

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Основне академске студије

Модул: Машинске конструкције и механизација

Предмет: Отпорност материјала

Број индекса: 139/2013

Јелена Н. Грујић

Решавање проблема из отпорности материјала коришћењем доступних софтвера завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. Др Весна Марјановић, ванредни професор - ментор

2. _____

3. _____

Датум
одбране: _____

Оцена: _____

Оквирни садржај завршног рада:

- Увод
- Приказ софтвера за решавање проблема из отпорности материјала
- Неколико карактеристичних примера
- Моменти инерције
- Аксијално напрезање
- Савијање
- Извијање
- Закључак

Препоручена литература:

1. Денић М., Прорачун и конструисање решеткастих носача применом савремених софтверских решења, мастер рад, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац, 2015.
2. Рашковић Д., Отпорност материјала, Издавачка радна организација „Грађевинска књига“, Београд 1983.
3. Милованчевић М., Анђелић Н., Отпорност материјала, Машински факултет Универзитета у Београду, Београд 2006.

Крагујевац,
Март, 2016

Предметни наставник:
Др Весна Марјановић, ванредни професор

САДРЖАЈ

РЕЗИМЕ	1
ABSTRACT	1
УВОД	2
1. ПРИКАЗ СОФТВЕРА ЗА РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА ИЗ ОТПОРНОСТИ МАТЕРИЈАЛА.....	3
1.1 Примена апликација на „паметним телефонима“ у машинству.....	4
1.2 Софтверски пакети за решавање проблема из отпорности материјала.....	11
2. НЕКОЛИКО КАРАКТЕРИСТИЧНИХ ПРИМЕРА.....	27
2.1 Аксијално напрезање.....	28
2.2 Чисто савијање греде	34
2.3 Савијање греде силама.....	37
2.4 Торзија греде	41
ЗАКЉУЧАК	44
ЛИТЕРАТУРА	45

РЕЗИМЕ

У овом раду акценат је стављен на употреби MdSolids –а. То је првенствено едукативни софтвер мада може да се користи и за једноставније прорачуне при конструисању. У великој мери помаже не само студентима, него и наставницима, визуелан је, информативан и веома лак за коришћење. Омогућава студентима лакији и занимљивији приступ при решавању разних задатака. Програм замењује потребу коришћења великог броја како емпиријских тако и неемпиријских формула, па нам самим тим омогућава лакију израду задатка. Осмишљен је тако, да при коришћењу, особе које имају солидно класично знање из статике и теорије конструкција, могу веома лако да се снађу.

Кључне речи: Софтвер MdSolids, Конструкција, Прорачун, Едукација.

ABSTRACT

MdSolids is educational software for necessary calculations in Static and Strength of material courses. In great deal, it helps both students and teachers, it is visual, informative and ease-to-use. It allows students easier and more interesting approach at solving various assignments. This softwear replace the need to use a large number of empirical and non empirical formulas. It is designed so that in use, people who have a solid knowledge of the classical theory of statics and construction, can easily find their way in it.

Key words: software MDSolids, construction, calculation, education.

УВОД

У данашње време је посао инжењера просто незамислив без примене рачунара и софтверких пакета који постоје. Примена софтвера омогућава додатног места за побољшање самог прорачуна и узаступног понављања и мењања истог, док се не дође до потребног решења, односно задовољења појединих услова.

Током развитка софтверских пакета у машинству, уочљива је подела на једноставније софтвере и оне мало сложеније софтвере. Са повећањем сложености софтвера, долази до пораста његове цене. Неки од ових софтвера имају могућност бесплатног коришћења, док они мало бољи и сложенији могу да се користе само уз новчану надокнаду.

MdSolids је едукативни софтвер намењен првенствено за студенте на машинским, грађевинским, технолошким и сличним факултетима. Софтвер пружа широк спектар прорачуна, који се огледа у разним инжењерским проблемима као што су извијање штапова, статичке греде, решеткасти носачи, одређивање Моровог круга и разних других проблема.

Греда представља тело коме је једна димензија знатно већа од преостале две и оптерећена је обично моментима савијања и попречним силама. Греда представља један од основних конструктивних елемената у већини грађевинских и машинских конструкција. Она може бити оптерећена на разне начине.

Током овог рада обрађена је пажња на примену овог софтвера за решење статички оптерећене греде и њених напона, штапова који су аксијално напрегнути, греде која је савијена уз помоћ сила и цеви која је напрегнута на увијање. Поред ових прорачуна, приказан је и прорачун момената инерције у односу на разне попречне пресеке, исто тако представљен је и аналитички поступак прорачуна за сваки задатак који је коришћен.

При дејству спољашњих сила на греду или штап, као резултат тог дејства унутар те греде или тог штапа јавља се унутрашња сила. Спољашње силе могу бити линијске, површинске или запреминске, док унутрашње представљају реакције на спољашње.

Поред саме примене софтвера, у овом раду обрађена је пажња и на врсте оптерећења. Односно за сваку ту врсту представљен је прорачун напона, деформације, димензионисања, флексибилности и издржљивости. Током тог поглавља свако теоријско излагање је пропраћено са бар једним примером задатка који одговара за дату тему. То су примери код којих су греде, штапови или цеви оптерећени и извршен је њихов прорачун аналитичким путем и уз помоћ софтвера.

1. ПРИКАЗ СОФТВЕРА ЗА РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА ИЗ ОТПОРНОСТИ МАТЕРИЈАЛА

Савремени рачунари имају динамику развоја као ниједна друга област. У великој мери су допринели у развоју научних дисциплина, и у данашње време је тешко наћи област у којој немају значајну улогу. Примена им се протеже од обуке ученика, евиденције о књигама, архитектури, грађевинарству, свакодневној комуникацији, а имају и велику примену у машинству.

Инжењерски посао у данашње време постао је незамислив без примене рачунара. Помоћу рачунара поступак прорачуна, цртања, конструисања је додатно олакшан и убрзан у односу на застареле методе. Рачунски део посла су преузели рачунари, самим тим су скратили време потребно за израду неког прорачуна. Овим поступком, током израде неке конструкције, имамо места за додатна побољшања током самог прорачуна, односно поступак се може понављати и мењати више пута док се не дође до траженог решења које задовољава тражене услове.

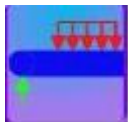
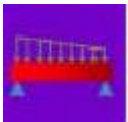
Како примену рачунара у данашње време користимо за неке сложеније проблеме, исто тако се могу употребити за представљање графичких метода. Помоћу неких програма који служе за 2Д цртање може се лако и прецизно уцртати план сила, али се као такав не би користио у пракси, већ као репрезентативно представљање поменуте методе.

1.1 Примена апликација на „паметним телефонима“ у машинству

Израз „паметан телефон“ описује телефоне са више напредних рачунарских могућности него што их имају обични, односно јефтинији, телефони. Па су чак у неким случајевима напреднији и од неких десктоп рачунара, што им омогућава рад са разним софтверима који олакшавају рад и у области машинства.

Тако су након неког времена настале разне апликације за прорачун греде, које се могу бесплатно користити на новијим „паметним телефонима“. Неке од тих апликација су приказане у табели 1.1.1.

