

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Примењена механика и аутоматско управљање

Предмет: Механика 1

Број индекса: 35/2017

Сања С. Недељковић

Упоредна анализа аналитичких, графичких и нумеричких метода за прорачун решеткастих конструкција

завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Др Владимир П. Миловановић, доцент - ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____



Универзитет у Крагујевцу
Факултет инжењерских наука



Основне студије: **Машинско инжењерство**

Студијско подручје (усмерење): **Примењена механика и аутоматско управљање**

Име и презиме: **Сања Недељковић**

Број индекса: **35/2017**

ПРИЈАВА ЗАВРШНОГ РАДА

Тема рада: **Упоредна анализа аналитичких, графичких и нумеричких метода за прорачун решеткастих конструкција**

Задатак: У оквиру завршног рада кандидат треба да опише значај и улогу решеткастих конструкција. Неопходно је да кандидат детаљно опише поступке за аналитичко и графичко одређивање сила у штаповима решеткасте конструкције. У другом делу рада користећи методу коначних елемената, као најопштију нумеричку методу, треба да израчуна и упореди израчунате вредности сила са вредностима добијеним коришћењем аналитичких и графичких метода на примерима решеткастих конструкција доступних у литератури. На основу стечених знања приликом решавања једноставнијих проблема кандидат треба да изведе закључке и да да препоруку која је метода са аспекта тачности, поузданости и брзине решавања проблема најефикаснија. На крају користећи стечено искуство анализираће се комплекснија решеткаста конструкција коришћењем најефикасније методе.

Завршни рад треба да садржи следеће целине:

1. Уводна разматрања
2. Преглед метода за одређивање сила у штаповима решеткастих конструкција
3. Поступак израде МКЕ модела и прорачуна решеткасте конструкције коришћењем коначног елемента штапа
4. Упоредна анализа резултата
5. Прорачун сложене решеткасте конструкције применом нумеричке методе, тј. методе коначних елемената
6. Закључак
7. Литература

Ментор:

др Владимир П. Миловановић, доцент

Крагујевац, 13.03.2020.

Резиме

У оквиру завршног рада приказан је опис решеткастих носача, њихова примена, као и поступак њиховог решавања. Рад се првенствено базира на прегледу метода за одређивање сила у штаповима, као и одређивања отпора ослонаца у решеткастим носачима. Примењене су и детаљно описане кроз пример, аналитичке, графичке и нумеричке методе. Урађена је упоредна анализа свих изложених метода, а на крају рада, приказан је пример решавања сложене решеткасте конструкције применом методе коначних елемената, као најефикасније методе за решавање решеткастих носача.

Кључне речи : решеткасти носачи, аналитичке методе, графичке методе, метод коначних елемената

Summary

Within this paper, a description of lattice girders as well as their application is given. The paper is primarily based on a review of methods for determining the forces in rods, as well as determining the resistance of supports in lattice girders. Analytical, graphical and numerical methods have been applied and described in detail through examples. A comparative analysis of all methods was performed, and at the end of the paper, an example of a complex lattice construction was performed, using the numerical method, finite element methods, as the most efficient.

Key words: lattice girders, analytical methods, graphical methods, finite element method

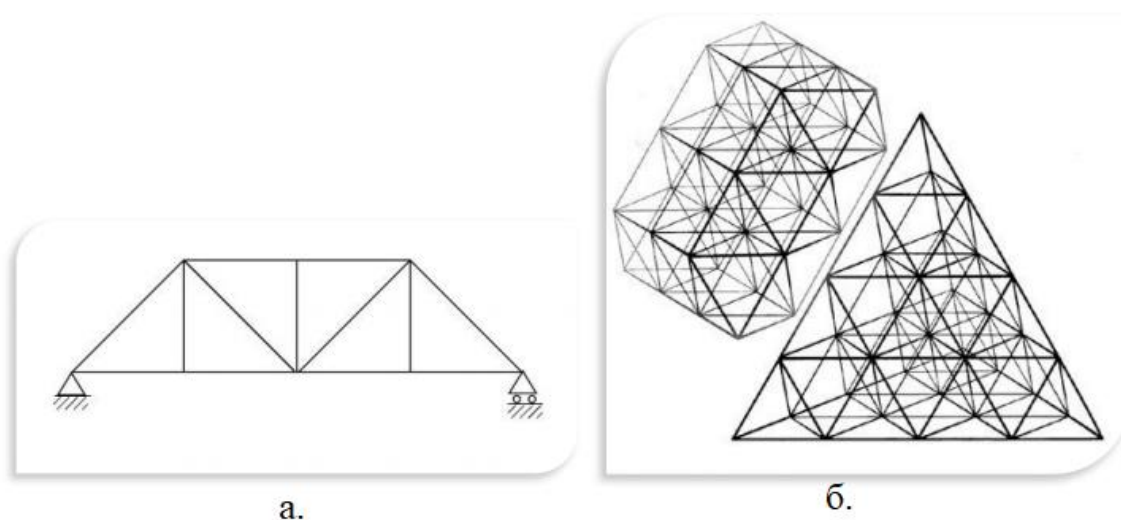
Садржај

1	Уводна разматрања	1
2	Преглед метода прорачуна решеткастих конструкција.....	5
2.1	Аналитичке методе	6
2.2	Графичке методе	6
2.3	Нумеричке методе	6
3	Поступак решавања раванских решеткастих конструкција.....	8
3.1	Одређивање сила у штаповима	8
3.1.1	Метода исецања чворова	8
3.1.2	Кремонин метод	13
3.1.3	Кулманова метода	16
3.1.4	Ритерова метода	18
3.1.5	Одређивање сила у штаповима применом МКЕ	19
3.2	Одређивање отпора ослонаца.....	25
3.2.1	Аналитичко решење.....	25
3.2.2	Графичко решење.....	27
3.2.3	Одређивање отпора ослонаца применом МКЕ.....	27
4	Упоредна анализа резултата.....	30
5	Прорачун сложене решеткасте конструкције применом нумеричке методе, тј. методе коначних елемената.....	32
6	Закључак.....	36
7	Литература	37

1 Уводна разматрања

Решеткасте конструкције, односно решеткасти носачи представљају конструкцијске системе који се састоје од међусобно повезаних појасних штапова и штапова испуне, који образују троугаону структуру. Штапови који ограничавају решетку су појасни штапови (доњи и горњи појас), а штапови који повезују доњи и горњи појас (унутрашњи штапови) називају се штапови испуне (вертикални и дијагонални). Настали су из различитих потреба као што су растерећење конструкције у виду масе, затим смањење потрошње скуних материјала, као и једноставности извођења и одржавања. У поређењу са пуним и саћастим носачима, повољнији су што се тиче количине утрошеног материјала за израду, а самим тим су и лакши од других облика носача (пуних носача). Поседују могућност премошћавања великих распона. Решеткасти носачи су транспарентнији, пропуштају више светлости, тако да је из тог разлога инсталација делимично и олакшана. Поред предности, решеткасте конструкције имају и мане: њихова израда је компликованија у односу на пуне носаче, поседују већи број радних операција, па је самим тим и јединична цена већа [1, 2, 3, 4].

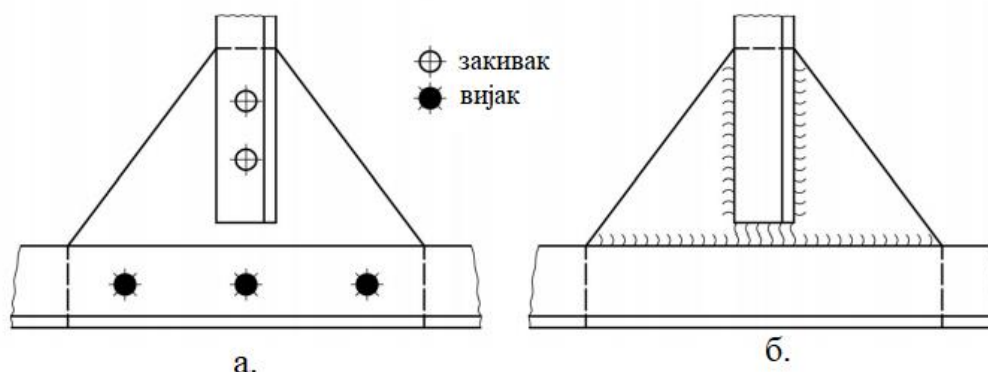
Решеткасти носачи могу бити равански или просторни. Равански решеткасти носачи имају такву конструкцију да сви штапови од којих је сачињена конструкција леже у једној равни, у супротном, ради се о просторним решеткастим носачима. На Слици 1.1 дат је приказ решеткастих носача: Слика 1.1а. представља равански решеткасти носач, а Слика 1.1б. просторни.



Слика 1.1 а. Равански решеткасти носач, б. Просторни решеткасти носач [3]

Решеткасти носачи састављени од троуглова називају се непроменљиви, јер се облик троугла занемарљиво мало мења под утицајем сила, а уколико се ради о многоуглу, променљиви (механизми) зато што се и при малом дејству сила њихов облик знатно мења. Веза између два или већег броја штапова решеткастог носача, може бити остварена на више начина. У пракси се најчешће употребљавају вијци, закивци или се веза

остварује заваривањем. На Слици 1.2 дати су примери веза којима је остварен спој између штапова решеткастих носача: Слика 1.2а. представља везу између штапова која је остварена помоћу вијака и закивака, док је на Слици 1.2б. представљена веза остварена заваривањем.



Слика 1.2 а. Веза између штапова остварена вијцима и закивцима, б. Веза између штапова остварена заваривањем [2]

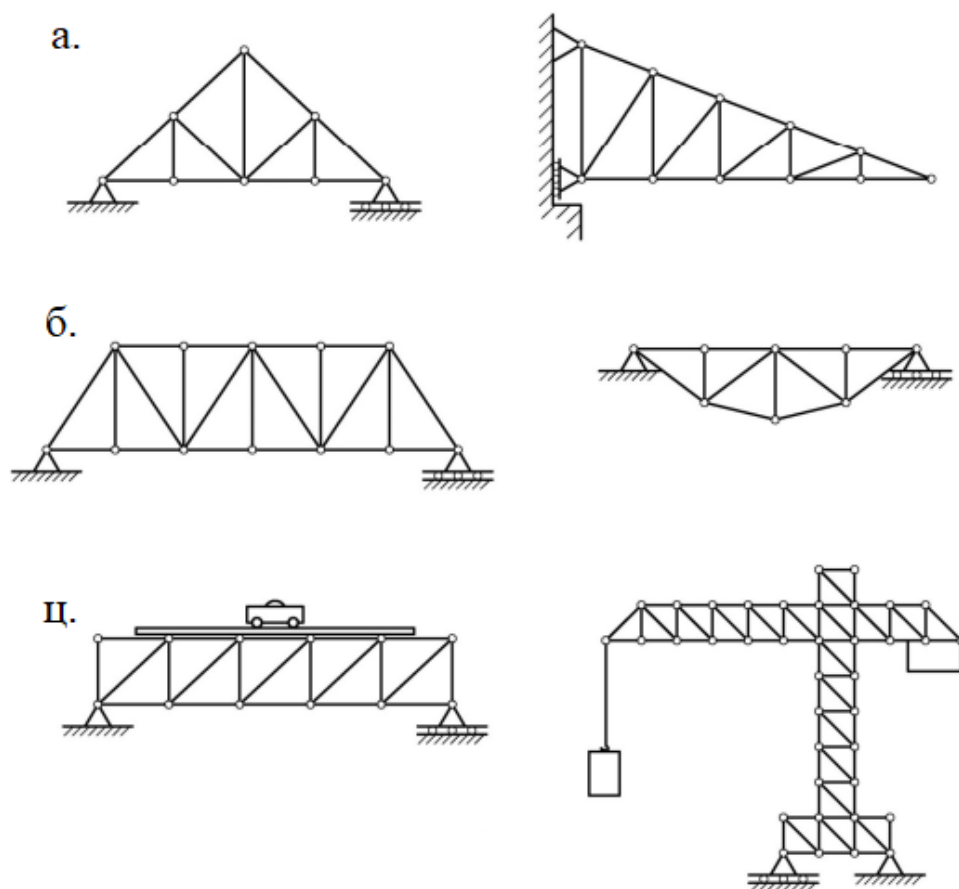
У зависности од тога колико се штапова решеткастог носача повезује, разликују се чворови (зглобови); уколико се веза успоставља између два штапа, реч је о простом чвору, у супротном, реч је о сложеном.

Прва примена решеткастих дрвених конструкција датира још из бронзаног доба, када су се примењивале за изградњу кућа. У старој Грчкој примењиване су у виду кровних конструкција. Нацрт Леонарда Да Винчија је прва позната скица у којој су решеткасте конструкције нашле примену у изградњи мостова.

У данашње време примена решеткастих носача је веома распрострањена. Користе се како у грађевинарству, тако и у мостоградњи и машиноградњи. У грађевинарству се користе као: подни и кровни носачи, рођаче, крански носачи, спрегови. Подни носачи имају веома погодну примену, јер омогућавају спровођење инсталационих цеви између међусобно повезаних штапова, па је на тај начин могуће избећи повећање висине међусpratне конструкције. Кровни решеткасти носачи имају једну од најраспрострањенијих примена, налазе се готово у свим типовима објеката, од објеката високоградње до спортских и конгресних дворана, као и индустријских хала. У зависности од намене објекта, могу се конструисати најразличитији облици носача, који могу бити веома атрактивног изгледа и тиме допринети целокупном изгледу објекта.

У мостоградњи, решеткасти носачи налазе примену као главни носачи код друмских, железничких и транспортних мостова у индустријским објектима. У машиноградњи ови носачи се користе при изради роторних багера, конвејера, транспортних средстава и различитих типова дизалица. На Слици 1.3 дати су поједини шематски прикази решеткастих носача: Слика 1.3а. приказује кровне решеткасте носаче,

Слика 1.3б. приказује решеткасте носаче моста, а Слика 1.3ц. приказује дизаличне решеткасте носаче.



