

**Факултет инжењерских наука
Универзитет у Крагујевцу**

Љубица Н. Кнежевић

**Нумеричко моделирање
безубе доње вилице са тоталном протезом
коришћењем мултиблок методе
завршни рад**

Крагујевац, 2014.

**Факултет инжењерских наука
Универзитет у Крагујевцу**



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Примењена механика и аутоматско управљање

Предмет: Коначни елементи 1

Број индекса: 192/2011

Љубица Н. Кнежевић

**Нумеричко моделирање
безубе доње вилице са тоталном протезом
коришћењем мултиблок методе
завршни рад**

Комисија за преглед и одбрану:

1. **Др Мирослав М. Живковић - ментор**
2. _____
3. _____

Датум одбране:_____

Оцена:_____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да генерише модел коначних елемената безубе доње вилице (мандибуле), тоталне протезе и резилијентног слоја коришћењем метода и софтвера развијених за потребе истраживања у Лабораторији за инжењерски софтвер. Дебљину резилијентног слоја је потребно варирати за три карактеристична случаја: нерезилијентна, умерено резилијентна и резилијентна слузокожа. За генерисане варијанте модела потребно је извршити прорачуне који симулирају случајеве здравог (нормалног) жвакања. Добијене нумеричке резултате приказати табеларно и дати краћу дискусију.

Препоручена литература:

- [1] C. L. Lin, J. C. Wang, S. H. Chang, S. T. Chen, Evaluation of Stress Induced by Implant Type, Number of Splinted Teeth, and Variations in Periodontal Support in Tooth-Implant-Supported Fixed Partial Dentures: A Non-Linear Finite Element Analysis, Journal of Periodontology 81 (1): 121-130, 2010.
- [2] G. Menicucci, M. Lorenzetti, P. Pera, G. Preti, Mandibular Implant-Retained Overdenture: Finite Element Analysis of Two Anchorage Systems, The International Journal of Oral & Maxillofacial Implants 13 (3): 369-376, 1998.
- [3] L. O. H. Mariano, E. A. Sartori, J. R. Broilo, R. S. Shinkai, L. Corso, R. J. Marczak, Stresses in implant-supported overdentures with bone resorption: A 3-D finite element analysis, Revista Odontologia (Journal of Dental Science) 27 (1): 41-46, 2012.
- [4] Milan Blagojević, Upotreba optičkih mernih sistema u modeliranju i simulaciji, završni rad, Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski fakultet u Kragujevcu, Kragujevac, 2009
- [5] Moore K., Clinically Oriented Anatomy, Lippincott Williams & Wilkins, 2005.

Крагујевац,

ментор

11. 06. 2014. године

Проф. др Мирослав Живковић, дипл. инг.

Резиме: У оквиру овог завршног рада генерисан је модел коначних елемената безубе доње вилице (мандибуле), резилијентног слоја и тоталне протезе коришћењем више софтвера. С обзиром на различити степен резилијентности слузокоже у току истраживања коришћене су три различите вредности релативне резилијенце (нерезилијентна, умерено резилијентна и резилијентна слузокожа) које се у односу на дебљину слузокоже дефинишу као 1, 3, и 5 mm дебљине. Ове вредности резилијенце су детерминисане варијацијама модула еластичности. Анализиран је утицај дебљине резилијентног слоја задавањем оптерећења које симулира силе услед жвакања на доњем десном и левом централном секутићу, као и доњем десном и левом првом кутњаку. На основу нумеричких резултата закључујемо да са повећањем резилијенце слузокоже опадају вредности максималних напона у тоталној протези и потпорним ткивима (резилијентном слоју и мандибули).

Кључне речи:

- мандибула,
- резилијентни слој,
- тотална протеза,
- метода коначних елемената,
- STL2MESH

Summary: In this paper, finite element model of toothless lower jaw (mandible) is generated, as well as the model of support layer and complete dentures using various software. Having in mind different degrees of resilience in the mucous membranes during the research three different values of the relative resilience were used (nonresilient, moderately resilient and resilient mucous membranes), which are in the relation to the thickness of the mucous membrane defined as 1, 3, and 5 mm thick. These values are determined by variations of resilience modulus of elasticity. The influence of resilient mucous membranes layer thickness is analysed by assigning loads to simulate the force due to chewing on the lower right and left central incisor and lower right and left first molar. Based on the numerical results, we conclude that with the increase of the resilience in mucous membranes the value of the maximum stress in the complete denture and the supporting tissues (resilient layer and mandible) decreases.

Keywords:

- mandibule,
- resilient layer,
- total denture fixture,
- finite element method,
- STL2MESH

Садржај

1. Увод	1
2. Дентална номенклатура	3
2.1 Класификација	3
2.2 Предњи и бочни зуби	4
2.3 Обележавање зуба	4
2.4 Дентална формула	6
2.5 Површине (стране) зуба	6
2.6 Ивице (угаоне линије) и темена зуба	7
2.7 Смерови и правци при опису зуба	7
2.8 Топографска подела зуба	8
2.9 Доња вилица	9
2.10 Појам и врсте мастикације	10
2.11 Појам и врсте загрижајне силе	11
3. Метода коначних елемената	12
3.1 Осмочворни изопараметарски 3D елемент	12
3.1.1 Основни 3D елемент	14
3.1.2 Дегенерисан 3D коначни елемент	21
3.1.3 Побољшани 3D елементи	22
3.2. Софтвер STL2MESH	25
3.2.1 Мултиблок метода	26
3.2.2 Генерисање блокова	26
3.2.3 Најбитнији алгоритми софтвера STL2MESH	28
4. Генерисање модела	32
4.1 Израда модела и 3D дигитализација	32
4.2 Трансформација полигоналних модела у жељени координатни систем	33
4.3 Конструисање блокова	35
4.4 Моделирање резилијентног слоја	40
4.6. Модел склопа састављеног од мандибуле, резилијентног слоја и тоталне протезе	43
4.7. Задавање механичких карактеристика	43
4.8 Задавање оптерећења	44
4.7.2 Задавање ограничења	44

5. Резултати	46
6. Закључак.....	48
Референце.....	49

1. Увод

Успех протетског рада се мери величином остварене жватне силе [1]. Познавање ових сила је изузетно значајно код носилаца тоталне протезе с обзиром на нефизиолошки пренос притиска жвакања код ове врсте пацијената и негативне ефекте које он производи. Познавање начина преношења оптерећења на кости орофацијалног система (ОФС) као и разумевање дистрибуције напона и деформације је од есенцијалног значаја како би се могао претпоставити одговор коштаних структура и адаптација на дуговременско оклузално оптерећење настало природним зубима, различитим зубним надокнадама или имплантатима.

Дистрибуција оклузалног оптерећења кроз ОФС зависи од много фактора који мање или више утичу на расподелу напона и деформација, а последичне реакције су битне за правилно функционисање свих структура ОФС [2]. Посебно је важно да се савременом зубном надокнадом осим рехабилитације, функције и/или естетике ископирају и остваре динамички биомеханички услови који природно владају у ОФС.

Неке претходне *in vitro* студије су указале на дистрибуцију напона код различитих ретензивних система на имплантатима, али ефекат дебљине и резилијентце слузокоже на дистрибуцију напона није довољно познат [3-5]. Осим тога, ако проблем разумевања дистрибуције напона на потпорним ткивима буде пажљиво изучаван, то би могло имати јако велику корист за популацију која је приморана да носи протезе.

Тема овог завршног рада је део истраживања које се обавља за потребе израде докторске тезе стоматолога Јелене Кулић са Стоматолошког факултета Универзитета у Српском Сарајеву, Република Српска. Модел који се креира током израде овог рада представља модел за прву експерименталну групу из скупа очекиваних резултата датих у табели 1.1. У овом истраживању ће се користити метода коначних елемената која ће приближно репрезентовати *in vivo* геометрију са физичким карактеристикама реалног модела.

Циљ ове студије је да се утврди дистрибуција мастикаторног напона на потпорна ткива и деформације околне кости изазване функционалним оптерећењем код слузокожно ношених зубних надокнада (доњих конвенционалних тоталних протеза и доњих слузокожно ношених тоталних протеза на имплантатима) у односу на дебљину и резилијентцу слузокоже користећи методу коначних елемената. С обзиром на различити степен резилијентности слузокоже у свакој групи слузокожно и мешовито ношених надокнада у току истраживања користиће се три различите вредности релативне резилијентце (нерезилијентна, умерено резилијентна и резилијентна слузокожа) које се у односу на дебљину слузокоже дефинишу као 1, 3, и 5 mm дебљине. Ове вредности резилијентце ће бити детерминисане варијацијама модула еластичности.

Будући да ова тематика није блиска инжењерима, у другом поглављу дати су основни појмови денталне номенклатуре. У трећем поглављу дате су теоријске основе осмочворног 3D коначног елемента који је коришћен за моделирање, као и опис основних алгоритама који су развијени и тестирани током израде овог рада. У четвртном поглављу приказан је поступак моделирања и дискутовани су примењени гранични услови. У петом поглављу дати су резултати прорачуна дистрибуције мастикаторног напона на потпорна ткива код слузокожно подупртих зубних надокнада и дата је дискусија резултата. У шестом поглављу изнети су основни закључци до којих се дошло током израде овог завршног рада.

Табела 1.1 – Описи експерименталних група

Експериментална група	Опис
I	Експериментални модел безубе доње вилице са тоталном протезом
II	Експериментални модел безубе доње вилице са тоталном протезом на два несплнтирана имплантата у антериорној регији са кугличастим атечменима
III	Експериментални модел крезубе доње вилице са супраденталном протезом са интрадикуларним атечменима
IV	Експериментални модел крезубе вилице са бочним мостом на природним зубима као носачима
V	Експериментални модел крезубе вилице са бочним мостом на имплантатима као носачима
VI	Експериментални модел крезубе вилице са бочним мостом који има природан зуб и имплантат као носаче

2. Дентална номенклатура

Стандардизована дентална номенклатура је неопходна ради лакшег означавања морфолошких елемената на зубима и једноставнијег споразумевања.

Све компоненте стоматогнатог система се посматрају, анализирају и описују у три основне оријентационе равни: сагиталној, фронталној и хоризонталној (слика 2.1) [6]. Постоји и тзв. интеркондиларна осовина која пролази кроз центре ротације десног и левог виличног зглоба, а која се користи за описивање кретања доње вилице.



Слика 2.1 - Основне оријентационе равни:
(а) сагитална раван, (б) фронтална раван, (ц) хоризонтална раван

2.1 Класификација

Зуби се могу поделити по [7]:

- периоду ницања,
- морфолошком облику и
- локализацији у денталном луку.

Човек има два периода ницања зуба (дифиодонција), па разликујемо примарну (млечну) и сталну дентицију. Млечна дентиција се састоји од 20 зуба (lat. dentes decidui), чије ницање почиње у шестом месецу живота. Веома ретко, беба одмах по рођењу има изникле зубе, који се означавају као пренатални. Стална дентиција се обично састоји од 32 зуба (lat. dentes permanentes s. adulti), а почињу да ничу од шесте године живота. Постоји и период тзв. мешовите дентиције (када су присутни и стални и млечни зуби у устима) и траје од 6 до 12 године живота.

Према морфолошким карактеристикама зуби се деле на класе:

- секутиће (lat. dentes incisivi),
- очњаке (lat. dentes canini),
- преткутњаке или премоларе (lat. dentes praemolares) и
- кутњаке или моларе (lat. dentes molares).

У примарној дентицији не постоје преткутњаци.

Зуби образују тзв. денталне лукове. Горњи дентални лук (lat. arcus dentalis superior) има облик полуелипсе, а доњи (lat. arcus dentalis inferior) облик параболе. Они заједно чине зубик (lat. dentura).

Према месту у зубном луку зуби се деле на:

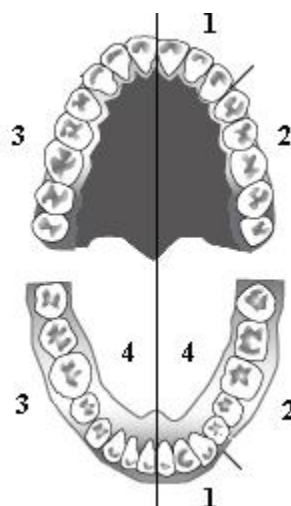
- горње и доње зубе (lat. dentes superiores inferiores);
- десне и леве зубе (lat. dentes lateri dextri et sinistri);
- предње и бочне зубе (lat. dentes anteriores, s. intercanini, s. frontales et dentes posteriores, s. postcanini, s. transcanini).

Предњи зуби су секутићи (секу храну), и очњаци (кидају храну). Бочни зуби су преткућњаци (премолари) или мали кутњаци (гњече и мељу храну) и кутњаци (молари) (имају исту функцију као и преткућњаци).

2.2 Предњи и бочни зуби

Предњи зуби (lat. dentes anteriores) обухватају класу секутића и очњака и налазе се у предњем делу уста (слика 2.2). Користе се за сечење и кидање хране, а значајни су и са становишта фонетике, естетике и др.

Бочни зуби (lat. dentes posteriores) обухватају класу молара у млечној дентицији и класу премолара и молара у сталној дентицији. Користе се за гњечење и млевење хране, а имају и друге значајне функције.



Слика 2.2 – Положај зуба:

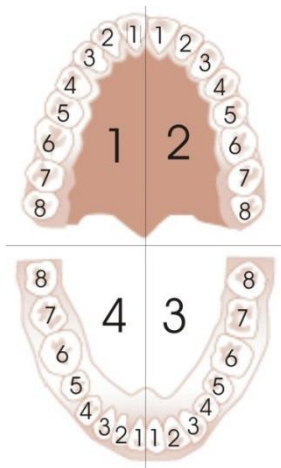
1-предњи зуби, 2- бочни зуби, 3- вестибуларна страна, 4- орална страна

2.3 Обележавање зуба

Нумерички системи за обележавање зуба служе као скраћенице. Уместо да се у свакодневном говору, комуникацији и вођењу евиденције и статистике користи пун назив зуба, много је једноставније и практичније да се он означи словом, бројем или неким другим симболом [8].

Данас се у свету најчешће користи бинарни бројчани систем (engl. FDY-system), установљен у Букурешту 1970. године на заседању Светске стоматолошке федерације. Он је познат и као ISO-3950 означавање и подржава га Светска здравствена организација (слика 2.3).

Зубни лукови су подељени на четири квадранта који су обележени бројевима 1-4 за сталну дентицију (при чему 1 означава горњи десни, 2 горњи леви, 3 доњи леви и 4 доњи десни квадрант). Четири квадранта млечне дентиције су обележена бројевима 5-8 (слика 2.4). Други број у систему означава положај зуба у квадранту, идући од медијалне линије. Тако се, на пример, горњи десни очњак означава са 13 (чита се један-три), а доњи леви латерални секутић са 32 (чита се три-два) итд.



1	11	горњи десни централни секутић	2	21	горњи леви централни секутић
	12	горњи десни латерални секутић		22	горњи леви латерални секутић
	13	горњи десни очњак		23	горњи леви очњак
	14	горњи десни први преткутњак		24	горњи леви први преткутњак
	15	горњи десни други преткутњак		25	горњи леви други преткутњак
	16	горњи десни први кутњак		26	горњи леви први кутњак
	17	горњи десни други кутњак		27	горњи леви други кутњак
	18	горњи десни трећи кутњак (умњак)		28	горњи леви трећи кутњак (умњак)
4	41	доњи десни централни секутић	3	31	доњи леви централни секутић
	42	доњи десни латерални секутић		32	доњи леви латерални секутић
	43	доњи десни очњак		33	доњи леви очњак
	44	доњи десни први преткутњак		34	доњи леви први преткутњак
	45	доњи десни други преткутњак		35	доњи леви други преткутњак
	46	доњи десни први кутњак		36	доњи леви први кутњак
	47	доњи десни други кутњак		37	доњи леви други кутњак
	48	доњи десни трећи кутњак (умњак)		38	доњи леви трећи кутњак (умњак)

Слика 2.3 - Распоред људских зуба (квадранти – стална дентиција)

горе десно	горе лево	горе десно	горе лево
18 17 16 15 14 13 12 11	21 22 23 24 25 26 27 28	55 54 53 52 51	61 62 63 64 65
48 47 46 45 44 43 42 41	31 31 33 34 35 36 37 38	85 84 83 82 81	71 72 73 74 75
доле десно	доле лево	доле десно	доле лево

(а)

(б)

Слика 2.4 - FDI Систем означавања зуба:
(а) стална дентиција, (б) млечна дентиција

2.4 Дентална формула

Дентална формула или зубна формула одређује број и распоред различитих врста зуба у усној дупљи људи и животиња.

Број и распоред различитих врста зуба неке врсте се записује у облику денталне формуле за само једну страну уста (леву или десну, пошто су идентичне), у два реда – у доњем реду за зубе доње вилице, а у горњем реду за зубе горње вилице. На тај начин, укупан број зуба те врсте је дупло већи од збира свих бројева у денталној формули. У сваком реду, прво се записује број секутића, а затим следи број очњака, преткутњака и кутњака. Дентална формула човека има облик приказан на слици 2.5.

2.1.2.3
2.1.2.3

Слика 2.5 - Дентална формула човека

2.5 Површине (стрaне) зуба

При описивању круне и корена често се користе различити називи који описују стране зуба. Предњи зуби имају четири стране и један сечивни гребен, а бочни зуби имају пет површина (укључујући и оклузалну) [9-10].

Спољашња страна се назива вестибуларна (lat. facies vestibularis), јер је окренута према предворју (вестибулуму) усне дупље. Њени синоними су лабијална страна (lat. facies labialis) за предње зубе, јер је окренута ка уснама, и букална страна (lat. facies buccalis) за бочне зубе, јер је окренута ка образима.

Унутрашња страна зуба се једним именом назива орална (lat. facies oralis) јер је окренута ка усној дупљи. Осим тога постоје и синоними: палатинална страна (lat. facies palatinalis) за горње бочне зубе, и лингвална страна (lat. facies lingualis) за доње и горње бочне зубе.

Страна сваког зуба окренута према сагиталној медијалној линији (која дели лице и читав зубик на две симетричне половине) назива се мезијална страна (lat. facies mesialis).

Наспрам мезијалне налази се дистална страна (lat. facies disralis), а заједнички назив им је проксималне стране (lat. facies proximalis s. aproximalis s. contactus).

Страна зуба окренута према антагонистима из супротне вилице назива се гризна или оклузална страна (lat. *facies occlusalis s. masticatoria*) за бочне зубе, а код зуба интерканине регије ова страна је сведена на сечивну ивицу или гребен (lat. *margo incisalis s. occlusalis*).

На корену се још разликује његов завршни део, који се назива врх корена (lat. *apex radialis dentis*) на коме се налази и отвор (lat. *foramen apicis dentis*) за улазак крвних и лимфних судова, живаца и других структура у унутрашњост зубне шупљине.

2.6 Ивице (угаоне линије) и темена зуба

Ивице зуба настају спајањем две суседне површине, а њихов назив одговара површинама које се граниче (табела 2.1). Синоними за ивице зуба су краци угла, односно угаоне линије. У зависности од правца пружања, постоје инцизални (оклузални) и аксијални краци углова. Први се пружају у правцу мезио-дистално, а други у правцу инцизо-цервикално (од сечивне ивице према врату, тј. корену зуба).

Табела 2.1 - Ивице (угаоне линије) на круни зуба

предњи зуби		бочни зуби	
аксијални крак угла	инцизални крак угла	аксијални крак угла	инцизални крак угла
мезио-лабијална	лабио-инцизална	мезио-букална	буко-оклузална
мезио-лингвална	лингво-инцизална	мезио-лингвална	лингво-оклузална
дисто-лингвална	мезио-инцизална	дисто-букална	мезио-лингвална
дисто-лабијална	дисто-инцизална	дисто-лингвална	дисто-оклузална

На споју три површине (стране) зуба настаје одговарајуће теме угла, које носи име тих површина (табела 2.2).

Табела 2.2 - Темена углова на круни зуба

предњи зуби - аксијални крак угла	бочни зуби - инцизални крак угла
мезио-лабио-инцизално	мезио-буко-оклузално
мезио-лингво-инцизално	мезио-лингво-оклузално
дисто-лингво-инцизално	дисто-буко-оклузално
дисто-лабио-инцизално	дисто-лингво-оклузално

2.7 Смерови и правци при опису зуба

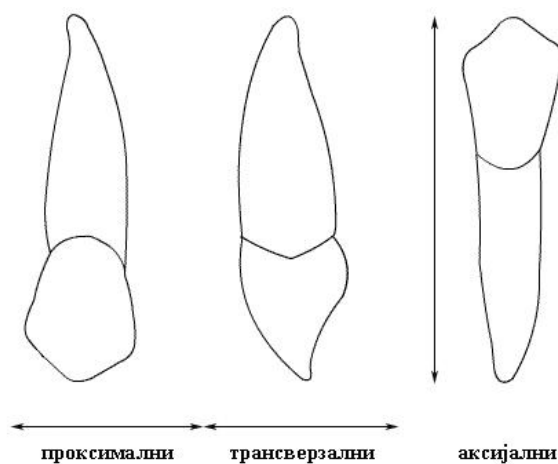
Зуб се може посматрати из три правца:

- инцизоцервикални (за предње зубе), односно оклузоцервикални правац (за бочне зубе),
- мезиодистални или проксимални правац и
- вестибуло-орални или трансверзални правац.