Табела 1.1.1 Апликације „паметних телефона“
за анализу статички одређене греде

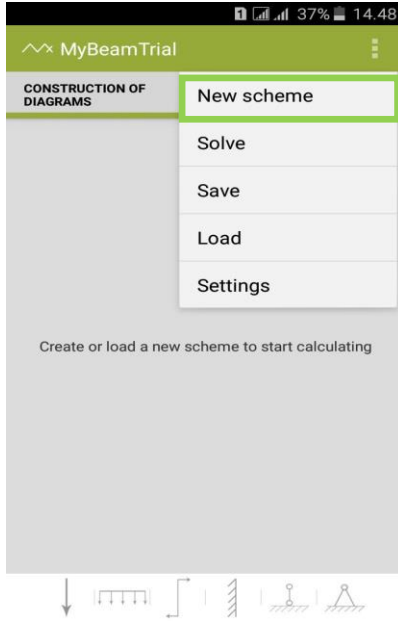
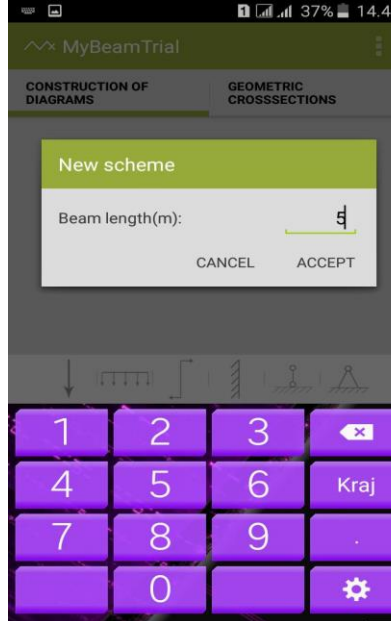
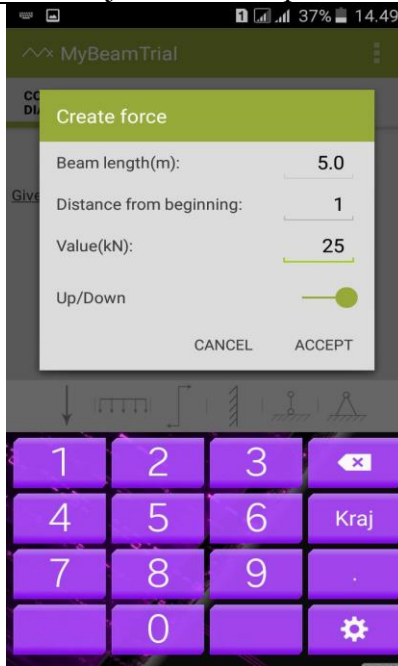
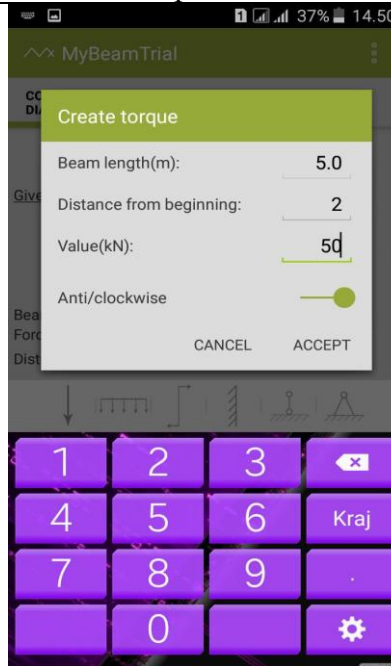
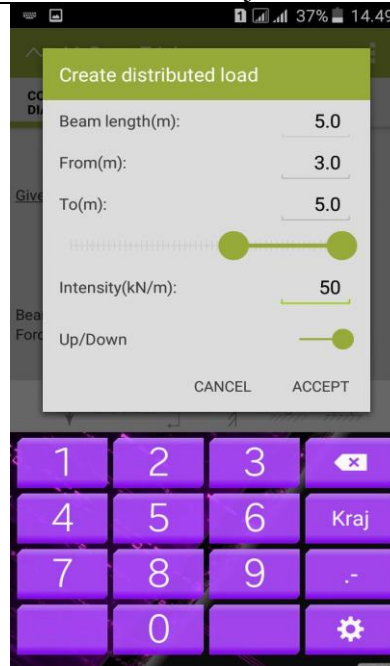
		
Easy Beam	Simple Beam	Beam on soil
		
Structural Beam	MyBeam	BeamDesign

Поменуте апликације су осмишљене тако да омогућавају кориснику лако и брзо сналажење у коришћењу истих. Неке од ових апликација већ имају базу стандардних профила, односно попречних пресека греде, док неке захтевају унос модула еластичности и момента инерције. Горе поменута апликација *Beam on soil* је мало напреднија од осталих, разлог томе је присуство неке подлоге на којој се греда налази. Неке од подлога на којој се налазе греде могу бити од песка, глине, гранита и сличних материјала.

Ради бржег коришћења и лакшег добијања резултата, одређени број апликација садржи унапред припремљену базу начина оптерећења греде, што уствари представља њихову највећу предност. Исто тако, омогућавају конвертовање целог прорачуна и статичких греда у ПДФ формат, што омогућава лакше коришћење добијеног прорачуна. Тако да приликом прорачуна неке апликације омогућавају решење статички оптерећене греде у мање а неке у више корака, самим тим неке су једноставније а неке компликованије за коришћење.

Већ је напоменуто да се до решења може доћи у мање или у више корака применом ових апликација. У наредној табели представљен је поступак уношења неких параметара који нам задају проблем за који ћемо добити решење. На примеру који следи представљена је греда која је оптерећена силом, спрегом и континуалним оптерећењем.

Табела 1.1.2 *Анализа оптерећене греде у апликацији „MyBeam“*

		
Корак 1. Искртавање шеме која се анализира	Корак 2. Задавање дужине греде	Корак 3. Изглед греде у апликацији
		
Корак 4. Уношење трансферзалне силе, на одређеном растојању, одређеног интензитета	Корак 5. Уношење спрега на одређеном растојању одређеног интензитета	Корак 6. Уношење континуалног оптерећа на одређеном делу греде

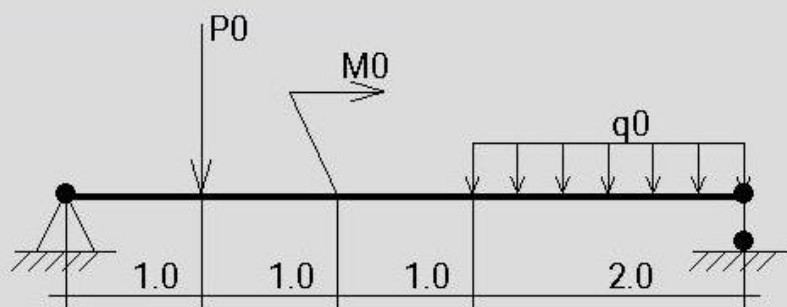
Корак 7. Одређивање положаја непокретног ослоња	Корак 8. Одређивање положаја покретног ослоња	Корак 9. После задавања проблема, врши се анализа задате греде

Након извршене симулације, добијен је дијаграм трансферзалне силе и момента савијања, поред тога добијени су и поступно изведени и прорачунати отпори ослоњаца. Односно добијено је решење одрађено по пољима, тако да су за сваку тачку (чвор) прорачunate трансферзалне силе и моменти савијања. Добијено решење је представљено у табели 1.1.3, док је на слици 1.1.1 приказан изглед оптерећене греде и дијаграма.

Табела 1.1.3 Решење добијено симулацијом

Решење отпора ослоњаца и потребних вредности за цртање дијаграма.		

Given:



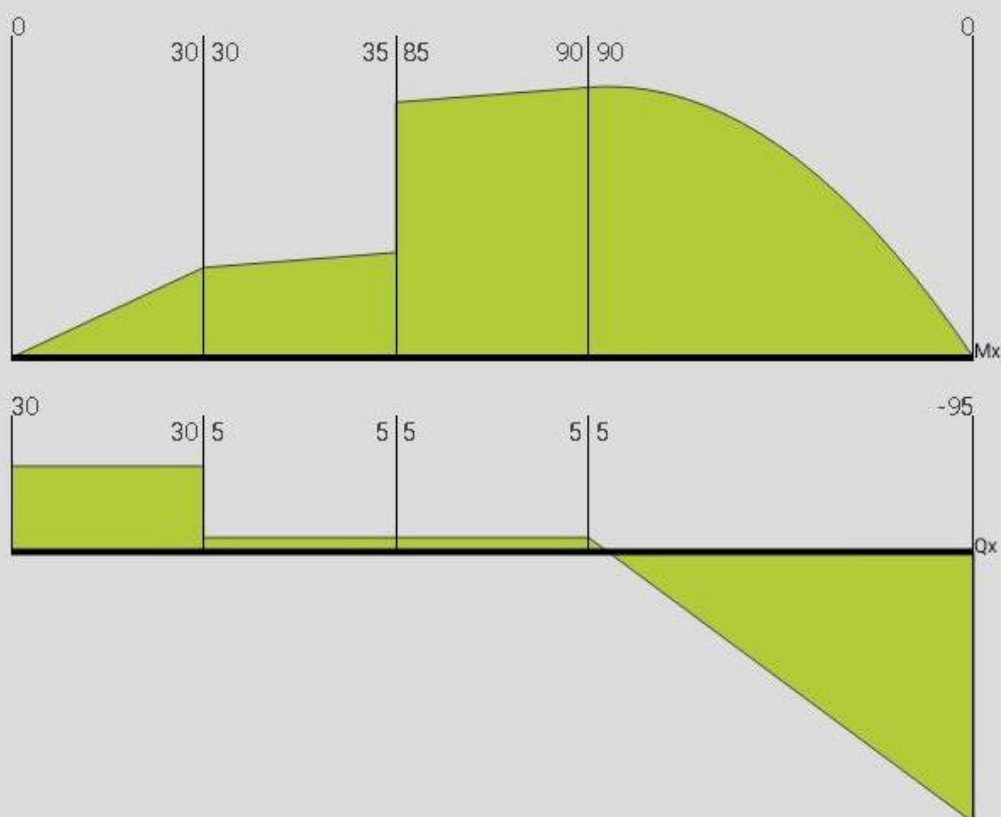
Beam length: $L=5(m)$

Forces: $P_0=25(kN)$;

Distributed loads: $q_0=50(kN/m)$;

Torques: $M_0=50(kN*m)$;

