

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Информатика у инжењерству

Предмет: Механика флуида

Број индекса: 203/2016

Драгутин С. Тијанић

Ламинарни гранични слој

завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Проф. др Савић Слободан-ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да:

- проучи препоручену литературу у циљу суштинског разумевања теорије граничног слоја,
- опише струјање у граничном слоју и изведе основне једначине,
- прикаже решавање једначина граничног слоја на примеру оптицања равне плоче,
- изложи основне напомене о аеропрофил, и
- на основу стечених основних знања из обимне литературе наведене области, укаже на практичну примену теорије граничног слоја.

Препоручена литература:

- Салников, В., Динамика вискозног нестишљивог флуида, Машински факултет у Београду, Београд 1969.
- Обровић, Б., Динамика флуида-изабрана поглавља, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 1998.
- Обровић, Б., Механика флуида, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2007.

Крагујевац, 20. 10. 2019.

ментор:

Проф. др Савић Слободан

Резиме

Идеја овог завршног рада је да се прикажуоснове истраживања струјања флуида у граничном слоју, за случај опструјавања чврсте непорозне контуре тела. Ради се о врло комплексном струјању вискозног нестишљивог флуида које се описује веома сложеним системом парцијалних нелинеарних диференцијалних једначина другог реда, са сложеним почетним и граничним условима. У првом делу рада је разматрано струјање флуида и дефинисан појам граничног слоја.

У другом делу рада је одређена дебљина граничног слоја и описано јењено понашање при промени појединих параметара. Такође је приказано извођење Прантлових једначина граничног слоја за случај раванског стационарног струјања вискозног нестишљивог флуида поред чврстог непорозног зида.

У трећем делу одрађенојерешење једначине граничног слоја за најједноставнији случај струјања флуида -опструјавање равне плоче.

Приказано је, такође, одређивање дебљине истискивања и дебљине губитка импулса.

Кључне речи:*флуид, струјање, гранични слој, равна плоча.*

Summary

The main idea of the final paper is to present the basics of research of fluid flow in the boundary layer, for the case flowing solid nonporous body contour. It is about a very complex flow of viscous incompressible fluid which is described by a very complex system of nonlinear partial differential equations of second order with complex initial and boundary conditions. In the first part of the paper is considered fluid flow and defined the concept of the boundary layer.

The second part is determined the thickness of the boundary layer and described her behavior at changing certain parameters. It is also shown performing Prantl boundary layer equations for the case of plane stationary flow of a viscous incompressible fluid near the solid nonporous wall.

In the third part it was found the solution boundary layer equations for the simplest case of flow - flowing flat plate.

Also it is shown determination of thickness extrusion and thickness loss of pulse.

Keywords:*fluid, flow, boundary layer, flat plate*

Садржај

1. Увод	1
2. Појам граничног слоја.....	2
2.1 Струјање у граничном слоју	5
2.2 Одвајање граничног слоја	6
3. Дебљина ламинарног граничног слоја	7
4. Прантлове једначине граничног слоја	10
5. Аеропрофили	17
5.1 Постапак циркулације.....	18
6. Отпор трења	21
7. Дебљина истискивања и дебљина губитка импулса	23
8. Гранични слој на плочи.....	25
9. Закључак.....	33
Литература	34

1. Увод

Све бржи развој науке и израженији захтеви савременог човека за енергијом повећавају потребу за непрекидним истраживањем и увођењем новитета у виду метода решавања различитих проблема. Такав приступ анализирања и разматрања различитих проблема представља један од основних принципа науке и има га у свим областима истраживања, а самим тим и у изучавању проблема који се јављају приликом струјања флуида.

У механици флуида се кретање флуида проучава као кретање флуидних делића, односно као померање елемената непрекидне течљиве средине који су потпуно испуњени материјом и између којих нема никаквих шупљина. Само описивање кретања треба да покаже, како промене узајамних положаја делића флуида, тако и понашање целокупно посматране масе флуида, односно флуида као целине[1].

Гранични слој, који се образује при опструјавању чврстих површина вискозним флуидом, или при мешању струја вискозног флуида различитих брзина и физичких особина, је основа за разумевање многих техничких процеса. Многе области науке и технологије као што су космичка истраживања, балистика, ракетна и авио техника, пнеуматика и хидраулика, екологија, енергетика и енергетска ефикасност, градња турбина, компресора, пумпи и низа других апарата и уређаја, ауто индустрија, филтрација воде и ваздуха, користе резултате који су остварени помоћу Теорије граничног слоја.

Гранични слојеви се у принципу могу поделити у две основне групе: класични гранични слој, који се формира у околини тела које се опструјава или на површинама канала, и који се налази између граничне површине и спољашње струје, и “слободни” гранични слој, који је са обадве стране окружен потенцијалним струјањима савреног флуида-вртложни траг и сл. За случај класичног граничног слоја, неопходно је напоменути да није реч само о оптицању апсолутно чврсте површине, већ да се овај појам користи и у случајевима порозних контура, односно у случајевима усисавања односно удувавања флуида, случајевима еластичних површина и сл. Од тренутка када је Прантл дефинисао проблем граничног слоја, значајан број истраживача ради на решавању многобројних, физички различито дефинисаних проблема струјања нестишљивог и стишљивог флуида, плазме [2].

Чак и у данашње време, теорија граничног слоја је веома актуелна, а може се рећи да је свој прави смисао пронашла у савременој авиоиндустрији и ракетној техници. Уз помоћ истраживања у овој области омогућено је да постане основа савремене механике течности и гасова [3].

2. Појам граничног слоја

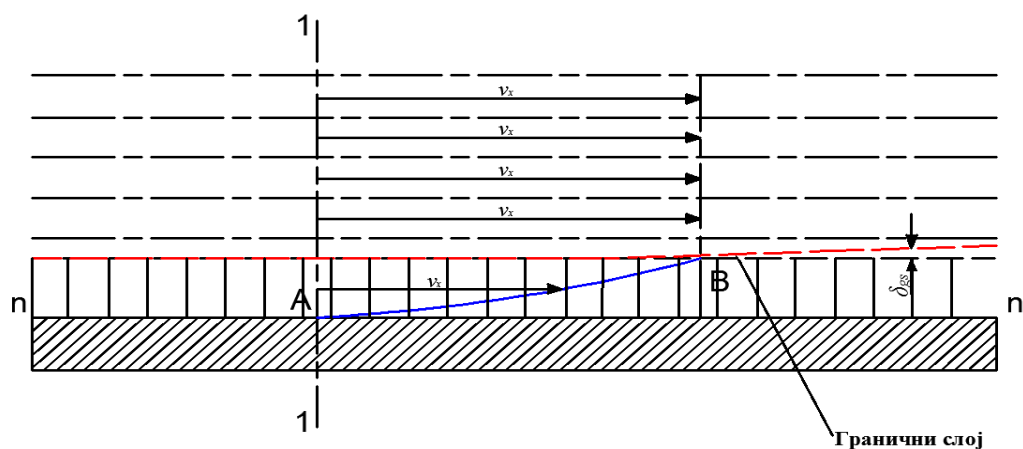
Гранични слој постоји при свим струјањима у различитим технолошким процесима и поступцима као што су и системи са контактном фазом (гас-течности, гас-чврсто, течности-чврсто) тј. вишефазни системи (паковани, флуидизовани, циркулациони флуидизовани, системи са вертикалним и хоризонталним током фаза тј. транспортни системи и др.), који се користе у производњи и преради полазних сировина, у циљу израде широког спектра финалних производа у различитим гранама индустрије. Основне промене које се одвијају у процесима у индустрији су физичко-хемијске трансформације, уз истовремени пренос количине кретања и/или топлоте и масе (протицање флуида, млевење, таложење, филтрација, мешање, загревање, кондензација, дестилација, екстракција...), због чега су производни процеси изузетно сложени и углавном се изводе у вишефазним системима. Проучавање и разумевање граничног слоја, у феноменима који су везани са преносом количине кретања, топлоте и масе, уз евентуално приступање хемијске, биохемијске или електрохемијске реакције, незабиолазан је корак у развоју процеса, моделовању, контроли и управљању. Ова знања су потребна за развој нових или побољшању постојећих технологија у хемијској, прехранбеној, фармацеутској и петрохемијској индустрији, за развој биотехнолошких процеса и опреме, опреме за заштиту животне средине, опреме за технологију у области синтезе нових материјала и друго [4].

У случајевима када је брзина струјања релативно мала, а вискозност знатно велика. Стога је Рејнолдсов број оваквих струјања мали, $Re < 1$. Према томе, ако је Рејнолдсов број неких струјања мали према јединици, онда се нелинеарни чланови у диференцијалним једначинама кретања могу да занемаре.