Слика 1.3 а. Кровни решеткасти носачи

б. Решеткасте носачи моста

ц. Дизалични решеткасти носачи [2]

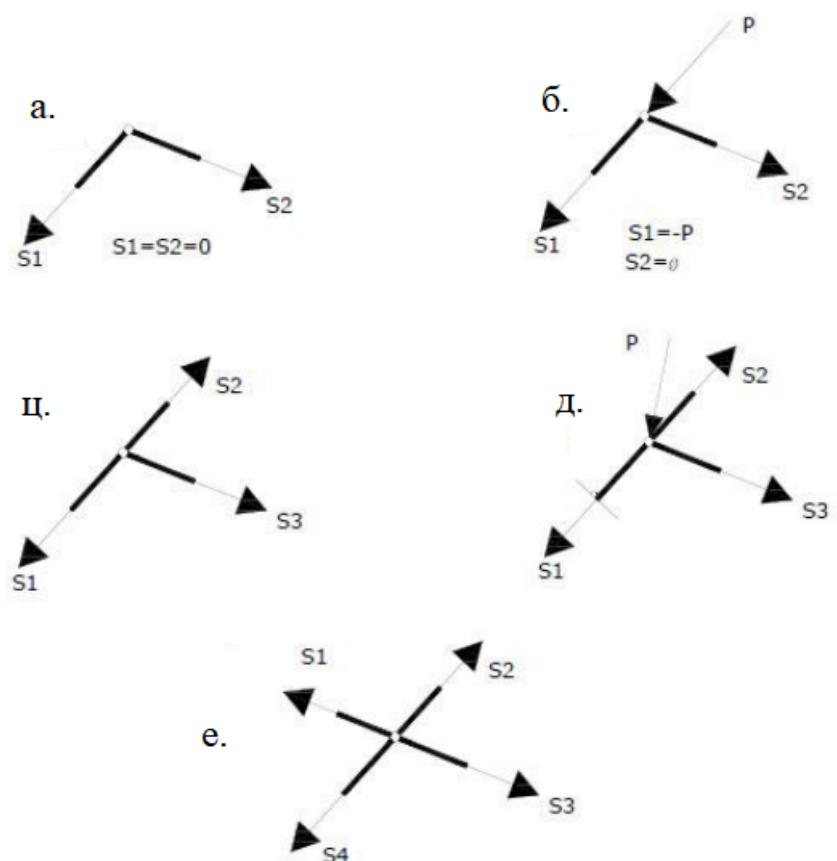
На Слици 1.4 дат је приказ моста Хеликс у Сингапуру. Мост је завршен 2010. године, а уникатна структура моста изазвала је велику пажњу јавности, јер се ради о првом мосту који је закривљен на овакав начин. Због конструкције познат је и под називом ДНК, јер својим изгледом подсећа на ДНК ланац. Овај мост је само један од многобројних примера, да се применом решеткастих носача могу конструисати веома занимљиве и фасцинантне грађевине.



Слика 1.4 Мост Хеликс у Сингапуру [6]

2 Преглед метода прорачуна решеткастих конструкција

Постоји више метода за одређивање сила у штаповима решеткастих конструкција, међутим, независно од тога о којој методи је реч, постоје нека елементарна правила која могу олакшати прорачун [4, 5].



Слика 2.1 Графички приказ правила за решавање решеткастих носача [3]

- Уколико на чвор у коме се спајају два штапа, не делује спољашње оптерећење, тада су силе у тим штаповима једнаке нули (Слика 2.1а.)
- Уколико на чвор у коме се спајају два штапа, делује сила у правцу који се поклапа са једним од та два штапа, сила у другом штапу је једнака нули (Слика 2.1б.)
- Уколико се у чвору на који не делује спољашње оптерећење, спајају три штапа, при чему два леже на истом правцу, тада је сила у трећем штапу једнака нули (Слика 2.1ц.)
- Уколико на чвор у коме се спајају три штапа, од којих два леже на истом правцу, делује спољашње оптерећење, сила у трећем штапу се може дефинисати као збир пројекција на осу нормалну на правац на коме леже преостала два штапа (Слика 2.1 д.)

- Уколико постоји неоптерећени чвор у коме се спајају четири штапа, од којих по два леже на истом правцу, у том случају су силе у штаповима који леже на истом правцу међусобно једнаке (Слика 2.1е).

2.1 Аналитичке методе

Аналитичке методе прорачуна решеткастих конструкција спадају у конвенционални приступ конструисања. Имају примену у одређивању функционалности и сигурности решеткасте конструкције. Базирају се на провери сила тј. напона у штаповима и проверавањем и упоређивањем добијених вредности са критичним. Елементарни решеткасти носачи не поседују прекобројне везе, међутим, готово их сви остали решеткасти носачи поседују, тако да их је у тим случајевима немогуће решити само помоћу статичких услова равнотеже. Степен неодређености је дефинисан управо бројем прекобројних веза. Статички неодређене системе могуће је решити тако што се поред статичких једначина, морају формулисати и допунске једначине, чији се број поклапа са бројем статички непознатих величина, тј. бројем прекобројних веза [2, 6].

2.2 Графичке методе

Графичке методе прорачуна решеткастих конструкција имају своју широку примену, тј. постоји велики број графичких метода које се примењују у решавању решеткастих конструкција; у овом раду акценат је на одређивању сила у штаповима решеткастих конструкција, као и одређивање отпора ослонаца. Многе графичке методе имају и свој аналитички део, па оне спадају у тзв. графоаналитичке методе.

Неке од метода које спадају у графичке, тј. графоаналитичке методе за одређивање сила у штаповима решеткастих носача су: Метода исецања чворова, Крмонин метод, Кулманова метода, Ритерова метода.

2.3 Нумеричке методе

Усложњавањем конструкције решеткастих носача може доћи до проблема при њиховом решавању, јер прорачуни постају веома захтевни и комплексни, са доста рачуна који је захтева велики физички посао. Због свега тога може доћи до низа грешака приликом прорачуна комплексних и сложених решеткастих носача. За потребе прорачуна комплексних и сложених решеткастих носача главна олакшица је употреба рачунара који поседују специјализоване софтвере за решавање оваквих проблема. Зато је напоне и силе у штаповима решеткастих носача могуће врло лако одредити коришћењем одговарајућих софтвера, заснованих на нумеричким методама, где рачунар уместо човека одради онај део посла који захтева много рачуна [5, 6].

Подела нумеричких метода извршена је на дискретне и континуалне. Дискретне методе подразумевају методу померања, методу сила и методу коначних елемената, која се највише користи у области прорачуна решеткастих конструкција. Континуалне методе које се базирају на системима диференцијалних једначина су методе нумеричке интеграције и методе коначних разлика.

Метода коначних елемената – МКЕ (енг. *Finite Element Method – FEM*), базирана је на дискретизацији континуума конструкције једноставним деловима са коначним димензијама. Неопходна је примена одговарајућих типова елемената, како би се постигли што бољи резултати тј. дискретизацијом конструкције добили што реалнији подаци о самој конструкцији када се задају спољашња оптерећења. Одређена конструкција се представља одговарајућим моделом који је састављен од адекватних коначних елемената, и као такав се даље прорачунава.

Подела коначних елемената је извршена на једнодимензионе 1Д, дводимензионе, 2Д и тродимензионе 3Д. Једнодимензиони или 1Д коначни елементи се примењују за прорачун конструкција код којих је једна димензија знатно већа од друге две, рецимо дужина је знатно већа од димензија које дефинишу попречни пресек. 1Д коначни елементи се углавном користе при прорачуну греда, штапова, цеви, ужад, итд. 2Д коначни елементи се примењују за прорачун конструкција код којих је једна димензија знатно мања од друге две, рецимо дебљина је знатно мања од дужине и ширине. 2Д коначни елементи се углавном користе при прорачуну танкозидних конструкција, а у њих убрајамо љуске, плоче и мембране. 3Д коначни елементи се примењују за прорачун конструкција комплекснијих запреминских форми.

Повећањем густине мреже МКЕ модела, односно повећањем броја коначних елемената у моделу, усложњава се прорачун, време прорачуна се повећава, али, на тај начин се добијају поузданији резултати. Због свега изложеног при првљењу МКЕ модела треба водити рачуна о свим аспектима и тежити ка томе да МКЕ модели не буду ни превише комплексни, због времена потребног за прорачун, а да решења буду поуздана и да њима можемо у потпуности да „верујемо“.

3 Поступак решавања раванских решеткастих конструкција

У овом поглављу, биће дат поступак одређивања сила у штаповима решеткастог носача као и одређивање отпора ослонаца, применом аналитичке, графичке и нумеричке методе, тј методе коначних елемената. Све методе примењене су на истом решеткастом носачу, ради накнадне упоредне анализе резултата.

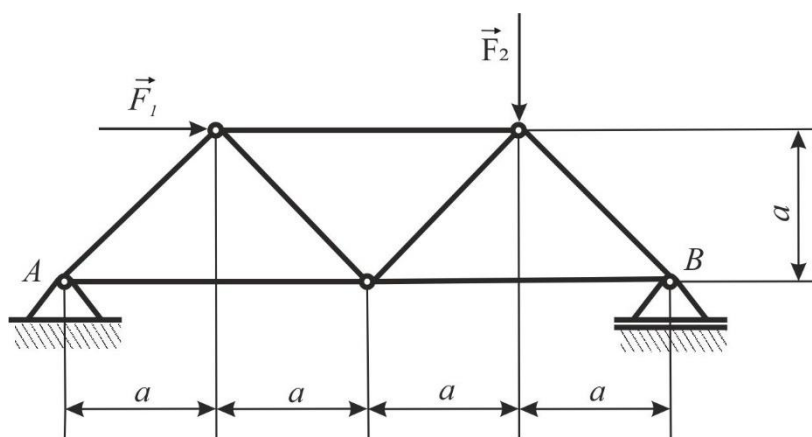
За решеткасти носач приказан на Слици 3.1 је оптерећен силама F_1 и F_2 потребно је одредити силе у штаповима и отпоре ослонаца користећи аналитичке, графичке и нумеричке методе и дати упоредну анализу добијених резултата.

Подаци :

$$F_1 = 20 \text{ kN}$$

$$F_2 = 10 \text{ kN}$$

$$a = 2 \text{ m}$$



Слика 3.1 Поставка задатка – Решеткасти носач

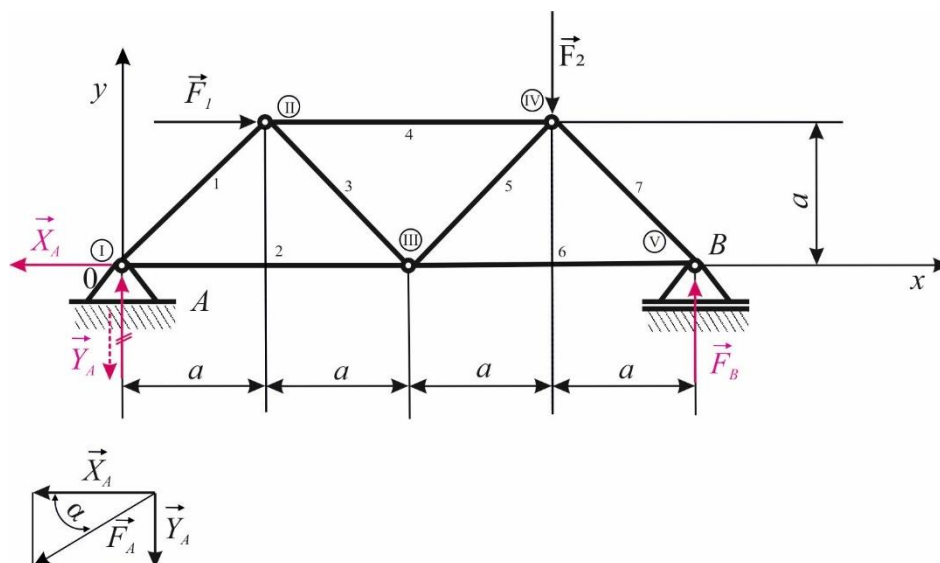
Решеткасти носач приказан на Слици 3.1, састоји се од седам штапова ($s=7$) и пет чворова ($n=5$) што значи да је испуњен услов: $s=2n-3=7$, односно да је решеткасти носач без сувишних штапова и да је решеткасти носач статички одређен.

3.1 Одређивање сила у штаповима

3.1.1 Метода исецања чворова

Метода исецања чворова базира се на томе да се одређени чвор, замишљеним пресеком потпуно одвоји од остатка решеткастог носача. Утицај „одбаченог” дела решеткастог носача се замењује силама (унутрашње силе – реакција штапа) којима он делује на „остатке” штапова у одређеном чвору. Те силе имају исти правац као осе штапова који се сучељавају у том одређеном чвору, при чему се смер претпоставља [3].

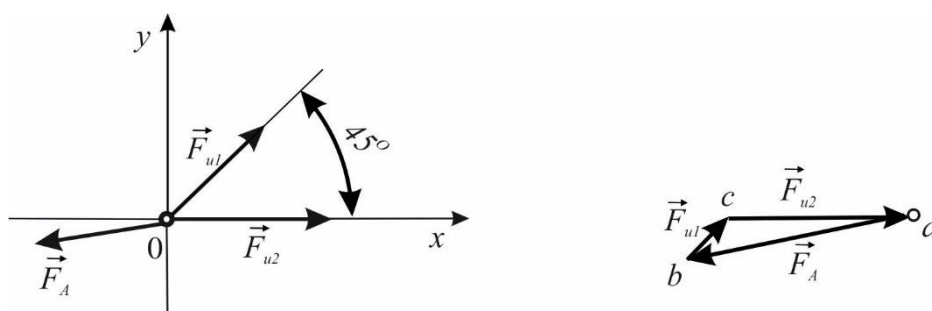
Исецање чворова започиње се на месту, тј. од чвора у коме се налазе само две непознате силе тј. реакције штапа. У овом примеру, може се кренути од чвора I (A) или V (B), Слика 3.2.



Слика 3.2 Приказ конструкције са назначеним чворовима и разложеним силама

Чвор I (A), Слика 3.3

Систем сучељних сила који делује у чвору I (A) у равнотежи је и дефинисан је силама $\vec{F}_A$, $\vec{F}_{u1}$ и $\vec{F}_{u2}$, где су $\vec{F}_{u1}$ и $\vec{F}_{u2}$ непознате силе. Систем сучељних сила $\vec{F}_A$, $\vec{F}_{u1}$ и $\vec{F}_{u2}$ који делује у чвору I (A) приказан је на Слици 3.3.