Смерови који се користе при опису зуба су (слика 2.6):

- инцизални (оклузални),
- цервикални (гингивални),
- апикални,
- мезијални,
- дистални,

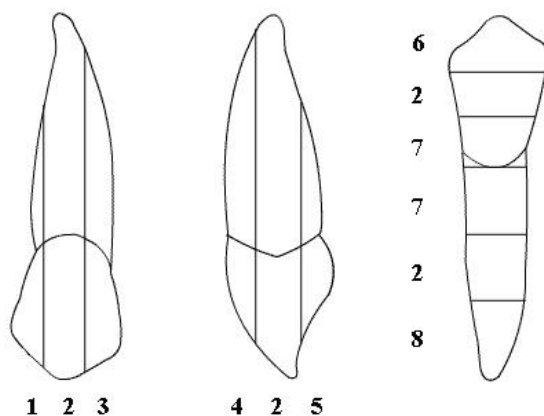
- вестибуларни (лабијални, букални) и
- орални (лингвални, палатинални) смер.



Слика 2.6 - Смерови и правци при опису зуба

2.8 Топографска подела зуба

Ради детаљније анализе и објашњавања морфолошких детаља на зубу, његова круна је из свих аспеката подељена замишљеним вертикалним и хоризонталним линијама на одговарајуће трећине (слика 2.7). Са друге стране, корен је подељен на трећине само хоризонталним линијама. Оне су добиле имена сагласно односу деобних линија према посматраној површини.



вертикална подела				хоризонтална подела			
дистална	1	лабијална (букална)	4	инцизална	6	цервикална	7
средња	2	средња	2	средња	2	средња	2
мезијална	3	лингвална (палатинална)	6	цервикална	7	апикална	8

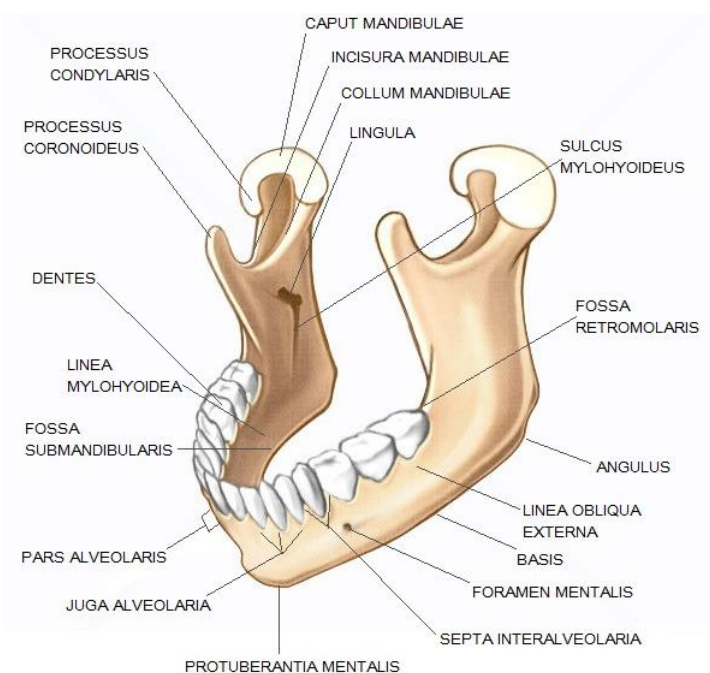
Слика 2.7 - Трећине круне и корена зуба

2.9 Доња вилица

Доња вилица (lat. mandibula) је највећа и најмасивнија кост лица, која је преко виличног зглоба повезана са костима лобање (слика 2.8) [10-11]. Захваљујући њеној покретљивости, као и зубима који су усађени у алвеоле и масикаторним мишићима који се овде припајају и групишу, доња вилица учествује у жвакању, говору, мимици и другим значајним функцијама. Састоји се из тела и две гране. Тело доње вилице (lat. corpus mandibulae) има потковичасти облик и код новорођенчади се састоји из два дела која срастају крајем прве године живота. Тело има две стране (спољашњу и унутрашњу) и две ивице (горњу и доњу).

На месту споја првобитно одвојених половина мандибуле налази се гребен који се шири надоле и ограничава тзв. брадни троугао (lat. trigonum menale). На бази троугла се налази брадно испупчење, које је међу сисарима карактеристично само за човека, а чија се најистуренија тачка у антропологији назива гнатион (lat. gnathion). На крајевима брадног испупчења налазе се квржице од којих полази коса линија која се пружа преко читаве спољашње стране тела доње вилице и наставља се у предњу ивицу виличних грана. Изнад задњег дела ове линије налази се жлеб на којем се припаја образни мишић. У предњем делу спољашње стране налазе се два овална отвора кроз које излазе брадни живац и артерија. На горњем делу ове стране виде се и испупчења коренова доњих зуба, поготово у предњем делу где је кост тања.

На унутрашњој страни тела је такође присутан жлеб или гребен који означава место срастања половина вилице. У доњем делу се налази брадна бодља са четири квржице на којима се припајају влакна десног и левог гениоглосног и гениохиоидног мишића. Слично као и код спољашње стране и овде постоји унутрашња коса или милохиоидна линија на којој се припаја истоимени мишић. Осим тога, са сваке стране су присутна три удубљења: подјезична јамица у којој је смештена подјезична жлезда, подвлична јамица за смештај подвличне жлезде и дијагастрична јама у којој се припаја предњи трбух двотрбушног мишића.



Слика 2.8 – Анатомија мандибуле

На горњој или алвеоларној ивици се налазе зубне чашице за коренове доњих зуба. Између појединих чашица налазе се коштане преграде (lat. septa interalveolaria). Доња ивица се назива и база тела мандибуле и она је дебела и заобљена.

Мандибула се састоји из компактне и спонгиозне кости, које се разликују у погледу механичких карактеристика (табела 2.3). Компактна кост чини спољашњу и унутрашњу страну мандибуле, а спонгиозна кост је у средини (између компактне кости са унутрашње и спољашње стране мандибуле). Дебљина компактне кости мандибуле приказана је у табели 2.4, из које се види да те вредности варијају по регионима. Наиме, постоје извештаји у литератури да су тачно вршена мерења компактне кости са спољашње и унутрашње стране мандибуле.

Табела 2.3 - Вредности модула еластичности и Поасоновог коефицијента за различите денталне материјале

Материјал	Механичке карактеристике	
	Модул еластичности [МПа]	Поасонов коефицијент
Кортикална (компактна) кост	15000	0.30
Спонгиозна кост	1500	0.30
Акрилатни зуби	3000	0.35
Акрилат	3000	0.35
Нерезилијентна слузокожа	680	0.45
Умерено резилијентна слуз.	340	0.45
Резилијентна слузокожа	1	0.37

Табела 2.4 - Дебљина компактне кости

Зона	Дебљина компактне кости [mm]	
	са спољашње стране	са унутрашње стране
Очњак и I преткутњак	1.62	3.57
I и II преткутњаци	2.03	3.80
II преткутњак и I кутњак	2.28	3.09
I кутњак и II кутњак	2.66	2.34

2.10 Појам и врсте мастикације

Мастикација представља скуп свих положаја и кретања доње вилице, за чије постизање су одговорни сви елементи жватног система, а руководећу улогу има проприоцептивни механизам. Специфичност проприоцептивног механизма жватног органа јесте да су њему придодати изузетно осетљиви рецептори, смештени у периодонталном ткиву, што има за последицу изванредну прецизност у руковођењу мандибуларним кретањима.

Чин жвакања карактерише наизменично смењивање фазе физиолошког мировања, фазе узимања хране, првобитног дробљења, формирања залогаја и гутања. Све ове фазе су у читавом низу детаља индивидуалне. Мастикација није урођена функција, већ се мора учити, потом она постаје рефлексна функција и захтева максимално ангажовање највиших центара нервног система.

Мастикација може бити двострана (билатерална) или једнострана (унилатерална). Једнострана је последица оклузалних сметњи и прилагођавања обољењима. За потпорна ткива орофацијалног система важно је билатерално жвакање ради правилне стимулације потпорног ткива.

2.11 Појам и врсте загрижајне силе

Загрижајна сила је сила која се испољава између једног и другог антагонистичког пара зуба при контракцији мастикаторних мишића [1, 12]. Загрижајне силе код носилаца тоталних протеза су четири до пет пута мање него код особа са пуним зубним низовима. Постоји тежња реконструктивних дисциплина стоматологије да рехабилитацијом стања мастикаторног апарата и нарушења функција постигну што веће вредности функционалних сила, које би биле приближно једнаке силама у здравој денцији. У погледу нивоа оптерећења разликују се: минимална загрижајна сила, средња загрижајна сила, субмаксимална загрижајна сила и максимална загрижајна сила. У погледу трајања оптерећења разликују се: брз загрижај и пролонгиран загрижај.

Специфичност мастикације са тоталним зубним протезама је условљена специфичностима које су везане за промене у усној дупљи које настају вађењем зуба, затим техничким могућностима тоталних зубних протеза и савршености техничке израде. Промене које настају вађењем зуба поред физичког недостатка зуба и алвеоларног ткива се огледају у губитку рецептора парадоксијума и губитком оклузионе равни.

Губитком зуба нестају периодонтални рецептори чиме се губи значајан део извора информација који, док су зуби присутни, путују из усне дупље према централном нервном систему и регулишу рад мастикаторних мишића. Као последица губитка рецептора се смањује способност интероклузионе перцепције, јер је број рецептора у мастикаторној слузокожи занемарљив.

3. Метода коначних елемената

Током година, математичко моделирање, какво је метода коначних елемената (МКЕ), је постало комплементарно експерименталним приступима у истраживању клиничких проблема, као и предвиђању биомеханичког понашања [12]. Метода коначних елемената омогућава понављање експеримената мењајући поједине параметре. На тај начин у прилици смо да анализирамо утицај једне променљиве на посматрани феномен.

Метода коначних елемената захтева постојање физичког домена у коме се посматра проблем и дискретизацију тог домена. У овом поглављу описан је осмочворни изопараметарски 3D елемент и приказани су најбитнији алгоритми софтвера STL2MESH, који су развијани и тестирани током генерисања модела коначних елемената.

3.1 Осмочворни изопараметарски 3D елемент

У овој глави изложићемо детаљно извођење појединих матрица елемената, заснованих на физичким условима усвојеним при формулацији елемената. Ови физички услови су веома значајни и представљају фундамент на којима се заснивају математичка извођења, а обухватају претпоставке о начину деформисања материјала или о стању напона у елементу.

Излагање је организовано тако да се посматрају прво најопштије формулације, а онда се анализира специјални случај.

У овим уводним напоменама битно је истаћи да постоје две групе елемената које излажемо. У оквиру појединих извођења прво дајемо основне матрице, неопходне за разумевање најбитнијих поставки, а затим се излажемо корекције које побољшавају карактеристике елемента, а које су резултат новијих истраживања.

У циљу концизности излагања наводимо неке релације. Прво, интерполације за геометрију и померања су облика

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{X} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{U} \quad (3.2)$$

где су: $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ вектори положаја и померања материјалне тачке елемента; $\mathbf{X}$ и $\mathbf{U}$ су вектори положаја и померања чворова елемента; $\mathbf{H}$ је интерполациона матрица. Вектор деформације $\mathbf{e}$ (са одговарајућим бројем компонената) у материјалној тачки унутар елемента одређен је релацијом

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (3.3)$$

где је $\mathbf{B}$ одговарајућа матрица која садржи изводе интерполационих функција. Напон $\boldsymbol{\sigma}$ у материјалној тачки одређен је на основу конститутивних релација

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\mathbf{e} \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{th}) \quad (3.5)$$

за еластичан и термоеластичан материјал, где је $\mathbf{C}$ - еластична конститутивна матрица, а $\mathbf{e}^{th}$ - вектор термичке деформације. Приметимо да, зависно од врсте проблема, матрица $\mathbf{C}$ има одговарајући облик. Затим, матрица крутости елемента $\mathbf{K}$ одређена је изразом

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (3.6)$$

Сва извођења у овој глави односе се на један коначни елемент. Силе у чворовима елемента, као резултат напона у коначном елементу, одређујемо из израза за виртуални рад

$$\delta A^u = \int_V \delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{U}^T \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^u \quad (3.7)$$

одакле следи

$$\mathbf{F}^u = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.8)$$

Приметимо да се заменом напона $\boldsymbol{\sigma}$ према (3.4) и затим деформације $\mathbf{e}$ према (3.3), добијају силе $\mathbf{F}^u$ у облику.

$$\mathbf{F}^u = \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (3.9)$$

Изопараметарски коначни елемент је дефинисан ако смо на одговарајући начин утврдили матрицу интерполације $\mathbf{H}$ и затим матрицу везе између деформације и померања чворова $\mathbf{B}$. Дакле, у даљем излагању дефинисаћемо матрице $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ за поједине елементе, а затим, где је потребно ради комплетности, и друге матрице и векторе као што су $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{F}^u$.

На крају, наведимо укратко основне релације које у примени МКЕ имамо у случају термоеластичног материјала, односно у случају када узимамо у обзир термичке деформације. Наиме, ако конституивну релацију (3.5) заменимо у (3.8), добијамо силе у чворовима у облику

$$\mathbf{F}^u = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{e} - \mathbf{e}^{th} dV = \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F}^{th} \quad (3.10)$$

где је

$$\mathbf{F}^{th} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{th} dV \quad (3.11)$$

вектор термичких сила у чворовима елемента, а $\boldsymbol{\sigma}^{th}$ - вектор термичких напона. Пошто температурска промена изазива само нормалне деформације, имамо само нормалне термичке напоне, који су, у случају изотропног материјала, једнаки

$$\sigma_1^{th} = \sigma_2^{th} = \sigma_3^{th} = 3K\alpha (T - T_{ref}) \quad (3.12)$$

где је K модул стишљивости, α је коефицијент линеарног ширења, T је температура у тачки материјала, а T_{ref} референтна температура. Ако се ради о ортотропном материјалу, следи да су компоненте термичког напона једнаке

$$\sigma_i^{th} = C_{i1}\alpha_1 + C_{i2}\alpha_2 + C_{i3}\alpha_3 (T - T_{ref}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.13)$$

где су C_{ij} коефицијенти конститутивне матрице, а α_i су коефицијенти линеарног ширења.

На основу једнакости унутрашњих сила $\mathbf{F}^u$ и спољашњих сила $\mathbf{F}^s$ у чворовима елемента, уз коришћење (3.10), добијамо једначину равнотеже елемента у облику

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}^s + \mathbf{F}^{th} \quad (3.14)$$

У даљим излагањима нећемо у теоријском делу одређивати силу $\mathbf{F}^{th}$.

Овај коначни елемент се користи за моделирање тродимензионалних тела општег облика (3D континуума). Елемент може имати различит број чворова - уобичајен је број од 8 до 21; овакав елемент зваћемо основни, који има шест површи које га ограничавају. Међутим, од овог елемента се могу формирати и други просторни облици, као што су просторна призма, тетраедар или четворострана пирамида. Овакви елементи настали поклапањем неких чворова основног елемента, зову се дегенерисани 3D елементи. Побољшање резултата добијених моделирањем 3D елементима са осам чворова, у случају општих услова деформисања, може се постићи увођењем корективних функција за поље деформације у елементу, помоћу тзв. инкомпатибилних померања. Овакви елементи се зову побољшани 3D елементи. Даље излагање је организовано тако што прво излажемо основни 3D елемент, затим дегенерисане елементе, и на крају побољшани елемент.

3.1.1 Основни 3D елемент

Интерполације геометрије и померања су, према (3.1) и (3.2), облика

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{X} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{U} \quad (3.16)$$

где су интерполациона матрица $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & \dots & h_N & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & \dots & 0 & h_N & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & \dots & 0 & 0 & h_N \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

и вектори координата чворова $\mathbf{X}$ и померања чворова $\mathbf{U}$,

$$\mathbf{X}^T = [X_1^1 \ X_2^1 \ X_3^1 \ X_1^2 \ X_2^2 \ X_3^2 \ \dots \ X_1^N \ X_2^N \ X_3^N] \quad (3.18)$$

$$\mathbf{U}^T = [U_1^1 \ U_2^1 \ U_3^1 \ U_1^2 \ U_2^2 \ U_3^2 \ \dots \ U_1^N \ U_2^N \ U_3^N] \quad (3.19)$$

Приметимо да се (3.15) и (3.16) могу написати у компонентном облику као

$$x_i = \sum_{k=1}^N h_k X_i^k \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.20)$$

и

$$u_i = \sum_{k=1}^N h_k U_i^k \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.21)$$

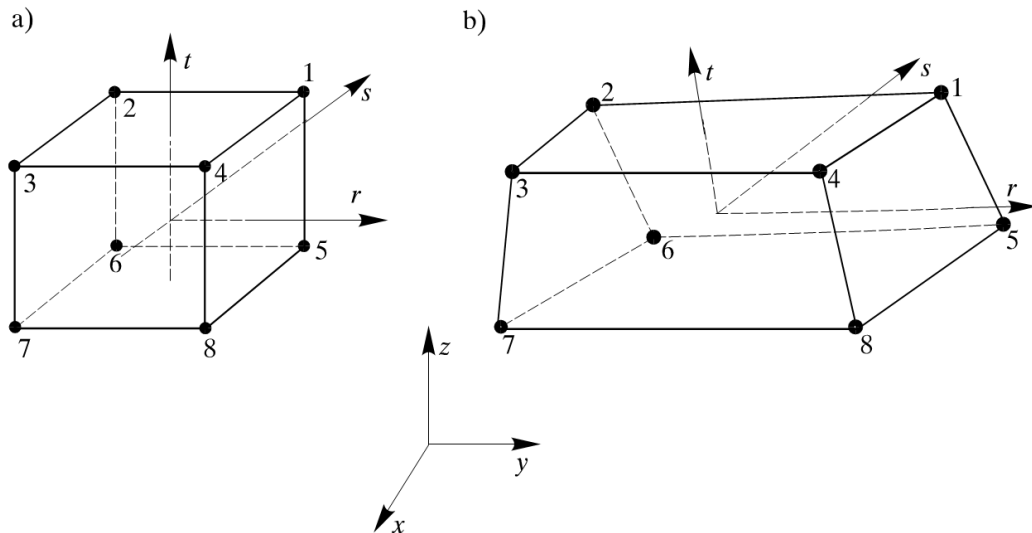
где $i = 1$ одговара оси x , $i = 2$ - оси y , а $i = 3$ - оси z . У случају коначног елемента са 8 чворова, интерполационе функције су

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t) & h_5 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t) \\ h_2 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t) & h_6 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) \\ h_3 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t) & h_7 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) \\ h_4 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t) & h_8 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

односно

$$h_i(r, s, t) = \frac{1}{8}(1+rr_i)(1+ss_i)(1+tt_i) \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (3.23)$$

Функције $h_i(r, s, t)$ су линеарне по r, s, t и зато се овај елемент зове линеаран. Његове површи су равни у физичком простору (слика 3.1). Елемент се из x, y, z простора пресликава на коцку чије су координате чворова r_i, s_i, t_i једнаке ± 1 (табела 3.1). Приметимо да се усвојени редослед у нумерисању чворова мора користити у практичној примени 3D елемента, да би се очувало једнозначно пресликавање и десна оријентација природног система r, s, t .

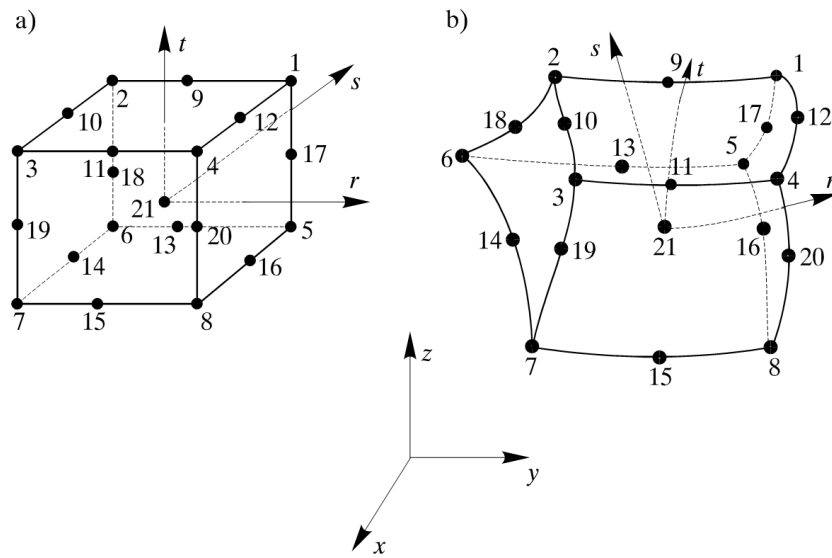


Слика 3.1 – 3D коначни елемент са 8 чворова:
а) Природни координатни систем, б) Декартов координатни систем (физички простор)

Табела 3.1 - Вредности природних координата у чворовима елемента

ЧВОР	r_i	s_i	t_i
1	+1	+1	+1
2	-1	+1	+1
3	-1	-1	+1
4	+1	-1	+1
5	+1	+1	-1
6	-1	+1	-1
7	-1	-1	-1
8	+1	-1	-1

За моделирање кривих површи могу се користити 3D елементи са више од 8 чворова (слика 3.2). Површи елемента могу бити закривљене, а елемент се пресликава на коцку чији угаони чворови имају координате ± 1 у природном координатном систему r, s, t . Међучворови имају по једну природну координату једнаку нули, како се и са слике види, док се чвор 21 налази у координатном почетку природног система.