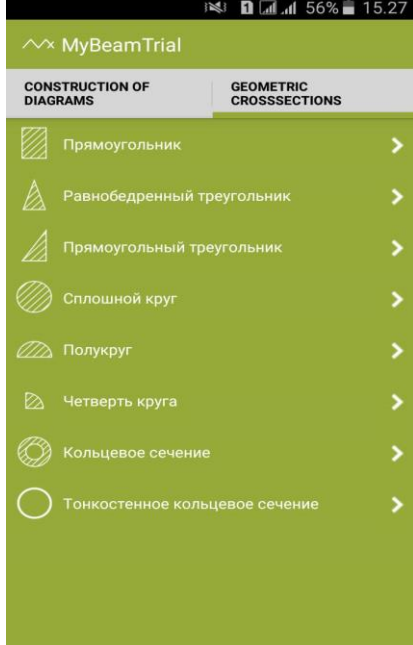
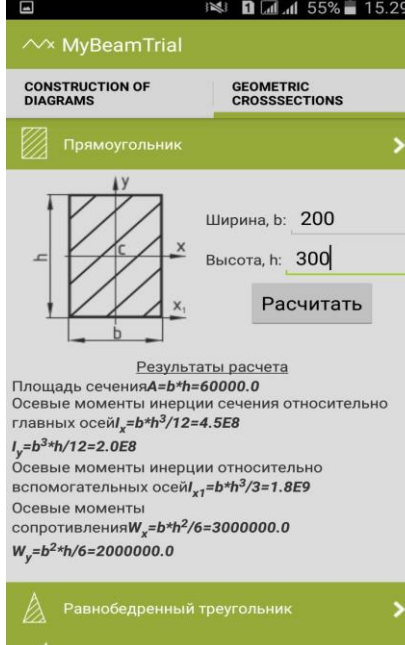
Solution



Слика 1.1.1 Добијено решење по завршетку симулације

Поред чистог прорачуна греде, ова апликација нуди и могућност прорачуна момената инерције и отпорних момената у односу на задати попречни пресек. Неки од понуђених попречних пресека су правоугаоник, једнакокраки троугао, правоугаони троугао, круг, полукруг, четвртина круга, прстен, и танка цев. Сваки од ових попречних пресека захтевају унос потребних димензија, као што су дужине страница и полупречници, за одређени прорачун. У табели 1.1.4 приказан је поступак прорачуна момената инерције за правоугаони попречни пресек и за полукружни попречни пресек.

Табела 1.1.4 Прорачун момената инерције и отпорних момената

		
Могући попречни пресеци у склопу апликације	Унос одређених димензија, и добијени резултати момента инерције правоугаоног попречног пресека	Унос одређених димензија, и добијени резултати момента инерције кружног попречног пресека

Код квадратног попречног пресека уноси се ширина и висина која је потребна за прорачун, док се код полукружног попречног пресека уноси полупречник. По уносу тражених података добијено је решење површине попречног пресека, аксијалног момента инерције за обе осе и отпорног момента за обе осе. Ова апликација олакшава посао за даљи прорачун, јер по добијању ових резултата олакшан је посао у прорачуну напона и деформација.

Компанија Аутодеск је лидер у 3Д пројектовању, инжењерингу и проиводњи забавног софтвера. Од увођења *AutoCAD* софтвера 1982 године Аутодеск наставља да развија најшири портфолио 3Д софтвера за глобална тржишта. Аутодеск софтвери имају најбољи визуелни ефекат, које користе грађевински и машински инжењери, дизајнери, архитекте и многи други. Аутодеск компанија има софтвере који су доступни и погодни за рад на десктоп рачунарима. Поред тога, направили су и апликације за „паметне телефоне“, које додатно олакшавају посао. Компанија тренутно располаже са 185 софтвера, само неки од тих су прилагођени за коришћење на „паметним телефонима“, као што су:

- *Buzzsaw*
- *Configurator 360*
- *AutoCAD*
- *ForceEffect*
- *FormIt*
- *InfraWorks*
- *Inventor*

За разлику од традиционалног приступа коришћењем папира, оловке и дигитрона како би се дошло до решења, Аутодеск *ForceEffect* даје све симулације и инжењерске прорачуне директно на мобилни уређај, што омогућава брзо утврђивање издржљивости дизајна. Лак је за коришћење и даје широк спектар прорачуна потребних у инжењерству. Најједноставнији поступак прорачуна који омогућава ова апликација је статички оптерећена греда, а прорачун се развија све до прорачуна решетки у виду мостова, кровова, дизалица, шофершајбни, бицикла и разних других облика. Приликом коришћења ове апликације добијен је детаљније одрађен прорачун, односно прегледније представљене једначине и њихова решења, као што је представљено на слици 1.1.2. [7]


Report


Report

Elements

Element	Length	Weight
A-B	5.000 m	

Forces

Force	Direction	Size	Angle
F ₁	↓	25.000 kN	270.0°

Distributed Loads

Distributed Load	Direction	Size
Q ₁	↓	100.000 kN (50.000 kN/m)

Moments

Moment	Direction	Size
M ₁	↻	50.000 kNm

Equations

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow 5.000 \times R_{B12}[Y] = -Q_1[Y] \times 3.990 - F_1[Y] \times 1.000 - M_1$$

$$\Sigma F[X] = 0 \Rightarrow R_{A12}[X] + R_{B12}[X] = -Q_1[X] - F_1[X]$$

$$\Sigma F[Y] = 0 \Rightarrow R_{A12}[Y] + R_{B12}[Y] = -Q_1[Y] - F_1[Y]$$

$$\Sigma F[X] = 0 \Rightarrow R_A[X] - R_{A12}[X] = 0$$

$$\Sigma F[Y] = 0 \Rightarrow R_A[Y] - R_{A12}[Y] = 0$$

$$\Sigma F[X] = 0 \Rightarrow R_B \times \cos(270.0) - R_{B12}[X] = 0$$

$$\Sigma F[Y] = 0 \Rightarrow R_B \times \sin(270.0) - R_{B12}[Y] = 0$$

Results

$$R_{A12}[X] = -0.000 \text{ kN}$$

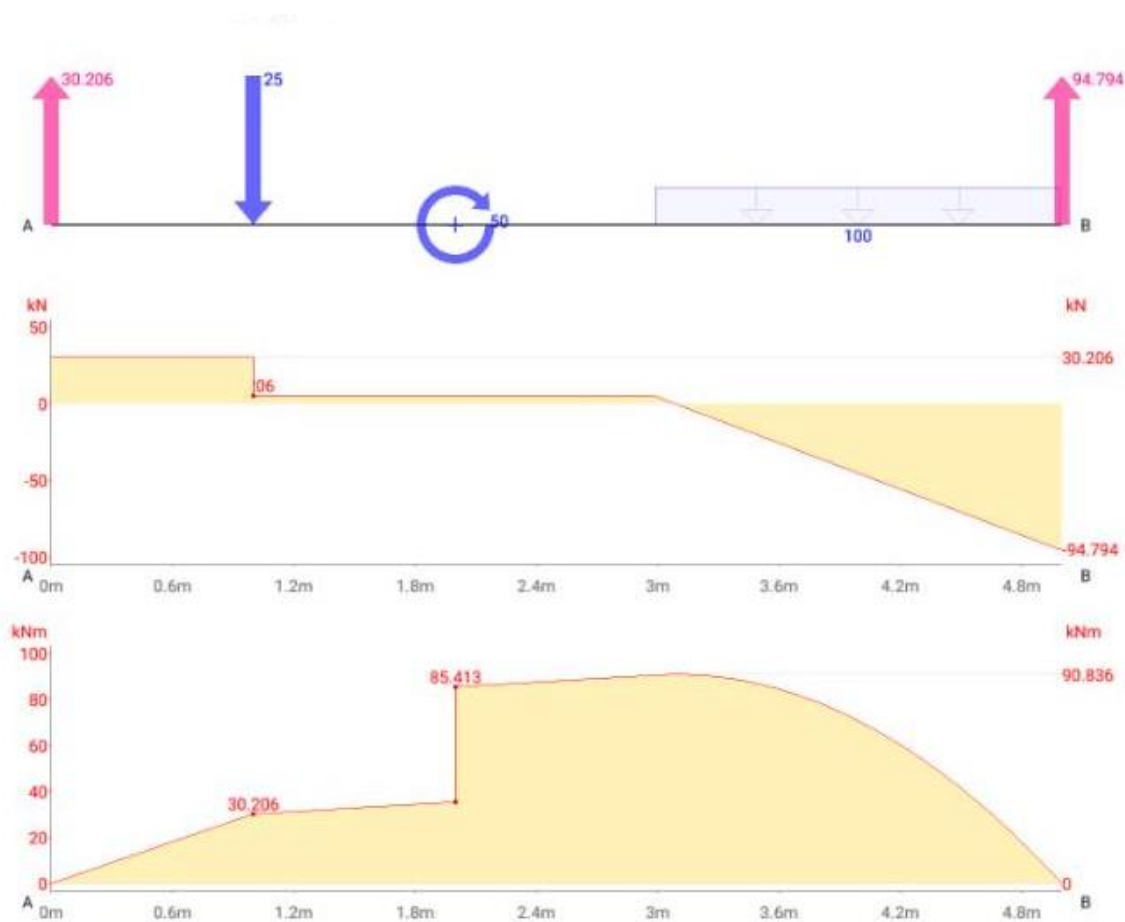
$$R_{A12}[Y] = 30.206 \text{ kN}$$

$$R_{B12}[X] = 0.000 \text{ kN}$$

$$R_{B12}[Y] = 94.794 \text{ kN}$$

Слика 1.1.2 Прорачун статичке греде коришћењем апликације „ForceEffect“

Када се упореде резултати добијени уз помоћ апликација на „паметним телефонима“, види се да су присутне мале разлике у прорачуну, самим тим имамо и малу разлику у дијаграмима. На слици 1.1.3 представљен је дијаграм који је добијен уз помоћ апликације *ForceEffect*.