Слика 3.3 Чвор I (A)

Непознате силе $\vec{F}_{u1}$ и $\vec{F}_{u2}$ могу се одредити графички и аналитички.

Графички, непознате силе се одређују на основу затвореног полигона сила приказаног на Слици 3.3 на основу усвојене разmere за силу U_F .

Први корак је цртање силе $\vec{F}_A$, а потом учртавање познатих праваца, непознатих сила $\vec{F}_{u1}$ и $\vec{F}_{u2}$ за које су претпостављени смерови деловања. Пресеком праваца

непознатих сила формиран је полигон сила, који због услова равнотеже мора бити затворен, тако да је дефинисан интензитет и смер сила $\vec{F}_{u1}$ и $\vec{F}_{u2}$ тј. вредност сила у штаповима 1 и 2.

На основу полигона сила приказаног на Слици 3.3 и усвојене размере за силу U_F , можемо одредити интензитет сила $\vec{F}_{u1}$ и $\vec{F}_{u2}$:

$$F_{u1} = \overline{bc} \cdot U_F = 3.5 \text{ kN}$$

$$F_{u2} = \overline{ca} \cdot U_F = 17.5 \text{ kN}$$

Карактери сила у штаповима 1 и 2 се одређују на основу полигона сила. Вектори сила $\vec{F}_{u1}$ и $\vec{F}_{u2}$ са назначеним смеровима се пренесу у чвор $I (A)$, а потом се посматра њихова усмереност. Силе су усмерене од чвора $I (A)$, тако да штапови 1 и 2 вуку чвор $I (A)$ силама $\vec{F}_{u1}$ и $\vec{F}_{u2}$. На основу Закона акције и реакције, чвор $I (A)$ делује на штапове 1 и 2 силама истог правца и интензитета, а супротног смера, из чега следи да су штапови 1 и 2 оптерећени на затезање. Да је ситуација била обрнута, тј. да су силе биле усмерене ка чвору $I (A)$, у том случају би штапови били н оптерећени на притисак.

Штапови 1 и 2 се налазе у равнотежи, тако да на штап 1 у чворовима $I (A)$ и II делују силе $\vec{F}_{u1}$ и $\vec{F}'_{u1}$, при чему важи да је $\vec{F}'_{u1} = -\vec{F}_{u1}$, тј. на штап 2 у чворовима $I (A)$ и III делују силе $\vec{F}_{u2}$ и $\vec{F}'_{u2}$, при чему важи да је $\vec{F}'_{u2} = \vec{F}_{u2}$.

За све преостале чворове, важи иста аналогија као и за чвор $I (A)$.

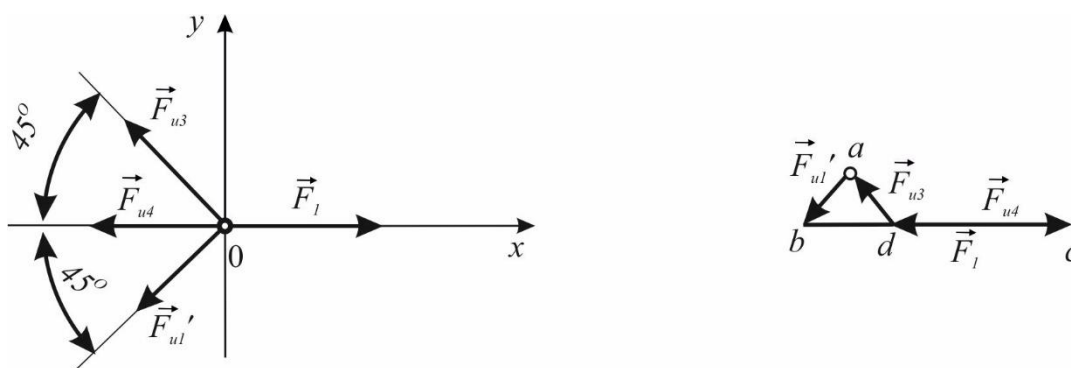
Чвор II, Слика 3.4

$$F_{u3} = \overline{da} \cdot U_F = 3.5 \text{ kN}$$

$$F_{u4} = \overline{cd} \cdot U_F = 15.0 \text{ kN}$$

На овај чвор делују познате силе $\vec{F}'_{u1}$ и $\vec{F}_1$ и непознате силе $\vec{F}_{u3}$ и $\vec{F}_{u4}$ (реакције штапова 3 и 4). На основу правила појашњеном приликом одређивања карактера сила у 1 и 2 штапу, одређено је да су штапови 3 и 4 оптерећени на притисак.

Штапови 3 и 4 су у равнотежи, тако да следи да на крајевима тих штапова делују силе $\vec{F}'_{u3}$ ($\vec{F}'_{u3} = -\vec{F}_{u3}$) и $\vec{F}'_{u4}$ ($\vec{F}'_{u4} = \vec{F}_{u4}$).



Слика 3.4 Чвор II

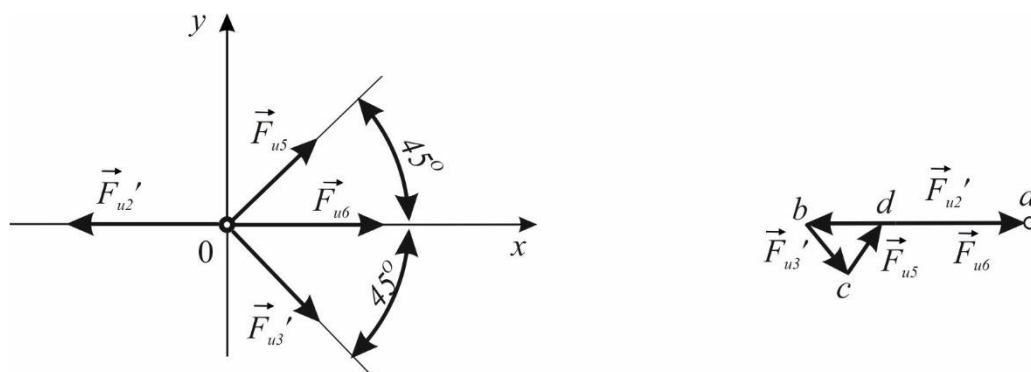
Чвор III, Слика 3.5

$$F_{u5} = \overline{cd} \cdot U_F = 3.5 \text{ kN}$$

$$F_{u6} = \overline{da} \cdot U_F = 12.5 \text{ kN}$$

На овај чвор делују познате силе $\vec{F}'_{u2}$ и $\vec{F}'_{u3}$ и непознате силе $\vec{F}_{u5}$ и $\vec{F}_{u6}$ (реакције штапова 5 и 6). На основу правила појашњеном приликом одређивања карактера сила у 1 и 2 штапу, одређено је да су штапови 5 и 6 оптерећени на затезање.

Штапови 5 и 6 су у равнотежи, тако да следи да на крајевима тих штапова делују силе $\vec{F}'_{u5}$ ($\vec{F}'_{u5} = -\vec{F}_{u5}$) и $\vec{F}'_{u6}$ ($\vec{F}'_{u6} = \vec{F}_{u6}$).



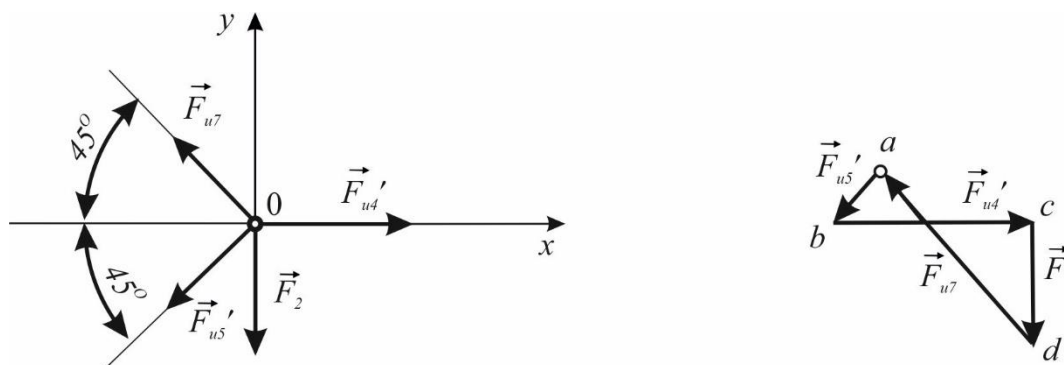
Слика 3.5 Чвор III

Чвор IV, Слика 3.6

$$F_{u7} = \overline{da} \cdot U_F = 17.7 \text{ kN}$$

На овај чвор делују познате силе $\vec{F}'_{u4}$, $\vec{F}'_{u5}$ и $\vec{F}_2$ и непозната сила $\vec{F}_{u7}$ (реакција штапа 7). На основу правила појашњеном приликом одређивања карактера сила у 1 и 2 штапу, одређено је да је штап 7 оптерећен на притисак.

Штап 7 је у равнотежи, тако да следи да на крају тог штапа делује сила $\vec{F}'_{u7}$ ($\vec{F}'_{u7} = -\vec{F}_{u7}$).

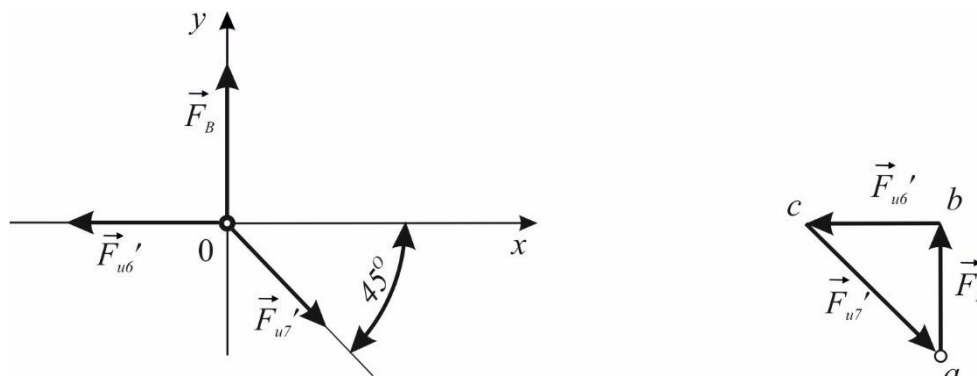


Слика 3.6 Чвор IV

Чвор V, Слика 3.7

Исецање чвора V, узевши у обзир да су претходним исецањем чворова одређене све силе у штаповима решеткастог носача, користи се као контрола решења сила у штаповима 6 и 7.

$$F_{u7}=F'_{u7}=\overline{ca} \cdot U_F=17.7 \text{ kN}$$



Слика 3.7 Чвор V

Аналитичко решење у случају методе исецања чворова, базира се на постављању једначина статичке равнотеже раванског сучељног система сила, за сваки чвор засебно, након чега се на основу постављених једначина, рачунају непознате силе у штаповима.

Чвор I (A), Слика 3.3

$$\sum X=0$$

$$F_{u1}\cos 45^\circ + F_{u2} - F_A \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y=0$$

$$F_{u1}\sin 45^\circ - F_A \sin \alpha = 0$$

Чвор II, Слика 3.4

$$\sum X=0$$

$$F_1 - F_{u4} - F_{u3}\cos 45^\circ - F'_{u1}\cos 45^\circ = 0$$

$$\sum Y=0$$

$$F_{u3}\sin 45^\circ - F'_{u1}\sin 45^\circ = 0$$

Чвор III, Слика 3.5

$$\sum X=0$$

$$F_{u6} + F_{u5}\cos 45^\circ + F'_{u3}\cos 45^\circ - F'_{u2} = 0$$

$$\sum Y=0$$

$$F_{u5}\sin 45^\circ - F'_{u3}\sin 45^\circ = 0$$

Чвор IV, Слика 3.6

$$\sum X=0$$

$$F'_{u4}-F_{u7}\cos 45^{\circ}-F'_{u5}\cos 45^{\circ}=0$$

$$\sum Y=0$$

$$F_{u7}\sin 45^{\circ}-F'_{u5}\sin 45^{\circ}-F_2=0$$

Чвор V, Слика 3.7 $\sum X = 0$

$$\sum X=0$$

$$F'_{u7}\cos 45^{\circ}-F'_{u6}=0$$

$$\sum Y=0$$

$$F_B-F'_{u7}\sin 45^{\circ}=0$$

На основу постављених једначина и једначина $F_{u1}=F'_{u1}$, $F_{u2}=F'_{u2}$, $F_{u3}=F'_{u3}$, $F_{u4}=F'_{u4}$, $F_{u5}=F'_{u5}$, $F_{u6}=F'_{u6}$ и $F_{u7}=F'_{u7}$ израчунавају се интензитети сила у штаповима:

$$F_{u1}=F'_{u1}=3.54 \text{ kN}$$

$$F_{u2}=F'_{u2}=17.50 \text{ kN}$$

$$F_{u3}=F'_{u3}=3.54 \text{ kN}$$

$$F_{u4}=F'_{u4}=15.00 \text{ kN}$$

$$F_{u5}=F'_{u5}=3.54 \text{ kN}$$

$$F_{u6}=F'_{u6}=12.49 \text{ kN}$$

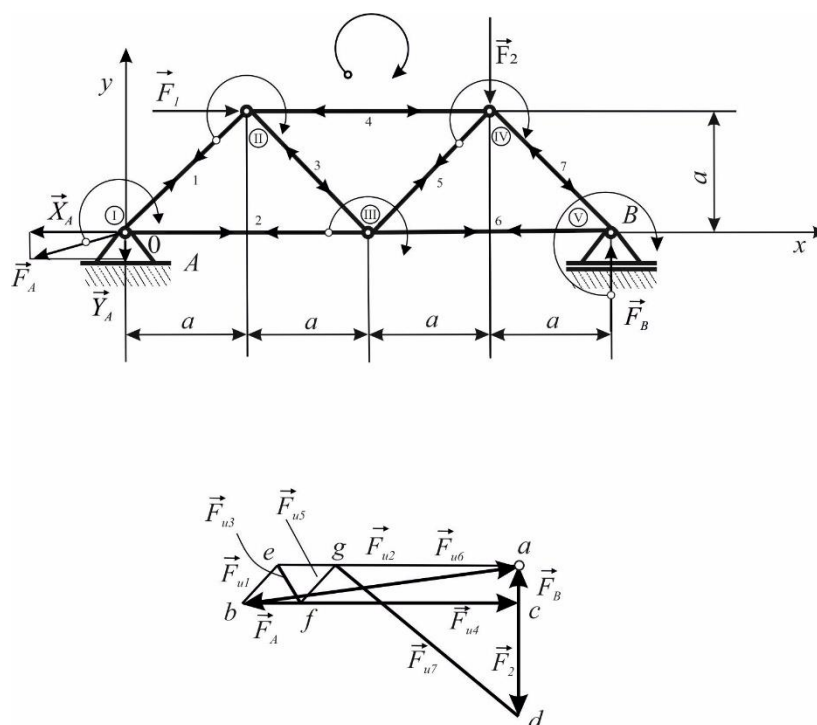
$$F_{u7}=F'_{u7}=17.68 \text{ kN}$$

3.1.2 Крмонин метод

Крмонин метод, базира се на креирању тзв. Крмониног плана сила. Овом конструкцијом, обједињују се сви полигони сила, конструисани за сваки чвор засебно, при чему се свака сила у одговарајућем штапу јавља само једном [3].