Слика 3.2 – 3D елемент са 21 чвором:

а) Природни координатни систем r, s, t ,

б) Декартов координатни систем x, y, z (физички простор)

Интерполационе функције h_i се могу изразити у облику

$$\begin{aligned}
 h_1 &= g_1 - \frac{1}{2}(g_9 + g_{12} + g_{17}) & h_5 &= g_5 - \frac{1}{2}(g_{13} + g_{16} + g_{17}) \\
 h_2 &= g_2 - \frac{1}{2}(g_9 + g_{10} + g_{18}) & h_6 &= g_6 - \frac{1}{2}(g_{13} + g_{14} + g_{18}) \\
 h_3 &= g_3 - \frac{1}{2}(g_{10} + g_{11} + g_{19}) & h_7 &= g_7 - \frac{1}{2}(g_{14} + g_{15} + g_{19}) \\
 h_4 &= g_4 - \frac{1}{2}(g_{11} + g_{12} + g_{20}) & h_8 &= g_8 - \frac{1}{2}(g_{15} + g_{16} + g_{20}) \\
 h_k &= g_k & k &= 9, 10, \dots, 20 \\
 h_k &= 0 & \text{ako } \check{\text{c}}\text{vor ne postoji}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

где су функције g_i одређене као

$$\begin{aligned} g_k &= G(r, r_k)G(s, s_k)G(t, t_k) \\ G(\beta, \beta_k) &= \frac{1}{2}(1 + \beta_k \beta) \quad \text{za } \beta_k = \pm 1, \beta = r, s, t \\ G(\beta, \beta_k) &= 1 - \beta^2 \quad \text{za } \beta_k = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Приметимо да се основне интерполационе функције за угаоне чворове, одређене преко (3.22), (3.23), коригују интерполационим функцијама суседних међучворова. Коначно, интерполациона функција h_{21} одређена је као

$$h_{21} = (1 - r^2)(1 - s^2)(1 - t^2) \quad (3.26)$$

У случају постојања чвора 21 коригују се интерполационе функције h_i дате са (3.24), према следећем

$$\begin{aligned} h_k &= \bar{h}_k - \frac{1}{8} h_{21} \quad k = 1, 2, \dots, 8 \\ h_k &= \bar{h}_k - \frac{1}{4} h_{21} \quad k = 9, 10, \dots, 20 \end{aligned} \quad (3.27)$$

где смо са $\bar{h}_k$ означили интерполационе функције одређене једначином (3.24).

Интерполационе функције дате са (3.24), односно са (3.27), садрже квадрате природних координата, па се овакви елементи зову и параболични. Интересантно је приметити да интерполационе функције h_i , дефинисане било једначином (3.22) или (3.24), имају особину већ истакнуту код елемената штапа и показану на сл. 3.2.4; функција $h_k = 1$ у чвору "k", а једнака је нули у свим осталим чворовима. Дакле

$$h_k(r_j, s_j, t_j) = \delta_{kj} \quad (3.28)$$

где је δ_{kj} Кронекеров делта симбол ($\delta_{kj} = 1, k = j; \delta_{kj} = 0, k \neq j$).

Како се види са слике 3.1 и 3.2 површи које ограничавају елемент одређене су условом да је једна од природних координата константа и једнака +1 или -1. На пример, површи $r = -1$ одговара површ на којој, према сл. 4.2.2, леже чворови 2, 6, 7, 3, 18, 14, 19, 10. Координатне линије природног координатног система су одређене условом да су две природне координате једнаке нули. На пример, координатна r -линија одређена је са $s = t = 0$; на слици 3.2а то је права, а на слици 3.2б то је крива линија.

У принципу, елементи вишег реда дају тачније резултате за опште случајеве поља деформације и напона, и сложене геометријске облике тела. Међутим, моделирање помоћу оваквих елемената је сложеније, па се користе линеарни елементи, али са гушћом мрежом. Такође, значајно је побољшање тачности линеарних елемената помоћу инкомпатибилних померања.

Изведимо сада матрицу **B** ради одређивања деформације према (3.3). У складу са дефиницијом деформације **e** и интерполацијама за померање (3.16), односно (3.21), имамо да је

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 & \dots & h_{N,1} & 0 & 0 \\ 0 & h_{1,2} & 0 & \dots & 0 & h_{N,2} & 0 \\ 0 & 0 & h_{1,3} & \dots & 0 & 0 & h_{N,3} \\ h_{1,2} & h_{1,1} & 0 & \dots & h_{N,2} & h_{N,1} & 0 \\ 0 & h_{1,3} & h_{1,2} & \dots & 0 & h_{N,3} & h_{N,2} \\ h_{1,3} & 0 & h_{1,1} & \dots & h_{N,3} & 0 & h_{N,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ \vdots \\ U_1^N \\ U_2^N \\ U_3^N \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (3.29)$$

одакле се очигледно виде чланови B_{ij} матрице $\mathbf{B}$. Ради краћег писања увели смо означавање извода као

$$h_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \quad (3.30)$$

Овде је потребно детаљније показати начин рачуњања извода $h_{k,j}$. Наиме, h_k су функције природних координата, r, s, t , па се мора применити поступак посредног диференцирања,

$$h_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} + \frac{\partial h_k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \frac{\partial h_k}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_j} \quad (3.31)$$

Ако се уведе јакобијан трансформације између Декартовог и природног система, као

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

а инверзни јакобијан

$$\mathbf{J}^{-1} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

онда се изводи (3.30) могу написати у облику

$$h_{k,j} = J_{j1}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial r} + J_{j2}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial s} + J_{j3}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial t} \quad (3.34)$$

Изводи $\partial h_k / \partial r$, $\partial h_k / \partial s$, $\partial h_k / \partial t$ се добијају диференцирањем које директно следи из дефиниције $h_k(r, s, t)$ према одговарајућим изразима датим једначинама (3.22), (3.24),

(3.27). Чланови јакобијана J_{mn} следе из дефиниције (3.32) и интерполације за геометрију (3.20),

$$J_{mn} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial r_m} X_n^k \quad (3.35)$$

где је $r_1 = r, r_2 = s, r_3 = t$.

Горњи поступак одређивања извода функција h_k по Декартовим координатама x_i применљив је на било коју функцију природних координата. Дакле, вектор извода $\partial/\partial \mathbf{x}$, дефинисан као

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (3.36)$$

можемо матрично изразити релацијом

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.37)$$

где је

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right)^T = \left[\frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial}{\partial s} \quad \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad (3.38)$$

И обрнуто, ако имамо неку функцију координата x_i , изводи у односу на природне координате су

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.39)$$

У практичној примени у МКЕ, вредност чланова J_{mn} јакобијана у посматраној тачки елемента (за одређене вредности природних координата r, s, t), одређује се нумерички, а затим се врши инверзија матрице $\mathbf{J}$. Наравно, инверзија је могућа за случај несингуларне матрице $\mathbf{J}$. До сингуларности може доћи у случају 3D елемента са угловима између граничних површи елемента већим од 180° .

Матрица еластичности $\mathbf{C}$ одговара 3D условима. Дакле, и вектор напона $\boldsymbol{\sigma}$ има шест компоненти, у складу са редоследом компоненти деформације $\mathbf{e}$ у једначини (3.29). Приметимо да матрица крутости елемента $\mathbf{K}$ има димензије $3N \times 3N$, тј.

$$\mathbf{K}_{3N \times 3N} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (3.40)$$

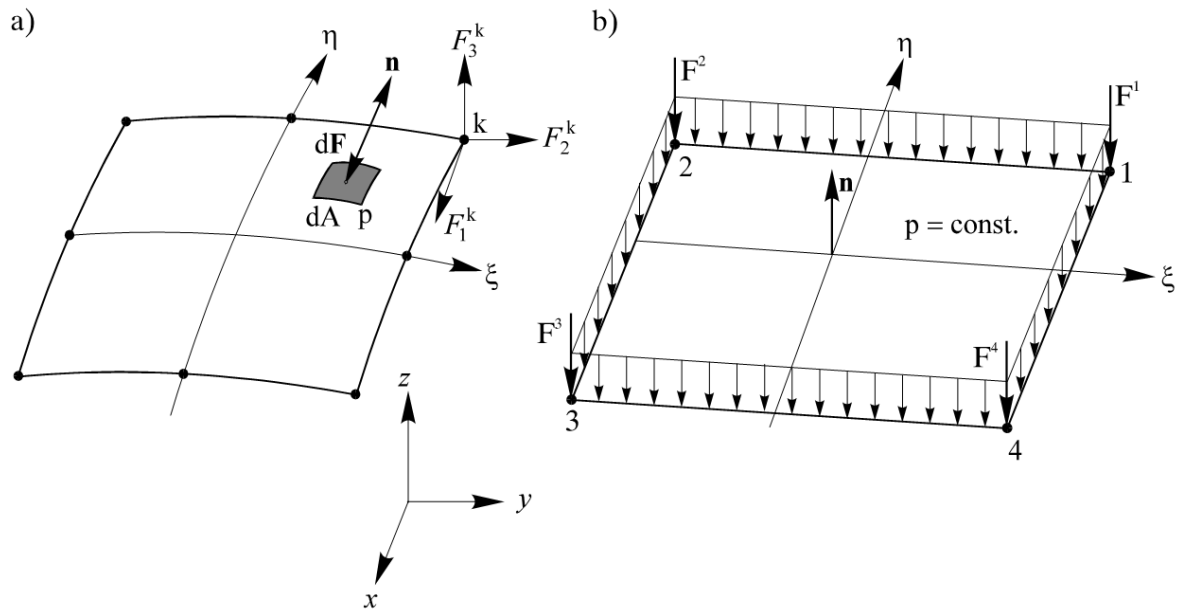
а вектор сила у чворовима $\mathbf{F}^u$ има $3N$ компоненти,

$$\mathbf{F}^u_{3N \times 1} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K}_{3N \times 3N} \mathbf{U}_{3N \times 1} \quad (3.41)$$

Интеграција по запремини елемента врши се нумерички [12].

На крају разматрања основног 3D елемента покажимо начин одређивања еквивалентних сила у чворовима које одговарају површинском притиску на површини

елемента. Предпостављамо да на површи чији су чворови $1, 2, \dots, K$ делује површински притисак p , како је шематски приказано на слици 3.3.



Слика 3.3 - Површински притисак на страници 3D елемента:
а) Општи случај, б) Униформни притисак на равној правоугаоној страници

У случају опште криве површи имамо да је елементарна сила притиска dF , која одговара притиску $p(\xi, \eta)$ у тачки површи одређеној координатама ξ, η ,

$$dF = -p n dA \quad (3.42)$$

где је $\mathbf{n}$ нормала у тачки површи, а dA елементарна површ. Еквивалентне силе се одређују на основу једнакости виртуалних радова притиска и сила у чворовима површи,

$$\sum_{k=1}^K (F_1^k \delta U_1^k + F_2^k \delta U_2^k + F_3^k \delta U_3^k) = - \int_A \delta u_n p dA \quad (3.43)$$

где је δu_n виртуално померање у правцу нормале. Померање неке тачке на површи можемо изразити у облику (3.21), узимајући једну од природних координата једнаку +1 или -1. Овим се функције $h_k(r, s, t)$ свде на функције две природне координате ξ и η , како је назначено на слици 3.3. Ове функције следе из 3D интерполационих функција. Дакле, користећи 2D интерполационе функције које одговарају чворовима $k = 1, \dots, K$ на површи, можемо писати

$$\delta u_n = \sum_{k=1}^K h_k (n_1^k \delta U_1^k + n_2^k \delta U_2^k + n_3^k \delta U_3^k) \quad (3.44)$$

где су n_1^k, n_2^k и n_3^k пројекције нормале $\mathbf{n}^k$ у чвору k на осе x, y, z . Заменом (3.44) у (3.43) и изједначавањем коефицијента уз виртуална померања δU_i^k , добијамо

$$F_i^k = - \int_A p h_k n_i^k dA \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.45)$$

Одређивање површинског интеграла врши се у општем случају нумерички [12]. Приметимо да се обично притисак задаје у чворовима, па се вредност у тачки површи израчунава интерполацијом, тј.

$$p = \sum_{k=1}^{KK} h_k P^k \quad (3.46)$$

где је P^k притисак у чвору k . У случају униформног притиска на правоугаоној површи моделираној са 4 чвора, еквивалентне силе су управне на површи и једнаке четвртини укупне површинске силе, како је назначено на слици 3.3б.

3.1.2 Дегенерисан 3D коначни елемент

У практичном моделирању може бити погодно да се употребе 3D коначни елементи облика који се могу извести из основног 3D елемента. Овде ћемо изложити поступак добијања 3D елемената облика троугаоне призме, тетраедра и четворостране пирамиде, путем дегенерисања основног 3D елемента. Посматраћемо само линеарне елементе чија је дегенерација најједноставнија (а и најједноставнији су за практичну примену).

На слици 3.4 показани су коначни елементи троугаоне призме, тетраедра и четворостране пирамиде добијени поклапањем одговарајућих чворова основног елемента. Да би се добиле интерполационе функције дегенерисаних елемената, треба узети у обзир поклапање одговарајућих чворова. Дакле, за троугаону призму на слици 3.4б имамо поклапање чворова 1 и 4, и 5, 8, па заменом $X_i^4 = X_i^1$ и $X_i^8 = X_i^5$ у (3.20) добијамо да је

$$x_i = h_1^* X_i^1 + h_2 X_i^2 + h_3 X_i^3 + h_5^* X_i^5 + h_6 X_i^6 + h_7 X_i^7 \quad (3.47)$$

при чему су

$$h_1^* = h_1 + h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1+t) \quad (3.48)$$

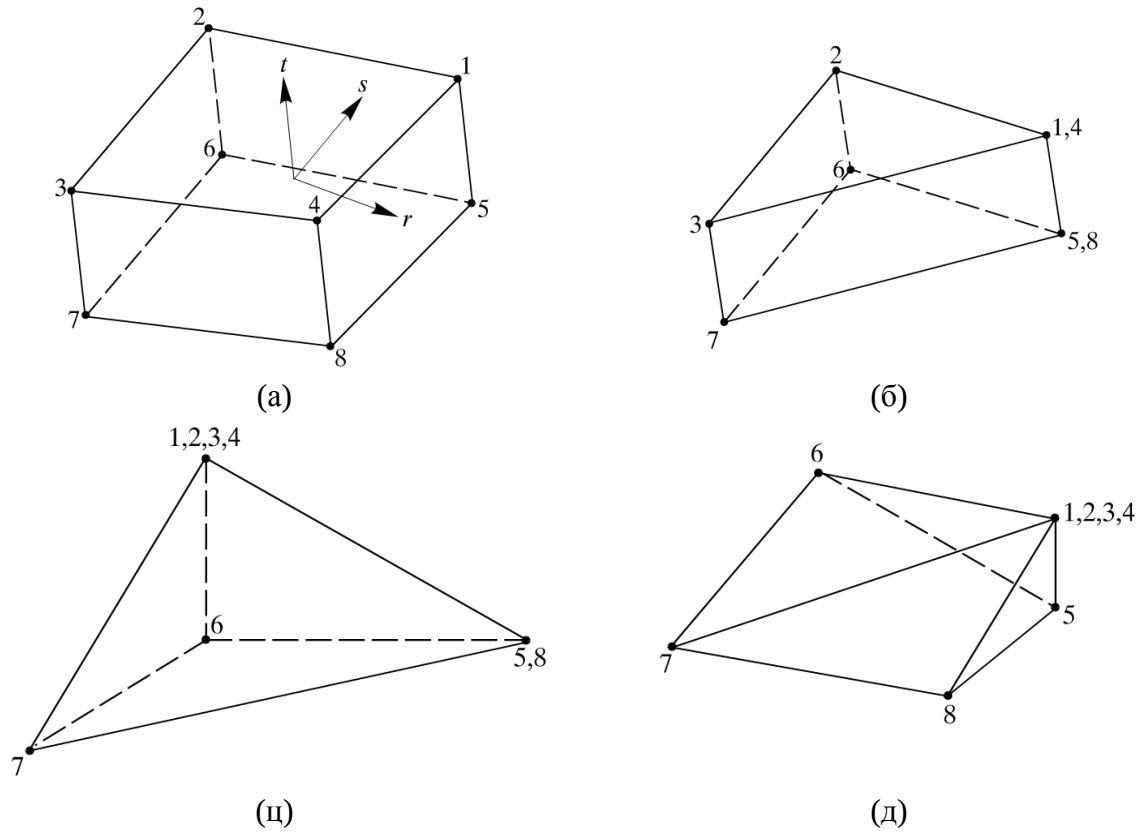
$$h_5^* = h_5 + h_8 = \frac{1}{4}(1+r)(1-t) \quad (3.49)$$

док су остале интерполационе функције h_k непромењене и дате су једначином (3.22). На исти начин за тетраедар на слици 3.4ц добијамо само четири интерполационе функције, од којих су h_6 и h_7 непромењене, а кориговање су h_1^* и h_5^* ,

$$h_1^* = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{1}{2}(1+t) \quad (3.50)$$

$$h_5^* = h_5 + h_8 \quad (3.51)$$

У случају четвороугаоне пирамиде имамо 5 чворова, при чему је интерполациона функција h_1^* одређена као и код тетраедра, а функције h_5, h_6, h_7, h_8 су непромењене у односу на основни 3D елемент.



Слика 3.4 – Дегенерисани 3D елементи

3.1.3 Побољшани 3D елементи

У новијим радовима из области МКЕ предложена су побољшања линеарних 3D елемената увођењем тзв. инкомпатибилних померања. Ови побољшани елементи имају већу тачност, при грубој мрежи и у случају неправилних елемената, у односу на основне елементе. Ова особина је врло значајна у општим применама, у развоју софтвера за прорачун конструкција.

Основна идеја се састоји у томе што се пољу деформације $\mathbf{e}^{(u)}$, добијеном на основу померања према (3.29), додаје корективно поље $\mathbf{e}^{(\hat{u})}$, тако да укупна деформација има облик

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^{(u)} + \mathbf{e}^{(\hat{u})} \quad (3.52)$$

Деформације $\mathbf{e}^{(\hat{u})}$ изражавамо преко коваријантних $\hat{\mathbf{e}}^{(\hat{u})}$,

$$\mathbf{e}^{(\hat{u})} = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \hat{\mathbf{T}}^{\sigma T} \hat{\mathbf{e}}^{(\hat{u})} \quad (3.53)$$

Величине $\det \mathbf{J}_0$ и $\det \mathbf{J}$ су детерминанте јакобијана израчунате у средишту елемента и у интеграционој тачки, а фактор $\det \mathbf{J}_0 / \det \mathbf{J}$ се уводи ради побољшања резултата код неправилних елемената (на основу практичних нумеричких тестирања). Матрица трансформације $\hat{\mathbf{T}}^{\sigma}$ је

$$\hat{\mathbf{T}}^\sigma = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11}\bar{J}_{11} & \bar{J}_{21}\bar{J}_{21} & \bar{J}_{31}\bar{J}_{31} & 2\bar{J}_{11}\bar{J}_{21} & 2\bar{J}_{21}\bar{J}_{31} & 2\bar{J}_{31}\bar{J}_{11} \\ \bar{J}_{12}\bar{J}_{12} & \bar{J}_{22}\bar{J}_{22} & \bar{J}_{32}\bar{J}_{32} & 2\bar{J}_{12}\bar{J}_{22} & 2\bar{J}_{22}\bar{J}_{32} & 2\bar{J}_{32}\bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{13}\bar{J}_{13} & \bar{J}_{23}\bar{J}_{23} & \bar{J}_{33}\bar{J}_{33} & 2\bar{J}_{13}\bar{J}_{23} & 2\bar{J}_{23}\bar{J}_{33} & 2\bar{J}_{33}\bar{J}_{13} \\ \bar{J}_{11}\bar{J}_{12} & \bar{J}_{21}\bar{J}_{22} & \bar{J}_{31}\bar{J}_{32} & \bar{J}_{11}\bar{J}_{22} + \bar{J}_{12}\bar{J}_{21} & \bar{J}_{21}\bar{J}_{32} + \bar{J}_{22}\bar{J}_{31} & \bar{J}_{31}\bar{J}_{12} + \bar{J}_{32}\bar{J}_{11} \\ \bar{J}_{12}\bar{J}_{13} & \bar{J}_{22}\bar{J}_{23} & \bar{J}_{32}\bar{J}_{33} & \bar{J}_{12}\bar{J}_{23} + \bar{J}_{13}\bar{J}_{22} & \bar{J}_{22}\bar{J}_{33} + \bar{J}_{23}\bar{J}_{32} & \bar{J}_{32}\bar{J}_{13} + \bar{J}_{33}\bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{13}\bar{J}_{11} & \bar{J}_{23}\bar{J}_{21} & \bar{J}_{33}\bar{J}_{31} & \bar{J}_{13}\bar{J}_{21} + \bar{J}_{11}\bar{J}_{23} & \bar{J}_{23}\bar{J}_{31} + \bar{J}_{21}\bar{J}_{33} & \bar{J}_{33}\bar{J}_{11} + \bar{J}_{31}\bar{J}_{13} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Са $\bar{J}_{ij}$ су означене компоненте инверзног Јакобијана $\bar{J}_{ij} = \frac{\partial r_j}{\partial x_i}$. Компоненте коваријантних инкомпатибилних деформација се израчунавају на основу поља инкомпатибилних померања $\hat{u}_i$,

$$\hat{e}_{ij}^{\hat{u}} = \frac{1}{2} \left(J_{jm} \frac{\partial \hat{u}_m}{\partial r_i} + J_{in} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial r_j} \right) \quad (3.55)$$

Поље инкомпатибилних померања $\hat{u}_p$ r, s, t се изражава интерполацијом у односу на параметре $\hat{U}_i^p$, на начин који је иначе до сада коришћен, облика (3.16), тј.

$$\hat{u}_i = \hat{h}_p \hat{U}_i^p \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (3.56)$$

где су $\hat{h}_p$ r, s, t интерполационе функције, а $\hat{U}_i^p$ су параметри, којих има 3P. Овде се узима да је број интерполационих функција P једнак четири. Оне су облика

$$\hat{h}_1 = \frac{1}{2} (1 - r^2) \quad (3.57)$$

$$\hat{h}_2 = \frac{1}{2} (1 - s^2) \quad (3.58)$$

$$\hat{h}_3 = \frac{1}{2} (1 - t^2) \quad (3.59)$$

$$\hat{h}_4 = rst \quad (3.60)$$

Интерполациона функција $\hat{h}_4$ је уведена да би ред стандардних и инкомпатибилних интерполационих функција био исти.