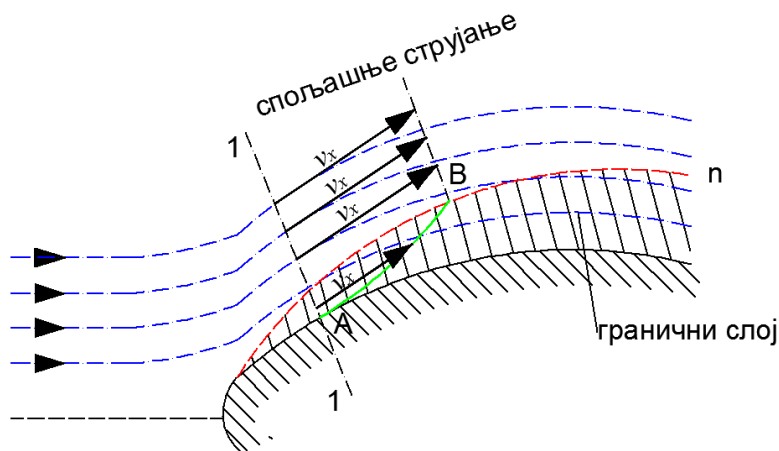
Међутим, технички најважнији флуиди као што су вода и ваздух у највећем броју струјних проблема крећу се већим брзинама при невеликој вискозности, па је Рејнолдсов број ових струјања доста велики, $Re \gg 1$. Стога се поменути нелинеарни чланови не могу априори да замене. Ови се флуиди лепе за чврсту површину опструјаваног тела. Да приањање реалних флуида за чврсте површине утиче на карактер самог струјања указивали су многи истраживачи као на пример: Бернули, Стокс, Менделјејев и Жуковски. Тек је немачки научник Лудвиг Прантл 1904. године извршио детаљну анализу струјања флуида при опструјавању чврстих тела, при чему је успео први да струјање у непосредној близини зида тела изрази у облику одговарајућих диференцијалних једначина које су касније добиле назив једначине граничног слоја.

Прантл је установио да лепљење делића флуида за зидове опструјаваног тела изазива кочење флуида у непосредној околини чврсте површине. У том танком слоју уздужна брзина струјања флуида расте, у правцу нормале на површину, од нуле на контури тела, до неке вредности која би постојала да зид не кочи струјање. Ван тог слоја

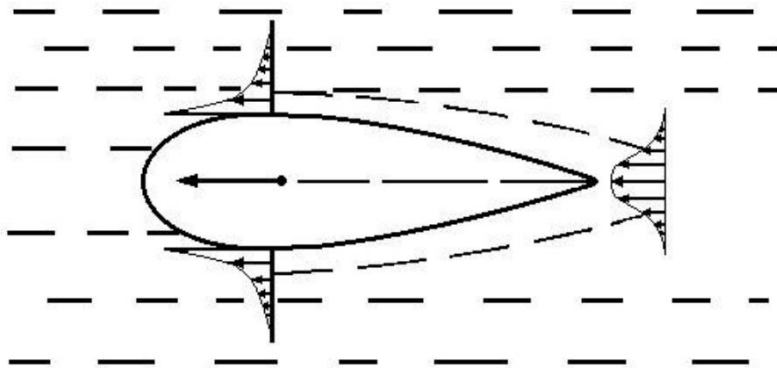
брзина се скоро не мења. Будући да је поменути слој практично доста танак, у њему је „градијент“ уздужне брзине у правцу управном на контуру опструјаваног тела врло велики. У том случају тангентни напон $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ има врло високе вредности, чак и при врло малим вредностима коефицијента динамичке вискозности (велики Re бројеви). Изван поменутог танког слоја тангентни напон је небитан [1].



Слика 1а. Формирање граничног слоја на равной површини која мирује[5]



Слика 1б. Формирање граничног слоја на закривљеној површини која мирује[5]



Слика 2. Формирање граничног слоја код тела које се креће кроз флуид[5]

У самом танком слоју непосредно уз зид опструјавање тела силе вискозности могу имати велике вредност, ван овог слоја оне су занемарљиво мале.

Струјање флуида у околини опструјаваног тела може се, при великим Re бројевима, поделити на две области: једну која представља танак слој поред самог тела – **гранични слој** и другу – **спољашње струјање**, где се утицај трења може занемарити. Струјање ван граничног слоја може се сматрати невискозним и за њега важе закони потенцијалног струјања савршеног флуида. Мала дебљина динамичног граничног слоја омогућава упрошћавање Навије-Стоксових једначина. Упрошћене једначине су већ решене за велики број проблема струјања нестишљивих и стишљивих флуида [5].

Према томе, слој флуида у непосредној близини чврсте површине тела са којим се флуид додирује, у коме је утицај вискозности флуида изразит, назива се гранични слој.

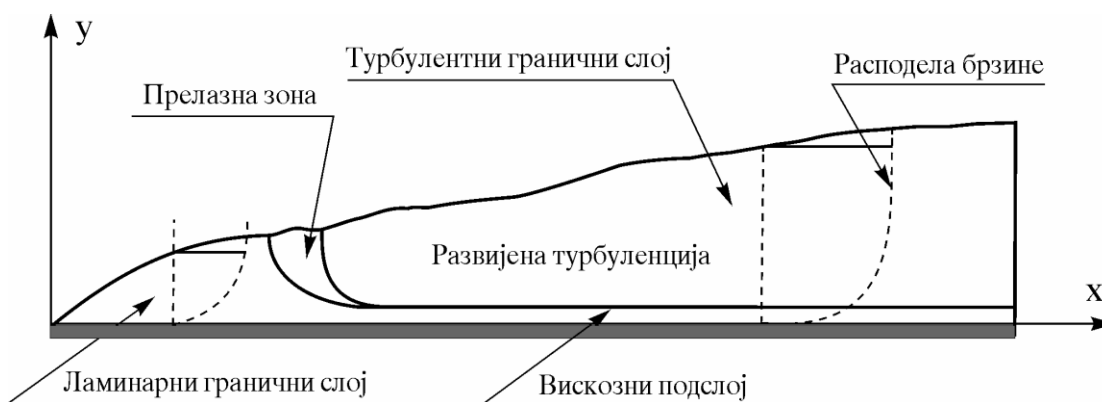
Ако између струје флуида и површине опструјаваног тела долази до размене топлоте, онда се по аналогији са динамичким граничним слојем уз саму површину тела образује термодинамички (топлотни) гранични слој. У овом слоју се температура мења од вредности на зиду тела до одговарајуће вредности на спољашњој граници граничног слоја.

Процес дифузије настаје када се у различитим тачкама струјног тока јавља различита концентрација. Аналогно се уводи и дифузиони гранични слој у коме се концентрација сваке компоненте мења од вредности на зиду до одговарајућих вредности спољашњег струјања. Брзина, температура и концентрација било које компоненте у одговарајућим граничним слојевима приближавају се асимптотски својим одређеним вредностима на спољашњој граници граничног слоја. Иако су дебљине динамичког или термодинамичког граничног слоја много мање у односу на димензија тела, ови слојеви имају велики утицај у процесу узајмног динамичког и термодинамичког дејства струје флуида и опструјаваног зида. Материјал зида може да ступи у хемијске реакције са флуидом, што још више отежава проблем [1].

2.1 Струјање у граничном слоју

Струјање у граничном слоју је може бити ламинарно или турбулентно.

Дуж струјног тока у граничном слоју мења се и дебелина граничног слоја и режим струјања. Увек је почев од чела чврсте површи струјање у граничном слоју ламинарно (ламинарни гранични слој), при чему се дуж површи сам гранични слој подебљава. У гранични слој брже стижу нови делићи него што одлазе делићи који се налазе на слоју. Затим Струјање у граничном слоју може да буде турбулентно (турбулентни гранични слој), што зависи од брзине, односно од Рејнолдсовог броја. На слици 3 приказана је, на пример, могућа структура режима струјања у граничном слоју дуж равне плоче постављене паралелно правцу струјања [5].



Слика3. Режим струјања у граничном слоју дуж равне плоче[5].

Потребно је усвојити одговарајућу дужину при дефинисању Рејнолдсовог броја. У овом случају то је углавном растојање x од предње ивице чврсте границе, односно предње зауставне тачке. Уз сами почетак плочегранични слој је врло танак, што значи да је мали и Рејнолдсов број који карактерише ламинарно струјање[5].

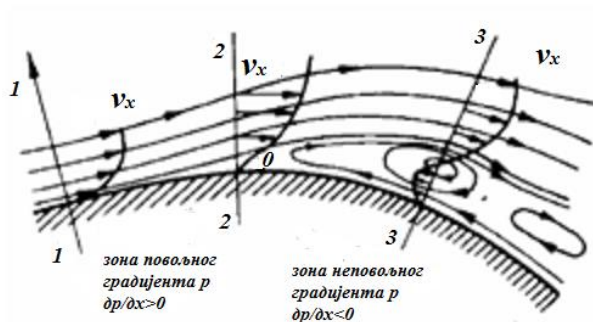
Када флуид струји у слојевима равномерно и уређено, тада се ради о ламинарном струјању. Такво струјање се јавља код спорог струјања флуида велике вискозности.

Када флуид струји неравномерно, неуређено са измешаним слојевима, ради се о турбулентном струјању. Такво струјање се јавља код великих брзина струјања флуида мале вискозности.