Пре самог конструисања Крмониног плана сила, одређују се реакције ослонаца и врши провера да ли је решеткасти носач статички одређен. Решеткасти носач је у равнотежи уколико су све спољашње и унутрашње силе у равнотежи, тј. уколико су сви њихови полигони затворени. Конструкција полигона спољашних сила започиње од произвољно изабране тачке, кренувши од било које спољашње силе, с тим што се мора водити рачуна да се силе наносе у изабраној размери са дефинисаним правцем, смером и интензитетом и да се морају наносити оним редом, којим се на њих наилази, а обилазећи решеткасти носач у само једном, претходно дефинисаном, смеру. Усвојена размера са дужину и силу у овом случају је: $U_L = \frac{1m}{1cm}$ и силу $U_F = \frac{5kN}{1cm}$.

У овом примеру, као почетна тачка, узета је тачка (а), Слика 3.8. Кренувши од ње преносе се све спољашње силе, обилазећи око решетке у смеру кретања казаљке на сату.



Слика 3.8 Одређивање сила у штаповима применом Крмонине методе

Вектор $\overline{ab}$ представља силу $\vec{F}_A$, па се из тачке (b) повлачи вектор $\overline{bc}$ који представља силу $\vec{F}_1$. Након тога, из тачке (c), повлачи се вектор $\overline{cd}$ који представља силу $\vec{F}_2$. На крају, из тачке (d), се повлачи вектор $\overline{da}$ који представља силу $\vec{F}_B$. Повлачењем последњег вектора полигон спољашњих сила је затворен, што значи да су све спољашње силе у равнотежи.

Поред конструисања затвореног полигона спољашњих сила, потребно је конструисати и затворени полигон унутрашњих сила у штаповима датог решеткастог носача.

Конструкција се започиње исецањем чвора I. Услов да би он био у равнотежи јесте, да у штаповима 1 и 2 морају да делују силе које дефинишу утицај одбаченог дела решетке и уравнотежавају силу отпора ослонца А, $\vec{F}_A$. Систем сила које делују на чвор I ($\vec{F}_{u1}$, $\vec{F}_{u2}$ и $\vec{F}_A$) ће бити у равнотежи уколико се правци поменутих сила секу у једној тачки (чвор I) и формирају затворени троугао сила, тј. силу $\vec{F}_A$ познатог правца, смера и интензитета. Потребно је разложити на компоненте, силе $\vec{F}_{u1}$ и $\vec{F}_{u2}$ у штаповима 1 и 2, познатих правца деловања. Интензитет поменутих сила се дефинише повлачењем правца који су паралелни са штаповима 1 и 2, из тачака (a) и (b) у полигону сила. Пресек ова два правца представља тачка (e). Дужине $\overline{be}$ и $\overline{ea}$ дефинишу у одговарајућој размери, интензитета сила у штаповима 1 и 2, тј. силе $\vec{F}_{u1}$ и $\vec{F}_{u2}$.

Карактер ових сила, одређује се обилазећи око чвора I у истом смеру у коме је извршено обилажење при низању спољашњих сила око решеткистог носача, полазећи од најниже познате силе. У овом случају креће се од силе $\vec{F}_A$. У полигону сила креће се од тачке (a) у лево наниже (због смера реакције $\vec{F}_A$). Након тога, у чвор I долази штап 1, тако да из тачке (b) треба ићи у тачку (e) надесно и навише, јер се штап налази под углом од 45° у односу на хоризонталу. Смер се уноси на штапу 1 у чвору I . Поред штапа 1, у чвору I се налази и штап 2, тако да у полигону сила треба ићи од тачке (e) ка тачки (a) надесно. Овај смер се такође уноси на штапу 2 у чвору I . На овај начин, троугао сила је затворен, све стрелице иду у истом смеру, тј. силе $\vec{F}_{u1}$, $\vec{F}_{u2}$ и $\vec{F}_A$ су у равнотежи.

Спољашње силе су у равнотежи, а да би решеткасти носач био у равнотежи, унутрашње силе у штаповима се морају узајамно поништити, тј. на једном штапу у 2 различита чвора, стрелице морају имати супротне смерове. На основу смерова сила $\vec{F}_{u1}$ и $\vec{F}_{u2}$ Слика 3.8 закључује се да су штапови 1 и 2 оптерећени на затезање.

Поступак се понавља за све чворове, јер да би решеткасти носач био у равнотежи, сви чворови које поседује морају бити у равнотежи. Анализом преосталих чворова, долази се до затвореног полигона спољашњих и унутрашњих сила. На Слици 3.8. дат је приказ Кремониног плана сила.

У наставку текста дат је преглед интензитета сила у штаповима, као и њихов карактер.

$$\overline{ab} = \frac{F_A}{U_F}$$

$$\overline{bc} = \frac{F_1}{U_F}$$

$$\overline{cd} = \frac{F_2}{U_F}$$

$$\overline{da} = \frac{F_B}{U_F}$$

$$F_{u1} = \overline{be} \cdot U_F = 3.5 \text{ kN (Штап је оптерећен на затезање)}$$

$$F_{u2} = \overline{ca} \cdot U_F = 17.5 \text{ kN (Штап је оптерећен на затезање)}$$

$$F_{u3} = \overline{fe} \cdot U_F = -3.5 \text{ kN (Штап је оптерећен на притисак)}$$

$$F_{u4} = \overline{cf} \cdot U_F = -15.0 \text{ kN (Штап је оптерећен на притисак)}$$

$$F_{u5} = \overline{fg} \cdot U_F = 3.5 \text{ kN (Штап је оптерећен на затезање)}$$

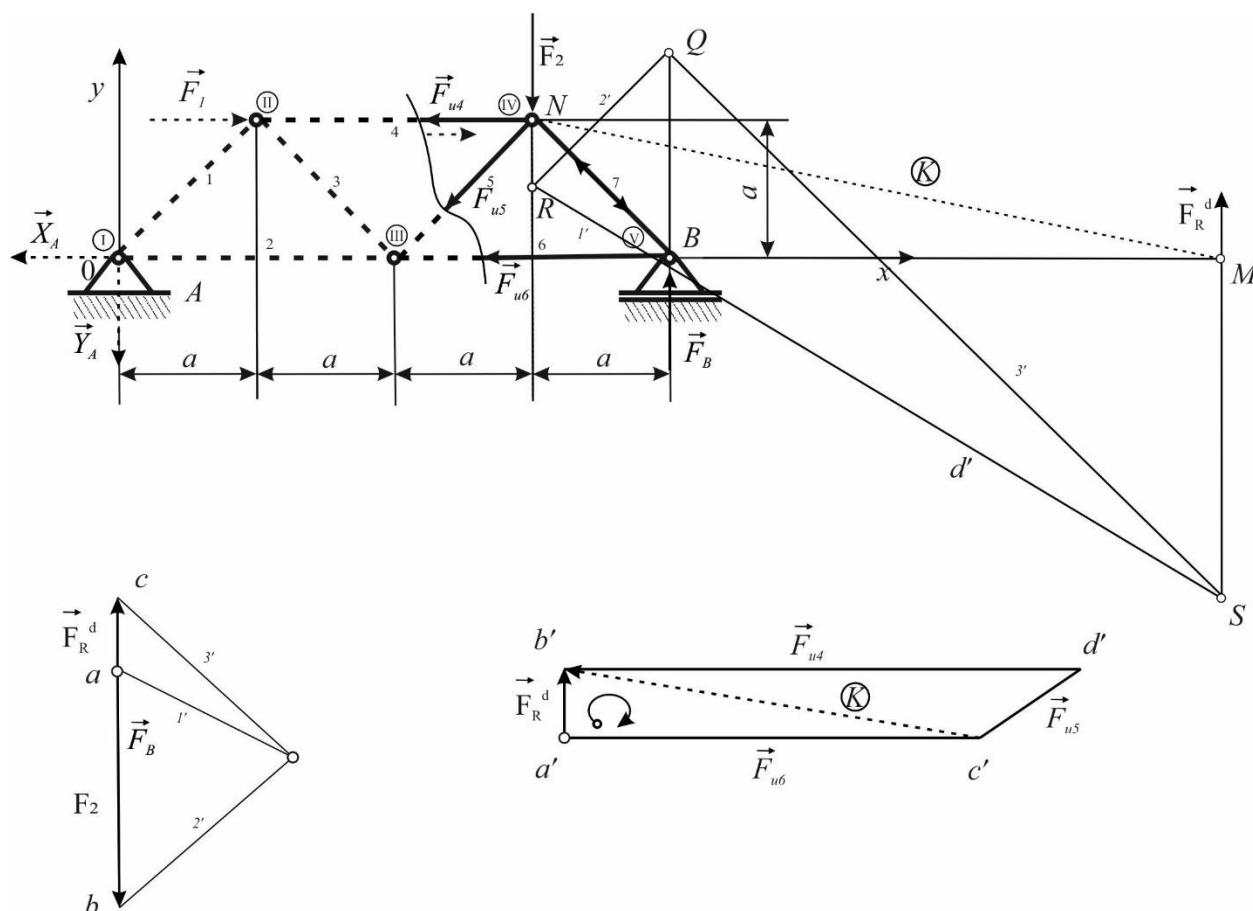
$$F_{u6} = \overline{ga} \cdot U_F = 12.5 \text{ kN (Штап је оптерећен на затезање)}$$

$$F_{u7} = \overline{dg} \cdot U_F = -18.0 \text{ (Штап је оптерећен на притисак)}$$

3.1.3 Кулманова метода

Кулманова метода се примењује у случајевима када је потребно одредити величину и карактер (затезање/притисак) сила само у појединим штаповима решеткастог носача. Базира се на разлагању сила познатог правца, смера и интензитета на три компоненте, тј. три неколинеарна позната правца. Применом ове методе, могуће је одредити величину и карактер сила у максимално три штапа решеткастог носача, с тим што се као услов јавља, да не могу сва три штапа да се секу у једној тачки [3].

Као илустративни пример, Кулманове методе, одредиће се интензитет сила и карактер напрезања у штаповима 4, 5 и 6 решеткастог носача приказаног на Слици 3.9.



Слика 3.9 Одређивање сила у штаповима прееном Кулманове методе

Поступак започиње пресецањем конструкције по штаповима на којима је потребно применити Кулманову методу и одстрањивањем одговарајућег дела; у овом случају је то леви део конструкције. Утицај одстрањеног дела потребно је заменити силама у штаповима $\vec{F}_{u4}$, $\vec{F}_{u5}$ и $\vec{F}_{u6}$ како би решеткасти носач остао у равнотежи. Након овога, произвољно се одређује карактер сила, претпоставка је да су штапови 4, 5 и 6 оптерећени на затезање, па се на основу овога, уцртавају и смерови сила $\vec{F}_{u4}$, $\vec{F}_{u5}$ и $\vec{F}_{u6}$.

Преостали део решеткастог носача који се посматра треба да остане у равнотежи, а да би се то остварило резултанта спољашњих сила ($\vec{F}_B$ и $\vec{F}_2$) мора бити једнака, по

интензитету, резултанти унутрашњих сила у штаповима ($\vec{F}_{u4}$, $\vec{F}_{u5}$ и $\vec{F}_{u6}$), која има исти правац, а супротан смер; тј. потребно је резултанту спољашњих сила $\vec{F}_{Rd}$ разложити на три правца 4, 5 и 6, тј. на три компоненте $\vec{F}_{u4}$, $\vec{F}_{u5}$ и $\vec{F}_{u6}$.

Полигон који образују ове силе, мора бити затворен. У овом примеру, примена Кулманове методе се огледа у томе да се проблем равнотеже дела решеткистог носача на који делују 4 силе, своди на проблем равнотеже крутог тела на које делују 2 силе. Потребно је направити групу од по 2 силе и наћи њихове резултанте, при чему те 2 резултанте морају имати исти правац и интензитет, а супротан смер. Правац деловања резултата у овом случају одређен је тачкама M и N , а права која пролази кроз ове две тачке и дефинише правац деловања резултанти назива се Кулманова права K . Тачка M се добија пресеком правца једне од унутрашњих сила и резултанте спољашњих сила ($\vec{F}_{u6}$ и $\vec{F}_{Rd}$), а тачка N , пресеком преосталих правца двеју сила ($\vec{F}_{u4}$ и $\vec{F}_{u5}$).

Након одређивања Кулманове праве, потребно је конструисати затворени четвороугао сила ($\vec{F}_{u4}$, $\vec{F}_{u5}$, $\vec{F}_{u6}$ и $\vec{F}_{Rd}$), тј. одредити силе у штаповима 4, 5 и 6. Из произвољно изабране тачке a' у одговарајућој размери за силу и дужину, $U_L = \frac{1m}{1cm}$ и силу $U_F = \frac{2kN}{1cm}$ се конструише вектор $\overline{a'b'}$ који представља силу $\vec{F}_{Rd}$, а након тога се из тачака a' и b' повлаче правци који су паралелни штапу 6 и Кулмановој правој; у њиховом пресеку је тачка c' .