Заменом израза за померања (3.56) у (3.55) добијамо инкомпатибилне коваријантне деформације облика (3.29),

$$\hat{\mathbf{e}}^{\hat{u}} = \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{U}} \quad (3.61)$$

где је матрица $\hat{\mathbf{B}}$,

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}^1 & \hat{\mathbf{B}}^2 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

са подматрицама

$$\hat{\mathbf{B}}^1 = - \begin{bmatrix} J_{11}r & J_{12}r & J_{13}r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{21}s & J_{22}s & J_{23}s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{31}t & J_{32}t & J_{33}t \\ J_{21}r & J_{22}r & J_{23}r & J_{11}s & J_{12}s & J_{13}s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{31}s & J_{32}s & J_{33}s & J_{21}t & J_{22}t & J_{23}t \\ J_{31}r & J_{32}r & J_{33}r & 0 & 0 & 0 & J_{11}t & J_{12}t & J_{13}t \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\hat{\mathbf{B}}^2 = \begin{bmatrix} stJ_{11} & stJ_{12} & stJ_{13} \\ rtJ_{21} & rtJ_{22} & rtJ_{23} \\ rsJ_{31} & rsJ_{32} & rsJ_{33} \\ stJ_{21} + rtJ_{11} & stJ_{22} + rtJ_{12} & stJ_{23} + rtJ_{13} \\ rtJ_{31} + rsJ_{21} & rtJ_{32} + rsJ_{22} & rtJ_{33} + rsJ_{23} \\ stJ_{31} + rsJ_{11} & stJ_{32} + rsJ_{12} & stJ_{33} + rsJ_{13} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Конечно, заменом (3.61) у (3.53), добијамо релацију за деформације $\mathbf{e}^{\hat{u}}$ облика

$$\mathbf{e}^{\hat{u}} = \mathbf{B}^{\hat{u}} \hat{\mathbf{U}} \quad (3.65)$$

где је

$$\mathbf{B}^{(\hat{u})} = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \hat{\mathbf{T}}^{\sigma^T} \hat{\mathbf{B}} \quad (3.66)$$

Параметри $\hat{\mathbf{U}}$ су величине дефинисане за сваки елемент. Између параметара $\hat{\mathbf{U}}$ не постоје услови континуалности између елемената, какав је случај код вектора померања $\mathbf{U}$ - где сви елементи који садрже заједнички чвор имају исто померање у том чвору. Зато се параметри $\hat{\mathbf{U}}$ зову инкомпатибилна померања, а деформације $\mathbf{e}^{(\hat{u})}$ које њима одговарају - инкомпатибилне деформације.

Практична примена инкомпатибилних деформација се састоји у томе што се из решавања једначина равнотеже система искључују параметри $\hat{\mathbf{U}}$. То се остварује на следећи начин. Виртуални рад по јединици запремине елемента, на основу једначина (3.52), (3.3) и (3.65), може се изразити као

$$\delta \bar{\mathbf{A}}^u = \delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma} = (\delta \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T + \delta \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{B}^{\hat{u}T}) \boldsymbol{\sigma} \quad (3.67)$$

а затим, уз конститутивну релацију (3.4),

$$\delta \bar{\mathbf{A}}^u = (\delta \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T + \delta \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{B}^{\hat{u}T}) \mathbf{C}(\mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{B}^{\hat{u}} \hat{\mathbf{U}}) \quad (3.68)$$

где су $\delta \hat{\mathbf{U}}$ варијације параметара $\hat{\mathbf{U}}$. Интеграцијом $\delta \bar{\mathbf{A}}^u$ по запремини елемента и коришћењем (3.6), добијамо за произволна виртуална померања $\delta \mathbf{U}$ и $\delta \hat{\mathbf{U}}$, систем једначина

$$\mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\hat{u}} \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{F}^s \quad (3.69)$$

$$\mathbf{K}_{u\hat{u}}^T \mathbf{U} + \mathbf{K}_{\hat{u}\hat{u}} \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad (3.70)$$

где су матрице

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (3.71)$$

$$\mathbf{K}_{u\hat{u}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}^{\hat{u}} dV \quad (3.72)$$

$$\mathbf{K}_{\hat{u}\hat{u}} = \int_V \mathbf{B}^{\hat{u}T} \mathbf{C} \mathbf{B}^{\hat{u}} dV \quad (3.73)$$

а $\mathbf{F}^s$ је вектор спољашних чворних сила који одговара померањима $\mathbf{U}$. Приметимо да је виртуални рад спољашњих сила на инкомпатибилним померањима једнак нули. Из једначине (3.70) имамо да су параметри $\hat{\mathbf{U}}$

$$\hat{\mathbf{U}} = -\mathbf{K}_{\hat{u}\hat{u}}^{-1} \mathbf{K}_{u\hat{u}}^T \mathbf{U} \quad (3.74)$$

па се заменом у систему једначина (3.69) добија

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{U} = \mathbf{F}^s \quad (3.75)$$

где је

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\hat{u}} \mathbf{K}_{\hat{u}\hat{u}}^{-1} \mathbf{K}_{u\hat{u}}^T \quad (3.76)$$

коригована матрица крутости елемента.

Из горе изложеног се види да увођење корекције поља деформације према (3.52) доводи до корекције матрице крутости према (3.76). Ова корекција захтева инверзију матрице $\mathbf{K}_{\hat{u}\hat{u}}$ и укупно повећава рачунарско време одређивања матрице крутости. Међутим, елемент чија је матрица крутости одређена на основу (3.76) даје тачније резултате, посебно у случају елемената неправилног облика.

Практични кораци рачуњања се састоје у:

1. Корекцији матрице крутости према (3.76)
2. Одређивању померања чворова $\mathbf{U}$ према (3.75)
3. Одређивању параметара $\hat{\mathbf{U}}$ према (3.74)
4. Израчунавању деформације према (3.65) и (3.52)
5. Израчунавању напона према (3.4).

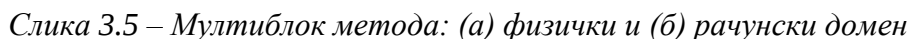
3.2. Софтвер STL2MESH

Као резултат веома интензивног рада у МКЕ и могућности примене у инжењерској пракси, развијен је велики број комерцијалних пакета опште намене, од којих су најпознатији, на пример, Nastran, Mark, Ansys, ADINA, и др. У нашој земљи преко 30 година развија се програм оваквог типа под називом ПАК (акроним од: Програм за Анализу Конструкција).

Процес којим се долази до модела коначних елемената назива се претпроцесирање. Комерцијални софтвери углавном имају развијене модуле за претпроцесирање. Поред тога, на тржишту постоји низ комерцијалних и софтвера отвореног кода намењених моделирању методом коначних елемената. У овом раду модели коначних елемената генерисани су коришћењем софтвера STL2MESH, заснованог на мултиблок методи,

Заједничка карактеристика свих софтвера заснованих на мултиблок методи је да једноставно и брзо генерисање блокова није могуће. Најпре ће бити предложена процедура за генерисање блокова, а затим дат алгоритам којим се блокови превode у облик који је употребљив у следећим фазама креирања модела. Даље су дати алгоритми којим се блокови припремају за генерисање модела, као и за само генерисање мреже коначних елемената.

У софтверима који су засновани на мултублок методи разликују се два начина апстракције мреже: физички и рачунски домен (слика 3.4).



Да бисмо моделирали комплексне структуре, какве су оне које су заступљене у биоинжењерству, користимо мрежу сачињену од више блокова. Блок мрежа је основна компонента у изградњи сложених мрежа. Мултиблок софтвер генерише мрежу структурираних блокова која се састоји од осмочворних 3D елемената, поређаних у редовима, колонама и слојевима, тако да формирају блок. Сваки ред има исти број елемената. Исто тако, свака колона има исти број елемената, као и сваки слој [15].

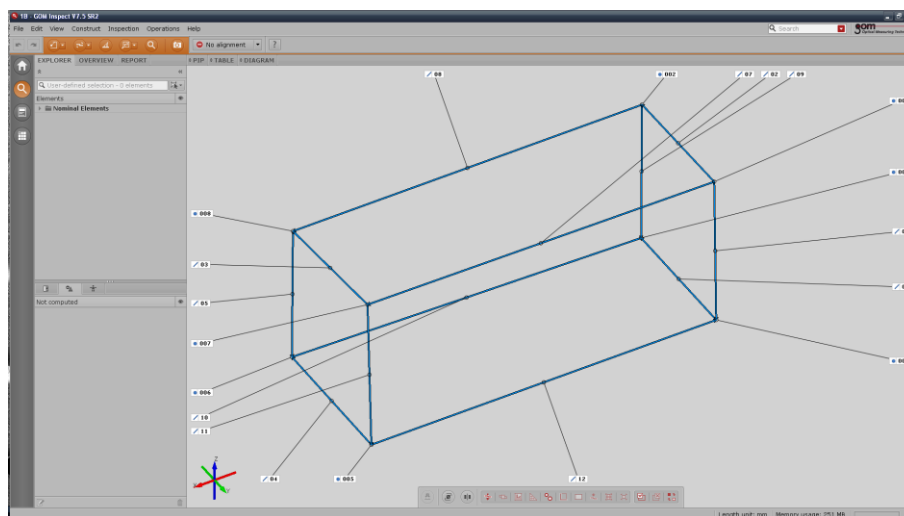
Предложено је да се блокови “конструишу” у софтверу GOM Inspect. Блокови које креирамо у софтверу GOM Inspect нису “прави блокови” у смислу мултиблок методе. Они представљају графички приказ онога што је инжењер/оператер предвидео да буду блокови. Овакав графички приказ је скуп линија које треба организовати тако да се добију блокови (слика 3.6). Скуп линија дефинисаних у софтверу GOM Inspect

извозимо у облику VDA датотеке која садржи све генерисане линије, дате преко координата почетних и крајњих тачака (слика 3.7а).

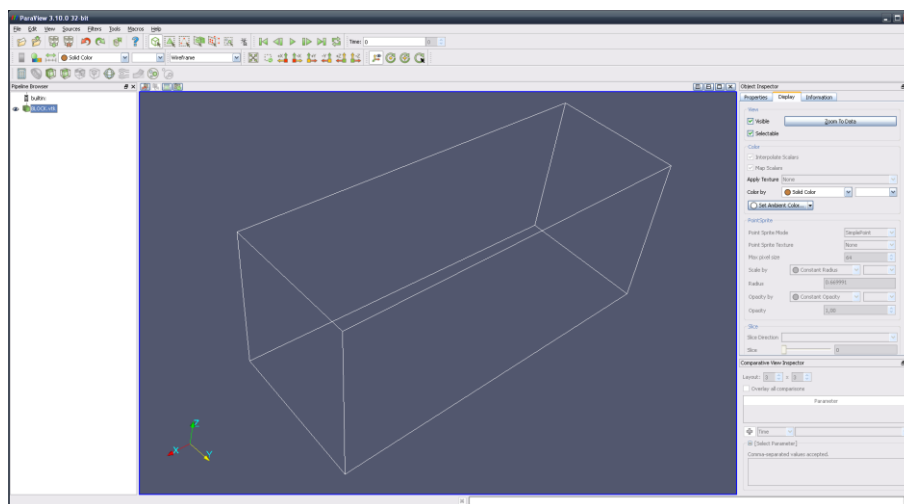
Софтвер учитава линије, нумеришући тачке и проверавајући да ли је нека од тачака већ претходно унета. Линије су записане преко бројева крајњих тачака. Уколико је тачка већ унета, додељује јој се јединствен број из листе учитаних тачака. Уколико тачка не постоји у листи унетих тачака, додељује јој се нов јединствен број.

Софтвер затим проверава у колико линија се јавља свака од учитаних тачака, а затим се праве комбинације од по три линије за које је посматрана тачка заједничка. За сваку од комбинација се проверава да ли даје могућ блок.

На крају се проверава да ли је нека од могућих комбинација дала блокове који су дуплирани. Генерисани блокови се записују у VTK датотеку у циљу дебагирања и употребе у другим софтверима заснованим на мултиблок методи (слика 3.7б).



(а)



(б)

Слика 3.6 – Сlike радног окружења: (а) Цртање блока у софтверу GOM Inspect и (б) Приказ ”транслираног” блока у софтверу ParaView

```

1 VDA001 = HEADER/20 00001000
2 ***** 00001010
3 VDAFS VERSION : 2.0 00001020
4 ----- DATA ABOUT SENDER ----- 00001030
5 SENDING COMPANY : 00001040
6 SENDER'S NAME : 00001050
7 TELEPHONE NR : 00001060
8 ADDRESS : 00001070
9 SENDING SYSTEM : ATOS TOPOMETRIC MEASUREMENT SOFTWARE 00001080
10 DATE : TUE FEB 18 18:31:33 2014 00001090
11 FILE NAME : C:\DOCUMENTS AND SETTINGS\USER\DESKTOP\BLOCKS\1B\EX00001100
12 ----- DATA ABOUT PART ----- 00001110
13 PROJECT NAME : 00001120
14 OBJECT CODE : 00001130
15 VARIANTS : 00001140
16 CONFIDENT : 00001150
17 DATE EFFECTIVE : 00001160
18 ----- DATA ABOUT RECEIVER ----- 00001170
19 COMPANY NAME : 00001180
20 RECEIV. NAME/DEPT : 00001190
21 ***** 00001200
22 B1000000 = PSET / 2, 00001210
23 -1.000000, 0.410322, -0.444520, 00001220
24 -1.000000, -0.335646, -0.441854, 00001230
25 B2000001 = PSET / 2, 00001240
26 -1.000000, 0.379723, 0.424187, 00001250
27 -1.000000, -0.336680, 0.416233, 00001260
28 B3000002 = PSET / 2, 00001270
29 1.000000, 0.364949, 0.429505, 00001280
30 1.000000, -0.375360, 0.381424, 00001290
31 B4000003 = PSET / 2, 00001300
32 1.000000, 0.413671, -0.438709, 00001310
33 1.000000, -0.375469, -0.429497, 00001320
34 B5000004 = PSET / 2, 00001330
35 1.000000, -0.375360, 0.381424, 00001340
36 1.000000, -0.375469, -0.429497, 00001350
37 B6000005 = PSET / 2, 00001360
38 -1.000000, 0.379723, 0.424187, 00001370
39 -1.000000, 0.410322, -0.444520, 00001380
40 B7000006 = PSET / 2, 00001390
41 -1.000000, 0.379723, 0.424187, 00001400
42 1.000000, 0.364949, 0.429505, 00001410
43 B8000007 = PSET / 2, 00001420
44 -1.000000, -0.336680, 0.416233, 00001430
45 1.000000, -0.375360, 0.381424, 00001440
46 B9000008 = PSET / 2, 00001450
47 -1.000000, -0.336680, 0.416233, 00001460
48 -1.000000, -0.335646, -0.441854, 00001470
49 B1000009 = PSET / 2, 00001480
50 -1.000000, -0.335646, -0.441854, 00001490
51 B1100010 = PSET / 2, 00001500
52 1.000000, 0.364949, 0.429505, 00001510
53 1.000000, 0.413671, -0.438709, 00001520
54 B1200011 = PSET / 2, 00001530
55 1.000000, 0.413671, -0.438709, 00001540
56 1.000000, 0.410322, -0.444520, 00001550
57 -1.000000, 0.410322, -0.444520, 00001560
58 VDA001 = END 00001600
59

```

(a)

```

1 # vtk DataFile version 3.0
2 Created by Blagojevic Milan & Knezevic Ljubica
3 ASCII
4 DATASET UNSTRUCTURED_GRID
5 POINTS 8 double
6 -0.100000E+01 0.410322E+00 -0.444520E+00
7 -0.100000E+01 -0.335646E+00 -0.441854E+00
8 -0.100000E+01 0.379723E+00 0.424187E+00
9 -0.100000E+01 -0.336680E+00 0.416233E+00
10 0.100000E+01 0.364949E+00 0.429505E+00
11 0.100000E+01 -0.375360E+00 0.381424E+00
12 0.100000E+01 0.413671E+00 -0.438709E+00
13 0.100000E+01 -0.375469E+00 -0.429497E+00
14 CELLS 1 9
15 8 2 0 1 3 4 6 7 5
16 CELL_TYPES 1
17 12
18

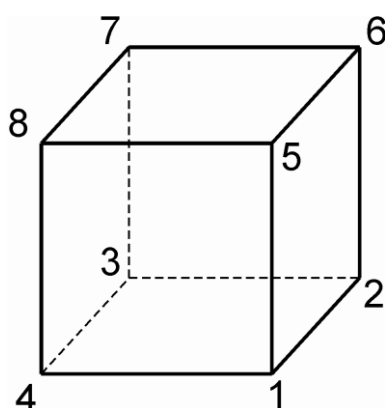
```

(б)

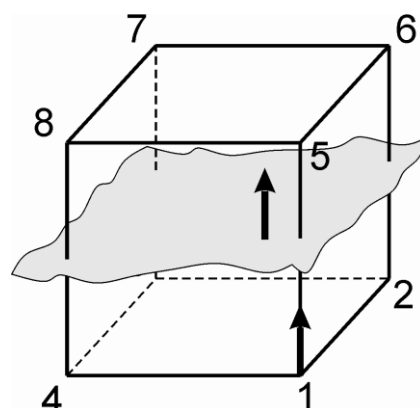
Слика 3.7 – Примери датотека: (а) VDA и (б) VTK

3.2.3 Најбитнији алгоритми софтвера STL2MESH

Локална нумерација блока у рачунском домену приказана је на слици 3.8. Темена блока су означена бројевима 1 до 8 у смеру одређеном правилем десне руке, при чему је база 1-2-3-4 испод базе 5-6-7-8. Локални правци у блоку означени су правцима страница $\overrightarrow{1-2}$, $\overrightarrow{1-4}$, и $\overrightarrow{1-5}$. Чворови на површи 5-6-7-8 се пројектују на полигонални модел.