Код ламинарног струјања је јасније одређивање параметара струјања. Код турбуленције папараметри струјања се мењају са временом и потребно је да одредимо вредности у датом тренутку. Струјање које је између два слоја, наизменично се мења од једног режима ка другом и назива се прелазни режим стања [6].

2.2 Одвајање граничног слоја

При опструјавању аеропрофила или обртних тела, у односу на опструјавања око плоче, знатно се мења градијент притиска p дужином турбулентног граничног слоја, а зависно од њега распоред брзине и тангенцијални напон τ_0 . Облик граничног слоја и распоред брзина у области одвајања дати су на слици 4. Види се да уколико је $\partial p / \partial x < 0$ (повољан градијент p) профил брзине је још увек пунији (у односу на равну плочу са $\partial p / \partial x = 0$), а при $\partial p / \partial x > 0$ (неповољан градијент p) профил брзине је оштрији (стрмији). При позитивном градијенту p профил брзине нагло се мења и одлепљује када је $\tau_0 \approx 0$ [2].

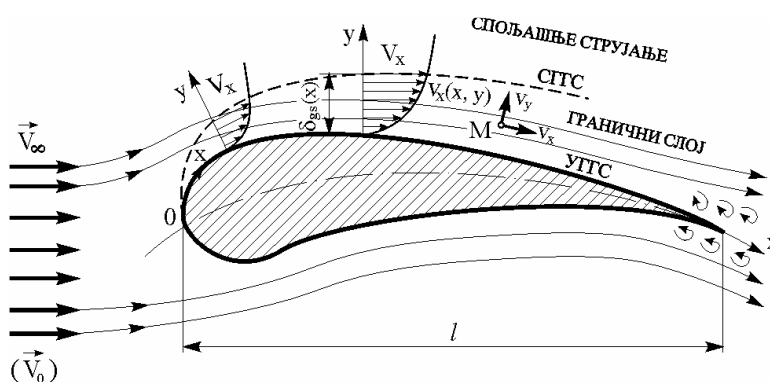


Слика 4. Одвајање граничног слоја [2].

Због велике количине флуида која је успорена, долази до одлепљивања флуидне струје (тачка 0). Ту појаву прати повећање притиска у складу са Бернулијевом једначином. То повећање притиска, у садејству са тангенцијалним напоном на површини тела, тежи да врати флуид уназад. Тачка одвајања налази се на чврстој површини, јер је на том месту под дејством повећаног притиска и тангентног напона, заустављено кретање. Зачетак вртлога формира се из струју, од тачке одвајања због струјања у супротном правцу. Ефекат одвајања и вртложни траг су најзначајнији процес претварања кинетичке енергије у енергију притиска и губитка механичке енергије, такође. Аеродинамична тела обликују се тако да се тачка одвајања спусти што је могуће ниже. Ако гранични слој остане танак а одвајање се не догоди, притисак ће се приближно вратити флуидној струји. При томе ће отпор који се јавља бити искључиво последица трења [2].

3. Дебљина ламинарног граничног слоја

Како би се одредила дебљина граничног слоја δ_{gs} полази се од претпоставке да су унутар граничног слоја вискозне силе и силе инерције величине истог реда. У спољашњем струјању могуће је занемарити силе трења у односу на силе инерције. У теорији граничног слоја се такође сматра да је релативна дебљина граничног слоја δ_{gs}/l мала величина, као и да је полупречник кривине зида опструјаваног тела довољно велики у односу на средњу дебљину граничног слоја. На слици 6 шематски је приказан распоред брзина у граничном слоју за један несиметрични профил (заједно са осталим параметрима граничног слоја), при чему је размера дужине у правцу управном на зид профила увећана [5].



Слика 5. Гранични слој око профила [5].

Са x је означена криволинијска координата, која се мери дуж посматраног зида од неке уочене тачке O . Са y је означена координата, која се мери дуж нормале на зид. При томе је V_x – брзина спољашњег потенцијалног струјања (уздужна пројекција брзине на спољашњој граници граничног слоја), а l – карактеристична дужина за гранични слој. У разматраном случају то је тетива опструјаваног профила.

Из развијеног облика Навије-Стоксове једначине

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

се види да су инерцијске силе и силе трења (након множења са ρ) одређенечлановима облика:

$$I = \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad T = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (\mu = \rho \nu).$$

Уздужна пројекција брзине у граничном слоју мења се од $v_x = 0$ на непокретном зиду до $v_x = V_x(x)$ на спољашњој граници граничног слоја, па је редвеличине ове пројекције $v_x \sim V_x$ (v_x може највише да буде једнако V_x). Види се да је $x \sim l$ и $y \sim \delta_{gs}$, при чему знак " $\sim$ " означава ред величине. Следи да је је извод $\partial v_x / \partial x$ пропорционалан количнику V_x / l . Други извод у изразу за силу трења јереда величине:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \sim \frac{1}{\delta_{gs}} \cdot \frac{V_x}{\delta_{gs}} = \frac{V_x}{\delta_{gs}^2}.$$

Инерцијалне силе и силе трења су величине реда:

$$I \sim \rho \frac{V_x^2}{l}, \quad T \sim \mu \frac{V_x}{\delta_{gs}^2}.$$

Како су ове силе величине истог реда, то се из релације

$$\rho \frac{V_x^2}{l} \sim \mu \frac{V_x}{\delta_{gs}^2}$$

налази да је

$$\delta_{gs} \sim \sqrt{\frac{\mu l}{\rho V_x}} = \sqrt{\frac{\nu l}{V_x}},$$

одакле је

$$\frac{\delta_{gs}}{l} \sim \sqrt{\frac{\nu}{V_x l}} = \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad Re = \frac{V_x \cdot l}{\nu} \quad (3.2)$$

Ако се карактеристична дужина l замени променљивом x , мереном од предње зауставне тачке, добиће се да је

$$\delta_{gs} \sim \sqrt{\frac{vx}{V_x}} = \delta_{gs}(x), \quad \frac{\delta_{gs}}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_x}}, \quad Re_x = \frac{V_x \cdot x}{\nu}, \quad (3.3)$$

одакле се види да дебљина граничног слоја $\delta_{gs}(x)$ расте пропорционално са x .

Коначно се може написати да је

$$\delta_{gs} = k \cdot \sqrt{\frac{vx}{V_x}}, \quad (3.4)$$

где је k неки коефицијент (бројни фактор) који се накнадно одређује за конкретни случај струјања флуида. На основу релације (3.3) следује да се релативна дебљина граничног слоја δ_{gs} / l смањује са повећањем Re броја. Уколико је Re бројмањи, дебљина граничног слоја је већа. За невискозни флуид, тј. када $Re \rightarrow \infty$, дебљина граничног слоја тежи нули.

4. Прантлове једначине граничног слоја

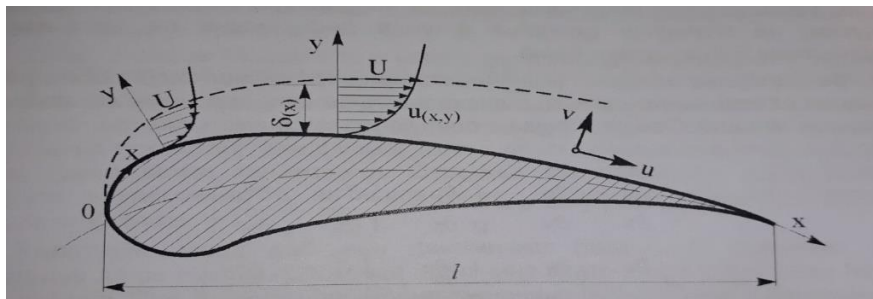
До сада је разматрано струјање вискозне течности при релативно малим Рејнолдсовим бројевима. Методе теорије граничног слоја односе се, међутим, на случајеве струјања флуида дефинисане са врло великим вредностима Рејнолдсовог броја.

За извођење основних једначина теорије граничног слоја посматраће се раванско стационарно струјање вискозне течности, при чему се занемарују запреминске силе. Ово струјање се описује једначинама:

$$\begin{aligned}v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

Упрошћавање система једначине (3.1), које би у математичком и физичком смислу било оправдано, може да се изврши одбацивањем чланова једначина система који представљају мале величине у односу на остале чланове, односно задржавањем само чланова највећег реда величине. При томе се као основна, полазна претпоставка прихвата став да су унутар граничног слоја вискозне силе и силе инерције величине истог реда. Изван граничног слоја силе трећа могу да се занемаре у односу на силе инерције [1].

На слици 6 шематски је приказан распоред брзина у граничном слоју једног несиметричног профила заједно са осталим параметрима граничног слоја. Са x је означена криволинијска координата, која се мери дуж посматраног зида од неке уочене тачке O . Са y је означена координата која се мери дуж нормале на зид. При томе је U – брзина спољашњег потенцијалног струјања al – карактеристична дужина за гранични слој. Овде је то тетива опструјаваног профила (или дужина горњаке профила). Пошто се подужна пројекција брзине у граничном слоју мења од $u=0$ на непокретном зиду до $u=U$ на спољашњој граници граничног слоја, то је ред величине ове пројекције $u \sim U$.