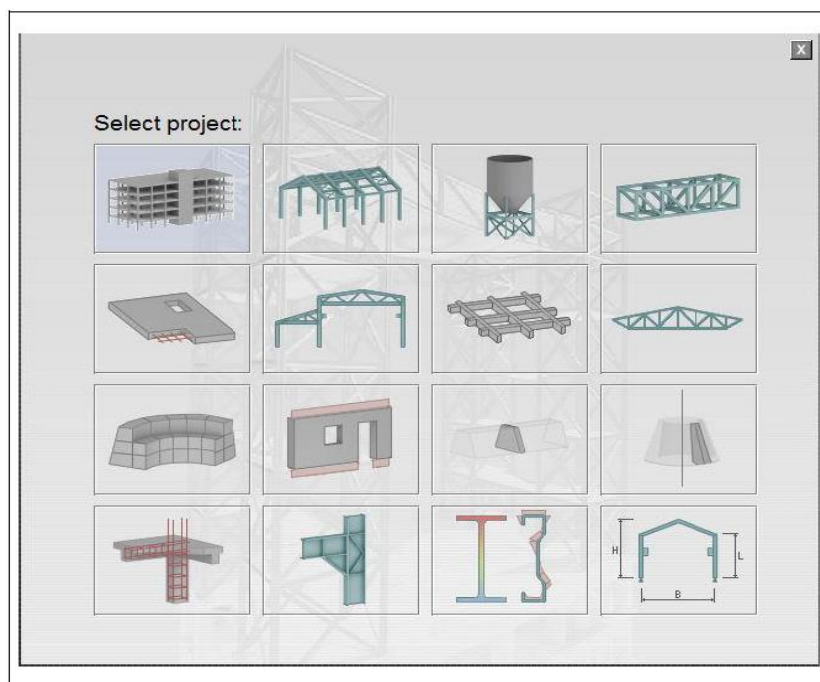
Слика 1.1.3 Дијаграм статички оптерећене греде

1.2 Софтверски пакети за решавање проблема из отпорности материјала

Данас су развијени разни софтвери са великим могућностима у погледу прорачуна конструкција. Помоћу таквих софтвера је могуће проверити изводљивост сваке идеје, а при томе је и анализирати до најситнијег детаља. Што се тиче саме цене софтвера, са повећањем могућности и сложености истог, и цена је у порасту. Са развојем софтвера и његовом надоградњом, долази до потражње за „јачим“ рачунарима, односно рачунарима са бољом конфигурацијом. Софтверски пакети теже да надоместе недостатке који су присутни у апликацијама које су наведене у претходном поглављу. Софтвери који раде на *Windows* оперативном систему нуде много већи спектар могућности у изради и прорачуну у односу на апликације „паметних телефона“.

Током развоја софтверских пакета који се користе у машинству, уочљива је подела на једноставније софтвере чије су могућности сличне као код апликација и сложеније софтвере који садрже много више опција за прорачун најсложенијих конструкција. Као што је већ напоменуто, са повећањем сложености софтвера, долази до пораста његове цене. Па за кориснике који нису заинтересовани за куповину, на неким одређеним сајтовима могуће је доћи до демо верзије оваквих софтвера, односно могућност коришћена на 30 дана.

Поред апликација за телефоне, компанија Аутодеск прави и софтверске пакете за рад на рачунарима. Неки од софтвера као што је *Inventor* поседује широк спектар примене, па се може наћи у већем броју група софтвера које прави ова компанија. За напредну структурну анализу металних конструкција направљен је софтвер *Robot Structural Analysis*. Овај софтвер је осмишљен тако да пружа инжењерима алате помоћу којих могу да разумеју понашање конструкције било ког типа и да изврше њено испитивање у односу на задате стандарде. При самом покретању овог софтвера условљено је бирање конструкције над којом ће се вршити испитивање, и то је представљено на слици 1.2.1. [1]



Слика 1.2.1 Прозор за одабир нове конструкције [1]

Конструкције које се могу бирати у овом софтверу су: *Building Design, Frame 3D Design, Shell Design, Truss 3D Design, Plate Design, Frame 2D Design, Grillage Design, Truss 2D Design, Volumetric Structure Design, Plane Stress Structure Design, Plane Deformation Structure Design, Axsymmetric Structure Design, RC Elements Design, Connection Design, Section Definition, Parametrized Structure Design*. [1]

За боље пословање фирме Аутодеск морало се приступити усклађивању прорачуна симулације са већим бројем, у свету признатим, стандардима. Исто је важно напоменути да у склопу софтвера је уграђен и *BIM – Bilding Information Modeling*, систем који омогућава размену информација између чланова тима, па и читавих тимова који учествују у пројектовању. Када дође до било какве промене на пројекту, она се прослеђује свим члановима и остаје документована. На овакав начин омогућено је убрзано пројектовање и читав процес пројектовања подложен је мањем броју грешака.

У овом раду обраћа се пажња на примену софтвера *MdSolids* за решење оптерећене греде. Под прорачуном статички одређене греде подразумева се израда дијаграма аксијалних и радијалних (трансферзалних) сила и дијаграма нападног момента (момента савијања). Поред тога овај софтвер омогућава и прорачун напона који делују у оптерећеној греди.

MdSolids је образовни софтвер. Софтвер пружа широк спектар прорачуна, поред тога добија се много више повратних информација у виду слика, графикон дијаграма, расподеле притиска и анимација. *MdSolids* је алат за учење који студенти користе да би развили стручност у аспектима предмета са факултета. Помоћу овог софтвера могу се решавати разни инжењерски проблеми као што су извијање штапова, статичке греде, решеткасти носачи, одређивање Моровог круга и разних других проблема.

MdSolids је првенствено едукативан софтвер, међутим, прилично је једноставан за коришћење па је превазиђен од стране неких апликација. *MdSolids* је доступан за образовање инжењера још од 1997 године. Могућност коришћења овог софтвера без новчане надокнаде имају разни образовни институти као што су школе и универзитети широм света. [2]

Предности примене софтвера у односу на класично учење су:

- **Тачно и брзо решење:** Када се учи нови концепт, врло је корисно користити тачан резултат као референцу. Софтвер осим крајњег резултата даје визуелан приказ и низ корисних информација.
- **Брза анализа:** Анализирање понашања структуре врло је корисно. На пример ако се греда оптерети могу се одмах анализирати дијаграми трансферзалне силе, момента савијања, нагиба и угиба еластичне линије носача за дефинисани попречни пресек. [2]

