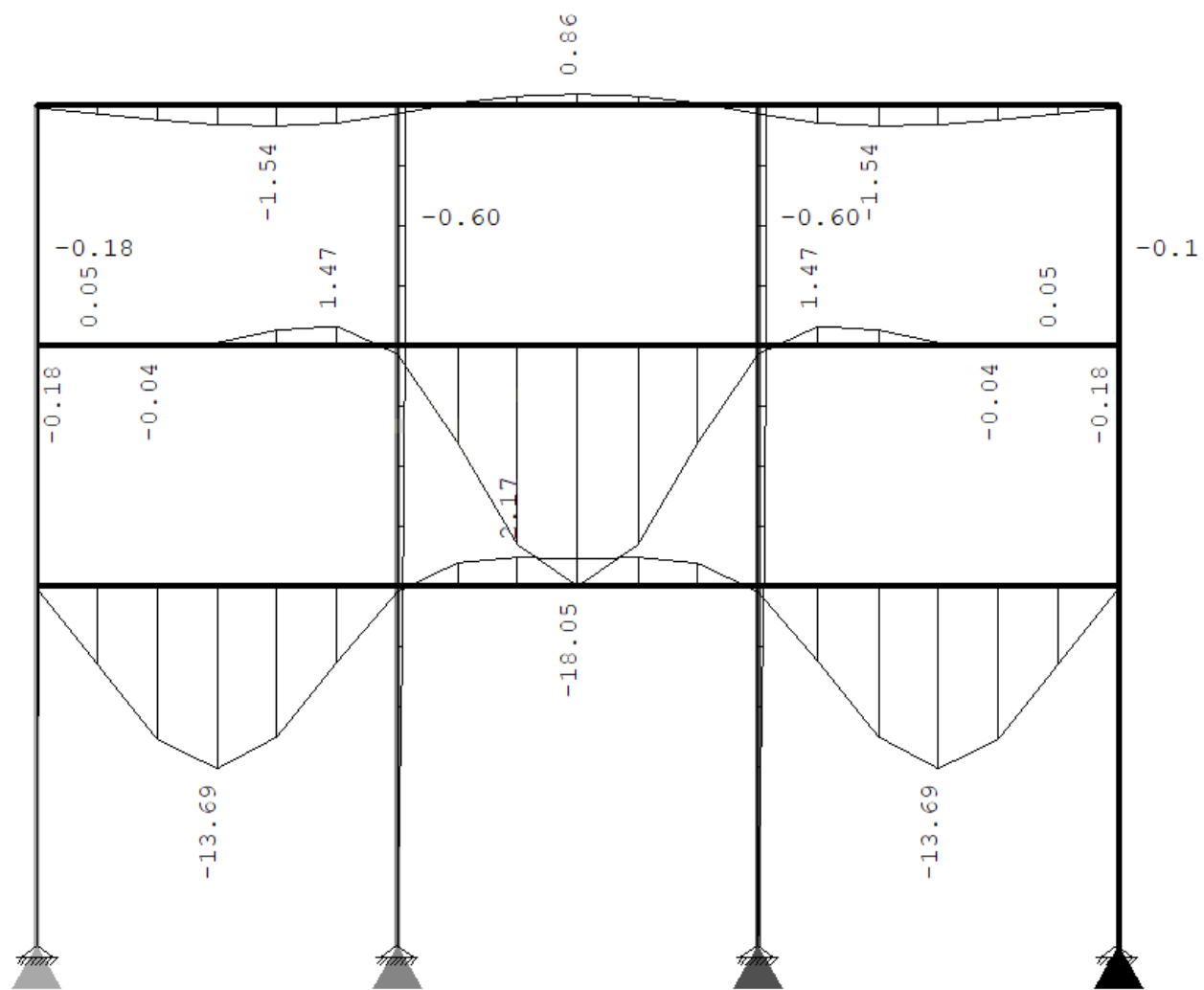
Слика 6.5.3

На слици 6.5.3 приказани су дијаграми трансверзалних сила датог оквира.