Слика 6. Гранични слој око профила [1].

Такође је очигледно да је $x \sim l$ и $y \sim \delta$ где знак „ $\sim$ “ означава ред величине односно сразмерност. Стога је извод $\partial u / \partial x$ пропорционалан количину U/l па одговарајући изводи имају величину реда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U}{l}, \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U}{\delta}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \sim \frac{U}{l^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \sim \frac{U}{\delta^2}, \quad (4.2)$$

Ред величина пројекције $v(x, y)$ може се одредити уз помоћ једначине континуитета као:

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial x} dy = 0, V_{y=\delta} = \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy \sim \int_0^\delta \frac{U}{l} dy \sim \frac{U}{l} \delta,$$

па је зато:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{U \delta}{l^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{U}{l}, \\ \frac{\delta^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \sim \frac{U \delta}{l^3}, \quad \frac{\delta^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \sim \frac{U}{l \delta} \end{aligned} \quad (4.3)$$

На основу обављених процеса следује да су оба конвективна члана прве једначине система величине истог реда, односно ови су чланови пропорционални истом количнику.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U^2}{l}, \quad v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U \delta U}{l \delta} = \frac{U^2}{l}.$$

Међутим, први члан у овој једначини, који представља вискозне силе, је мали у поређењу са другим, јер је:

$$\frac{\delta^2 u}{\partial x^2} / \frac{\delta^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{U^2}{l} / \frac{U^2}{\delta^2} = \frac{\delta^2}{l^2}$$

Водећи рачуна о полазној претпоставци, по којој је у граничном слоју ред величина вискозних и сила инерције исти, може да се у првој једначини система занемари само члан $\delta^2 u / \partial x^2$ тако да ова једначина добија облик:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

Будући да је $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim v \frac{U^2}{\delta^2}$, и $u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U^2}{l}$, то се на основу полазне претпоставке ($I \sim T$) добија да је:

$$\frac{v}{\delta^2} \sim \frac{U}{l} \quad (4.4)$$

односно

$$\frac{v}{\delta^2} = C \frac{U}{l}, \quad (4.4.1)$$

где је C – константа (бројни фактор).

Из односа (4.4) налази се да је:

$$v \sim \frac{U \delta^2}{l}. \quad (4.5)$$

Осим тога, из (4.4.1) је

$$\frac{\delta}{l} = \frac{const.}{\sqrt{\frac{U l}{v}}}$$

односно

$$\frac{\delta}{l} = \frac{const.}{\sqrt{Re}}, \quad (4.6)$$

где је

$$Re = \frac{U l}{v}$$

Ако се карактеристична дужина l занемари подужном промењивом x , која се мери од предње зауставне тачке, добиће се

$$\frac{\delta}{x} = \frac{const.}{\sqrt{Re_x}}, \quad (4.6.1)$$

$$\frac{\delta}{x} \sim \sqrt{\frac{v x}{U}} = \sqrt{\frac{v}{U}} \sqrt{x}, \quad (4.6.2)$$

где је $Re_x = U x / v$, одакле се види да дебљина граничног слоја $\delta(x)$ расте пропорционално са $\sqrt{x}$.

На основу релације (4.6) следује да се релативна дебљина граничног слоја δ/l смањује са повећањем Re броја. За невискозну течност тј. када $Re \rightarrow \infty$, дебљина граничног слоја тежи нули.

Оцењујући ред величина чланова друге једначине система (4.1) налази се да су оба конвектна члана величине истог реда, тј. да је:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{U^2 \delta}{l^2} = \frac{U \delta}{l} \frac{U}{l}, \quad v \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{U^2 \delta}{l^2} = \frac{U \delta}{l} \frac{U}{l}, \quad (4.7)$$

док је однос вискозних чланова ове једначине

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} / \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{U \delta}{l^3} / \frac{U}{l \delta} = \frac{\delta^2}{l^2}$$

па се први вискозни члан, будући да је δ/l мала величина, може да занемати у поређењу са другим. Други вискозни члан друге једначине (4.1) је пропорционалан количнику.

$$v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{U \delta^2}{l} \frac{U}{l \delta} = \frac{U^2 \delta}{l^2} = \frac{U \delta}{l} \frac{U}{l} \quad (4.8)$$

односно, овај члан има исти ред величине као и инерцијски чланови.

Пошто се разматрају случајеви струјања дефинисани великим вредностима Рејнолдсовог броја, то се друга једначина система (4.1) своди само на члан

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

На тај начин се за раванско стационарно кретање вискозне течности у граничном слоју добијају **Прантлове једначине граничног слоја**:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

До ових једначина је могуће доћи и преко анализе спроведене на бази Re броја, будући да се методе теорије граничног слоја односе на случајеве струјања флуида са већим вредностима Рејналдсовог броја [1].

У том циљу се уместо физичких уводе бездимензијске променљиве ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}$, и $\bar{p}$) помоћу релација:

$$x = L\bar{x}, y = \frac{L}{\sqrt{Re}}\bar{y}, u = U_{\infty}\bar{u}, v = \frac{U_{\infty}}{\sqrt{Re}}\bar{v}, p = \rho U_{\infty}^2 \bar{p}; \quad (4.10)$$

у којима је L – „размера“ подужне координате, тј. карактеристична дужина тела ($L=l$ и константа је за одређени проблем струјања), док је U_{∞} – „размера“ подужне пројекције брзине ($U_{\infty} = const.$). При томе је $Re = U_{\infty}L/\nu$, односно $\nu = U_{\infty}L/Re$.

После трансформације свих чланова уз помоћ релација (4.10), систем (4.1) се своди на следећи систем бездимензијских једначина:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \\ \frac{1}{Re} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Једначине (4.11) су једначине граничног слоја у бездимензијском облоку за раванско устаљено струјање нестишљивог флуида.

Ако се сада искористе нађене релације, које повезују појединачне изводе изражене посредством стварних физичких величина и бездимензијских величина, систем једначина (4.11) се, водећи рачуна да је $\nu = U_{\infty}L/Re$, трансформише у систем једначина у димензијском облику, које су идентичне са једначинама (4.9) и представљају Прантлове једначине граничног слоја нестишљивог флуида.

Брзина струјања у граничном слоју расте од нуле до вредности брзине у спољашњем струјању. Спољашње струјање се може сматрати као невртложно, односно потенцијално струјање савршеног флуида. Због тога се за спољашњу границу граничног слоја може применити Коши-Лагражев интеграл Ојлерових једначина.

$$p + \frac{\rho U^2}{2} = const.$$

одакле се диференцирањем налази да је:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx}.$$

Коши-Лагражева једначина омогућава да се из система једначина (4.9) искључи притисак, зато што се дуж дебљине граничног слоја не мења ($\partial p / \partial y = 0$), што значи да се у области граничног слоја притисак може сматрати познатом величином, па се овај систем може написати у облику:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Упоредивањем система једначина (4.1) (4.12), може да се закључи да се задржавањем само чланова највећег реда величине постигло знатно поједностављење. Смањено се број једначина, као и број непознатих функција (елиминисан је притисак p). Осим тога је из прве једначина отпао један извод другог реда. Једначине су и даље нелинеарне, а ни ред им се није смањено. Нелинеарни инерцијални чланови и даље стварају знатне потешкоће приликом проучавања струјања флуида у граничном слоју.

Једначинама (4.9) или (4.12) треба додати одређене граничне услове. Ако је посматрано опструјавано тело непокретно и непорозно, онда непознате функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ треба да задовољавају следеће услове приањања:

$$u = 0, v = 0 \text{ за } y = 0. \quad (4.13)$$

Најпростији гранични услови на спољашњој граници граничног слоја, за случај да се дебљина граничног слоја може сматрати коначном гласе:

$$u = U(x), \left(\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \right) \text{ за } y = \delta, \quad (4.13.1)$$

или

$$u = U(x), \text{ за } y \rightarrow \infty \quad (4.13.2)$$

за такозвани асимптотски гранични слој.

У теорији граничног слоја врло често се у једначине граничног слоја уводи функција струјања $\Psi(x,y)$. Тако се за интеграљење једначина граничног слоја нестишљивог флуида ова функција уводи посредством везе:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (4.14)$$

при чему је једначина континуитета идентички задовољена. Заменом израза (4.14) у прву једначину (4.9) добиће се једначина у облику

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}. \quad (4.15)$$

Уочава се да се увођењем функција струјања број непознатих функција смањио са две (u, v код система (4.9) на једну (Ψ у једначини 4.15)). Међутим, увођењем функције струјања повећао се ред диференцијалне једначине. Наиме, добијена једначина (4.15) представља парцијалну диференцијалну једначину трећег реда, док је прва једначина система (4.9) једначина другог реда[1].

Једначини (4.15) треба, такође, да се придодају гранични услови који, према (4.13) и (4.13.1) гласе:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad \text{за } y = 0; \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = U(x), \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \right) \text{ за } y = \delta.$$

5. Аеропрофили

Аеропрофили или аеропрофилна секција дефинише се као површина која је дизајнирана да омогући добивање реакције од ваздуха кроз који се креће, како би се производио узгон. Оптимални облик за стварање узгона је савијени или закривљени облик. Аеропрофил се од осталих облика односно тела, разликује по високом нивоу прилагођавањасмеру струјања флуида [7].