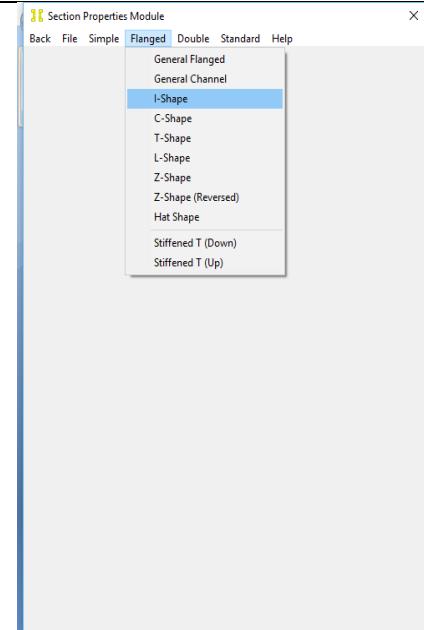
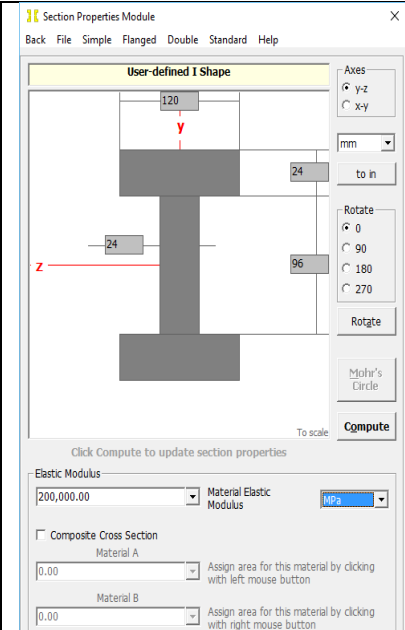
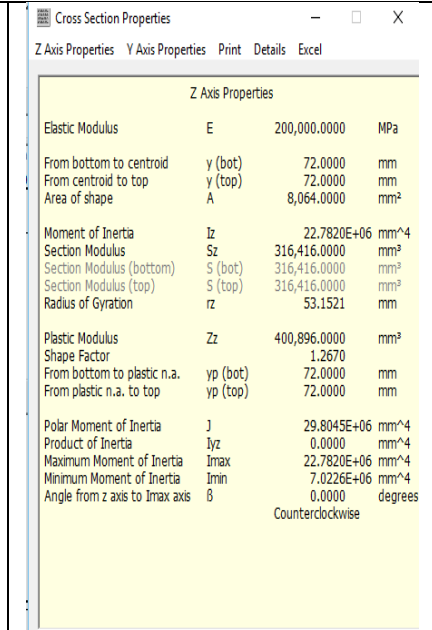
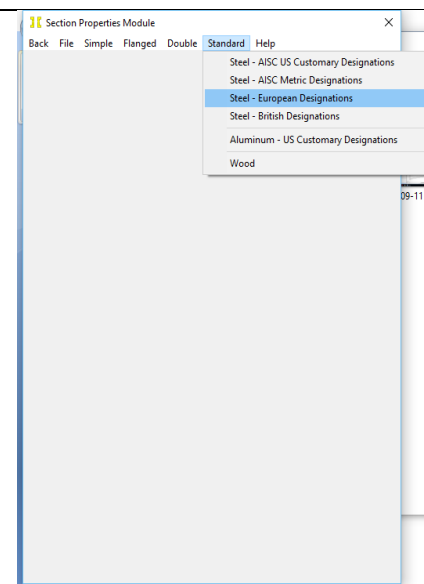
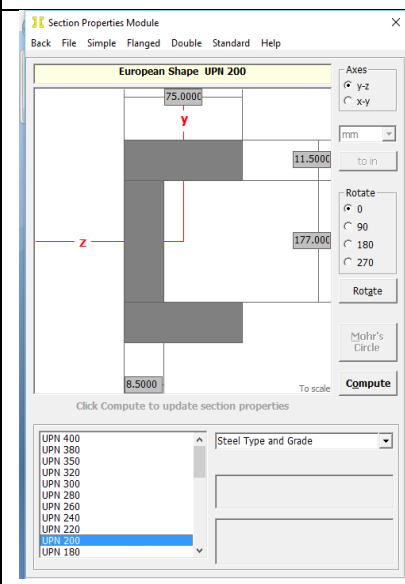
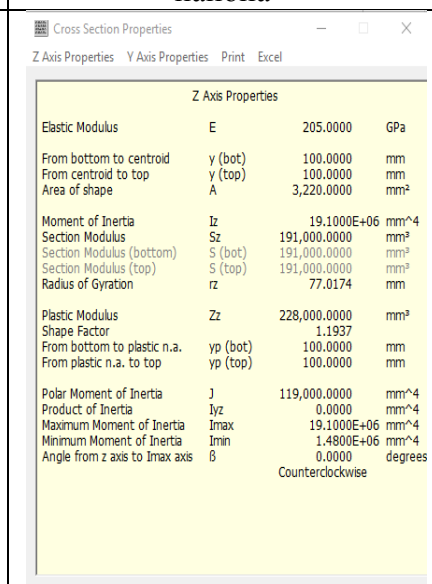
Идеја овог софтвера је да помогне студентима да реше конкретно добијене програмске задатке. При томе софтвер помаже у уочавању фактора који утичу на поједине проблеме, исцртавајући расподелу унутрашњих напона и деформација и омогућава испробавање неограниченог броја комбинација улазних података.

Наколико одлика карактеришу овај софтвер:

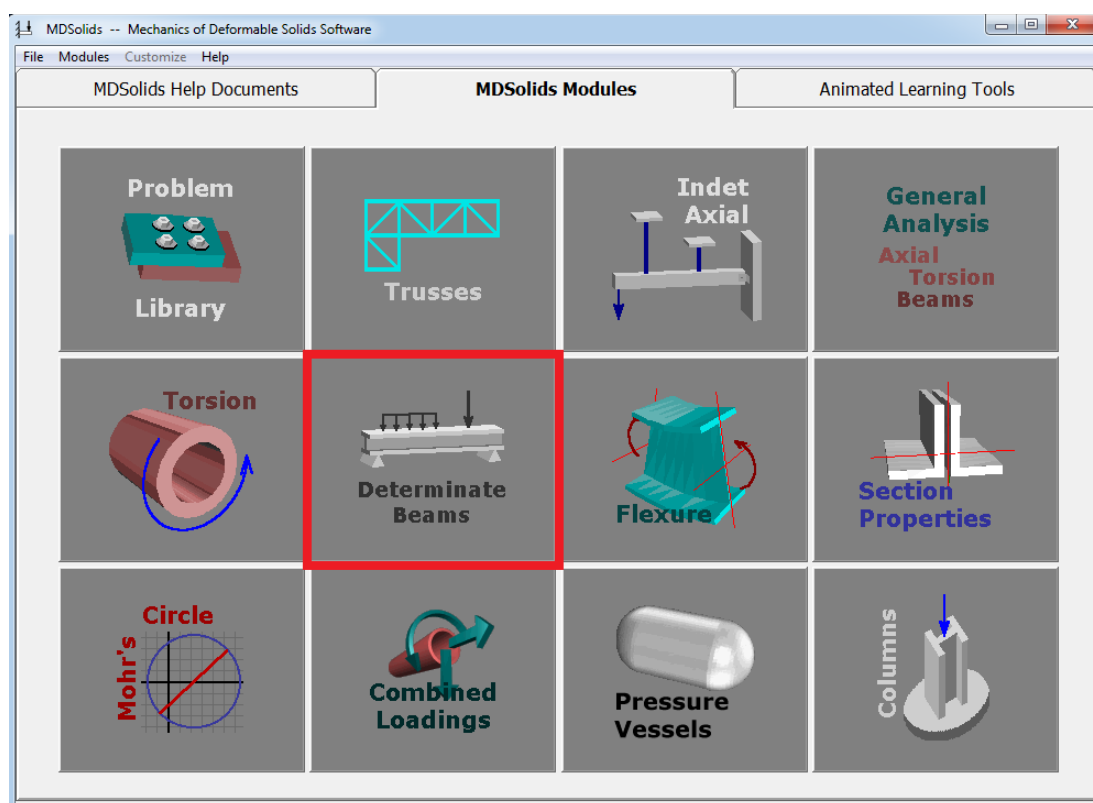
- **Разноврсност:** *MdSolids* садржи све теме које се изучавају у отпорности материјала. У оквиру тема су опције које пружају најједноставнија оптерећења, које помажу студентима да савладају основе, принципе и примену, које захтевају анализу и синтезу.
- **Унос података:** Особина која овај софтвер издваја међу софтверима сличне намене је једноставан унос података. На графичком приказу конструкције постоје прозорчићи у које се уписују подаци. Добра страна софтвера је и могућност избора јединица у којима ће се уносити подаци.
- **Графички приказ:** Сви модули *MdSolids-a* садрже слике, дијаграме, графике, анимације.
- **Тачни и брзи резултати:** Студент може врло брзо да провери тачност свог програмског задатка као и да у случају евентуалног неслагања резултата открије настанак грешке. Софтвер омогућава проверу проблема поступно: прво проверу статичких дијаграма, онда одређивање геометријских карактеристика пресека (тежиште, површина, аксијални моменти инерције), те на крају расподелу напона за задати пресек.
- **Објашњења:** Поред визуелне представе оптерећења, напона и деформација многи модули дају детаљна објашњења о методи прорачуна.
- **Доступност:** Осим што се *MdSolids* може добити бесплатно за едукацијске установе, студенти могу са интернета скинути копију на своје рачунаре. Копија софтвера са лиценцом је од већ поменутих 30 дана. [2]

Овај софтвер омогућава разне прорачуне као што су прорачун оптерећене греде, аксијално напрезање, увијање, савијање итд., који ће касније, у наредном поглављу, бити детаљније описани. Једна од главних ствари при прорачуну напона јесте прорачун у односу на различите попречне пресеке. Да би се извршио овај поступак прорачуна првенствено је потребно одабрати стандардни профил, за који је потребно да се прорачуна момент инерције. Овај софтвер садржи широк спектар попречних пресека, од класичних као што су квадратни, правоугаони и кружни, до оних стандардних као I-профил, U-профил, T-профил, до мало компликованијег као што је дупли стандардни профил. По одабиру попречног пресека потребно га је димензионисати да би постојала могућност доласка до неког прорачуна момената инерције. У табели 1.2.1 приказан је поступак добијања вредности момената инерције за различите попречне пресеке, односно за I-профил и U-профил који се налазе у овом софтверу.