Након тога се из тачака b' и c' повлаче правци који су паралелни са штаповима 4 и 5, а у њиховом пресеку се добија тачка d' . Овим је конструкција затвореног четвороугла сила завршена, тј. сила $\vec{F}_{Rd}$ је разложена на три компоненте ($\vec{F}_{u4}$, $\vec{F}_{u5}$ и $\vec{F}_{u6}$). Једна од напомена је да би полигон сила био затворен, смер сила се одређује кретањем у круг, који условљава смер познате силе $\vec{F}_{Rd}$. Добијени смерови се преносе на решеткасти носач, тј. на посматрани део решеткистог носача. На основу смерова, одређује се карактер оптерећења штапова где је штап 4 је оптерећен на притисак а штапови 5 и 6 оптерећени су на затезање.

У наставку текста дат је преглед интензитета сила у штаповима.

$$\overline{ab} = \frac{F_2}{U_F}$$

$$\overline{bc} = \frac{F_B}{U_F}$$

$$F_R^d = \overline{ac} \cdot U_F = 2.5 \text{ kN}$$

$$F_{u4} = \overline{b'd'} \cdot U_F = 15.0 \text{ kN}$$

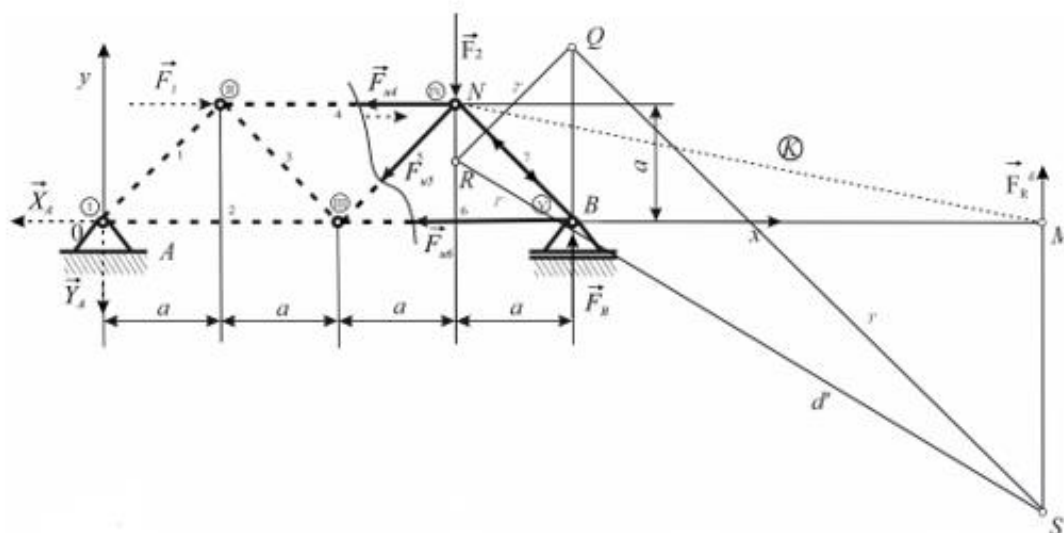
$$F_{u5} = \overline{d'c'} \cdot U_F = 3.5 \text{ kN}$$

$$F_{u6} = \overline{c'a'} \cdot U_F = 12.5 \text{ kN}$$

3.1.4 Ритерова метода

Ритерова метода се такође, као и Кулманова метода, примењује у случајевима када је потребно одредити силе у појединим штаповима решеткастог носача (у највише три штапа). Разлика између ове две методе јесте у томе да је код Кулманове методе услов био да резултанта свих спољашњих и унутрашњих сила, лево или десно од пресека, мора бити једнака нули, а код Ритерове методе услов је да збир момената свих спољашњих и унутрашњих сила, лево или десно од пресека, буде једнак нули [3].

Појашњење ове методе биће примењено за исти део решеткастог носача као у случају Кулманове методе, Слика 3.10.



Слика 3.10 Одређивање сила у штаповима пременом Ритерове методе

Решеткасти носач се, након одређивања отпора ослонаца $\vec{F}_B$ и $\vec{F}_A$, пресеца и посматра се, у овом случају, десни део од пресека, при чему се утицај левог, одбаченог, дела замењује силама у штаповима 4, 5 и 6 ($\vec{F}_{u4}$, $\vec{F}_{u5}$ и $\vec{F}_{u6}$). Након овога претпостављено је да су штапови напрегнути на затезање, тј. да је смер сила усмерен ка пресеку, а рачуном треба установити тачност ове претпоставке.

Моментна једначина (чвор IV)

$$\sum M_{IV} = 0$$

$$F_B a - F_{u6} a = 0$$

Из ове једначине следи да је $F_{u6} = F_B = 12.5 \text{ kN}$, што значи да је смер реакције штапа 6 тачно претпостављен. У чвору III, стрелица мора да буде усмерена од чвора, тако да је штап 6 оптерећен на затезање.

II моментна једначина (чвор III)

$$\sum M_{III}=0$$

$$F_B 2a + F_{u4} a - F_2 a = 0$$

Из ове једначине следи да је: $F_{u4} = -15.00 \text{ kN}$, што значи да је смер реакције штапа 4 погрешно претпостављен на шта указује негативан знак, па је потребно исправити смер (испрекидана линија). Након исправке, смер стрелице има супротно усмерење од чвора II, тако да је штап 4 оптерећен на притисак.

III моментна једначина (чвор V)

$$\sum M_V = 0$$

$$F_2 a + F_{u4} a + F_{u5}(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)a = 0$$

Из ове једначине следи да је: $F_{u5} = 3.54 \text{ kN}$, што због позитивног знака, значи да је смер реакције штапа 5 тачно претпостављен, а на основу тога, да је штап 5 оптерећен на затезање.

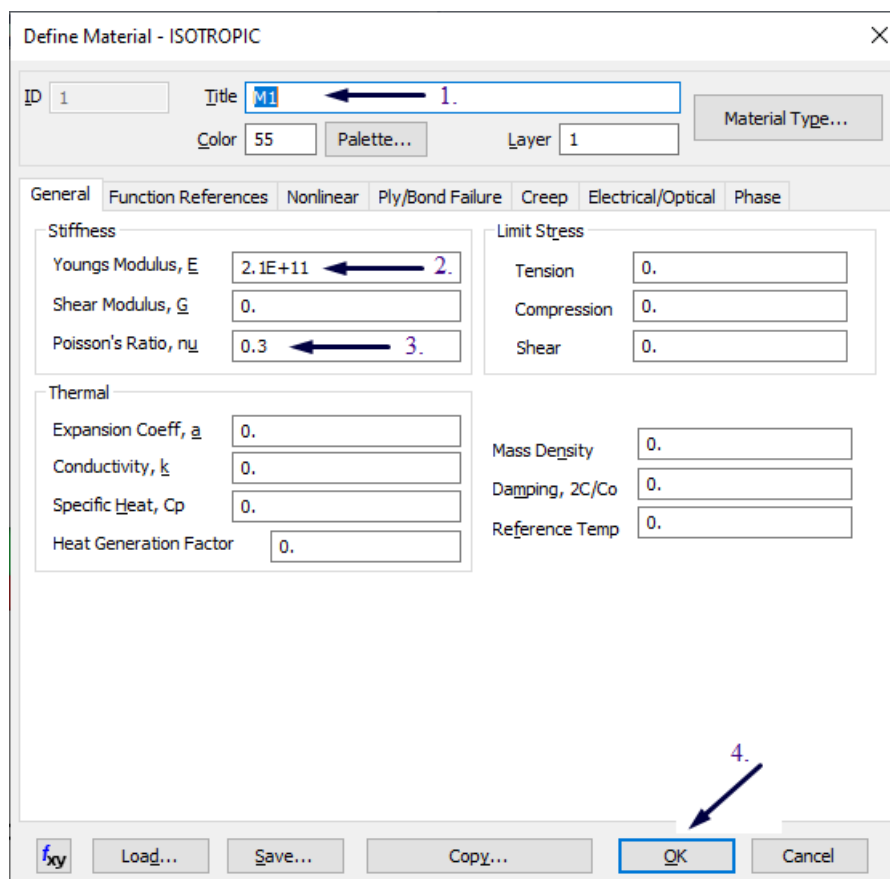
3.1.5 Одређивање сила у штаповима применом МКЕ

За решавање решеткисте конструкције применом нумеричких метода коришћена је метода коначних елемената МКЕ као најопштији нумерички метод. За креирање МКЕ модела разматраног решеткистог носача коришћен је коначни елемент штапа (1Д коначни елемент). МКЕ модел је креиран у софтверском пакету FEMAP with NX Nastran [8], док је за анализу коришћен софтвер ПАК [9].

Поступак рада коришћен за одређивање сила у штаповима применом МКЕ приказан је кроз низ препоручених корака.

Први корак - Креирање материјала. Карактеристике материјала не утичу на вредности сила у штаповима, али због нумерике је неопходно унети тражене податке (модул еластичности и Поасонов коефицијент).

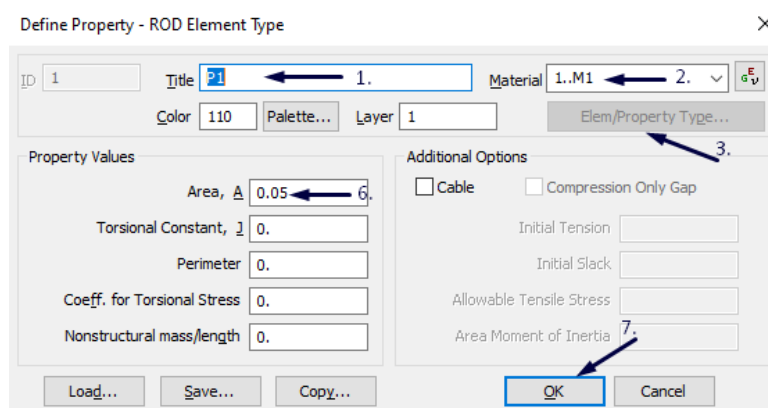
За унос карактеристика жељеног материјала користи се избор команди *Model/Material*, Слика 3.11.



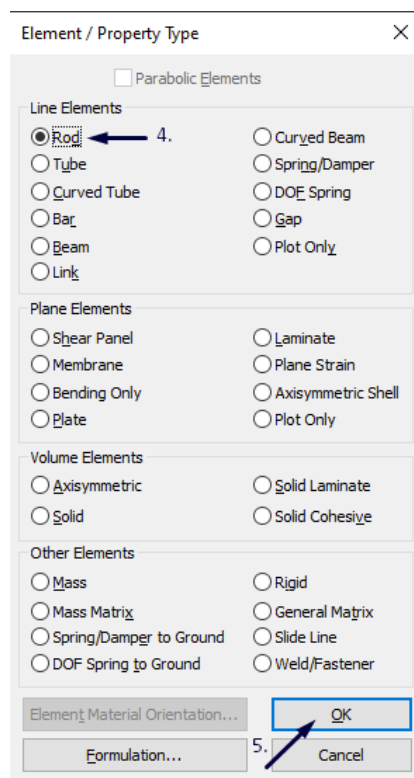
Слика 3.11 Креирање материјала

Други корак - Креирање property-ја. Потребно је извршити избор коначног елемента, у овом случају реч је штапу. Величина попречног пресека штапа не утиче на вредност сила у штаповима, тако да се узима произвољна вредност различита од 0.

За креирање property-ја користи се избор команди *Model/Property/Element/Property Type/Rod*, Сlike 3.12 - 3.13.



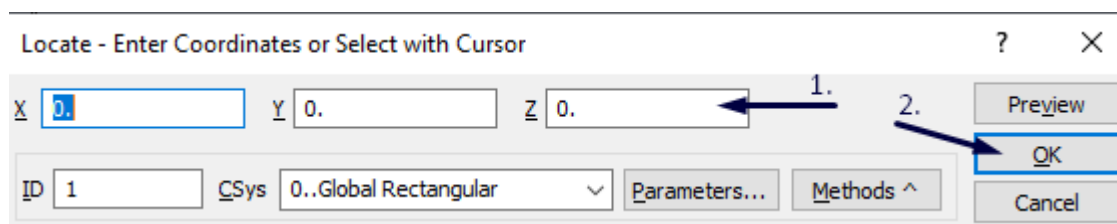
Слика 3.12 Креирање property-ја (унос вредности попречног пресека штапа)



Слика 3.13 Избор типа коначног елемента

Трећи корак - Креирање чворова. На основу координата датих у Табели 3.1 креирају се чворови решеткастог носача.

За креирање чворова користи се избор команди *Model/Node* и уносе се редом координате сваког чвора, Слика 3.14, а у складу са Табелом 3.1.



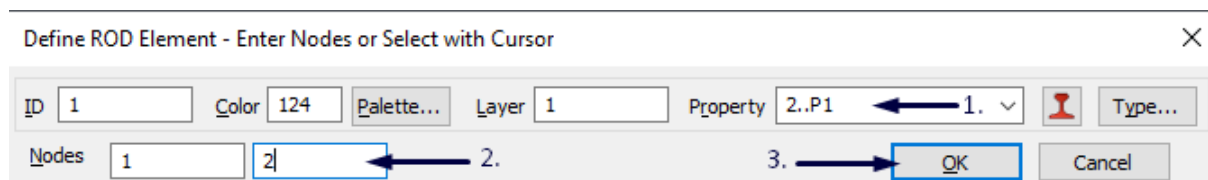
Слика 3.14 Креирање чворова

Табела 3.1. Координате чворова

Чвор	Координате
$I (A)$	$(0, 0, 0)$
II	$(a, \sqrt{3}, 0)$
III	$(2a, 0, 0)$
IV	$(3a, \sqrt{3}, 0)$
$V (B)$	$(4a, 0, 0)$

Трећи корак - Креирање елемената Креирање елемената врши се спајањем одговарајућих чворова у складу са поставком задатка приказаном на Слици 3.2.