(a)

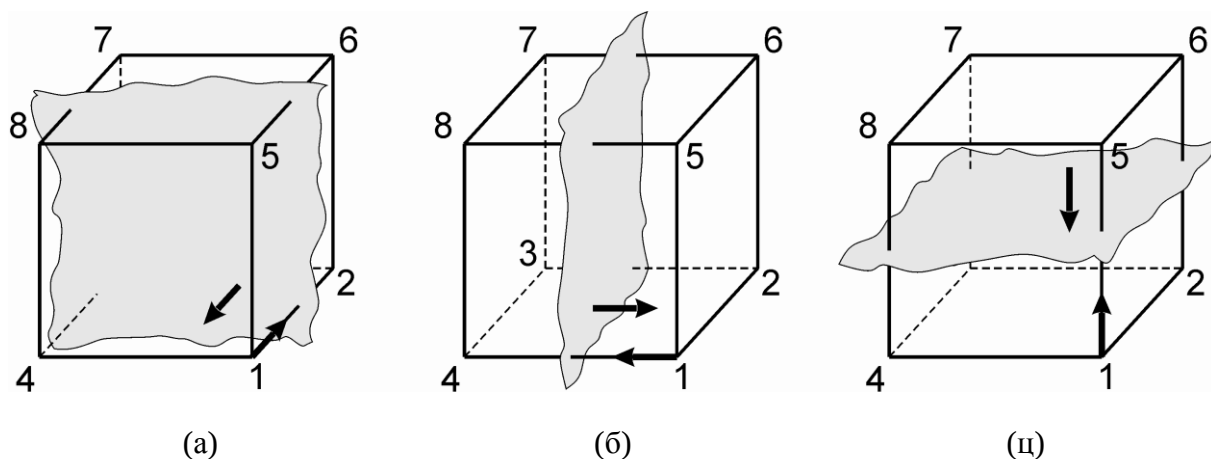


(б)

Слика 3.8 – Блок у софтверу STL2MESH: (а) означавање темена блока и (б) потребан распоред темена блока у односу на вектор спољашње нормале на површину

3.2.3.1 Оријентација блока

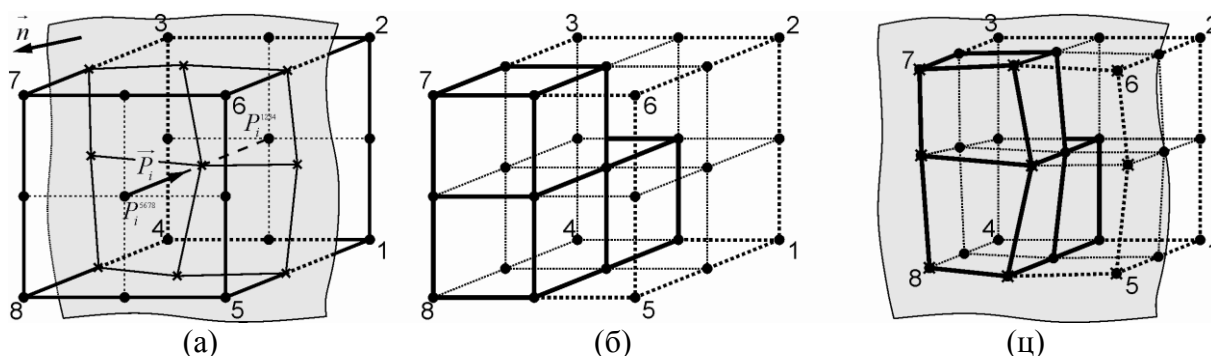
Провера оријентације и оријентисање блока врши се коришћењем вектора спољашње нормале на површ модели и вектора локалних праваца. У петљи по блоковима узима се један по један троугао полигоналне мреже и проверава да ли му се тежиште налази унутар блока. Уколико се налази, проверава се да ли постоји пресек неког локалног правца са полигоналном мрежом. Уколико блок обухвата полигоналну мрежу, постоји пресек бар једног локалног правца са полигоналном мрежом. У зависности од тога који је је пресек пронађен, покрећу се процедуре за трансформацију блока. Блок може бити оријентисан и тако да се површ 5-6-7-8 налази иза полигоналне површи (скаларни производ вектора спољашње нормале на површ и вектора правца $\overrightarrow{1-5}$ је позитиван). У овој петљи врши се ова провера и евентуална корекција распореда темена блока како би био задовољен услов.



Слика 3.9 – Оријентација блока коришћењем вектора спољашње нормале на површину и локалног правца блока: (а) $\overrightarrow{1-2}$, (б) $\overrightarrow{1-4}$ и (ц) $\overrightarrow{1-5}$

3.2.3.2 Одређивање тачке продора

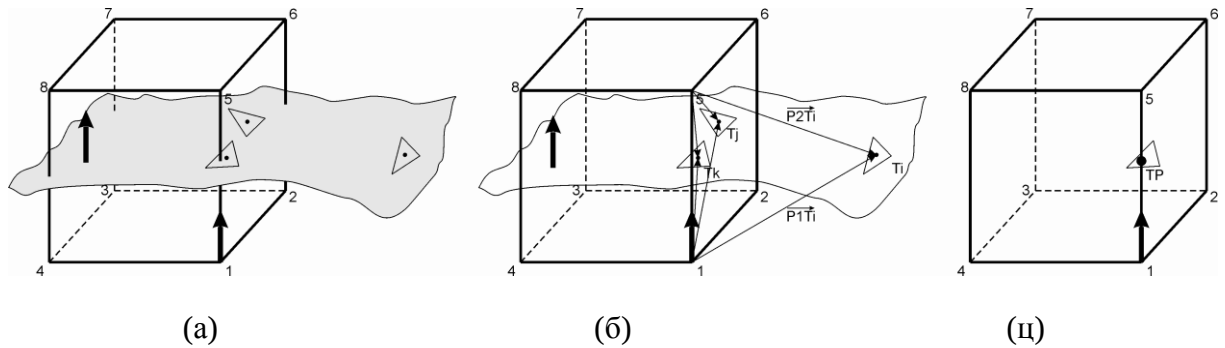
Концепт који софтверу STL2MESH омогућава рад над полигоналним мрежама је одређивање тачке продора произвољног правца кроз полигоналну мрежу. Тачку продора је потребно одредити при оријентацији блока (слика 3.10а), као и при пројектовању тачака са површи 5-6-7-8 на полигонални модел (слика 3.10б и 3.10ц).



Слика 3.10 – Одређивање тачке продора: (а) при оријентацији блока, (б), (ц) при пројектовању површи 5-6-7-8 на полигонални модел

У даљем тексту описано је одређивање тачке продора и провера да ли се тачка налази унутар текућег троугла полигоне мреже.

Полигони модел површине састоји се од великог броја троуглова (слика 3.11а). Одређивање тачке продора за сваки од троуглова захтевало би велики број непотребних израчунавања, па се број троуглова који долазе у обзир да садрже тачку продора умањује провером да ли је растојање тежишта текућег троугла мање или једнако растојању између тачака које одређују посматрани правац (слика 3.11б). На пример, уколико проверавамо да ли страница 1-5 (локални правац 1-5) продире модел, растојање од темена 1 и 5 до тежишта троуглова не сме бити веће од међусобног растојања тих темена. На овај начин обезбеђено је да проверавамо да ли постоје тачке продора само за троуглове који леже у области пресека две сфере полупречника $\left| \overline{1-5} \right|$, са центрима у теменима 1 и 5. Када утврдимо да неки троугао задовољава овај критеријум, тачка продора се одређује као пресек неког правца, на пример локалног правца 1-5, и равни троугла која је одређена “вектором нормале троугла” (слика 3.11ц).



Слика 3.11 – Одређивање тачке продора правца $\left| \overline{1-5} \right|$ и равни троугла

Израчуната тачка продора може али не мора припадати посматраном троуглу, па проверавамо где се у равни троугла налази тај продор.

Посматрамо k-ти троугао у полигоној мрежи добијеној 3D скенирањем. Тежиште троугла је тачка T_k , а темена троугла су T_{1k} , T_{2k} и T_{3k} . Вектор нормале на раван троугла $\overrightarrow{N_k}$ има смер одређен правилом десне руке у односу на нумерацију чворова.

Тачка продора правца $\overline{P_1P_2}$ означена је са TP (слика 3.12).

Да би проверили да ли се тачка продора налази унутар троугла, генеришемо векторе страница $\overline{T_1T_2}$, $\overline{T_2T_3}$ и $\overline{T_3T_1}$ и нормала на странице у равни троугла:

$$\overrightarrow{N_1} = \frac{\overline{T_1T_2}}{\left| \overline{T_1T_2} \right|} \quad (3.77)$$

$$\overrightarrow{N_2} = \frac{\overline{T_2T_3}}{\left| \overline{T_2T_3} \right|} \quad (3.78)$$

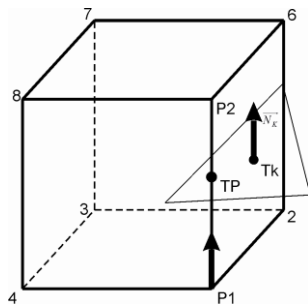
$$\overrightarrow{N_3} = \frac{\overline{T_3T_1}}{\left| \overline{T_3T_1} \right|} \quad (3.79)$$

Тачка продора налази се унутар области ограничене страницама троугла уколико су истовремено испуњени следећи услови:

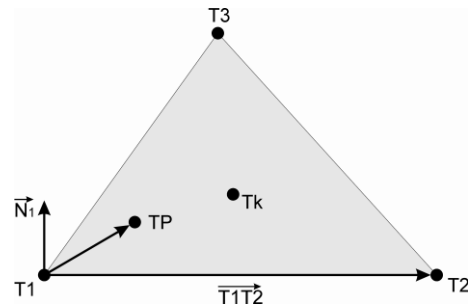
$$\vec{N}_1, \vec{T_{1k}TP} > 0 \quad (3.80)$$

$$\vec{N}_2, \vec{T_{2k}TP} > 0 \quad (3.81)$$

$$\vec{N}_3, \vec{T_{3k}TP} > 0 \quad (3.82)$$



(a)



(б)

Слика 3.12 – Провера тачке продора: (а) пример дефинисања правца и (б) дефинисање скаларног производа (3.80)

4. Генерисање модела

За генерисање нумеричког модела коришћена је каведарска мандибула и према њој направљена тотална протеза.

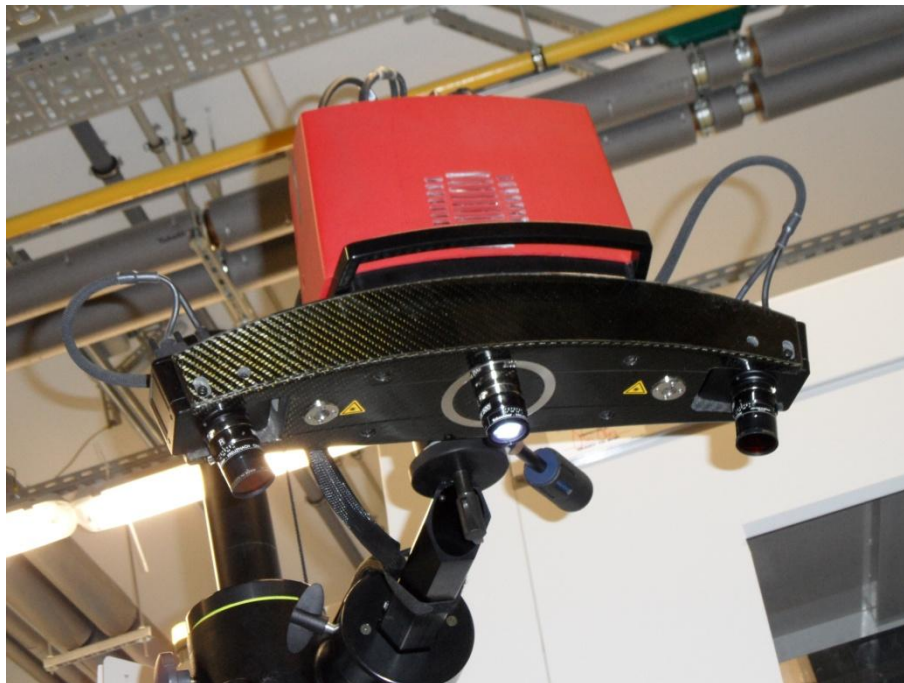
У овом поглављу објашњен је поступак 3D дигитализације физичких модела мандибуле и тоталне протезе, трансформација ових модела у жељени координатни систем, конструисање блокова и моделирање резилијентног слоја. На крају су дискутовани гранични услови, приказан је целокупан модел, састављен од мандибуле, резилијентног слоја и тоталне протезе и извршена је провера квалитета мреже.

4.1 Израда модела и 3D дигитализација

Поступак израде тоталне протезе се састоји из следећих процедура:

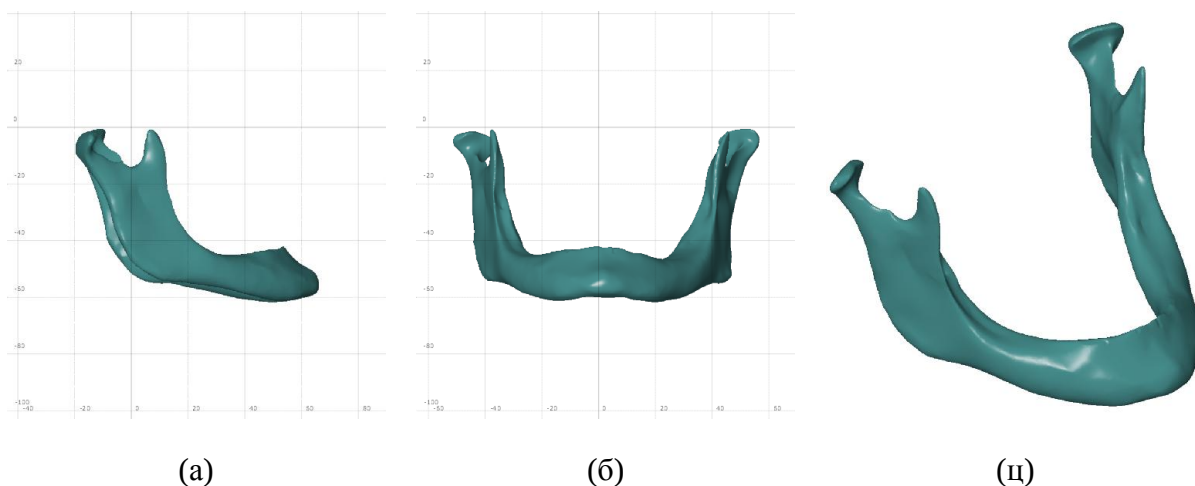
- узима се отисак безубе вилице и излива се модел од гипса који верно репродукује стање у устима,
- на том моделу се направе шаблони од воска које ће омогућити да се код пацијената одреди однос доње вилице према горњој,
- постављају се зуби у воску,
- воштани модел протезе са зубима се преводи у акрилат (поново се улива гипс и прави се нека врста калупа која ће омогућити да се у калуп улије акрилат, а врелом водом се елиминише восак).

Модел мандибуле и тоталне протезе добијен је 3D дигитализацијом оптичким мерним системом ATOS (GOM, Немачка) (слика 4.1) [15].

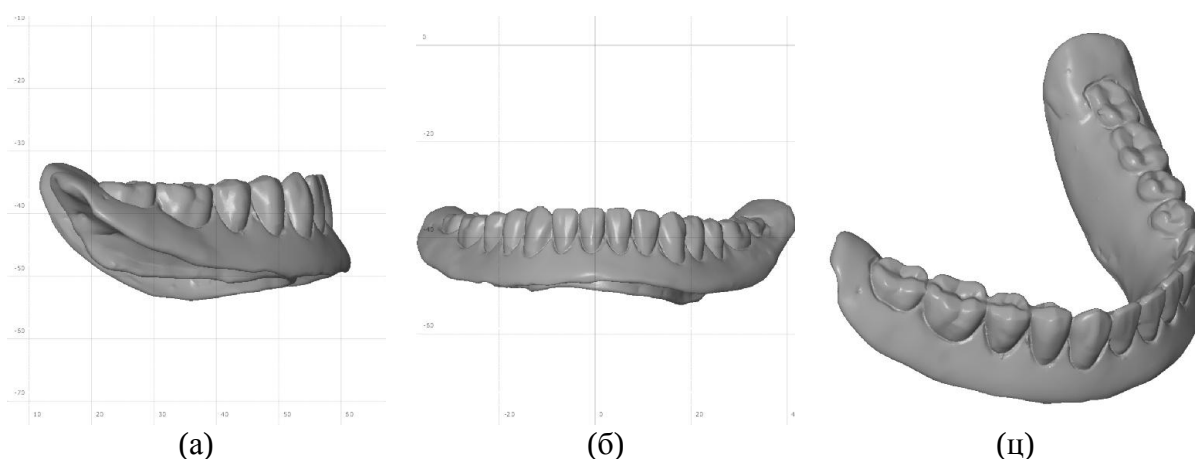


Слика 4.1 –Оптички мерни систем ATOS

На слици 4.2 приказан је 3D модел каведерске мандибуле, а на слици 4.3 3D модел тоталне протезе.



Слика 4.2 - Мандибула: (а) сагитална раван, (б) фронтална раван, (ц) изометријски поглед



Слика 4.3 - Тотална протеза: (а) сагитална раван, (б) фронтална раван, (ц) изометријски поглед

4.2 Трансформација полигоналних модела у жељени координатни систем

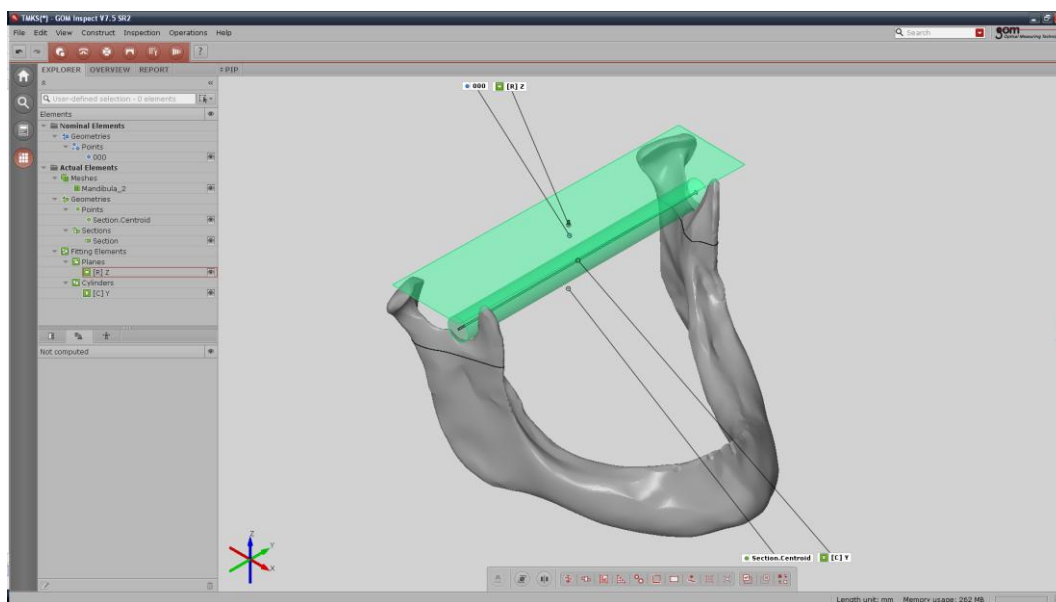
Модел добијени 3D дигитализацијом леже у координатним системима који су одређени првим индивидуалним мерењем [15]. У општем случају, овако дефинисани полигонални модели нису употребљиви за даље моделирање, већ их је потребно трансформисати у жељени координатни систем. Будући да за овакве проблеме не постоји опште прихваћен координатни систем, инжењер треба да изабере погодан координатни систем тако да даље моделирање буде што лакше.

Трансформација модела у жељени координатни систем извршена је у два корака.

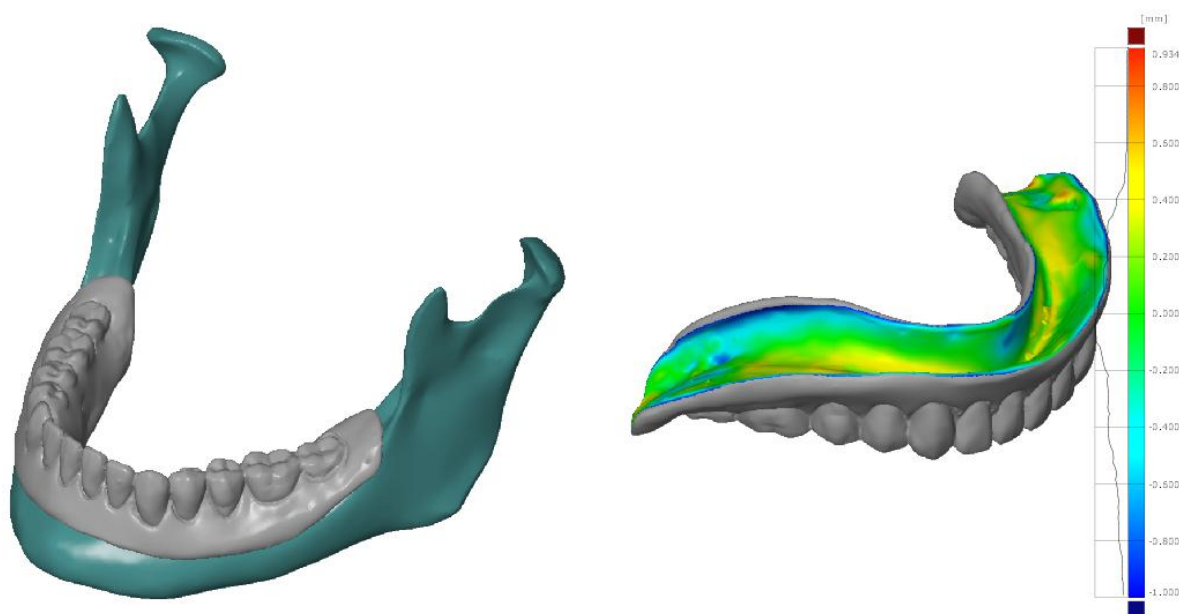
У првом кораку модел мандибуле је трансформисан прелиминарно методом Раван-Линија-Тачка (Plane-Line-Point Transformation) (слика 4.4). Сврха овог корака је да се на неки начин дефинише међусобни положај мандибуле и тоталне протезе, па је модел тоталне протезе трансформисан у координатни систем мандибуле методом најбољег поклапања (Best-Fit Transformation) (слика 4.5а). Да би проверили да ли је трансформација успешно извршена, одређено је поље одступања модела тоталне протезе у односу на модел мандибуле (слика 4.5б). Са хистрограма на слици 4.6б се

види да су највише заступљена одступања блиска нули, из чега закључујемо да је модел тоталне протезе правилно постављен у односу на модел мандибуле.