Табела 1.2.1 Прорачун момента инерције [8]

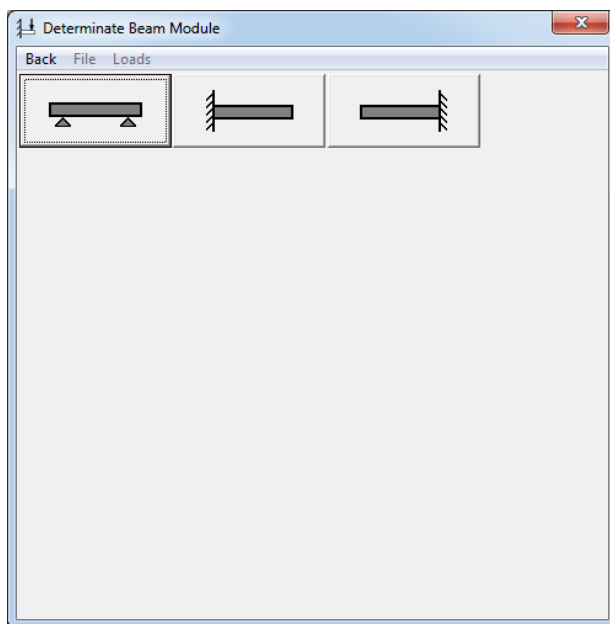
		
Одабир стандардног профила као попречни пресек греде	Уношење вредности одабраног профила	Добијене вредности потребне за прорачун напона
		
Одабир стандардног профила као попречни пресек греде	Одабир конкретног профила, што омогућава аутоматски унос димензија које софтвер даје	Добијене вредности потребне за прорачун напона

У наставку овог поглавља приказано је како се уз помоћ коришћења MdSolids-а може доћи до траженог решења у виду дијаграма, отпора ослонаца и тражених напона. На слици 1.2.2 приказани су сви модули са којима се може радити при употреби поменутог софтверског пакета, али је уоквирен модул са којим се извршава потребни прорачун. Модул *Problem library* се користи у следећем делу рада за прорачуне аксијалног напрезања штапа, поред таквог прорачуна овај модул се још користи и за аксијално напрезање штапова који су везани за греду, аксијално напрезање штапова који су укљештени и оптерећени на више нивоа. Што се тиче модула *Trusses*, користи се за прорачун решеткастих конструкција. У овом модулу сами исцртате конструкцију, оптеретите је и добијете решења по чворовима. Модул *Torsion* се користи за прорачун увијања штапа или цеви, исто тако може да се изврши прорачун увијања код штапа који је оптерећен на више нивоа. Модул овог софтвера омогућава и прорачун цеви које су концентричне, односно налази се једна у другој, као и две цеви које су укљештене са обе стране. Модул којим се извршава прорачун у овом делу рада је *Determinate Beams* који представља греду са оптерећењем. Овим завршавамо преглед неких од основних модула који су битни за овај рад.



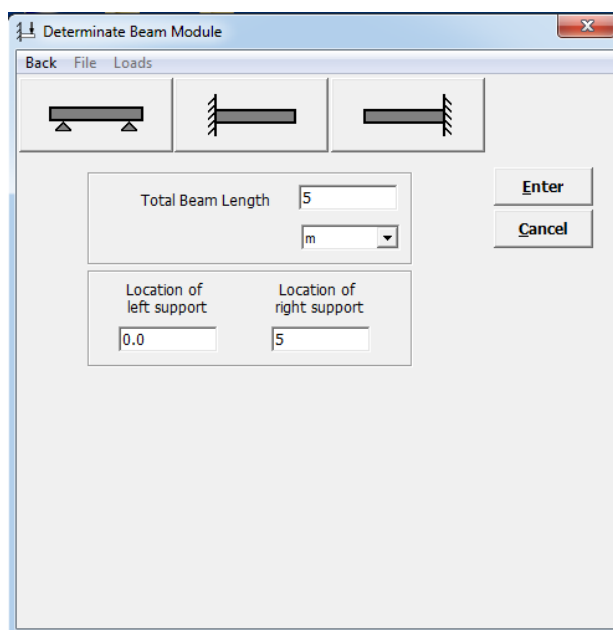
Слика 1.2.2 Модули софтвера MdSolids (уоквирени модул за прорачун статичке греде) [8]

По одабиру уоквиреног модула са претходне слике, отвара се нови прозор који омогућава да се одабере тип греде. На слици 1.2.3 приказани су могући типови греде (греда са препустима, греда укљештена са леве стране, греда укљештена са десне стране) у овом софтверском пакету.



Слика 1.2.3 Типови греде у софтверском пакету MdSolids [8]

Пошто је у претходном поглављу одрађена греда оптерећена са трансферзалном силом, моментом и континуалним оптерећењем, исти тај пример, са другачијим вредностима оптерећења, искоришћен је да би се приказало на који начин овај софтверски пакет одрађује симулацију. За конкретан пример одабран је тип греде са препустима, софтвер ће затим затражити дужину греде и позиције на којима ће се налазити ослонци. На слици 1.2.4 види се начин уноса података како би се добила потребна греда.

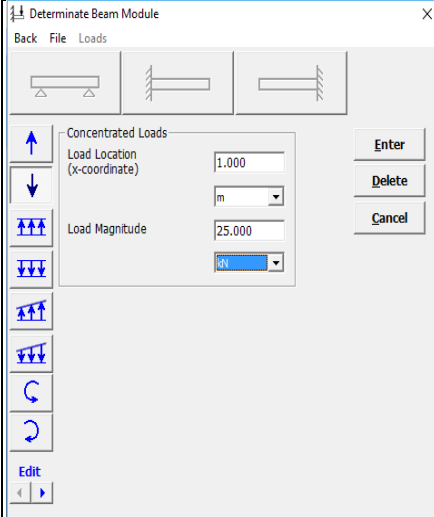
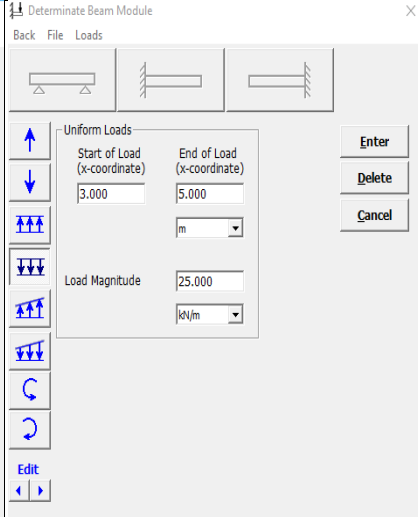
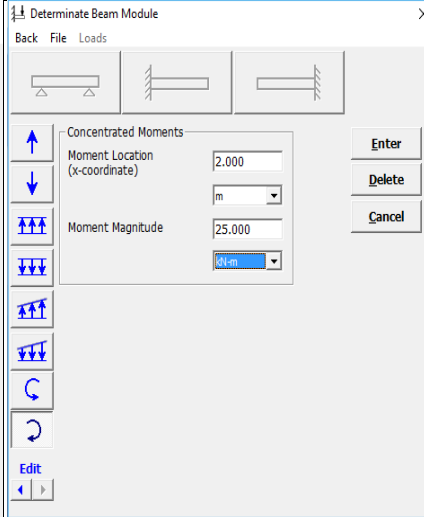


Слика 1.2.4 Почетна дужина греде и положаји ослонаца [8]

Подаци који се уносе у овом случају су сама дужина греде која се нешто касније оптерети, и положаји ослонаца исте.