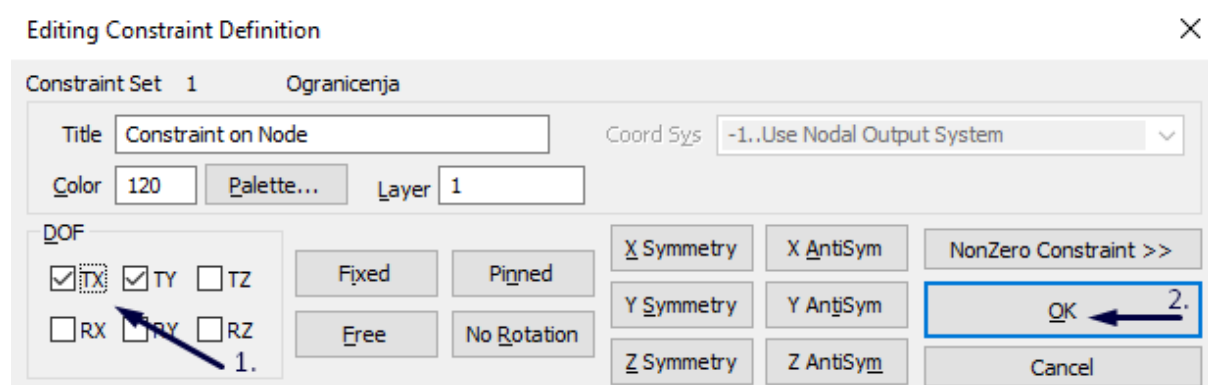
За креирање елемената користи се избор команди *Model/Element*, селекутују се чворови како би се формирао елемент, тј. штап, Слика 3.15.



Слика 3.15 Креирање елемената

Четврти корак – Задавање ограничења. Задавање ограничења се врши у складу са поставком задатка тако што се селекутују одговарајући чворови у којима се налазе ослонци (чвор А – непокретни ослонац, чвор В - покретни ослонац) и задају одговарајућа ограничења.

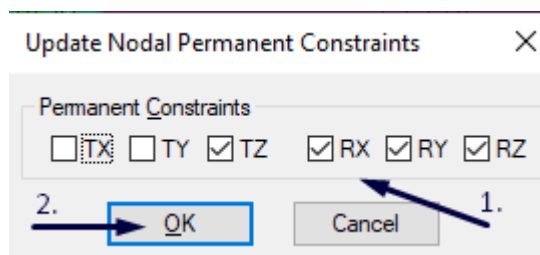
Поступак задавања ограничења на месту непокретног ослонца се задаје избором команди *Model/Constraint/Nodal* и означе одговарајући степени слободе приказани на Слици 3.16. Исти поступак се понавља и за чвор у коме се налази покретни ослонац, с тим што му је „пуштен“ одговарајући степен слободе у правцу хоризонталне осе.



Слика 3.16 Задавање ограничења на месту непокретног ослонца

Стална ограничења - ограничења која важе за све чворове у конструкцији. Због чињенице да се ради о раванском носачу и да је коришћен коначни елемент штапа, који не преноси ротације; свим чворовима у конструкцији је онемогућено померање у правцу осе управне на раван носача и ротације око све три осе координатног система.

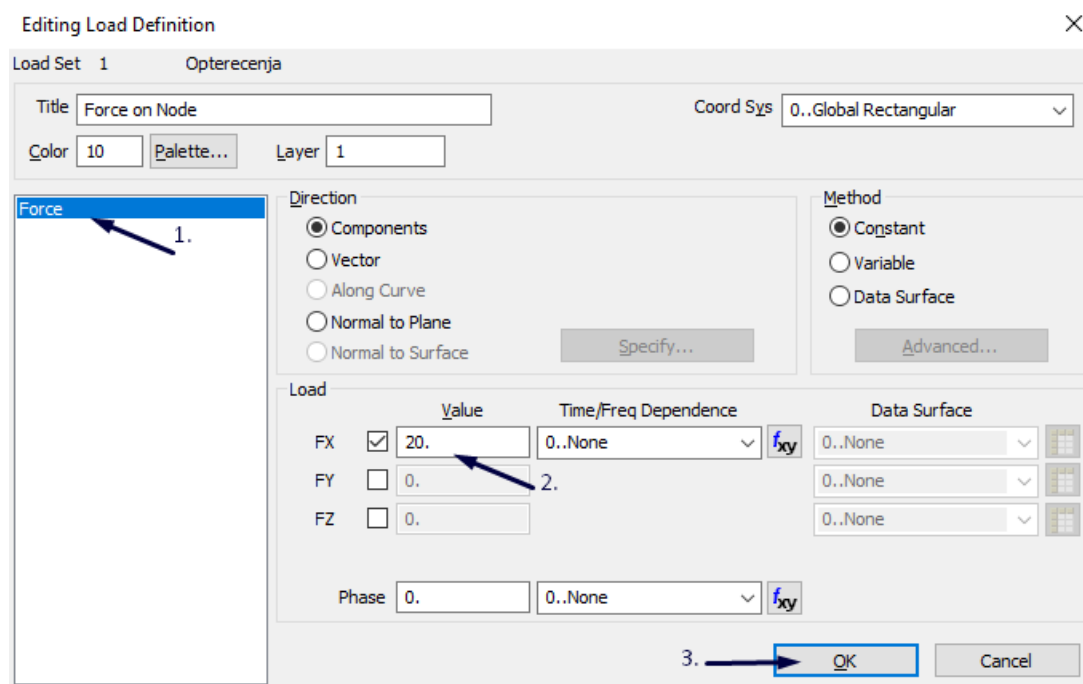
Поступак задавања сталних ограничења се задаје избором команди *Modify/Update Other/Permanent constraint/Select all* и приказан је на Слици 3.17



Слика 3.17 Задавање сталних ограничења

Пети корак – Задавање оптерећења. У чворовима у којима делују оптерећења потребно је задати одговарајуће вредности и правце сила у складу са поставком задатка приказаном на Слици 3.1.

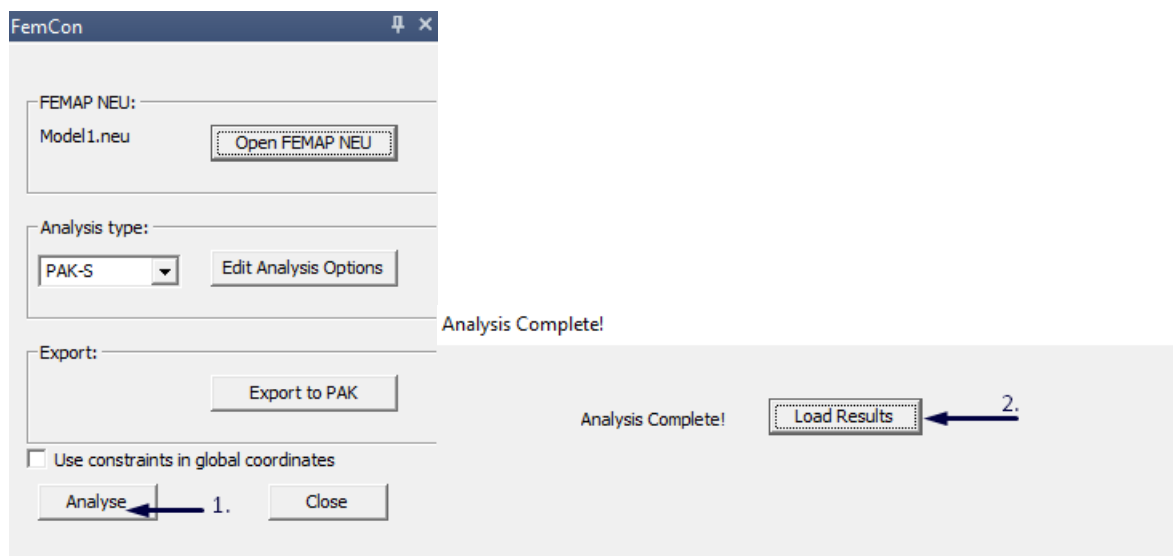
Поступак задавања оптерећења за један чвор приказан је на Слици 3.18, а до тог поступка се долази избором команди *Model/Load/Nodal* након чега се селекује се чвор у коме делује оптерећење и задаје се одговарајућа вредност силе, при чему се води рачуна о смеру деловања силе.



Слика 3.18 Задавање оптерећења

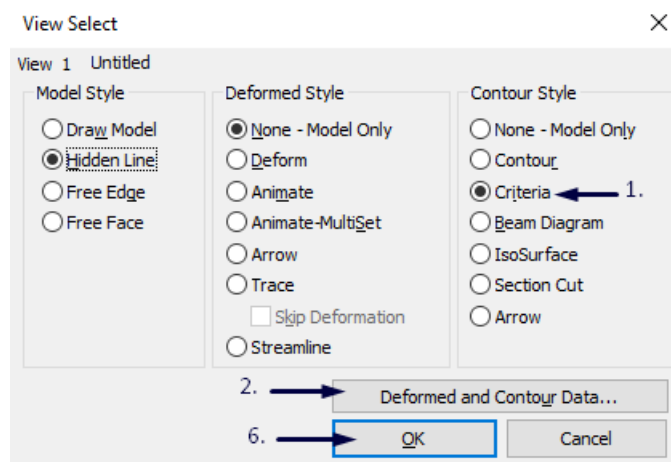
Овим поступком је завршен процес припреме МКЕ модела за анализу.

Шести корак – Анализа и преглед резултата. Поступак пуштања анализе и учитавања резултата избором команди *PAK/Analyse/Load results* у софтверском пакету ПАК приказан је на Слици 3.19.

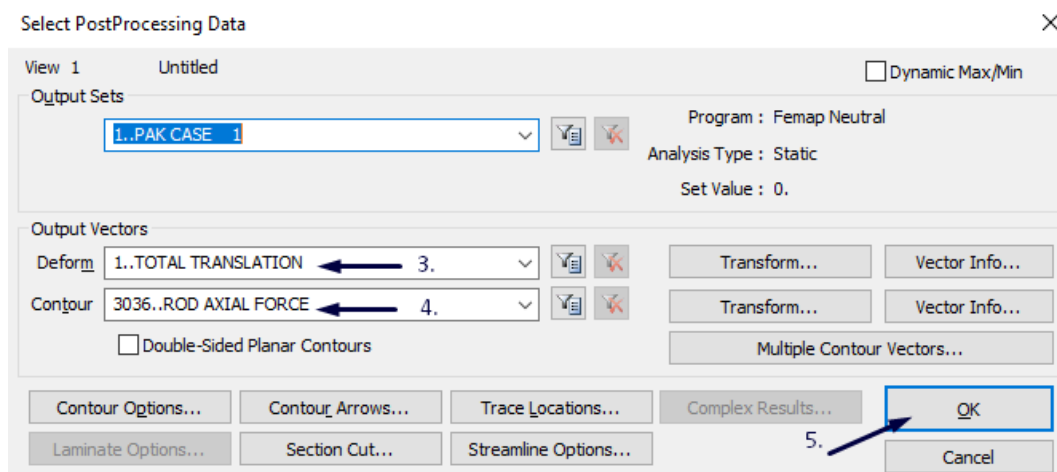


Слика 3.19 МКЕ анализа и учитавање

Преглед резултата. Да би погледали резултате анализе, вредност сила у штаповима, потребно је означити следећи низ команди у софтверском пакету *FEMAP*, *Criteria/Deformed and Contour Data* и из прозора *View Select* потребно је изабрати одговарајуће векторе и начин приказа, који су илустровани на Сликама 3.20 и 3.21.

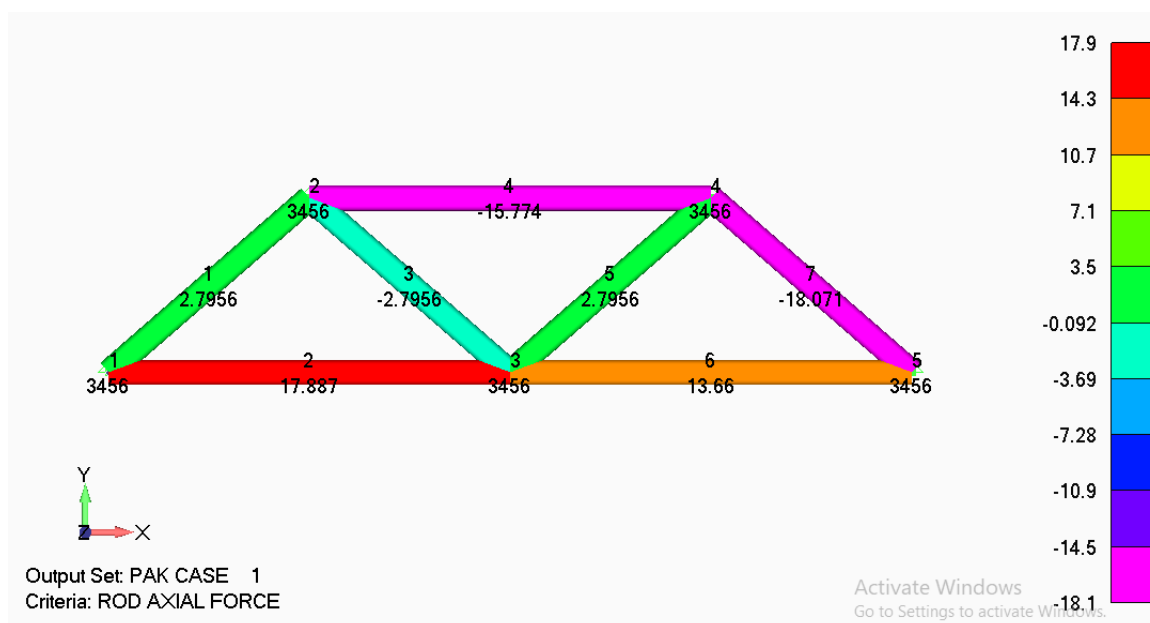


Слика 3.20 Преглед резултата



Слика 3.21 Избор одговарајућег вектора за приказ добијених резултата

На Слици 3.22 приказано је поље сила у штаповима решеткасте конструкције, као резултат МКЕ анализе.