Аеропрофил је облик попречног пресека узгонске површине, у равни непоремећене струје флуида, који га опструјава (пресек крила, крака елисе, лопатице турбине итд.). Аеродинамика аеропрофила је иста као и крила бесконачне виткости, без утицаја крајева. Генерисање узгона, на аеропрофилу, последица је несиметричног опструјавања, оствареног са геометријском асиметријом и са поставком истог под нападни угао. Остварује се разлика расподеле брзине на горњој и доњој страни, па затим и разлика притиска, што резултује са силом узгона. На расподелу локалних брзина утиче геометрија аеропрофила: заобљеност носног дела, релативна дебљина и закривљеност. Раније су се аеропрофили дефинисали са процесом физичког обликовања и аеротунелског истраживања, проверавања, доказивања и стандардизовања. На такав класичан начин, развијене су велике серије аеропрофила NASA, ЦАГИ итд. Сада се аеропрофили рачунарски, софтверски моделирају, према унапред задатим аеродинамичким карактеристикама, а у аеротунелима се потврђују и доказују [8].

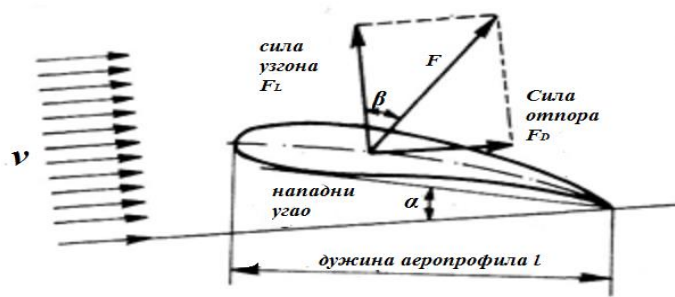
Силе отпора и узгона дефинисане су са:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 c_D A$$

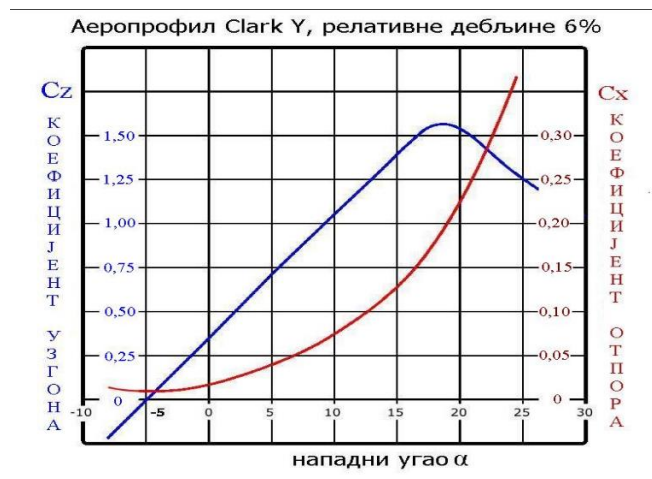
и

$$F_L = \frac{1}{2} \rho v^2 c_L A$$

где су c_L и c_D коефицијенти узгона и отпора и једнаки су за све сличне моделе аеропрофила при истим нападним угловима. На слици 7 приказане су карактеристичне криве промене коефицијента отпора аеропрофила за различите нападне углове α [2].



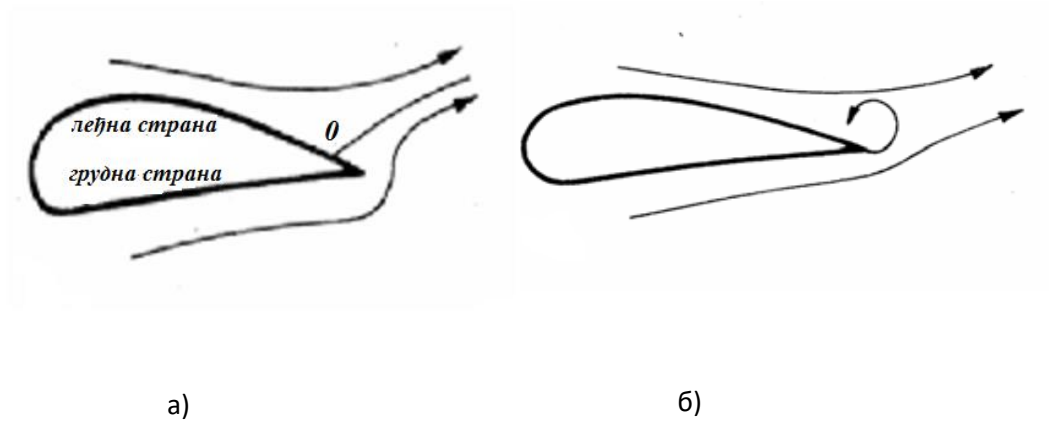
Слика 6. Силе на аеропрофилу[2].



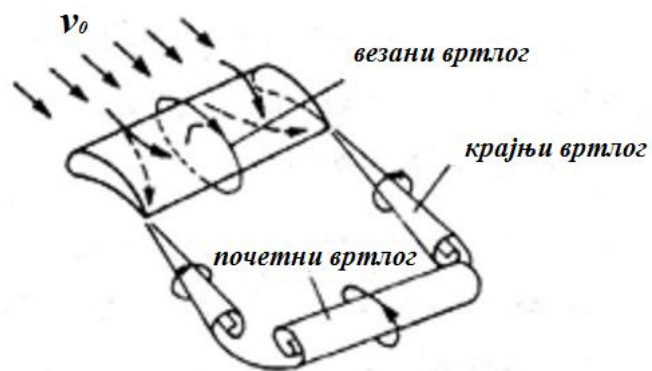
Слика 7. Коефицијенти отпора аеропрофил [8]

5.1 Постанак циркулације

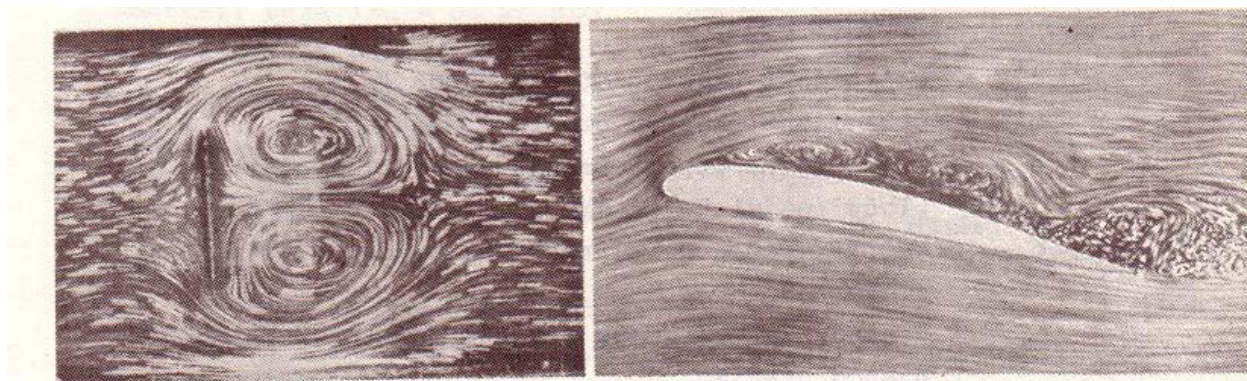
При врло малим брзинама када аеропрофил почиње да се креће из стања мировања, слика опструјавања у близини задње ивице аеропрофила изгледаће као на слици 8а, са зауставном тачком 0 на леђној страни, на извесној малој удаљености са задње ивице. Уколико брзина аеропрофила расте, струјнице са грудне стране нису више у стању да обиђу око задње ивице због великих сила вискозности, које почињу да делују услед великог градијента брзине, те се струјање одвија од задње ивице, а у некој тачки, између ове и малопређашње зауставне, ствара се вртлог, као што је показано на слици 8б који се назива почетни вртлог јер се формира покретањем аеропрофила. Када овај вртлог порасте до извесне величине, он се одваја од аеропрофила и одлази низ струјно поље. Пошто циркулација око било какве контуре мора бити једнака нули, јер је таква била и пре кретања, око аеропрофила мора постојати циркулација Γ која је по величини једнака, али супротног смера од почетне циркулације. Циркулација око аеропрофила назива се везаном циркулацијом. Када се аеропрофил заустави, везани вртлог (који не може да се уништи) силази са аеропрофила и поништава се почетним вртлогом који се задржао у струјном пољу. Последња констатција односи се на савршени флуид, или кратко кретање аеропрофила кроз реалан флуид. За дуго кретање аеропрофила у реалном флуиду почетни вртлог током времена исчезне због деловања силе трења, а везани вртлог је присутан јер га генерише само кретање. На слици 9 приказани су почетни, везани и крајњи вртлог [2].



Слика 8. Формирање почетног вртлога[2].