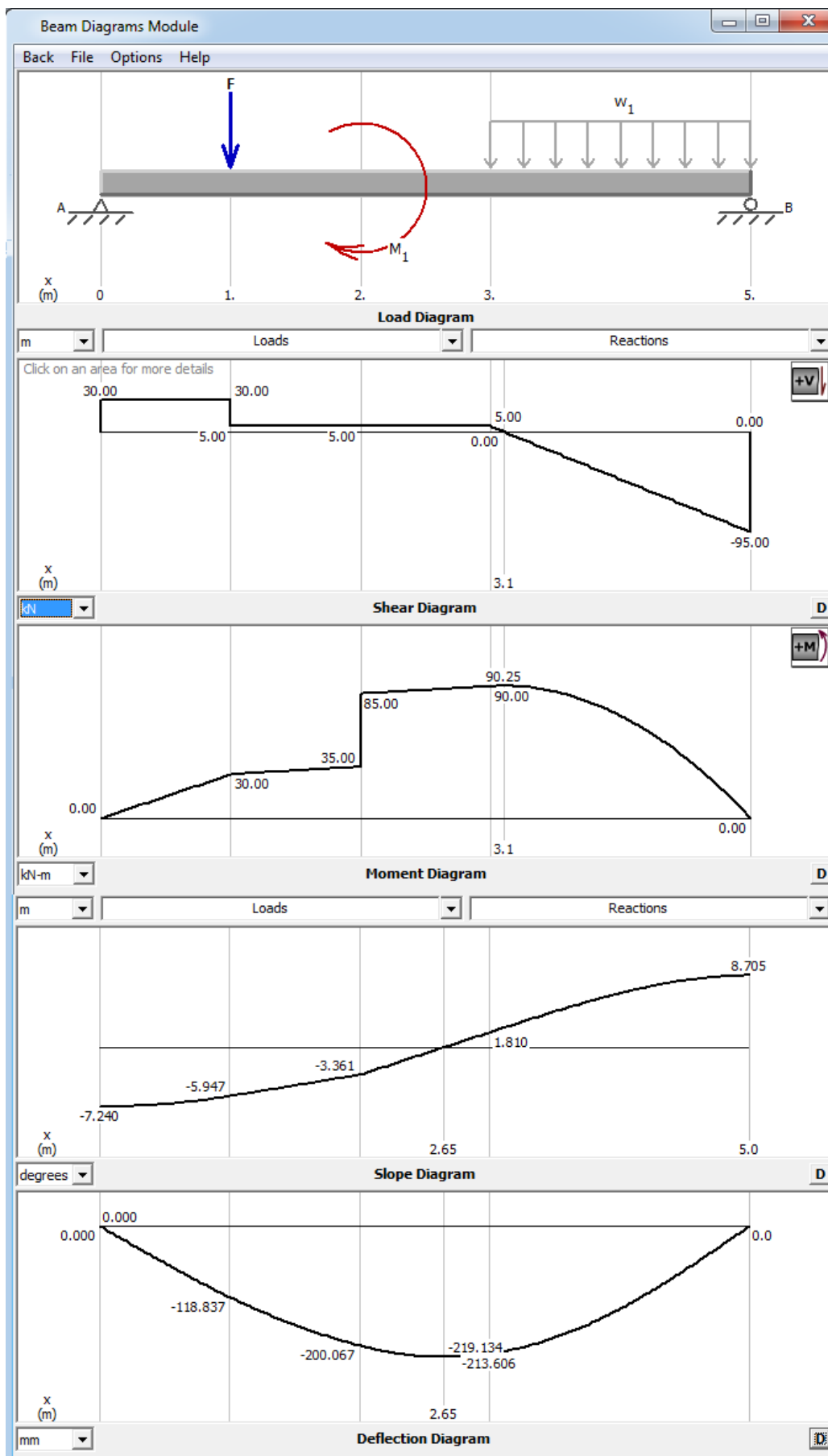
По добијању одређене дужине греде долази се до следећег корака, односно уношења потребних оптерећења да се зада одређени проблем софтверском пакету. У наредној табели су представљени поступци уноса оптерећења на греду.

Табела 1.2.2 Уношење оптерећења [8]

		
Корак 1. Унос трансферзалне силе	Корак 2. Унос континуалног оптерећења	Корак 3. Унос спрега

При уносу сваког оптерећења понаособ, у десном делу екране се појављује одређена дужина греде на којој се јављају оптерећења и одмах формирају дијаграми. По уносу и последњег оптерећења добијамо греду са одрађеним дијаграмима момента савијања и трансферзалних сила. На слици 1.2.5 је представљено решење које се добија по завршетку симулације софтверског пакета.

У падајућем менију *Options* првенствено се може извршити одабир дијаграма које софтвер може представити као решење. То могу бити изједна дијаграми момента савијања и трансферзалних сила, а поред тога могу бити и дијаграми угиба и нагиба. Сви ови дијаграми су представљени на следећој слици.



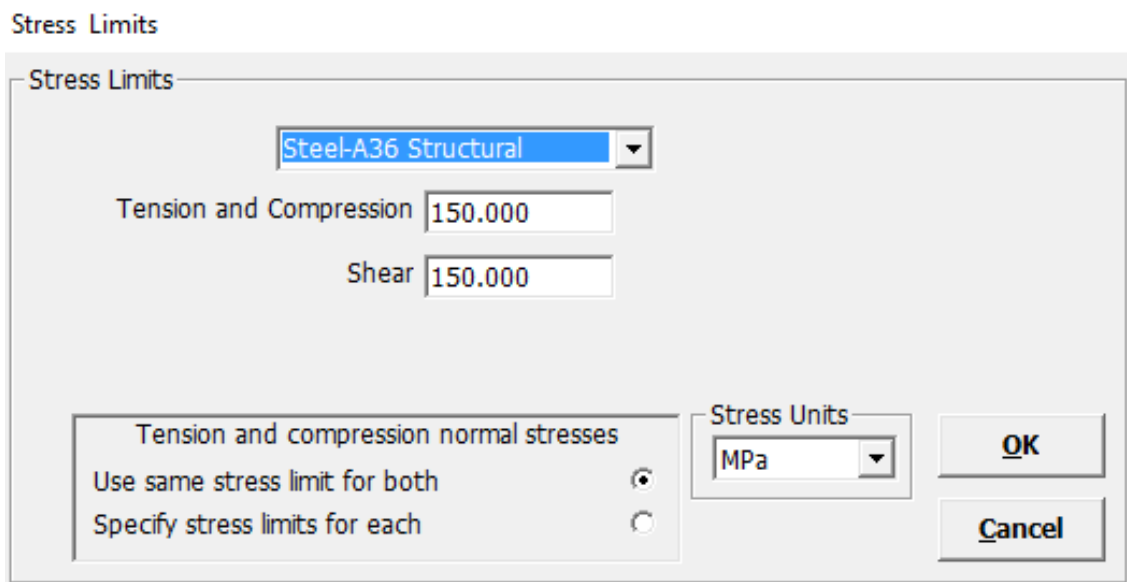
Слика 1.2.5 Статички дијаграми и еластична линија добијени преко MdSolids-a [8]

На претходној слици виде се два падајућа менија која се налазе испод греде, један под називом *Loads* (део у коме се виде вредности задатих оптерећења) и други део под називом *Reactions* (део у коме се виде решење отпора ослонаца). У заглављу радног окружења налазе се и други падајући менији (*Back, File, Options, Help*).

Опција *Back* омогућава привремено затварање прозора, односно дијаграма који се у том тренутку прорачунава, и да поред тог истог постоји могућност израде још једног тако да претходни остане још у функцији.