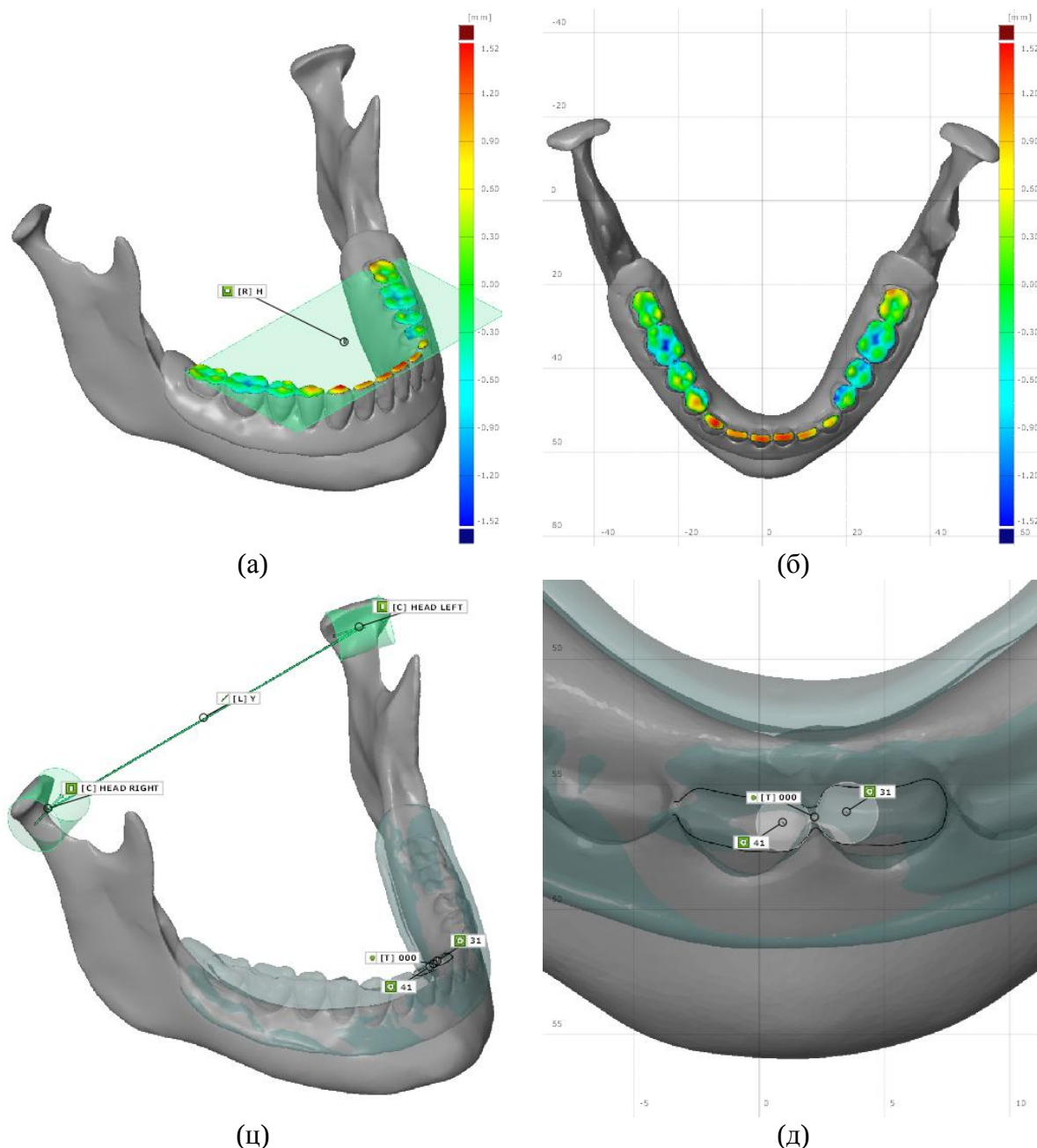
У другом кораку извршена је истовремена трансформација модела мандибуле и тоталне протезе у заједнички координатни систем, одабран тако да задавање граничних услова буде што једноставније. Трансформација је и овде извршена методом Раван-Линија-Тачка. Раван је усвојена тако да садржи врхове свих зуба, да би се поједноставило задавање оптерећења на моделу (слика 4.6а, 4.6б). Линија је усвојена тако да садржи главе мандибуле да би се осигурало да раван симетрије модела буде паралелна са сагиталном равни (слика 4.6ц). Тачка је усвојена тако да се налази између зуба 3.1 и 4.1 (слика 4.6д).



Слика 4.4 – Прелиминарна трансформација модела мандибуле



Слика 4.5 - модел тоталне протезе и мандибуле: (а) прелиминарна оријентација, (б) Одступање површине мандибуле у односу на површину тоталне протезе



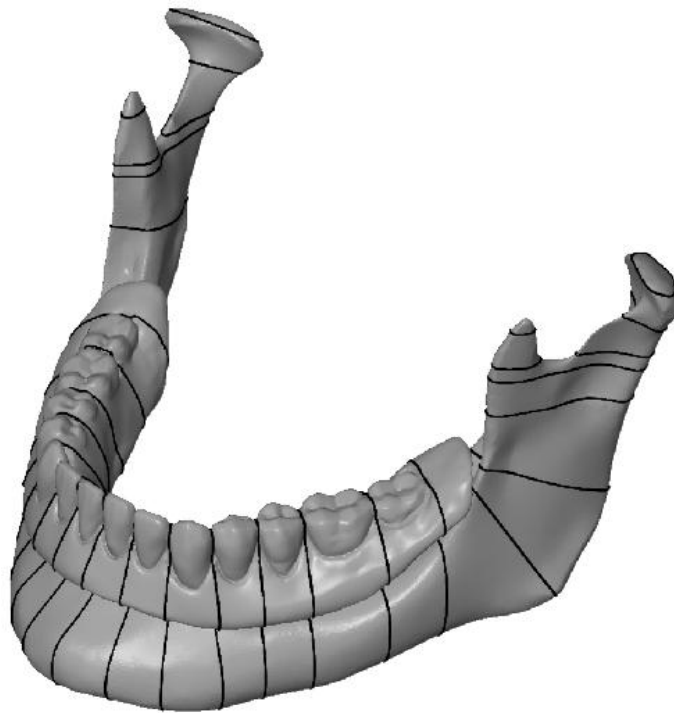
Слика 4.6 – Дефинисање геометријских ентитета:
(а), (б) раван, (ц) линија, и (д) тачка

4.3 Конструисање блокова

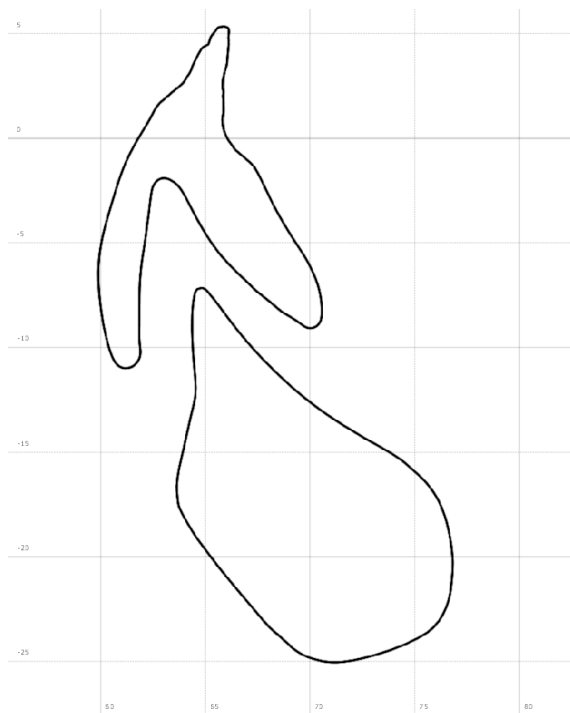
Као што је раније већ наведено, за конструисање блокова примењен је нов приступ заснован на коришћењу софтвера GOM Inspect. Да би било могуће моделирати резилијенти слој, чију геометрију немамо, потребно је да топологије блокова мандибуле и тоталне протезе буду компатибилне. То је постигнуто истовременим конструисањем блокова за оба модела.

Најпре је подешено да дебљина резилијентног слоја буде 5 mm просторним транслирањем модела тоталне протезе у односу на модел мандибуле. На моделу је направљен извесан број пресека постављених између зуба (на тоталној протези и

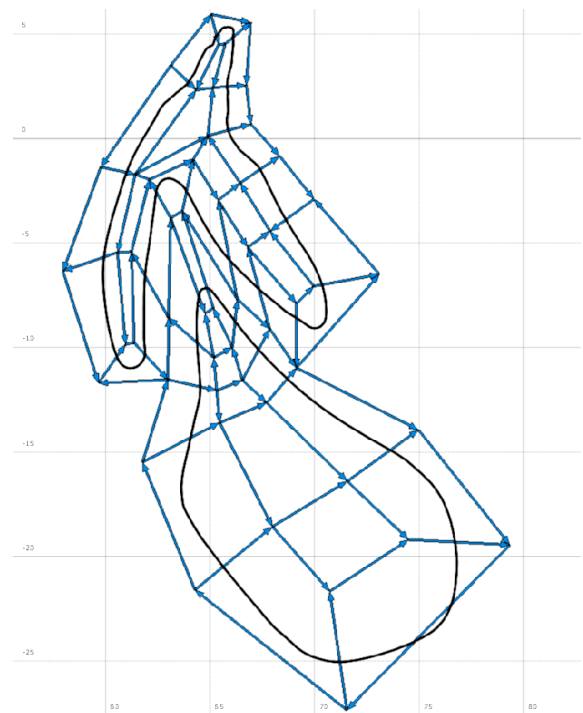
мандибули), као и са још 8 пресека на мандибули (слика 4.7а, 4.7б). У сваком пресеку дефинисана је униформна тзв. топологија блокова, ошто значи да је усвојен распоред блокова примењен у сваком пресеку (слика 4.7ц).



(а)



(б)

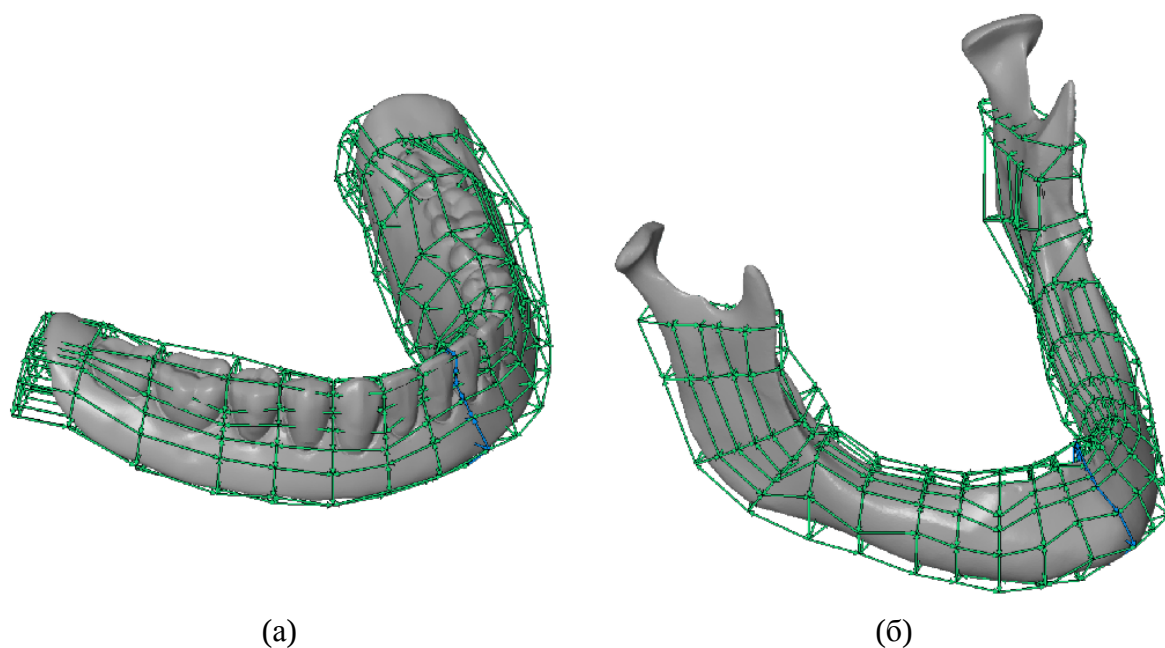


(ц)

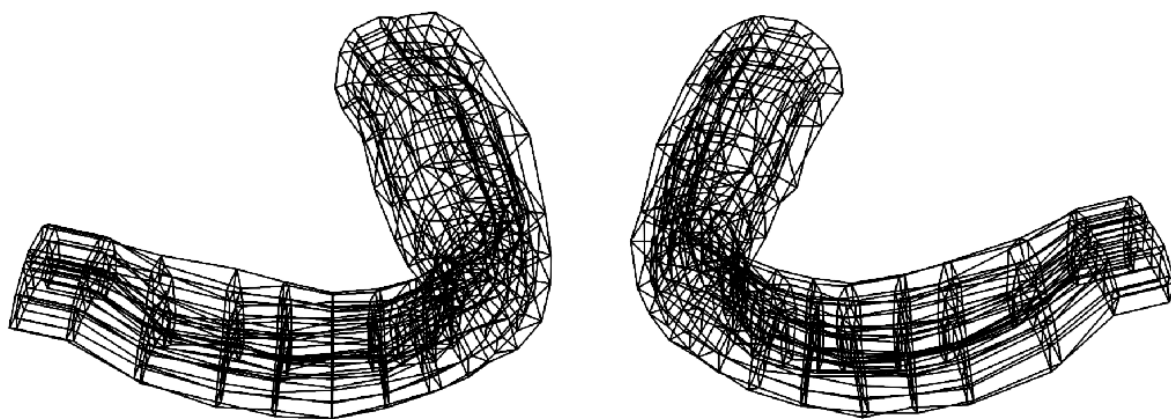
Слика 4.7 – Дефинисање пресека на моделу: (а) модел са пресецима, (б) пример пресека ($Y=0$) и (ц) топологија блокова у пресеку $Y=0$

Спајањем одговарајућих темена у суседним пресецима добија се структура која представља блокове који ограничавају моделе тоталне протезе и мандибуле (слика 4.8).

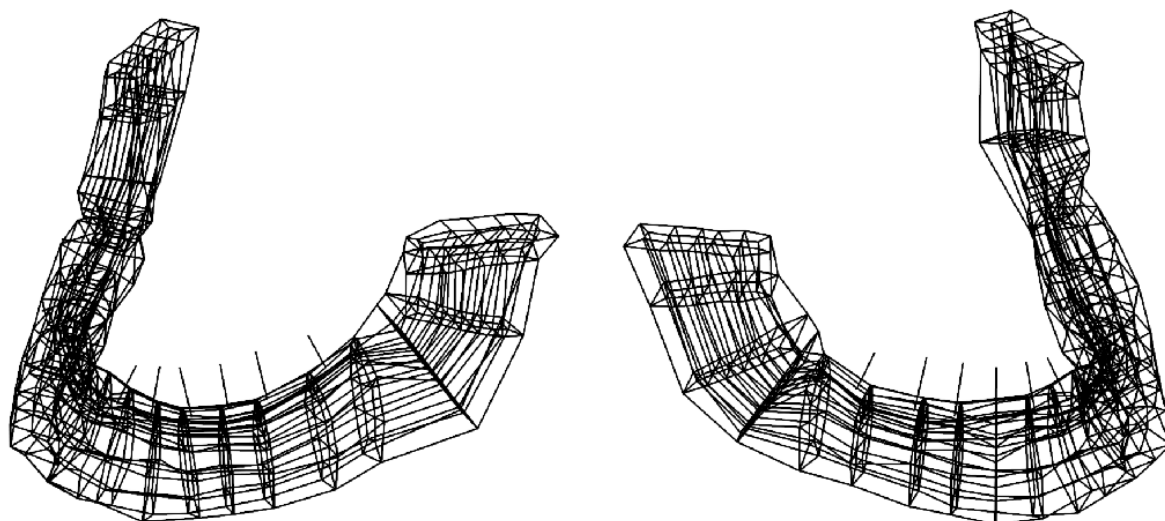
Конструисани блокови се записују из софтвера GOM Inspect у VDA датотеке, по једна за мандибулу и тоталну протезу. У софтверу STL2MESH извршена је конверзија ове датотеке у VTK датотеку, чиме добијамо блокове за тоталну протезу (слика 4.9) и мандибулу (слика 4.10) који су употребљиви за даљи рад у софтверу STL2MESH. Поклапање блокова једног и другог модела је остварено, што је од изузетне важности за генерисање модела резилијентног слоја (слика 4.11).



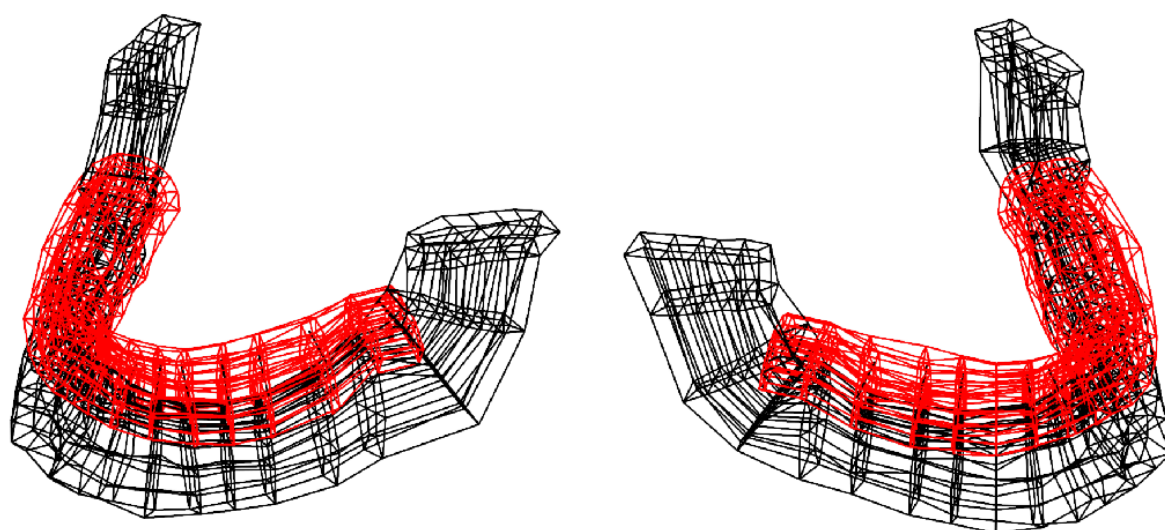
Слика 4.8 – Блокови: (а) модел тоталне протезе, (б) модел мандибуле



Слика 4.9 – Блокови конструисани за модел тоталне протезе



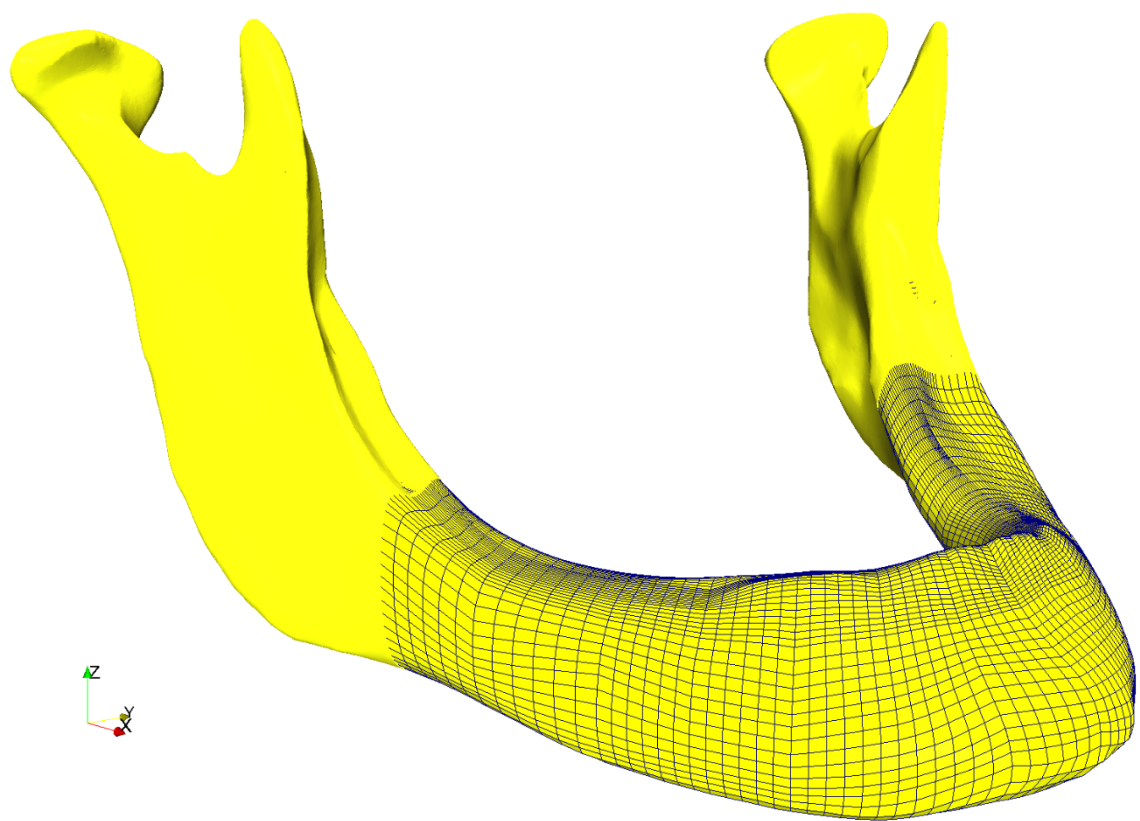
Слика 4.10 – Блокови конструисани за модел мандибуле



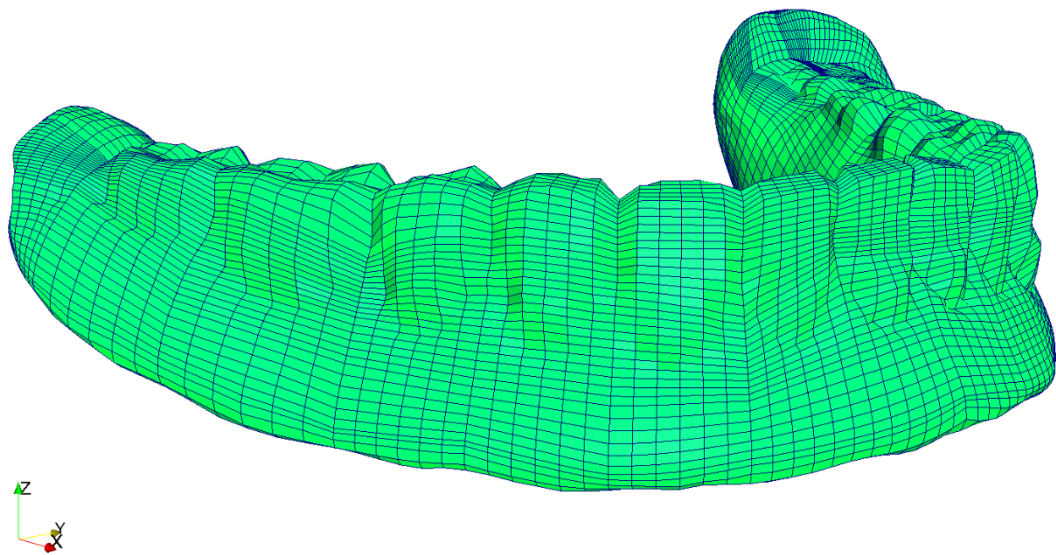
*Слика 4.11 – Блокови конструисани за
моделе тоталне протезе, резилијентног слоја и мандибуле*

На основу блокова генерисаних приказани начин, добијени су модели коначних елемената мандибуле и тоталне протезе (слика 4.12). Модел коначних елемената мандибуле састоји се од 76032 осмочворна изопараметарска 3D коначна елемента и 120736 чворова.