Слика 9. Везани, почетни и крајњи вртлог [2]



Слика 10. Опструјавање тела са формирањем вртлога [2]

У укупном отпору тела аеродинамичког облика у пројектној тачки треба да доминира отпор површинског трења. Та тачка најчешће дефинише режим употребе аеродинамичког тела. Ламинарно струјање у граничном слоју треба што дуже да се задржи у и око овог режима[9].

Код неаеродинамичких тела у њиховом укупном отпору доминира утицај притиска односно отпор облика. Зона струјања треба да буде што дужа и да садржи вртлоге, што је значајно у процесима мешања[9].

Што се тиче узгонских тела (кракове ротора хеликоптера, кракове елисе пропелзора авиона, крила авиона, реп авиона, итд.) отпор површинског трења при малим угловима је доминантан[9].

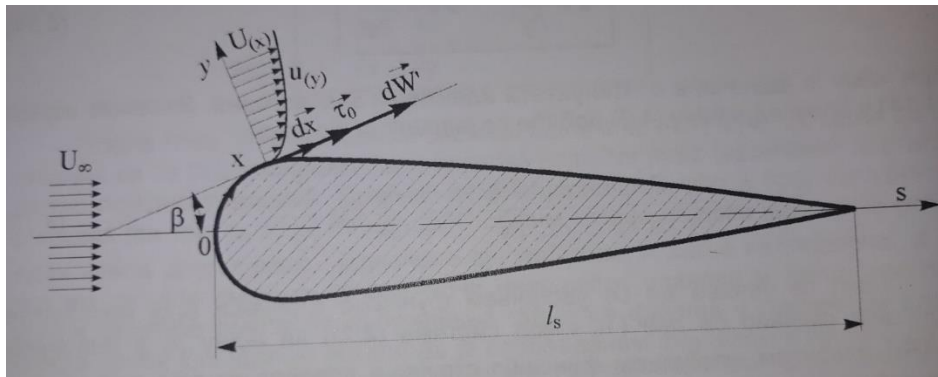
6. Отпор трења

Основни практични задатак прорачуна граничног слоја за неки конкретан случај своди се на одређивање закона расподела брзина и тангентног напона на зиду опструјаваног тела. Познавање брзине је неопходно за решавање проблема простирања топлоте као и за одређивање положаја тачке одвајања граничног слоја. Тангентним напонам (или напонам усред трења) одређује се сила трења, односно отпор који настаје услед трења флуида о површину опструјаваног тела.

Ако је расподела брзина у граничном слоју позната, онда се тангентни напон τ_0 на зиду одређује по формули:

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (6)$$

где је μ – коефицијент динамичке вискозности.



Слика 11. Сила трења за случај раванског струјања [1]

За случај раванског струјања (као на слици), елементарна сила трења на контури цилиндричног тела износи:

$$dW' = \tau_0 dA = \tau_0 b dx,$$

где је x – криволинијска координата, а b – ширина опструјаваног тела (која је управна на раван цртежа).

Пројекција елементарне силе трења у правцу брзине U_∞ непоремећеног једноликог струјања у бесконачности (далеко од тела) износи:

$$dW = \tau_0 b dx \cos \beta,$$

где је β – угао који заклапа тангента на површину тела са правцем брзине U_∞ .

Сила отпора трења само за једну (горњу) половину тела одређена је обрасцем:

$$W = b \int_0^{l_s} \tau_0 \cos\beta \, dx. \quad (6.1)$$

Будући да је

$$\cos\beta \, dx = ds \quad (6.2)$$

при чему оса s има правац брзине U_∞ , образац (6.1) може да се напише и као:

$$W = b\mu \int_0^{l_s} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} ds. \quad (6.3)$$

Према томе, за израчунавање отпора услед трења треба унапред да се зна „градијент“ брзине на зиду и то дуж целе контуре опструјаваног тела. Овај „градијент“ може да се одреди само решавањем једначине граничног слоја. Приликом израчунавања отпора трења интегралчење треба да се изврши дуж контуре тела и то почев од предње зауставне тачке O ($x=0$), па по могућности, до задње ивице тела ($x=l_x$). Наиме, горња граница l_x у обрасцу (6.1) карактера оптицања тела. Ако се ламинарни гранични слој простира по свој површини тела, онда l_x представља подужну димензију тела мерну дуж криволинијске координате x . Ако, међутим, одвајање граничног слоја наступа испред задње ивице тела, онда интеграл (6.1) треба срачунати само до тзв. тачке одвајања. Ако, пак, у некој тачки на зиду опструјаваног тела долази до преласка ламинарног у турбулентни гранични слој, онда горњу границу l_x у интегралу (6.1) треба узети само до те тачке. Део отпора трења по површини тела има те тачке срачунава се према законима турбулентног граничног слоја [1].

7. Дебљина истискивања и дебљина губитка импулса

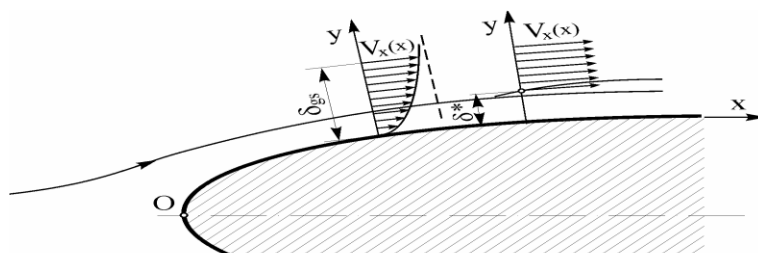
Како се уздужна пројекција брзине $v_x(x, y)$ мења од $v_x=0$ на унутрашњој граници граничног слоја до $v_x=V_x(x)$ на спољашњој граници, тај прелаз брзине граничног слоја у брзину спољашњег струјања $V_x(x)$ је асимптотски. При преласку из граничног слоја у спољашње струјање, услови на спољашњој граници слоја треба да прикажу непрекидност пројекције $v_x(x, y)$ (као и непрекидност тангентног напона). Уколико је граница између површине чврстог тела и флуида видљива, одређивање спољашње границе односно дебљине $\delta_{gs}(x)$ граничног слоја биће произвољно.

Дебљина граничног слоја је растојање од зида опструјаваног тела на коме се брзина граничног слоја разликује за 1% од брзине $V_x(x)$ спољашњег струјања[5].

У теорији граничног слоја позната је расподела брзине $V_x(x)$ спољашњег струјања која се одређује у односу на решења задатка о острујавању посматране контуре савршеним флуидом. Спољашњом брзином се сматра она брзина коју би невискозан флуид имао на површини посматраног тела, у истом простору струјања и под истим условима струјања. Уместо дебљине граничног слоја која је доста произвољно дефинисана у савременој теорији граничног слоја користи се дебљина истискивања δ^* и дебљина губитка импулса δ^{**} . Приметиће се да ове дебљине физички имају више смисла. Смањење брзине у граничном слоју прати и пад протока. То смањење протока кроз површину јединичне ширине је[5].

$$\int_{y=0}^{\infty} V_x \cdot 1 \cdot dy - \int_{y=0}^{\infty} v_x \cdot 1 \cdot dy = \int_{y=0}^{\infty} (V_x - v_x) dy.$$

Ово смањење протока, условљено вискозношћу, може да сеизрази преко спољашње брзине као производ $V_x \delta^*$ где δ^* представља величину за коју се може замислити да је првобитно потенцијално струјање померено од зида.



Слика 12. Одређивање дебљине истискивања [5]

Изједначавањем оба израза за смањење протока добија се образац за одређивање дебљине истискивања (дебљине пада протока) који гласи

$$\delta^* = \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{v_x}{V_x}\right) dy. \quad (7.1)$$

Дебљина истискивања је вертикално растојање од зида за које би приликом смањења брзине у граничном слоју требало померити чврсто тело када би преко њега струјао савршен флуид једнаком брзином $V_x(x)$, да би проток флуида био исти. Оваква карактеристика је знатно мање осетљива на асимптотски карактер распореда брзина, јер израз $(1 - v_x/V_x)$ брзо конвергира ка нули. У односу на количину кретања потенцијалног струјања као последица трења у граничном слоју долази до смањења количине кретања које износи

$$\rho \int_{y=0}^{\infty} v_x (V_x - v_x) dy.$$

При претпоставци да је првобитно потенцијално струјање померено од зида за величину дебљине губитка импулса δ^{**} , онда то смањење количине кретања може да се изрази као $\rho 2\delta^{**}V_x$. Из услова једнакости оба израза

$$\rho V_x^2 \delta^{**} = \rho \int_{y=0}^{\infty} v_x (V_x - v_x) dy,$$

слиди релација за израчунавање δ^{**} , која гласи

$$\delta^{**} = \int_{y=0}^{\infty} \frac{v_x}{V_x} \left(1 - \frac{v_x}{V_x}\right) dy \quad (7.2)$$