Слика 3.22 Резултати МКЕ анализе - силе у штаповима решеткастог носача

3.2 Одређивање отпора ослонаца

3.2.1 Аналитичко решење

Аналитичким путем, отпори ослонаца се одређују на основу једначина статичке равнотеже раванског произвољног система сила које делују на решеткасти носач [2].

$$\sum X = 0$$

$$F_1 - X_A = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$Y_A - F_2 + F_B = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$F_B 4a - F_2 3a - F_1 a = 0$$

Решавањем постављеног система од 3 једначине, за налажење вредности 3 непозната отпора ослонаца, добијамо:

$$X_A = F_1 = 20 \text{ kN}$$

$$F_B = \frac{F_1 + 3F_2}{4} = 12.5 \text{ kN}$$

$$Y_A = F_2 - F_B = -2.4 \text{ kN} \text{ - знак „-“ указује да је смер силе погрешно претпостављен)}$$

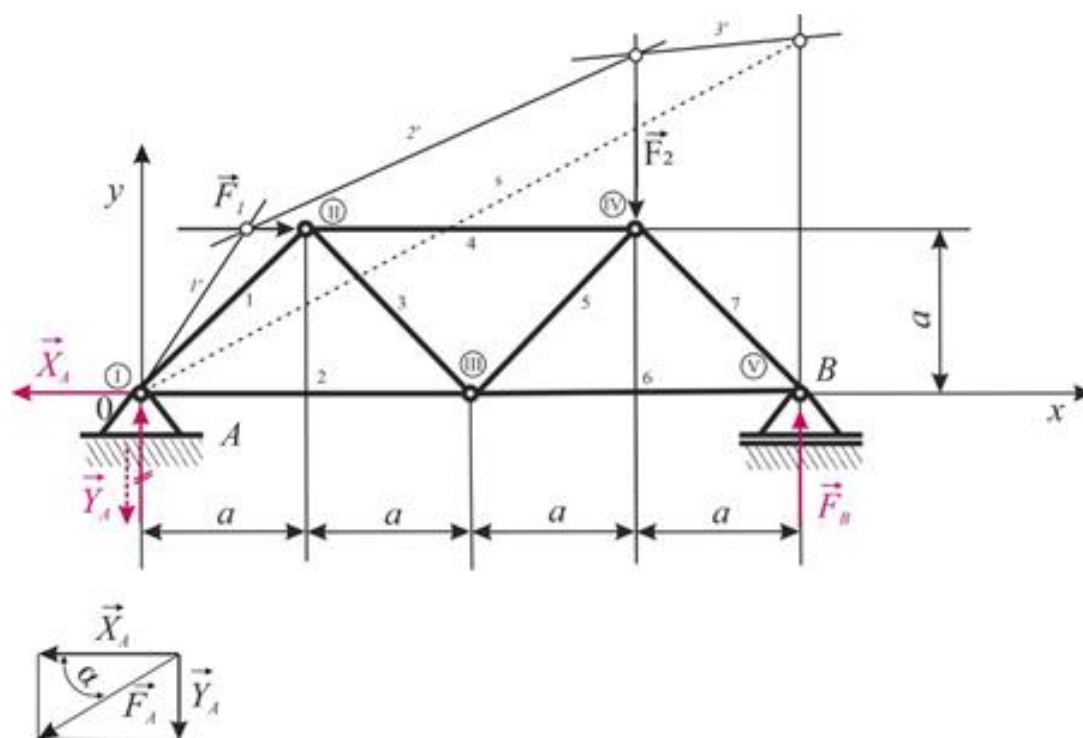
Интензитет реакције у ослонцу A дефинисан је изразом:

$$F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 20.16 \text{ kN}$$

Правац деловања дефинисан је на основу Сlike 3.23.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y_A}{X_A} = 0,125$$

$$\alpha = \arctg 0,125 = 7,13^\circ \text{ или } \alpha \approx 7^\circ 48''$$

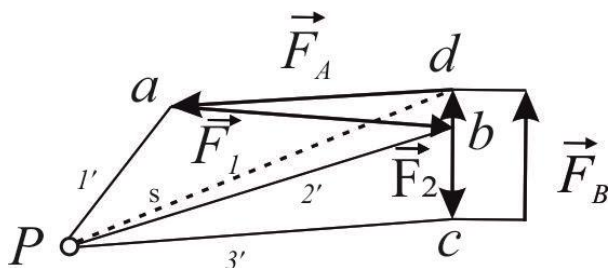


Слика 3.23 Одређивање отпора ослонаца графичким путем

3.2.2 Графичко решење

Отпори ослонаца графичком методом се одређују помоћу полигона (плана) сила и верижног полигона. На основу усвојене размере за дужину $U_L = \frac{1m}{1cm}$ и силу $U_F = \frac{10kN}{1cm}$ нацртан је решеткисти носач (план положаја), полигон сила и верижни полигон [2].

Помоћу полигона сила приказаног на Слици 3.24, одређени су, на основу произвољно изабраног пола P , зраци верижног полигона, Слика 3.23, 1', 2' и 3'.



Слика 3.24 Полигон сила

Први зрак верижног полигона потребно је повући кроз непокретни ослонац A . Спајањем те тачке са тачком C , у којој зрак 3' сече нападну линију реакције $\vec{F}_B$, одређена је завршна страна, тј. закључна линија (s) верижног полигона, а тиме и реакције ослонаца $\vec{F}_B$ и $\vec{F}_A$.

3.2.3 Одређивање отпора ослонаца применом МКЕ

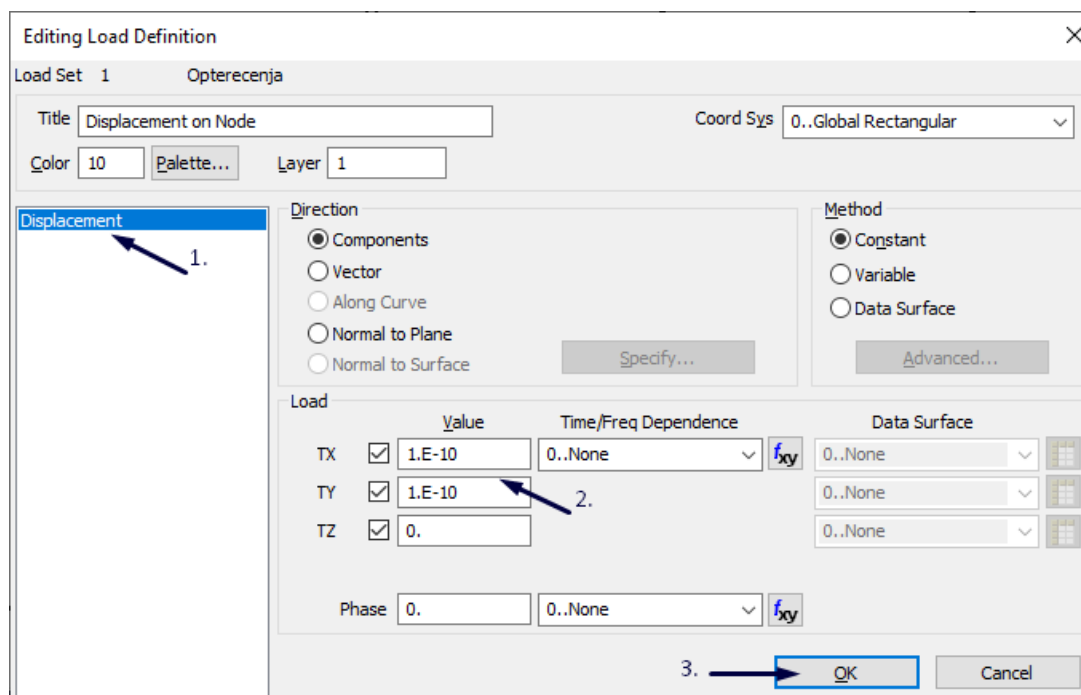
Одређивање отпора ослонаца применом МКЕ представља наставак поступка решавања примера приказаном у поглављу 3.1.5.

Поступак рада коришћен за одређивање отпора ослонаца применом МКЕ приказан је кроз низ препоручених корака, који се надовазују на кораке урађене у поглављу 3.1.5.

Седми корак - Брисање претходних резултата и ограничења. За брисање резултата претходне анализе неопходно је одабрати команду *Delete/Output/All*. Након тога потребно је избрисати ограничења на местима ослонаца избором команди *Delete/Model/Constraint*.

Осми корак - Задавање оптерећења у чворовима у којима се налазе ослонци. За потребе одређивања отпора ослонаца МКЕ анализом потребно је у местима ослонца задати минималне вредности померања у складу са реакцијама веза ослонаца (непокретни ослонац у равни – две реакције везе, покретни ослонац у равни – једна реакција везе).

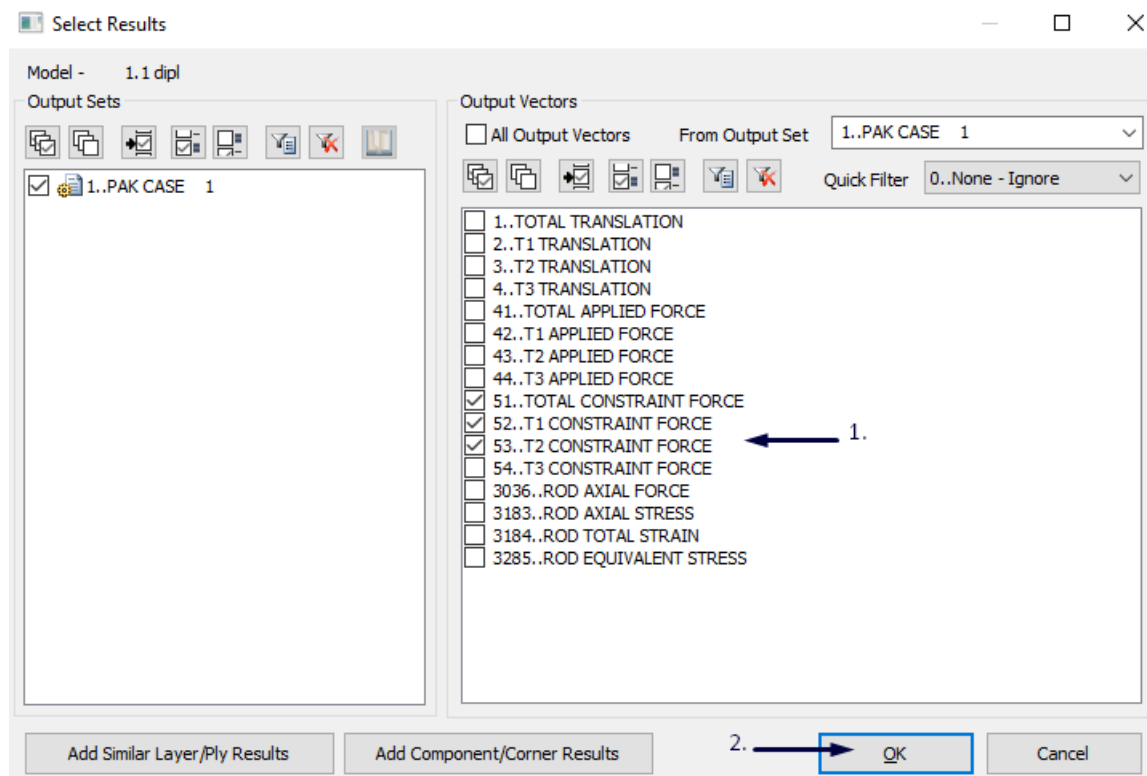
Поступак задавања оптерећења на месту непокретног ослонца се задаје избором команди *Model/Load/Nodal* и задају се одговарајућа минимална оптерећења (блиска нултичкој 0), Слика 3.25. Исти поступак се понавља и за чвор у коме се налази покретни ослонац, с тим што се задаје само вредност померања у правцу вертикалне осе.



Слика 3.25 Задавање оптерћења (минимална померања) у непокретном ослоњу

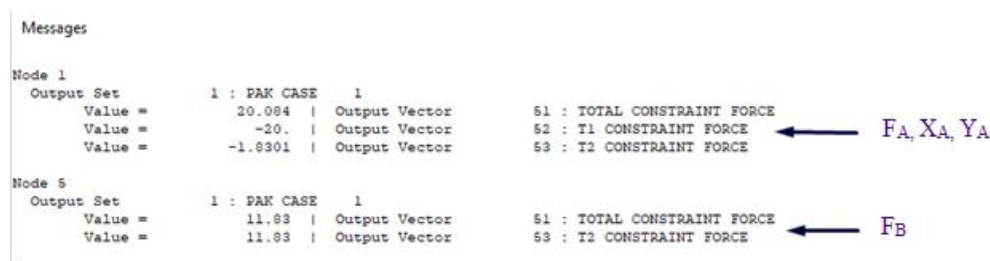
Потребно је поновити шести корак – Анализа и преглед резултата приказан у поглављу 3.1.5, а затим поновити поступак за преглед резултата, с тим што се сада бира други излазни вектор који представља вредност отпора ослонаца.

Како би исчитали вредности отпора ослонаца у одговарајућим чворовима неопходно је да избором команди *List/Output/Query* прво селекутовати векторе *Total*, *T1* и *T2 Constraint Force*, а затим и одговарајуће чворове на местима ослонаца, Слика 3.26.



Слика 3.26 Селектовање одговарајућих вектора за читавање отпора ослонаца

На Слици 3.27 је приказан прозор за поруке софтверског пакета FEMAP у коме се налазе исчитане вредности отпора ослонаца.



Слика 3.27 Приказ вредности отпора ослонаца решеткастог носача

4 Упоредна анализа резултата

На основу претходно изложених метода, може се доћи до одређених закључака. Свака од ових метода има своје предности и мане у свом коришћењу. Када је реч о методама за одређивање унутрашњих сила у штаповима предност има метода коначних елемената, такође, исто важи и за одређивање отпора ослонаца. Она предњачи због једноставности израде и ефикасности, када је реч о брзини решавања проблематике, као и прецизности резултата. Наведене ставке имају и те како велику важност када се ради о неким сложенијим конструкцијама, тј. сложенијим решеткастим носачима, који у свом саставу могу имати више стотина чворова и штапова. При сложенијим случајевима, примена аналитичких и графичких метода је врло комплексна, па се могу јавити бројне грешке при самом прорачуну.

Добијени резултати помоћу поменутих метода, могу се поклапати, али и разликовати, при чему се предност даје резултатима добијеним методом коначних елемената, а не осталим методама, због мање вероватноће да ће се грешка јавити компјутерским путем. Међутим, и овде може доћи до грешака, нпр. уколико корисник није поставио одговарајуће параметре на правилан начин или није добро прочитао добијене резултате.

У Табели 4.1 приказани су упоредни резултати добијених вредности сила у штаповима решеткастог носача коришћењем графичких, аналитичких и нумеричких метода.