Модел коначних елемената тоталне протезе састоји се од 93528 осмочворних изопараметарских 3D коначних елемената и 148519 чворова.



(a)



(б)

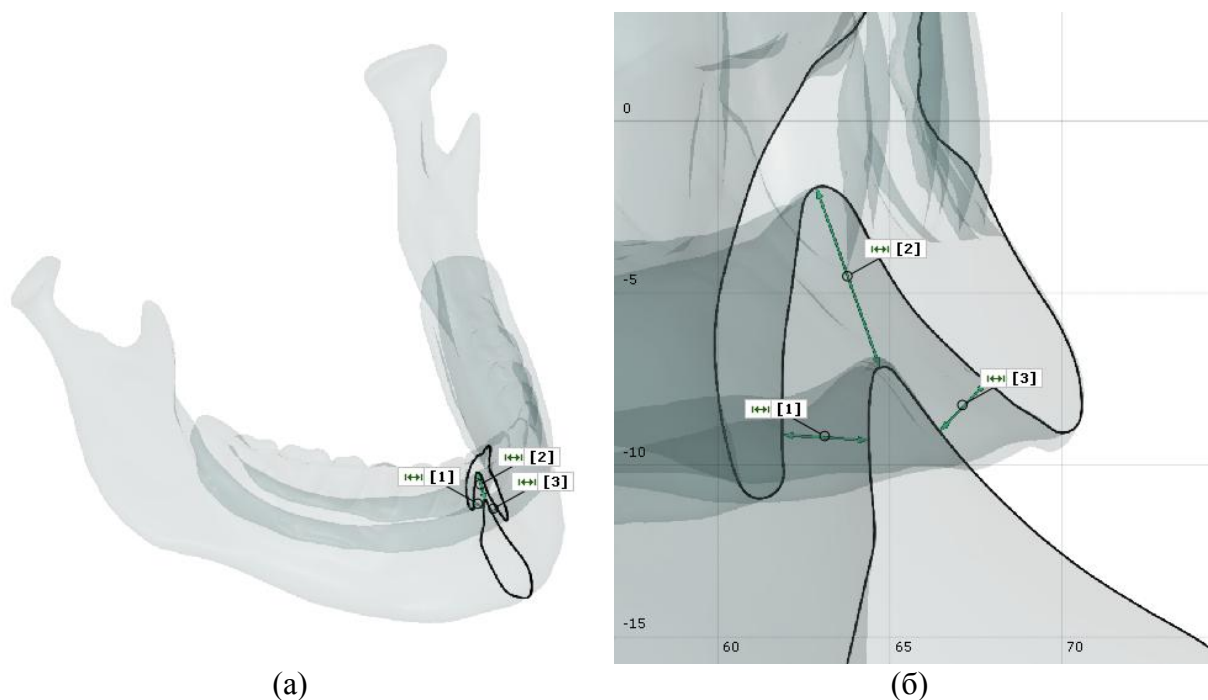
Слика 4.12 – Модели коначних елемената: (а) мандибула, (б) тотална протеза

4.4 Моделирање резилијентног слоја

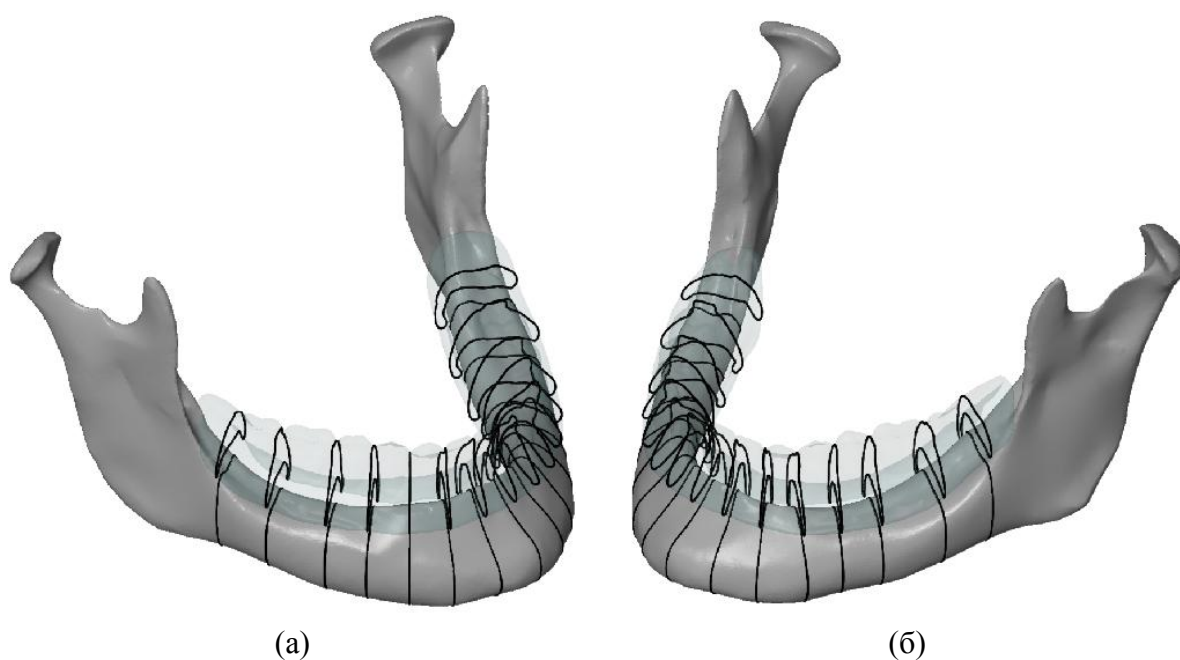
Између мандибуле и тоталне протезе налази се слузокожа, која може бити нерезилијентна (чија је дебљина 1 mm), умерено резилијентна (чија је дебљина 3 mm) и резилијентна (чија је дебљина 5 mm). Вредности Поасоновог коефицијента и модула еластичности за све три врсте слузокоже дате су у табели 2.3.

Приликом моделирања резилијентног слоја јавља се проблем да није могуће остварити теоријске дебљине слузокоже на целом контакту тоталне протезе и мандибуле (слика 4.13а). Када се тотална протеза подиже вертикално на више, на пример за 1, 3 или 5 mm, растојање између мандибуле и тоталне протезе је 1, 3 или 5 mm само на месту 2, док је на местима 1 и 3 пропорционално косинусима углова између правца вертикале и правца нормале на линију пресека у свакој тачки (слика 4.13б). То значи, да ако мандибулу померамо навише за 1, 3 или 5 mm, растојања 1 и 3 ће увек да буду краћа од растојања за које подигнемо мандибулу. На пример, ако је тотална протеза је подигнута за 3 mm у односу на иницијалну конфигурацију (где су се одговарајуће површине мандибуле и протезе поклапале), растојање 2 је 3 mm, али растојања 1 и 3 не могу да буду 3 по mm, јер се одговарајуће површине не удаљавају у правцу нормале на површину. Практично само на врху гребена (тачка 2) је могуће остварити потребну вредност дебљине слузокоже.

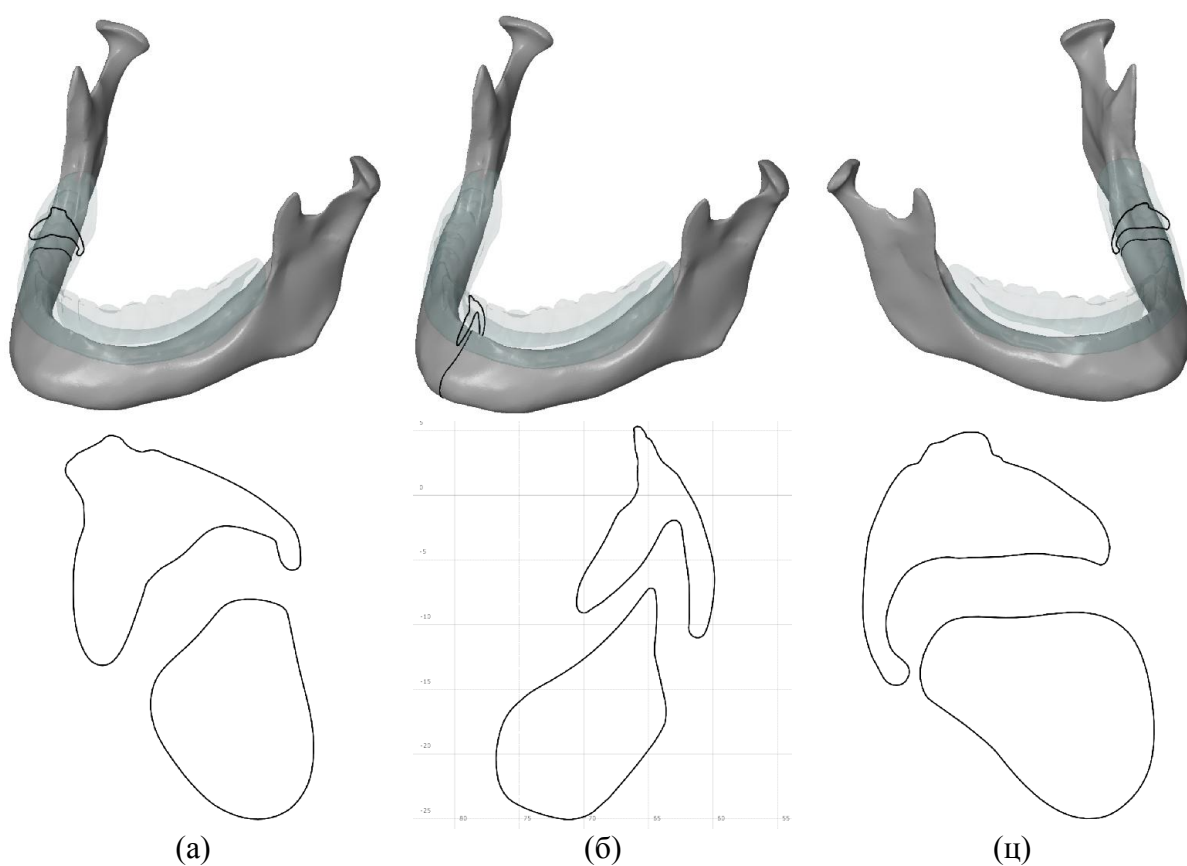
Ако посматрамо ситуацију у усној дупљи то приближно изгледа тако. Иако је резилијенца индивидуална, углавном је највећа на врху гребена па се онда смањује дуж гребена. Проблем постаје компликованији када се узме у обзир и чињеница да се и пресеци дуж мандибуле и тоталне протезе међусобно раликују (слика 4.14). Због тога су, у договору са стоматологом, усвојена 3 контролна пресека, у којима су на врху гребена задржане жељене вредности дебљине слузокоже (слика 4.15). Контролни пресеци су усвојени тако да одговарају местима задавања оптерећења.



Слика 4.13 - Дефинисање дебљине резилијентног слоја: (а) положај контролног пресека, (б) карактеристичне дужне



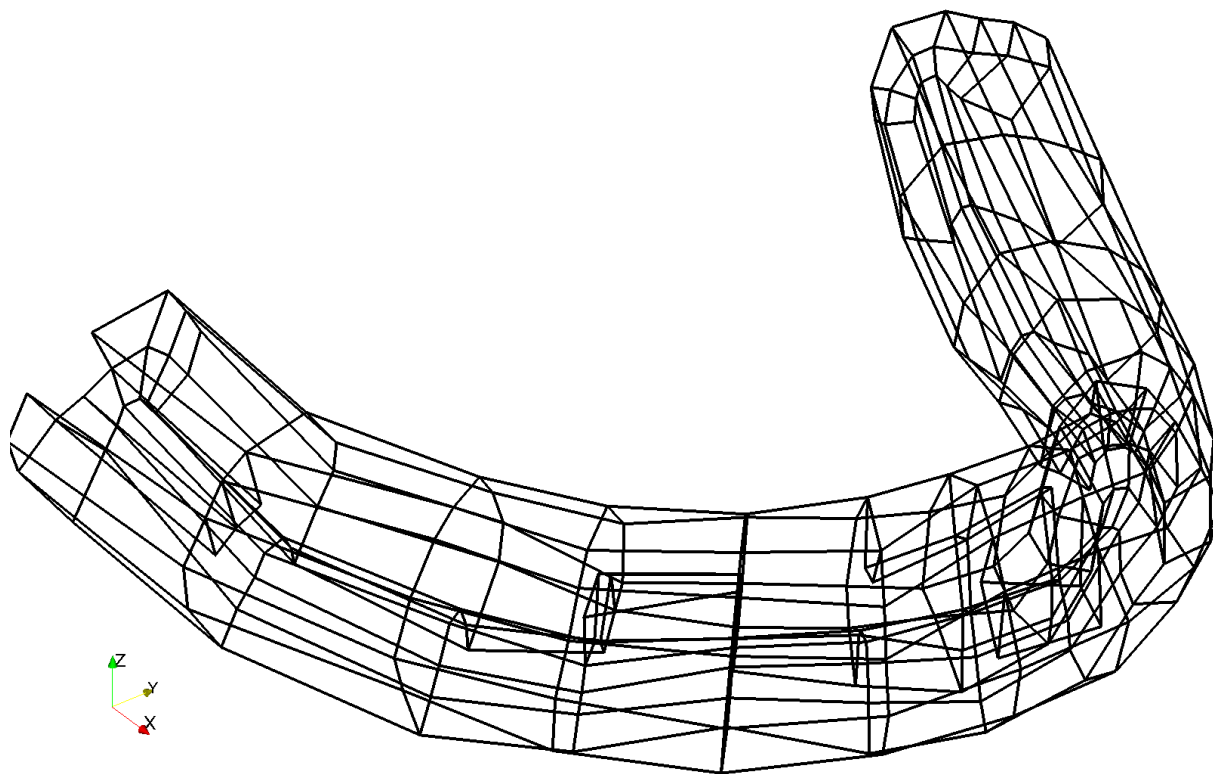
Слика 4.14 - Однос дебљина резилијентног слоја у свим заједничким пресецима мандибуле и тоталне протезе



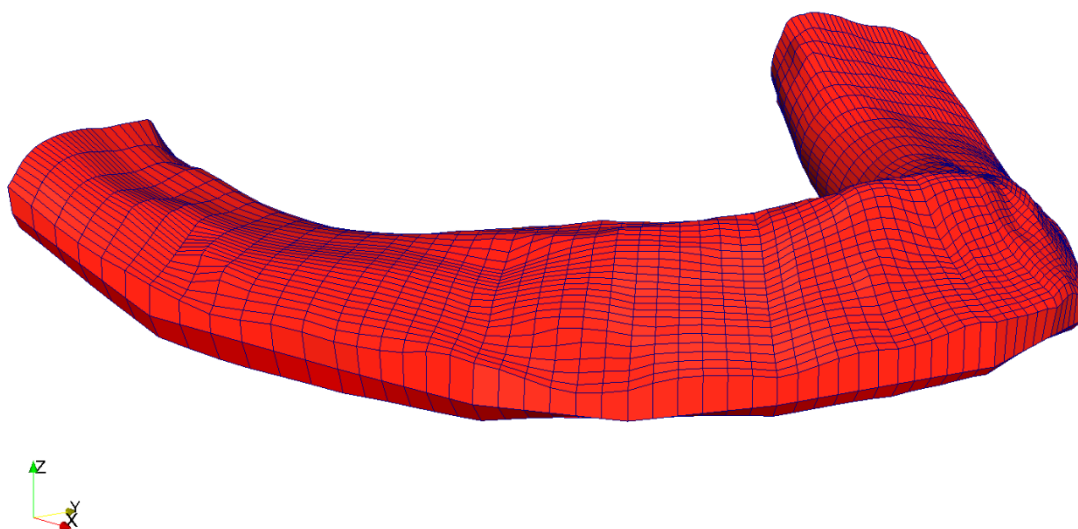
Слика 4.14 - Дебљина резилијентног слоја у контролним пресецима

Затим су на основу пресека дефинисаних за мандибулу и тоталну протезу конструисани блокови (слика 4.16) и на основу њих је генерисан модел коначних елемената. Модел

резилијентног слоја верно описује сложену геометрију гребена мандибуле и површине налегања тоталне протезе. Модел резилијентног слоја дебљине 5mm приказан је на слици 4.17. Модел коначних елемената резилијентног слоја састоји се од 6048 осмочворних изопараметарских 3D коначних елемената и 9440 чворова.



Слика 4.16 – Блокови за модел резилијентног слоја



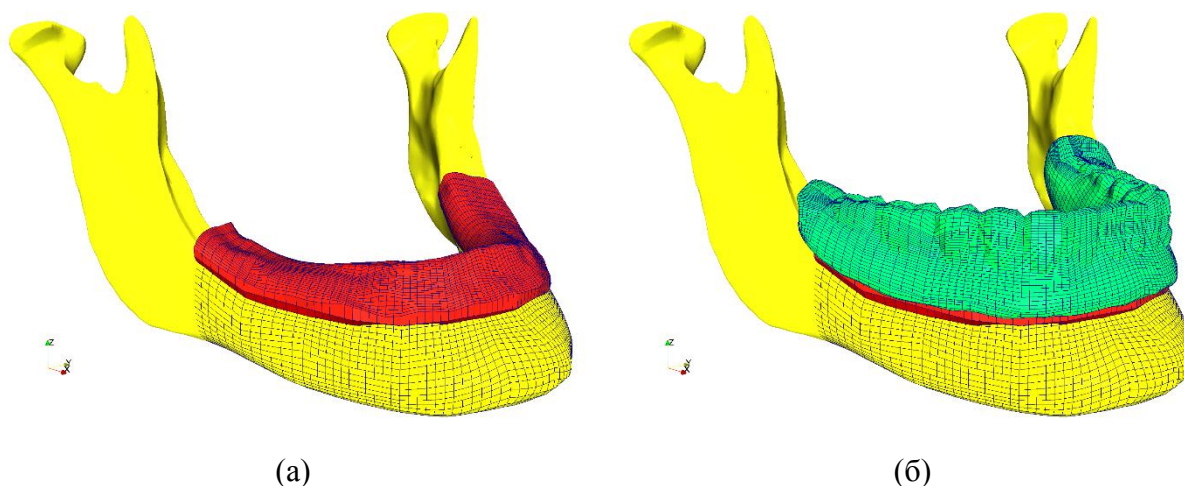
Слика 4.17 – Модел коначних елемената резилијентног слоја

4.6. Модел склопа састављеног од мандибуле, резилијентног слоја и тоталне протезе

Коришћењем претходно добијених модела, направљена су три модела склопа мандибула - резилијентни слој - тотална протеза варирањем дебљине резилијентног слоја:

1. дебљина резилијентног слоја (растојање мандибуле од тоталне протезе) је 1 mm,
2. дебљина резилијентног слоја је 3 mm и
3. дебљина резилијентног слоја је 5 mm (слика 4.18).

За потребе истрживања направљена су сва три модела али је у овом завршном раду анализа дата само за дебљину резилијентног слоја од 5 mm.



Слика 4.18 – Модели склопа (а) модел мандибула – резилијентни слој, (б) модел мандибула – резилијентни слој – тотална протеза

Провера квалитета мреже извршена је у софтверу FEMAP. Према критеријуму Јакобијана, није било елемената који не задовољавају у погледу квалитета мреже.