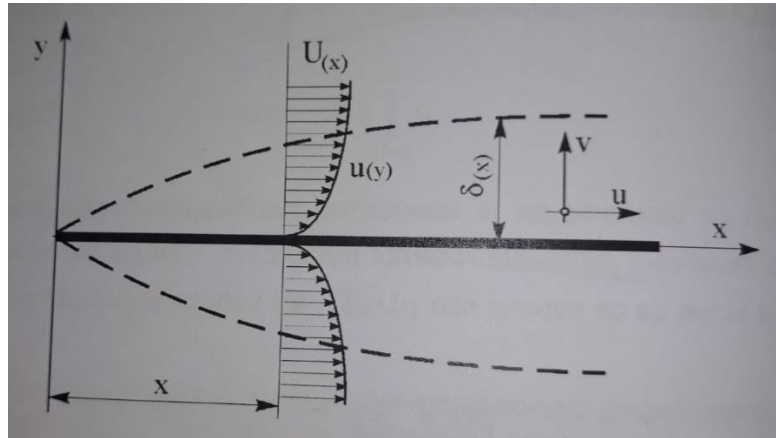
Дакле, дебљина губитка импулса δ^{**} се може дефинисати као растојање од зида за које је количина кретања савршеног флуида једнака смањењу количине кретања реалног флуида приликом успоравања флуидних делића у граничном слоју. Уколико се уместо асимптотског граничног слоја посматра модел слоја коначне дебљине δ_{gs} , онда уместо горње границе ∞ у интегралима (7.1) и (7.2) треба ставити δ_{gs} . Тада израз за дебљину истискивања гласи

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta_{gs}} \left(1 - \frac{v_x}{V_x}\right) dy. \quad (7.3)$$

Из израза (7.3) примећује се да се веза између дебљине граничног слоја δ_{gs} и дебљине истискивања δ^* може одредити само уколико је позната расподела уздужне пројекције брзине у граничном слоју [5].

8. Гранични слој на плочи

Прву примену Прантлових једначина граничног слоја извршио је још Блазиус на случају струјања нестишљивог флуида дуж равне и танке полубесконачне плоче, која је постављена паралелно са вектором брзине U_∞ непоремећеног једноликог струјања [1].



Слика 13. Гранични слој на равной плочи [1]

За посматрани случај струјања нађена је, применом комфорног пресликавања, брзина спољашњег потенцијалног струјања и износи

$$U(x) = U_\infty = \text{const.} \quad (8)$$

Пошто је брзина спољашњег струјања константна, добија се да је :

$$\frac{dp}{dx} = 0,$$

тако да у овом случају струјања једначине граничног слоја гласе:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Одговарајући гранични услови за асимптотски гранични слој су:

$$\begin{aligned} u = v = 0 \quad \text{за } y = 0; \\ u = U_{\infty} \quad \text{за } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

При решавању једначина (8.1) са граничним условима (8.1.1) Блазиус је претпоставио да су профили брзина $u(y)$ на различитим растојањима x од предње ивице полубесконачне плоче међусобно слични. Наиме, ови профили могу да се доведу до међусобног поклапања ако се за подужну пројекцију u и попречну координату y изабери одговарајуће погодне размере („афина сличност“). Као размера за u може се узети U_{∞} , а као размера за вертикалу удаљеност од плоче дебљина граничног слоја $\delta(x)$. Према томе, претпоставка о међусобној сличности свих профила брзина у граничном слоју на плочи омогућава да се закон расподеле брзина тражи у облику:

$$\frac{u}{U_{\infty}} = f\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (8.2)$$

где је функција f независна од удаљености x .

Пошто је дебљина граничног слоја у разматраном случају одређена као:

$$\delta(x) \sim \sqrt{\frac{vx}{U_{\infty}}}, \quad (8.3)$$

то се уместо попречне променљиве y уводи нова бездимензијска променљива η помоћу следеће везе:

$$\eta = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{\sqrt{\frac{vx}{U_{\infty}}}} = \eta(x, y), \quad \left(y = \eta \sqrt{\frac{vx}{U_{\infty}}} \right) \quad (8.4)$$

на основу које је

$$u = U_{\infty} f(\eta).$$

Користећи се везама којима је дефинисана струјна функција $\psi(x, y)$, може се, даље написати да је:

$$\psi = \int u(x, y) dy = \int U_{\infty} f(\eta) \sqrt{\frac{vx}{U_{\infty}}} d\eta = \sqrt{U_{\infty} vx} \int f(\eta) d\eta,$$

тј.

$$\psi = \sqrt{U_\infty vx} \Phi(\eta) \quad (8.5)$$

где је $\Phi(\eta) = \int f(\eta) d\eta$ - бездимензијска функција струјања.

Помоћу функције $\Phi(\eta)$, подужна и попречна пројекција брзине u и v у граничном слоју могу да се изразе као:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty \Phi'(\eta) \quad (8.6)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty v}{x}} [\eta \Phi'(\eta) - \Phi(\eta)] \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x}$$

где $\Phi'(\eta)$ означава први извод функције $\Phi(\eta)$ по η .

Уз овако дефинисане пројекције брзине, налазе се сви потребни парцијални изводи који улазе у једначине (8.1) и које гласе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [U_\infty \Phi'(\eta)] = U_\infty \Phi''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{U_\infty}{2x} \eta \Phi''(\eta), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [U_\infty \Phi'(\eta)] = U_\infty \Phi''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}} \Phi''(\eta), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}} \Phi''(\eta) \right] \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U_\infty^2}{vx} \Phi'''(\eta). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Ако се изрази (8.6), (8.7) и (8.8) замене у прву једначину система (8.1), онда се после сређивања, за одређивање бездимензијске функције струјања $\Phi(\eta)$ добија следећа обична диференцијална једначина.

$$2\Phi''' + \Phi\Phi'' = 0 \quad (8.9)$$

Еквивалентни гранични услови за функцију Φ су :

$$\Phi = 0, \quad \Phi' = 0 \quad \text{за} \quad \eta = 0 \quad (8.10)$$

$$\Phi' = 1 \quad \text{за} \quad \eta \rightarrow \infty$$

Будући да је једначина континуитета идентички задовољена, следује да се систем од две парцијалне диференцијалне једначине (8.1) свео на само једну обичну нелинеарну диференцијалну једначину (8.9) трећег реда. Одговарајућа три гранична услова (8.10) су сасвим довољна да решење буде потпуно одређено.

Према томе, после извесних трансформација, диференцијалне парцијалне једначине граничног слоја свеле су се на једну обичну диференцијалну једначину. Ово је врло важно са математичке тачке гледишта, јер то представља значајно упрошћење.

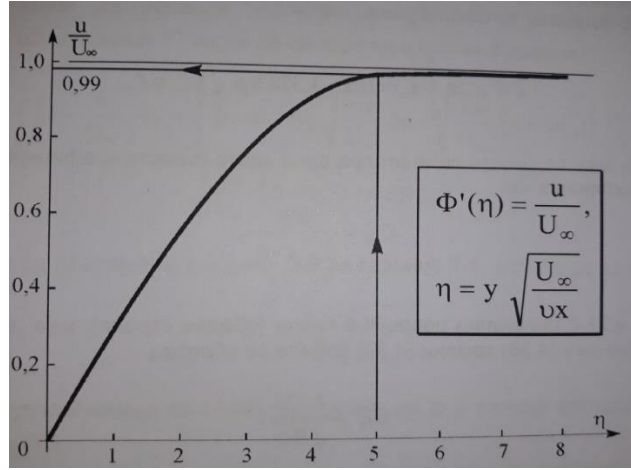
Опште решење диференцијалне једначине (8.9) не може да се нађе у затвореном облику. Зато је решење ове једначине израчунавано или развијањем у степени ред или нумеричком интеграцијом. Блазиус је први нашао решење једначине (8.9) у облику развоја у ред. После Блазиуса решење исте једначине је нађено нумеричком интеграцијом уз помоћ рачуна. У табели 1 дате су вредности функције Φ и њених извода Φ' и Φ'' које је доста тачно нумерички израчунао Л. Хоуарт за разне вредности бездимензијске променљиве η .