Табела 4.1 Упоредни резултати сила у штаповима решеткастог носача

Метода/ Штап	1 штап	2 штап	3 штап	4 штап	5 штап	6 штап	7 штап
Метода исечања чворова	3.5 kN	17.5 kN	3.5 kN	15 kN	3.5 kN	12.5 kN	17.7 kN
Кремонин метод	3.5 kN	17.5 kN	-3.5 kN	-15 kN	3.5 kN	12.5 kN	-18 kN
Кулманова метода	-	-	-	15 kN	3.5 kN	12.5 kN	-
Ритерова метода	-	-	-	-15 kN	3.5 kN	12.5 kN	-
Нумеричка метода	2.8 kN	1.,9 kN	-2.8 kN	-15.8 kN	2.8 kN	13.7 kN	-18.0 kN

У табели 4.2 приказани су упоредни резултати добијених вредности отпора ослонаца решеткастог носача коришћењем графичких, аналитичких и нумеричких метода.

Табела 4.2 Упоредни резултати отпора ослонаца решеткастог носача

Метода/ Ослонци и силе	F_A	X_A	Y_A	F_B
<i>Аналитичка метода</i>	20.16 kN	20 kN	-2.4 kN	12.5 kN
<i>Нумеричка метода</i>	20.09 kN	-20 kN	-1.83 kN	11.03 kN

5 Прорачун сложене решеткасте конструкције применом нумеричке методе, тј. методе коначних елемената

У овом поглављу биће приказан прорачун сложене решеткасте конструкције применом МКЕ.

Решеткасти носач приказан на Слици 5.1 оптерећен је силама F_1 и F_2 , као и теговима m_1 и m_2 . Потребно је да се одреде силе у штаповима и отпори ослонаца.

Подаци:

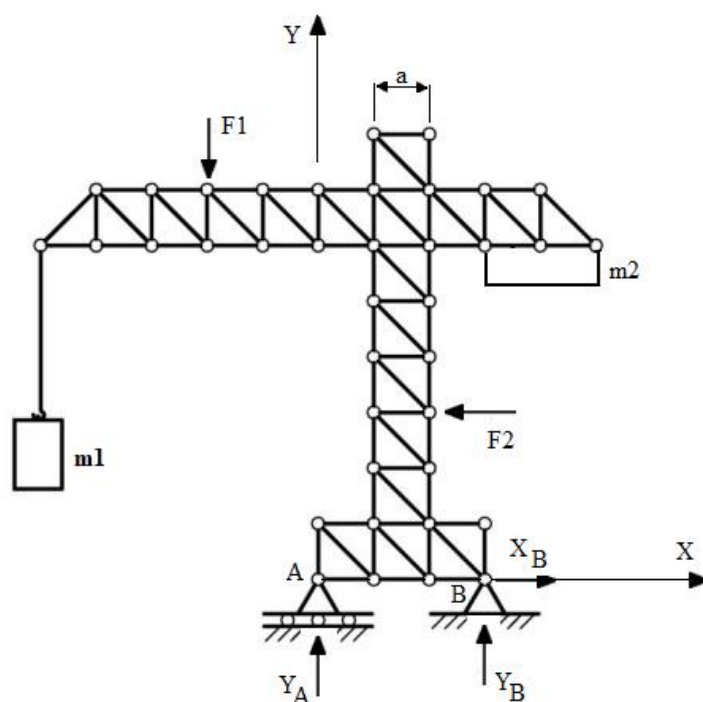
$$F_1 = 2 \text{ kN}$$

$$F_2 = 2 \text{ kN}$$

$$m_1 = 1 \text{ t}$$

$$m_2 = 1,5 \text{ t}$$

$$a = 1 \text{ m}$$



Слика 5.1 Сложени решеткасти носач

Решеткасти носач приказан на Слици 5.1, састоји се од седамдесет и три штапа ($s=73$) и тридесет и осам чворова ($n=38$) што значи да је испуњен услов: $s=2n-3=73$, односно да је решеткасти носач без сувишних штапова и да је решеткасти носач статички одређен.

У Табели 5.1 приказане су координате свих чворова решеткастог носача који су послужили за креирање МКЕ модела.

Табела 5.1 Координате чворова решеткастог носача

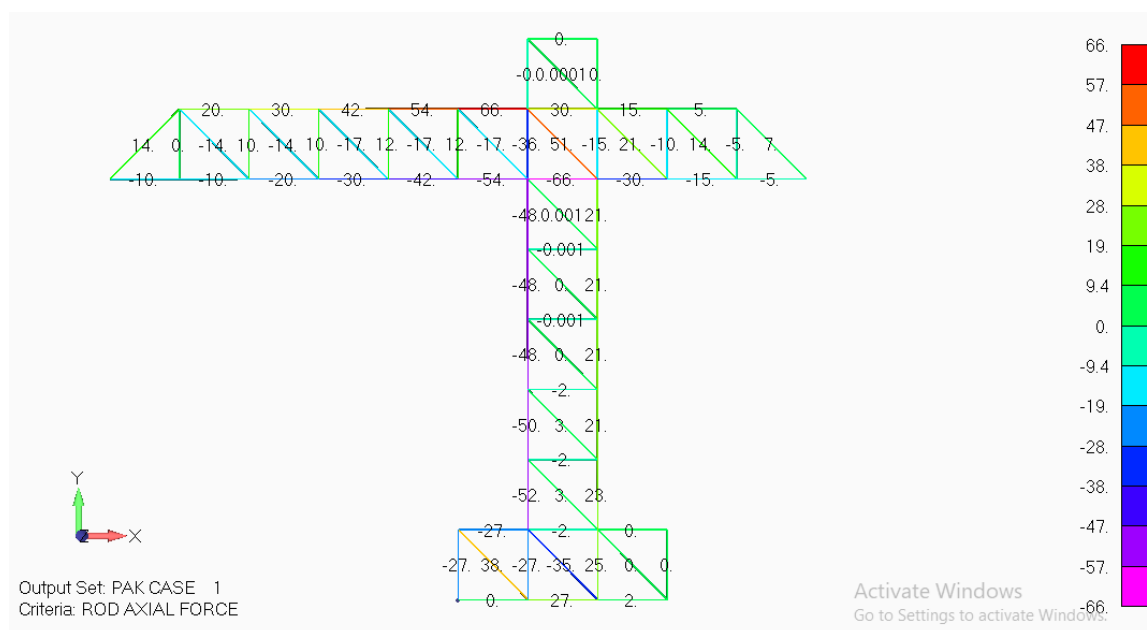
<i>Чвор</i>	<i>Координате</i>
I (A)	$(0, 0, 0)$
II	$(a, 0, 0)$
III	$(2a, 0, 0)$
IV (B)	$(3a, 0, 0)$
V	$(0, a, 0)$
VI	$(a, a, 0)$
VII	$(2a, a, 0)$
VIII	$(3a, a, 0)$
IX	$(a, 2a, 0)$
X	$(2a, 2a, 0)$
XI	$(1a, 3a, 0)$
XII	$(2a, 3a, 0)$
XIII	$(1a, 4a, 0)$
XIV	$(2a, 4a, 0)$
XV	$(a, 5a, 0)$
XVI	$(2a, 5a, 0)$
XVII	$(a, 6a, 0)$
XVIII	$(2a, 6a, 0)$
XIX	$(a, 7a, 0)$
XX	$(2a, 7a, 0)$
XXI	$(a, 8a, 0)$
XXII	$(2a, 8a, 0)$
XXIII	$(-5a, 6a, 0)$
XXIV	$(-4a, 7a, 0)$
XXV	$(-4a, 6a, 0)$
XXVI	$(-3a, 7a, 0)$
XXVII	$(-3a, 6a, 0)$
XVIII	$(-2a, 7a, 0)$
XXIX	$(-2a, 6a, 0)$
XXX	$(-a, 7a, 0)$
XXXI	$(-a, 6a, 0)$
XXXII	$(0, 7a, 0)$
XXXIII	$(0, 6a, 0)$
XXXIV	$(3a, 7a, 0)$
XXXV	$(3a, 6a, 0)$
XXXVI	$(4a, 7a, 0)$
XXXVII	$(4a, 6a, 0)$
XXXVIII	$(5a, 6a, 0)$

Поступак рада је исти као у примеру који је детаљно описан у поглављима 3.1.5 и 3.2.3, тако да ће овде бити дат преглед корака, као и резултати анализа.

Поступак рада:

1. Креирање материјала
2. Креирање property-ја
3. Креирање чворова
4. Спајање чворова; формирање елемената
5. Креирање ограничења
6. Задавање оптерећења
7. Анализа и преглед резултата

Након свих ових корака, читавају се резултати анализе, тј. вредности сила у штаповима, приказани на Слици 5.2

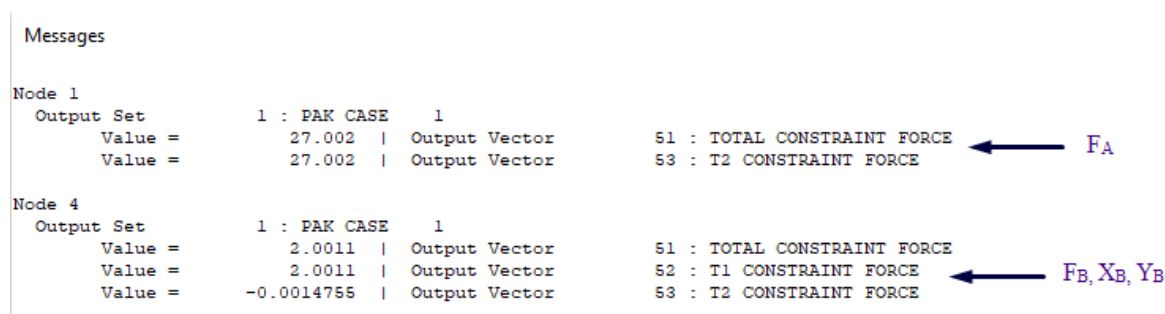


Слика 5.2 Резултати МКЕ анализе - силе у штаповима сложене решеткасте конструкције

Понављањем поступака описаних у поглављу 3.2.3, могу се прочитати вредности отпора ослонаца.

1. Брисање претходних резултата и ограничења
2. Задавање новог оптерећења у чворовима са ослоном
3. Анализа и читавање резултата
4. Нумерички приказ резултата

На Слици 5.3 је приказан прозор за поруке софтверског пакета FEMAP у коме се налазе исчитане вредности отпора ослонаца сложене решеткасте конструкције.



Слика 5.3 Приказ вредности отпора ослонаца сложене решеткасте конструкције

Ради прегледности приказа вредности сила у штаповима разматране сложене решеткасте конструкције, вредности сила су дате у Табели 5.2.

Табела 5.2 Приказ резултата сила у штаповима сложене решеткасте конструкције

Штап	F [kN]	Штап	F [kN]	Штап	F [kN]	Штап	F [kN]	Штап	F [kN]	Штап	F [kN]
1	-27	13	0	25	21	37	7	49	0	61	30
2	0	14	-52	26	-48	38	-5	50	0	62	-17
3	38	15	3	27	0	39	5	51	0	63	10
4	-27	16	-2	28	0	40	-10	52	66	64	30
5	-27	17	23	29	21	41	14	53	12	65	-14
6	27	18	-50	30	-48	42	15	54	-54	66	10
7	-35	19	3	31	0	43	-15	55	-17	67	-20
8	-2	20	-2	32	-66	44	21	56	-42	68	-10
9	25	21	21	33	21	45	30	57	54	69	-14
10	2	22	-48	34	-30	46	-36	58	-17	70	20
11	0	23	0	35	-15	47	51	59	12	71	0
12	0	24	0	36	-5	48	0	60	42	72	-10
										73	14

6 Закључак

Решеткасти носачи представљају један облик конструкцијских система са широким спектром примене. Могу се наћи у најразличитијим димензијама, облицима, при чему је заједничка карактеристика свих њих да могу да преносе велика оптерећења, а да притом имају релативно малу сопствену масу. С обзиром на то да могу имати веома интересатне облике, решеткасти носачи, се неретко користе и као делови ентеријера.

Пре изградње и постављања решеткастих носача, потребно је одрадити бројне прорачуне како би се испитале одређене карактеристике. Треба имати у виду шта та конструкција треба да задовољи, какви су њени будући експлоатациони услови, која и колика оптерећења треба да поднесе. Неки од прорачуна који се спроводе, а обухваћени су у овом раду јесу одређивање унутрашњих сила у штаповима решеткастих носача, као и одређивање отпора ослонаца.

За сваки од ових прорачуна могуће је применити више различитих метода: графичке, аналитичке и нумеричке, при чему се у одређеним случајевима примењују и комбиноване, графоаналитичке методе. Међутим, уколико се ради о сложеним конструкцијама, предност имају нумеричке методе.

Применом рачунара са специјализованим софтверима, је могуће на бржи и ефикаснији начин доћи до поузданог решења потребних анализа. Наравно, поред одговарајућег софтвера, неопходна је и квалитетно обучена особа која зна да рукује програмом. Овакав вид сарадње између рачунара и човека, доводи до високе стопе продуктивности: квалитет производа на високом нивоу уз смањено време прорачуна, а самим тим и смањеним временом потребним за пласирањем производа на тржиште, што је поред квалитета, у данашње време, један од битнијих фактора за успех, како у свим производним гранама, тако и у инжењерству.

7 Литература

- [1] Којић М, Мићуновић М: Статика, Научна књига, Београд, 1978.
- [2] Buđevac D., Marković Z. i dr., Metalne konstrukcije, Građevinska knjiga, Beograd, 2007.
- [3] Zaimović-Uzunović N., Vukojević D. i dr., Statika, Mašinski fakultet ,Zenica, 2007.
- [4] Elvis Omanović, Klasične i savremene metode proračuna rešetkastih konstrukcija, Mašinski fakultet, Mostar, 2012.
- [5] Kojić M., Slavković R., Živković M., Grujović N., Metod konacnih elemenata 1, Lineralna analiza, Mašinski fakultet, Kragujevac, 2010.
- [6] Петровић Н., Структурна оптимизација решеткистих носећих конструкција, Факултет инжењерских наука, Крагујевац, 2020
- [7] <https://www.nationalgeographic.rs/galerija/7052/reportaze/galerije/8311-8-najlepsih-mostava-na-svetu.html> , приступљено 15.09.2020.
- [8] Simcentar Femap with NX Nastran
- [9] Zivković M, Kojić M, Slavković R, Grujović N. PAK-S program for FEM structural analysis. Serbia: Faculty of Mechanical Engineering, University of Kragujevac; 2003