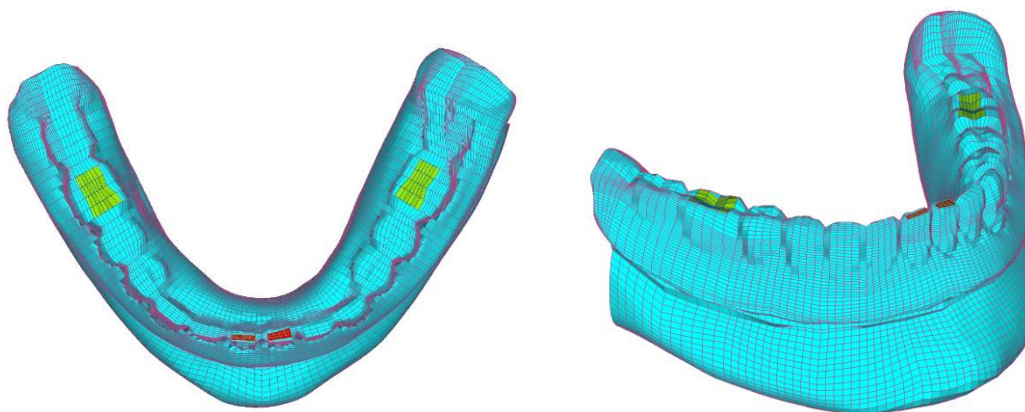
4.7. Задавање механичких карактеристика

Дебљине кортикалне кости мандибуле су различите: у пределу очњака и преткутњака имамо једну вредност, у пределу I и II преткутњака другу и тако редом. Међутим, уколико је у моделу компликовано да се на овај начин дефинише дебљина компактне кости, у литератури се узимају средње вредности дебљине кортикалне кости (2 mm за дебљину кости са спољашње стране и 3 mm за дебљину са унутрашње стране). У нашем моделу мандибула је моделирана веома реално коришћењем измерених дебљина кортикалне кости, датих у табели 2.3.

Будући да је тотална протеза саграђена од акрилата у који су уметнути акрилатни зуби, моделирана је као хомогена структура. Вредности механичких карактеристика за акрилат и акрилатне зубе приказани су у табели 2.3.

4.8 Задавање оптерећења

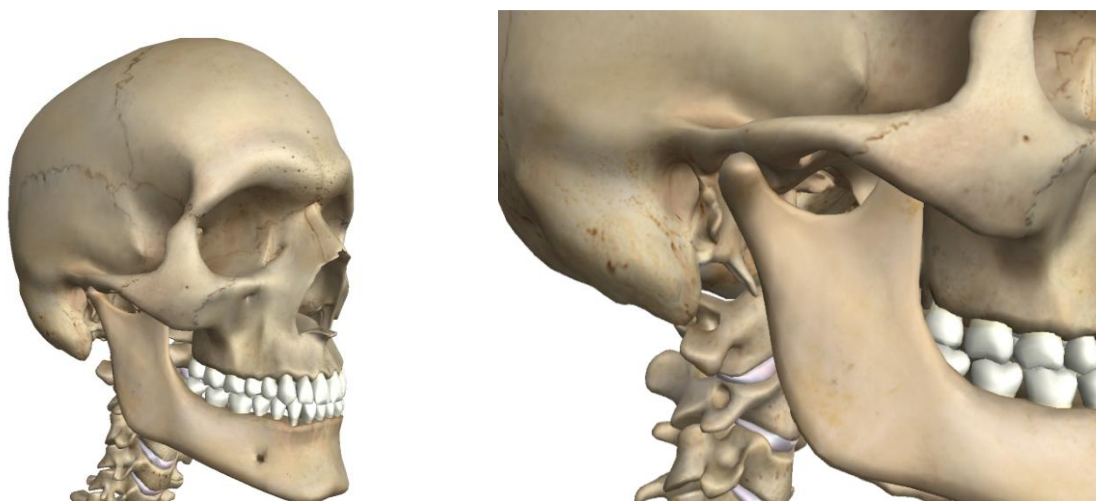
Модел се најпре оптерећен само у пределу сечивних ивица доњих централних секутића (доња лева и десна јединица) са вертикалним оптерећењем од 120 N, имитирајући вертикалне силе услед жвакања (слика 4.19). Црвеном бојом означен је први случај оптерећења, а зеленом бојом други случај оптерећења.



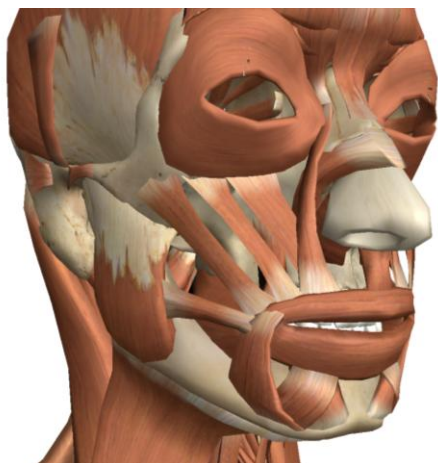
Слика 4.19 – Места задавања оптерећења

4.7.2 Задавање ограничења

Глава мандибуле се може посматрати као непокретан зглоб (слика 4.20). Постоје два таква зглоба, са леве и са десне стране, формирајући осу око које мандибула ротира. Мишићи који учествују у покретању мандибуле могу се посматрати као покретни ослонци, који ограничавају покретање мандибуле у вертикалном и бочном правцу (слика 4.21). Иако представља идеализацију реалног стања, са тачношћу довољном да се ухвате сви феномени који се јављају у области контакта мандибуле и тотале протезе преко резилијентног слоја, може се узети да је тело мандибуле укљештено (слика 4.22).



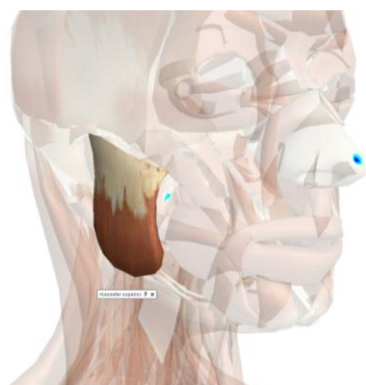
Слика 4.20 – Глава мандибуле



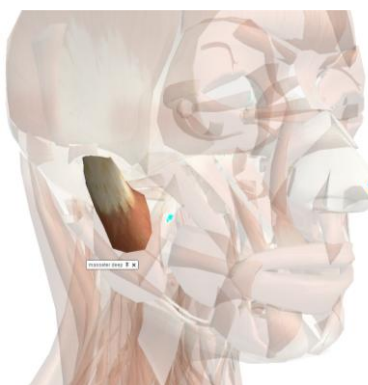
(a)



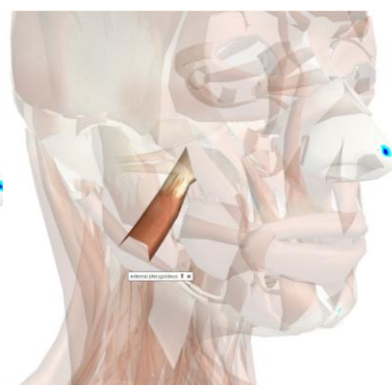
(б)



(ц)

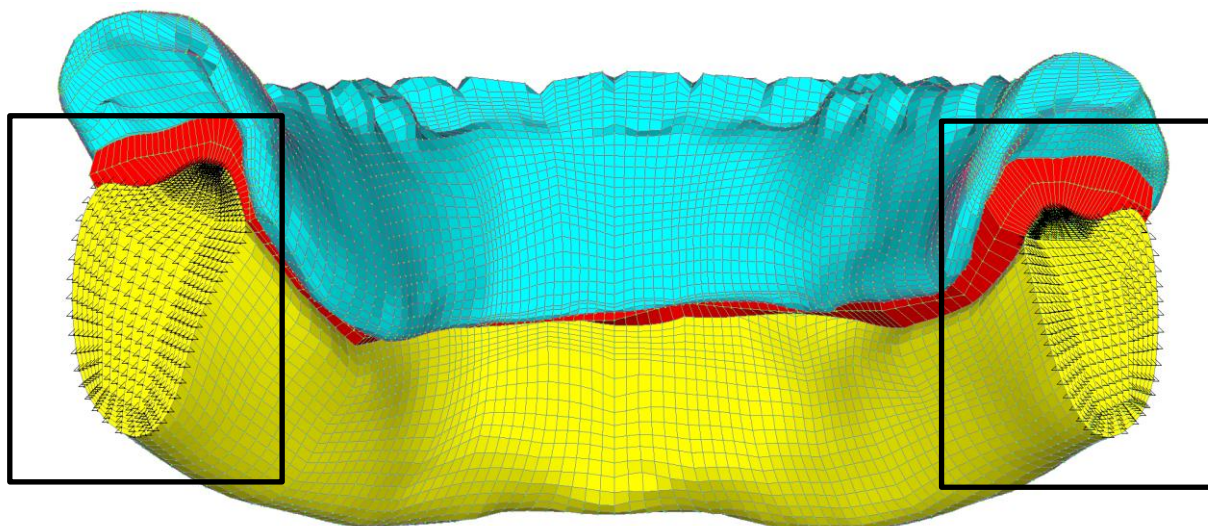


(д)



(е)

Слика 4.21 - Покретни ослонци: Мишићи који доминантно учествују у покретању мандибуле



Слика 4.22 – Места задавања ограничења

5. Резултати

Нумеричка анализа дистрибуције мастикаторног напона на потпорна ткива код слузокожно подупртих зубних надокнада извршена је у софтверу ПАК [12].

Резултати анализе приказани су у табелама 5.1 до 5.3. У случају задавања оптерећења на местима секутића, највећи напон се јавља у зони испод места задавања оптерећења:

- модел мандибуле: на површини контакта са резилијентним слојем,
- модел резилијентног слоја: на површини контакта са мандибулом и
- модел тоталне протезе: унутар акрилатног зуба,

док се у случају задавања оптерећења на местима кутњака, највећи напон јавља:

- модел мандибуле: са леве стране, на површини контакта са резилијентним слојем,
- модел резилијентног слоја: са леве оралне стране на површини контакта са мандибулом и
- код тоталне протезе: са десне стране, унутар акрилатног зуба.

Табела 5.1 – Резултати прорачуна нормалног оптерећења на мандибулу

Зуб	Дебљина слузокоже [mm]	Максимални напон [MPa]
Секутић	1	46,55
	3	43,29
	5	26,96
Кутњак	1	60,36
	3	/
	5	50,09

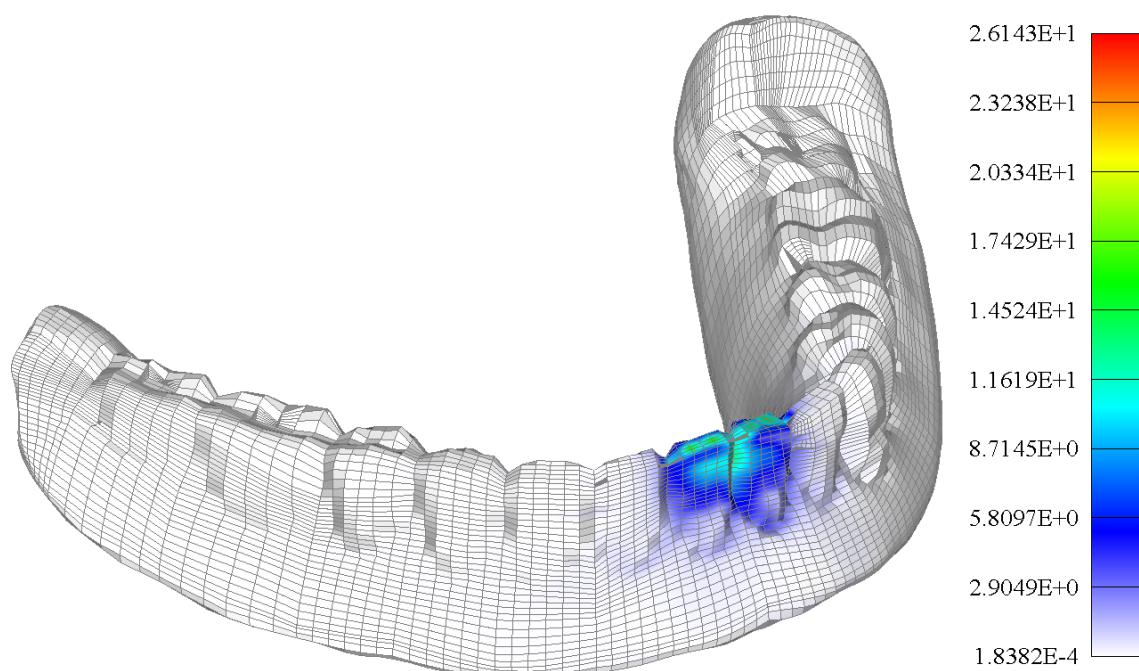
Табела 5.2 - Резултати прорачуна нормалног оптерећења на резилијентни слој

Зуб	Дебљина слузокоже [mm]	Максимални напон [MPa]
Секутић	1	16,24
	3	1,283
	5	0,419
Кутњак	1	2,039
	3	/
	5	0,899

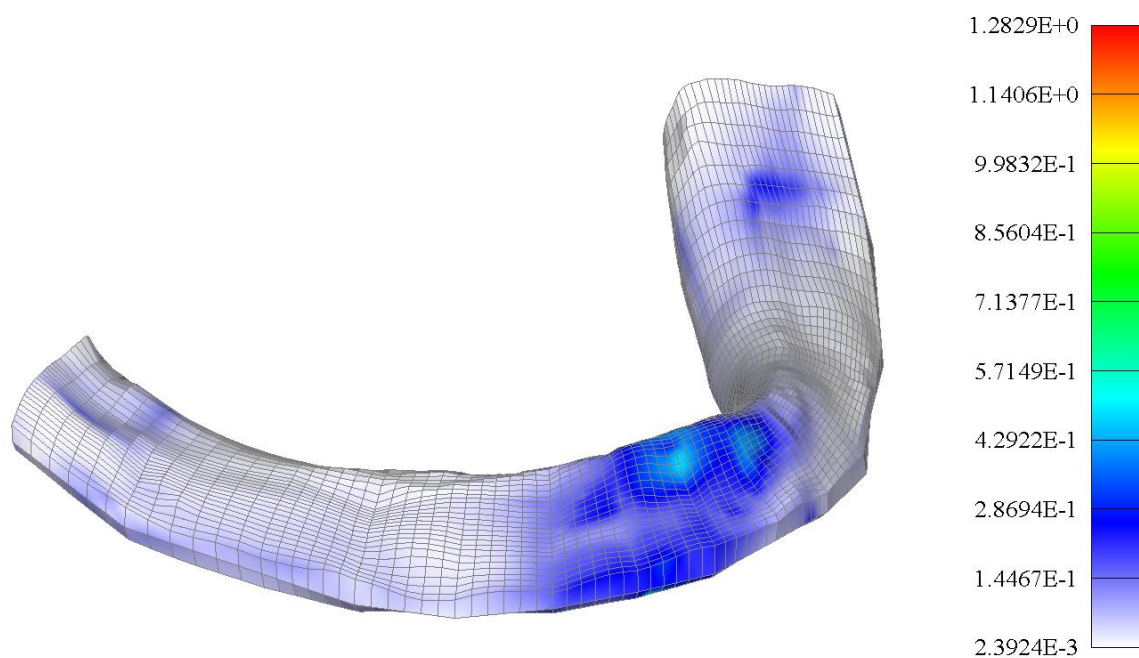
Табела 5.3 - Резултати прорачуна нормалног оптерећења на тоталну протезу

Зуб	Дебљина слузокоже [mm]	Максимални напон [MPa]
Секутић	1	26,15
	3	26,14
	5	26,18
Кутњак	1	9,626
	3	/
	5	9,637

На сликама 5.1 и 5.2 дато је поље напона тоталне протезе и резилијентног слоја за умерено резилијентну слузокожу (дебљине 3 mm).



Слика 5.1 - Поље напона тоталне протезе



Слика 5.2 - Поље напона резилијентног слоја дебљине 3 mm

6. Закључак

У раду је приказан поступак моделирања тоталне зубне надокнаде и потпорног ткива (мандибуле и резилијентног слоја) коришћењем методе коначних елемената.

За генерисање модела коначних елемената коришћени су софтвери GOM Inspect и STL2MESH. Приказаним поступком моделирања претпроцесирање се изводи у програму GOM Inspect који није предвиђен за употребу у методи коначних елемената. Ово има низ предности:

- манипулација облацима тачака је много једноставнија у програмима који су намењени за рад са полигоналним моделима,
- конструкција блокова је вишеструко једноставнија и конформнија у односу на тренутно постојеће методе,
- блок се генерише око полигоналног модела што је визуелно и интуитивно много ближе инжењерима од поступака и апстракција домена који су примењени у доступним софтверима,
- модел коначних елемената се креира директно над дигитализованим моделом, чиме се у првом реду избегавају дуготрајни кораци креирања NURBS површина и солида, а индиректно се повећава тачност модела јер се избацују кораци који уносе грешке и апроксимације,
- када софтвер STL2MESH буде потпуно дебагиран омогућиће да модел коначних елемената сложених структура, како су заступљене у биоинжењерству, буде креиран потпуно аутоматски, уз асистенцију инжењера само приликом дефинисања блокова.

У простору између мандибуле и тоталне протезе моделирана је слузокожа, као нерезилијентна (дебљине 1 mm), умерено резилијентна (дебљине 3 mm) и резилијентна (дебљине 5 mm). Зависно од резилијентности, за све три врсте слузокоже, вариране су и вредности Поасоновог коефицијента и модула еластичности.

Нумеричка анализа извршена је у софтверу ПАК. Вредности напона на потпорним ткивима се смањују са повећањем дебљине и резилијентце слузокоже. У свим моделима максимална вредност напона се јавља у зони испод места задавања оптерећења (на површини контакта мандибуле са резилијентним слојем, унутар акрилатног зуба).

Приказани проблем представља допринос решавању практичних дилема везаних за протетски третман. Могућност повезивања зуба и имплантата фиксном надокнадом још није довољно проучена, тако да ће будући рад аутора бити усмерен на решавање ових проблема.

Референце

- [1] Драгана Росић, Примена отпорних мерних трака код мерења силе приликом мастикације са тоталним зубним протезама, Дипломски рад (ментор Др Зоран Мијатовић), Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет, Инстити за физику, Нови Сад, 1999.
- [2] Даница Обрадовић, Љиља Мијатов-Укропина, Љубиша Стојшић: Остеологија за студенте медицине, Нови Сад, 2000, ISBN 86-489-0274-6
- [3] C. L. Lin, J. C. Wang, S. H. Chang, S. T. Chen, Evaluation of Stress Induced by Implant Type, Number of Splinted Teeth, and Variations in Periodontal Support in Tooth-Implant-Supported Fixed Partial Dentures: A Non-Linear Finite Element Analysis, Journal of Periodontology 81 (1): 121-130, 2010.
- [4] G. Menicucci, M. Lorenzetti, P. Pera, G. Preti, Mandibular Implant-Retained Overdenture: Finite Element Analysis of Two Anchorage Systems, The International Journal of Oral & Maxillofacial Implants 13 (3): 369-376, 1998.
- [5] L. O. H. Mariano, E. A. Sartori, J. R. Broilo, R. S. Shinkai, L. Corso, R. J. Marczak, Stresses in implant-supported overdentures with bone resorption: A 3-D finite element analysis, Revista Odonto Ciência (Journal of Dental Science) 27 (1): 41-46, 2012.
- [6] Жељко Мартиновић, Основи денталне морфологије, II издање, Службени гласник, Београд, 2000, ISBN 86-7549-175-1
- [7] Олга Јанковић, Верица Вуњак, Морфологија зуба, VII издање, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2001, ISBN 86-17-08912-1
- [8] Blinkhorn A, Choi C, Paget H, An investigation into the use of the FDI tooth notation system by dental schools in the UK, European Journal Of Dental Education 2 (1): 39-41, 1998, PMID 9588962..
- [9] З. Анђелковић, Љ. Сомер, М. Перовић, В. Аврамовић, Љ. Миленкова, Н. Костовска, А. Петровић, Хистолошка грађа органа, Бонафидес, Ниш, 2001, ISBN 86-7434-003-2
- [10] Вјекослав Дуанчић, Основе хистологије човјека, VIII издање, Медицинска књига, Београд-Загреб, 1983
- [11] Forces and Torques in Muscles and Joints, <http://cnx.org/content/m42175/latest/>
- [12] Moore K., Clinically Oriented Anatomy, Lippincott Williams & Wilkins, 2005.
- [13] http://fink.rs/sajt/Downloads/tehnicka_resenja/TR-71-2012.pdf
- [14] Марко Јуришевић, Коришћење мултиблок методе у моделирању коначним елементима, завршни рад (ментор Др Мирослав Живковић), Универзитет у Крагујевцу, Машински факултет у Крагујевцу, Кагујевац, 2011
- [15] Милан Благојевић, Употреба оптичких мерних система у моделирању и симулацији, Дипломски рад (ментор Др Мирослав Живковић), Универзитет у Крагујевцу, Машински факултет у Крагујевцу, Кагујевац, 2009