ТАБЕЛА 1. – Вредности функције Φ и њених извода Φ' и Φ'' за плочу [1]

η	Φ	$\Phi' = v_x / V_\infty$	Φ''
0	0	0	0.33206
0.2	0.00664	0.06641	0.33199
0.4	0.02656	0.13277	0.33147
0.6	0.05974	0.19894	0.33008
0.8	0.10611	0.26471	0.32739
1.0	0.16557	0.32979	0.32301
1.2	0.23795	0.39378	0.31659
1.4	0.32298	0.46527	0.30787
1.6	0.42032	0.51676	0.29667
1.8	0.52952	0.57477	0.28293
2.0	0.65003	0.62977	0.26675
2.2	0.78120	0.68132	0.24835
2.4	0.92230	0.72899	0.22809
2.6	1.07252	0.77246	0.20646
2.8	1.23099	0.81152	0.18401
3.0	1.39682	0.84605	0.16136
3.2	1.56911	0.87609	0.13913

3.4	1.74696	0.90177	0.11788
3.6	1.92954	0.92333	0.09809
3.8	2.11605	0.94112	0.08013
4.0	2.30576	0.95552	0.06424
4.2	2.49806	0.96696	0.05052
4.4	2.69238	0.97587	0.03897
4.6	2.88260	0.98269	0.02948
4.8	3.09534	0.98779	0.02187
5.0	3.28329	0.99155	0.01591
5.2	3.48189	0.99425	0.01134
5.4	3.68094	0.99616	0.00793
5.6	3.88031	0.99748	0.00543
5.8	4.07990	0.99838	0.00365
6.0	4.27964	0.99898	0.0024
6.2	4.47948	0.99937	0.00165
6.4	4.67938	0.99961	0.00098
6.6	4.87931	0.99977	0.00061
6.8	5.07928	0.99987	0.00037
7.0	5.27926	0.99992	0.00022
7.2	5.47926	0.99996	0.00013
7.4	5.67924	0.99998	0.00007
7.6	5.87924	0.99999	0.00004
7.8	6.07923	1.00000	0.00002
8.0	6.27923	1.00000	0.00001
8.2	6.47923	1.00000	0.00001
8.4	6.67923	1.00000	0.00000
8.6	6.87923	1.00000	0.00000
8.8	7.07923	1.00000	0.00000

На бази нумеричких резултата нацртан је дијаграм бездимензијске уздужне $\Phi' = u/U_\infty$, који је показан на слици 14:



Слика 14. Дијаграм бездимензијске уздужне брзине на плочи [1]

Добијено нумеричко решење једначине (8.9) омогућава да се лако израчуна отпор трења. Локални тангентни напон (напон трења) на површини плоче је:

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \Phi''(0)$$

Како је, према табели 1, $\Phi''(0) = 0,332$ то се заменом ове вредности добија образац:

$$\tau_0 = 0,332 \rho \sqrt{\frac{U_\infty^3 \nu}{x}} = \tau_0(x) \quad (8.11)$$

који представља Блазиусову формулу за тангентни напон на зид плоче.

Са овом је бездимензијски тангентни напон на површини плоче:

$$\frac{\tau_0(x)}{\rho U_\infty^2 / 2} = 0,664 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}, \quad Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}. \quad (8.12)$$

Полазећи од општег израза за отпор трења, лако се после замене израза (8.11), добија образац за силу отпора трења за обадве стране плоче ширине b и дужине l . Овај образац гласи:

$$2W = 2b \int_0^l \tau_0(x) dx = 1.328 b \rho \sqrt{U_\infty^3 \nu} l \quad (8.13)$$

У пракси се уместо силе отпора врло често користи коефицијент отпора, који се дефинише као:

$$C_w = \frac{2W}{\frac{1}{2}\rho A U_\infty^2} \quad (8.14)$$

где је $A = 2b/l$ целокупна површина плоче, која је изложена трењу. Ако се у (8.14) замени (8.13) добиће се образац:

$$C_w = \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}}, \quad (8.15)$$

где $Re_l = U_\infty l / \nu$ означава Рејнолдсов број дефинисан за целу дужину плоче.

Теоријски Блазиусово решење омогућава да се релативно лако одреде дебљина граничног слоја $\delta(x)$, као и дебљина истискивања δ^* и дебљина губитка импулса δ^{**} . Дебљина граничног слоја на плочи може да се одреди према претходно наведеној уобичајеној дефиницији на основу које се под дебљином граничног слоја подразумева одстојање од зида опструјаваног тела на коме се брзина граничног слоја разликује не више од 1% од брзине спољашњег струјања.

Из табеле 1 као и са дијаграма се види да на бездимензијском растојању $\eta = 5,0$ подужна пројекција брзине постаје $u \approx 0,99U_\infty$, што одговара дебљини граничног слоја.

$$\delta(x) \approx 5,0 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}, \quad (8.16)$$

коју је први одредио Блазиус. За релативну дебљину граничног слоја добија се образац:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,0}{\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}} = \frac{5,0}{\sqrt{Re_x}}, \quad (8.17)$$

из којег се закључује да релативна дебљина граничног слоја на плочи може да буде мала само при довољно великим Рејнолдсовим бројевима.

Полазећи од обрасца за гранични слој коначне дебљине (7.1), дебљина истискивања δ^* може да се израчуна према формули:

$$\begin{aligned}\delta^* &= \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \int_0^\delta [1 - \Phi'(\eta)] \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}} d\eta = \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}} [\eta - \Phi(\eta)] \Big|_{\eta=4}^{\eta=5} \\ &= \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}} [5 - \Phi(5) + \Phi(0)].\end{aligned}$$

Са одговарајућим вредностима из табеле 1, добиће се да је:

$$\delta^* = 1,72 \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}},$$

те се, из упоређивања са (8.16), закључује да је у случају оптицања равне плоче $\delta^* \approx \frac{\delta}{3}$.

Данас се, у складу са општим обрасцима (7.1) и (7.2), за дебљину истискивања и губитак импулса у случају подужног оптицања равне плоче користе изрази:

$$\delta^* = 1,72 \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}, \delta^{**} = 0,664 \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}, \quad (8.18)$$

Изложена Блазиусова теорија је касније проверена и потврђена експериментима многобројних истраживача. Најдетаљније мерење је спровео Никурадзе и то за различите вредности Рејнолдсових бројева. При томе је константовао практично потпуно поклапање профила брзине добијене мерењем са профилима који су добијени теоријским путем. Мерењем је, такође установљено да се прелаз струјања у граничном слоју из ламинарног у турбулентно догађа при Рејнолдсовом броју

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} = 350000.$$

Треба истаћи да добијено решење једначина граничног слоја представља најједноставнији случај за који је $dU/dx=0$ тј. $dp/dx=0$. Међутим и поред тога, решавање једначина граничног слоја је урађено са доста великим потешкоћама.

9. Закључак

Основа тумачења великог броја врло важних процеса у техници и технологији представља управо теорија граничног слоја. Треба истаћи да се резултати који су добијени током истраживања из ове области веома заступљени у другим наукама, техници и технологији као што су: балистика, космичка истраживања, ракетна и авиотехника, пнеуматика, хидраулика, градња турбина, компресора и пумпи, екологија процесна и хемијска индустрија, градња бродова, брана и насипа, прорачун водовода и гасовода, изучавање транспорта масе и енергије, аутомобилска индустрија, као и код пројектовања и експлоатације атомских реактора и МХД генератора.

У првом делу овог рада описан је појам граничног слоја и његов значај при протицању флуида. Про том протицању струјање може бити ламинарно или турбулентно. За струјање вискозног флуида теорија ламинарног струјања је довољна уколико струјање не излази из режима ламинарног струјања, али за турбулентно опструјавање тела, отворен систем једначина не може дати ни приближну слику о отпорним силама. Код одређивања дебљине граничног слоја закључује се да се дебљина смањује са повећањем Re броја, односно повећањем брзине струјања и обрнуто.

Други део рада односи се на решавање Прантлових једначина граничног слоја при чему је посматрано раванско стационарно струјање вискозног флуида поред чврстог непорозног зида, уз занемаривање запреминских сила, при чему. Да би се што реалније одредиле особине струјања у граничном слоју, уводе се и одговарајући гранични услови у системе једначина. Помоћу метода као што је нпр. метода коначних разлика, решене су одређене једначине граничног слоја. При решавању једначина граничног слоја значајно је напоменути да добијено решење једначина граничног слоја на равној плочи представља најједноставнији случај струјања.

У трећем делу дефинисан је аеропрофил као посебно обликовано тело које изазива аеродинамичку силу нормално на његово кретање. Такође је описано и његово кретање кроз флуид, односно постанак циркулације око контуре тела. Значај аеропрофила огледа се код конструисања узгонских тела као што су: реп авиона, крила авиона, кракови елисе пропелзора авиона, ротор хеликоптера, као и код тела која нису аеродинамична и имају велики отпор облика и значајна су у процесима мешања.

Литература

- [1] Обровић, Б., Петровић, Р., Савић, С., Динамика вискозног флуида, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2015.
- [2] www.dodaj.rs/f/3q/Ii/4SAjk7O/granicni-sloj-i-otpori-s.pdf, преузето октобра 2019.
- [3] Савић, С., Решавање проблема сртујања јонизованог гаса у граничном слоју за случај непорозне и порозне контуре опструјаваног тела, докторска дисертација, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац 2005.
- [4] <http://uvidok.rcub.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/2228/Doktorat.pdf?sequence=1>, преузето октобра 2019.
- [5] Обровић, Б., Динамика флуида-изабрана поглавља, Машински факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 1998.
- [6] [www.tf.uns.ac.rs > ~obera > files > Mehanika Fluida – 9](http://www.tf.uns.ac.rs/~obera/files/Mehanika_Fluida_9.pdf), преузето октобра 2019
- [7] <https://repozitorij.fpz.unizg.hr/islandora/object/fpz%3A1142/datastream/PDF/view>, преузето октобра 2019
- [8] <https://sr.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B5%D1%80%D0%BE%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%84%D0%B8%D0%BB>, преузето октобра 2019
- [9] Маричић, Н., Механика флуида, Факултет техничких наука у Косовској Митровици, Косовска Митровица 2003.