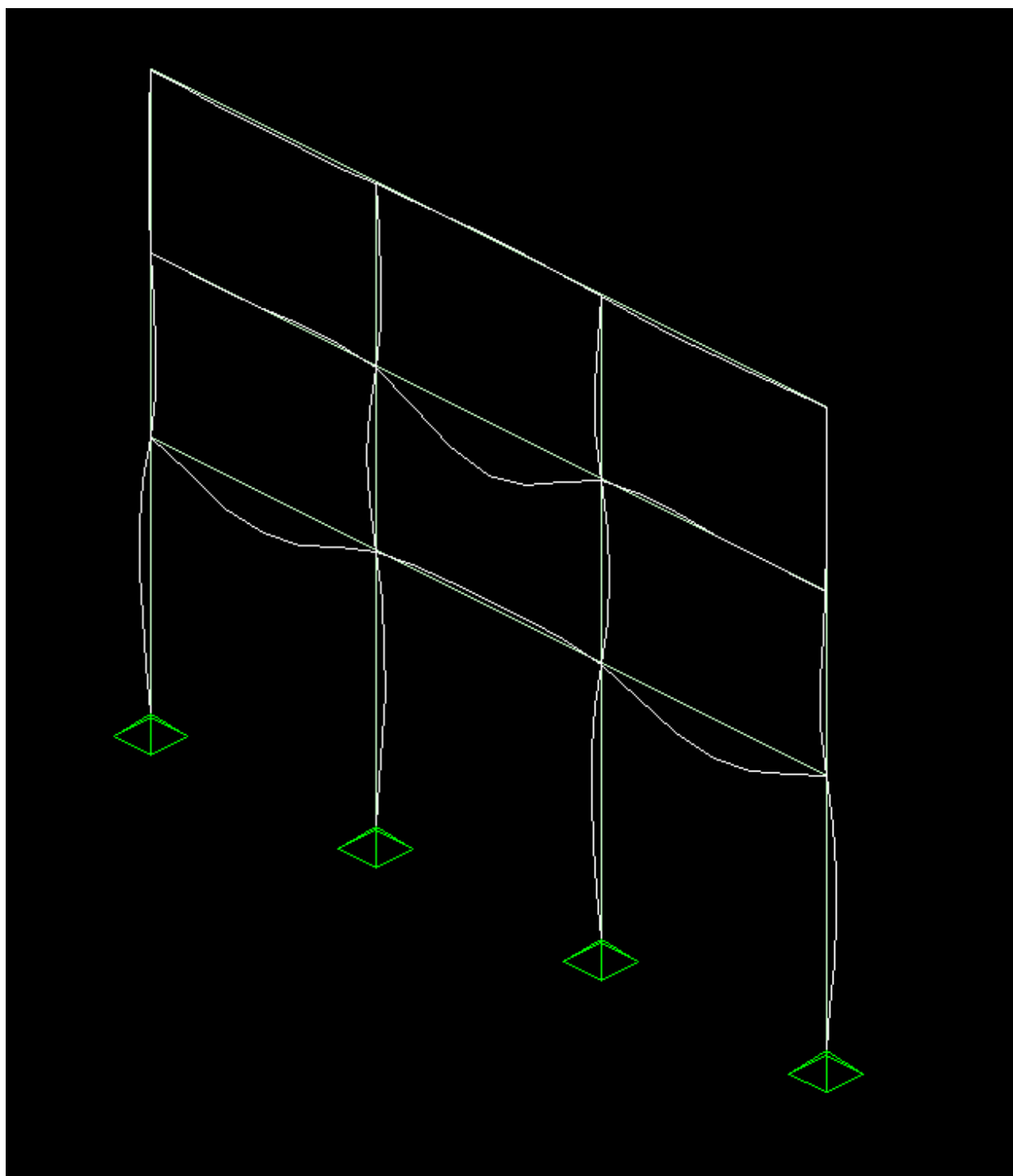
Слика 6.5.4

На слици 6.5.4 приказани су момент дијаграми за дати оквир.



Слика 6.5.5

На слици 6.5.5 приказан је релативни угиб датог оквира.



Слика 6.5.6

На слици 6.5.6 приказан је деформисани модел испитиваног оквира.

7. ЗАКЉУЧАК

Примери рамних конструкција који су обрађени у раду, представљају полазну тачку у решавању сложенијих проблема. Оквири или рамови су носиви склопови састављени од више греда и стубова, обично међусобно круто спојених, често су непокретно ослоњени. Оквирне конструкције састављене од више оквира повезаних у целину, данас најчешћу примену имају у изградњи зграда. Могу бити раванске или просторне, једнораспонске или вишераспонске, а по висини приземне, једноспратне или вишеспратне. Приземне једнораспонске оквирне конструкције се најчешће примењују у изградњи спортских дворана. Вишеспратне оквирне конструкције су чест носиви склоп високих зграда.

Обрада података примера је изведена аналитички и нумерички помоћу софтвера „TOWER“. „Tower“ је програм за свеобухватну анализу утицаја у раванским и просторним конструкцијама. Обезбеђујући снажне алате који су аутоматизовани, интегрисани, свеобухватни и интуитивни, овај програм омогућава инжењерима повећање брзине и квалитета пројектовања. Radimpex Software је компанија која је основана 1989. године, и од тада се искључиво бави развојем софтвера у области грађевинарства. Оријентација фирме је поред прављења нових програма и усавршавање постојећих како би се стално пратили нови захтеви у области компјутерских програма. Бавећи се низ година овим проблемом, наши програми за пројектовање конструкција, постали су међу најбољима у свету.

Може се закључити да је много лакша обрада помоћу софтвера, јер нуди уштеду времена које је потребно за рачунање сваког елемента неког носача. Такође је и бржа обрада података што је и предстаљено у овом раду. Данас се све више користе различити софтвери који могу обрадити различите врсте носача, због брзине решавања проблема.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Ратислав Ђорђевић, Теорија конструкција, ФТН Издаваштво, Нови Сад 2004,
- [2] М.Ђурић, О. Ђурић-Перић, Статика конструкција, Грађевинска књига а.д. Београд 2007
- [3] С.П.Тимошенко, Д.Х.Јанг, Теорија конструкција, Грађевинска књига,Београд 1968,
- [4] О Порграму Tower 7 доступна на интернет адреси, (07.10.2017.)
<http://www.radimpex.rs/about.php?lang=sr&id=1>