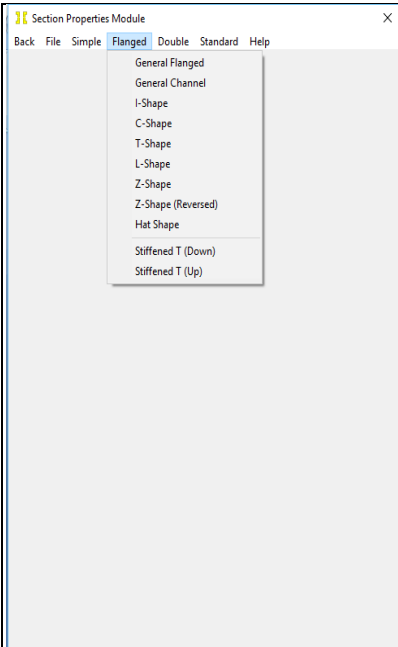
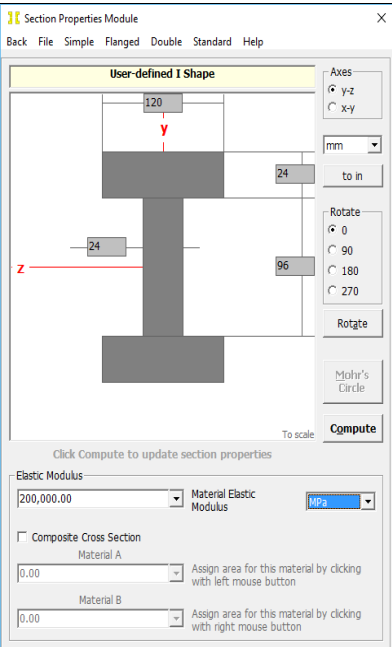
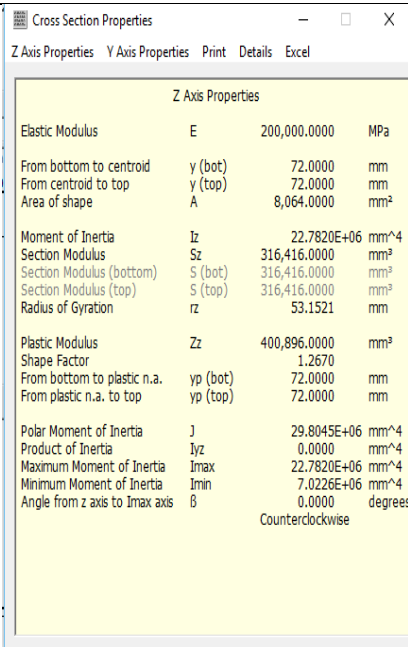
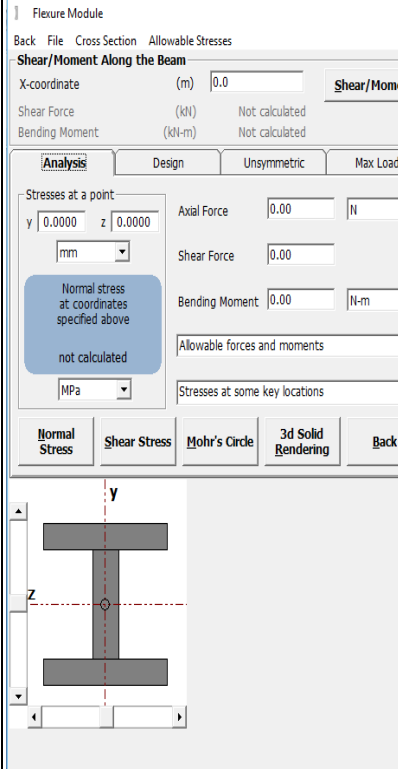
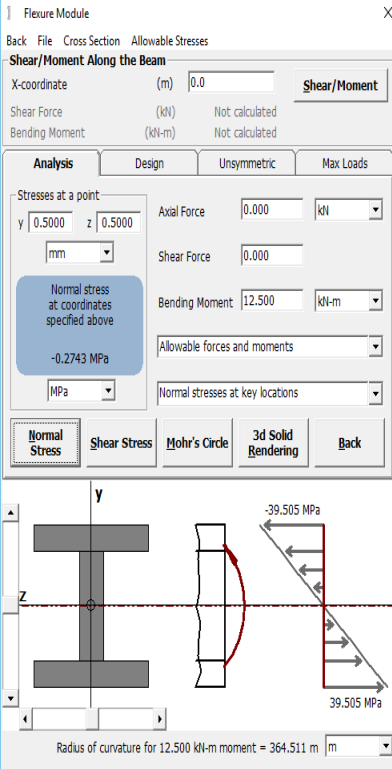
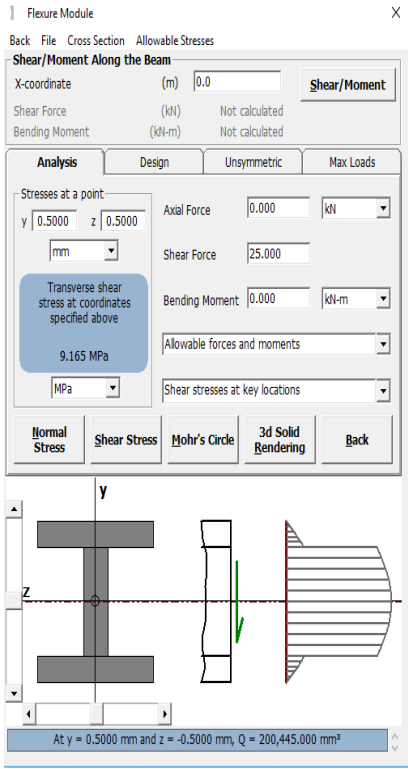
У падајућем менију *File* постоје опције као што су *Save bitmap* и *Save bitmap as* које омогућавају чување добијених резултата дијаграма, тако да се могу користити за неко представљање, или једноставно чување задатка у електронској форми. Поред ових опција постоји и могућност директног штампања добијених резултата, што увелико штеди време и много је ефикасније.

Поред опција добијања дијаграма нагиба и угиба, у истом падајућем менију постоји могућност прорачуна нормалних и смичућих напона у односу на попречни пресек греде који је задат задатком. Овакав прорачун се врши у модулу *Design*. Да би се уз помоћ овог софтвера дошло до решења напона, потребно је да се са добијеног дијаграма учита и унесе максимална вредност момента савијања и трансферзалне силе, а затим да се изврши одабир материјала греде и попречни пресек. Одабир материјала греде, врши се у модулу *Allowable stresses* и приказан је на слици 1.2.6, док се одабир попречног пресека врши у модулу *Cross Section* и приказан је у табели 1.2.3, заједно са добијеним резултатима.



Слика 1.2.6 Одабир материјала и добијање вредности дозвољеног напона [8]

Табела 1.2.3 Прорачун нормалног и смичућег напона [8]

		
Корак 1. Одабир стандардног попречног пресека	Корак 2. Унос димензија попречног пресека и модула еластичности у зависности од материјала	Добијене вредности у односу на попречни пресек које су потребне за прорачун напона
		
Корак 3. Унос деловања момента или трансферзалне силе у тачки која се посматра	Добијена вредност нормалног напона у односу на унети момент	Добијена вредност смичућег напона у односу на унуту трансферзалну силу.

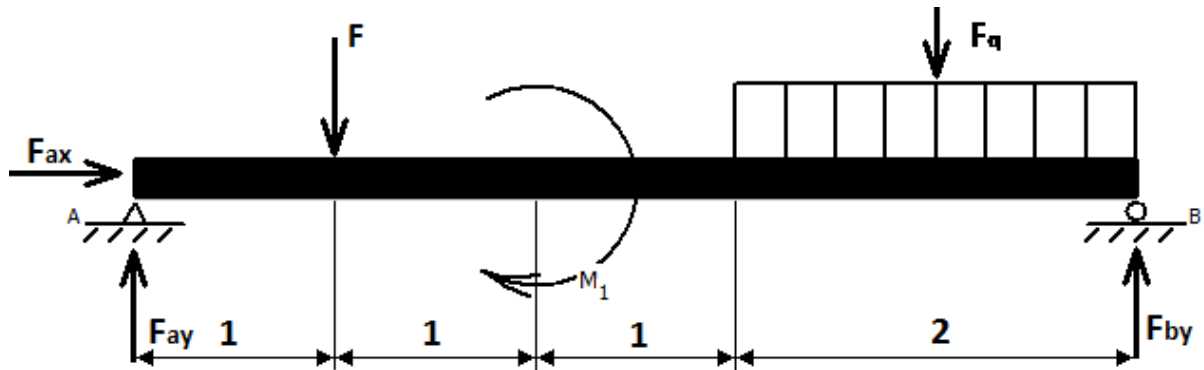
Корак 1. представља одабир попречног пресека, у овом случају то је у питању стандардни I-профил. У другом кораку овог поступка, по одабиру попречног пресека, потребно је извршити димензионисање да би постојала могућност доласка до неког прорачуна напона. Уносе се основне димензије које софтвер захтева, и у односу на материјал који се изабере, добија се модул еластичности те греде. По завршетку уноса ових података одради се симулација и као решење се добијају вредности момената инерције и углова који су потребни за даљи прорачун напона.

Корак 3. Представља положај тачке за коју се тражи прорачун напона, уноси се вредност момента савијања на том месту и тако се добија вредност нормалног напона. Притиском на *Normal stress* добија се аутоматски исцртан дијаграм расподеле нормалног напона. Ако се замени и унесе вредност трансферзалне силе уместо момента, притиском на дугме *Shear Stress* добија се аутоматски исцртан дијаграм расподеле смичућег напона. Самим тим добија се и вредност нормалног и смичућег напона унутар дијаграма. Недостатак овог прорачуна уз помоћ софтвера је у томе што ако постваком задатка нема димензија попречног пресека, потребно их је прорачунати ручну, односно извршити димензионисање, јер овај софтвер нема ту могућност прорачуна.

Аналитичко решење претходног задатка:

Дати носач оптерећен је према слици:

- Одредити реакције ослонаца и нацртати статичке дијаграме
- Одредити потребне димензије попречног пресека ако је $\sigma_d = 160 \text{ MPa}$
- За назначени пресек нацртати дијаграме расподеле нормалног и смицајног напона по висини попречног пресека.
- Одредити вредности еластичне линије на местима 1m, 2m и 3m од левог ослонаца.



a)

- $\sum F_{xi} = 0 \rightarrow F_{Ax} = 0$
- $\sum F_{yi} = 0 \rightarrow F_{Ay} - F - F_q + F_{By} = 0$
- $\sum M_B = 0 \rightarrow -F_{Ay} \cdot l + F(l - e) - M + F_q \cdot \frac{d}{2} = 0$
- $\sum M_A = 0 \rightarrow F \cdot e + M + F_q \cdot \left(l - \frac{d}{2}\right) - F_{By} \cdot l = 0$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -F_{Ay} \cdot l + F(l - e) - M + F_q \cdot \frac{d}{2} = 0$$

$$-5 \cdot F_{Ay} = -25 \cdot 4 + 25 - 50$$

$$F_{Ay} = \frac{125}{5} = 25 \text{ kN}$$

$$\sum F_{yi} = 0 \rightarrow F_{Ay} - F - F_q + F_{By} = 0$$

$$F_{By} = -25 + 25 + 50$$

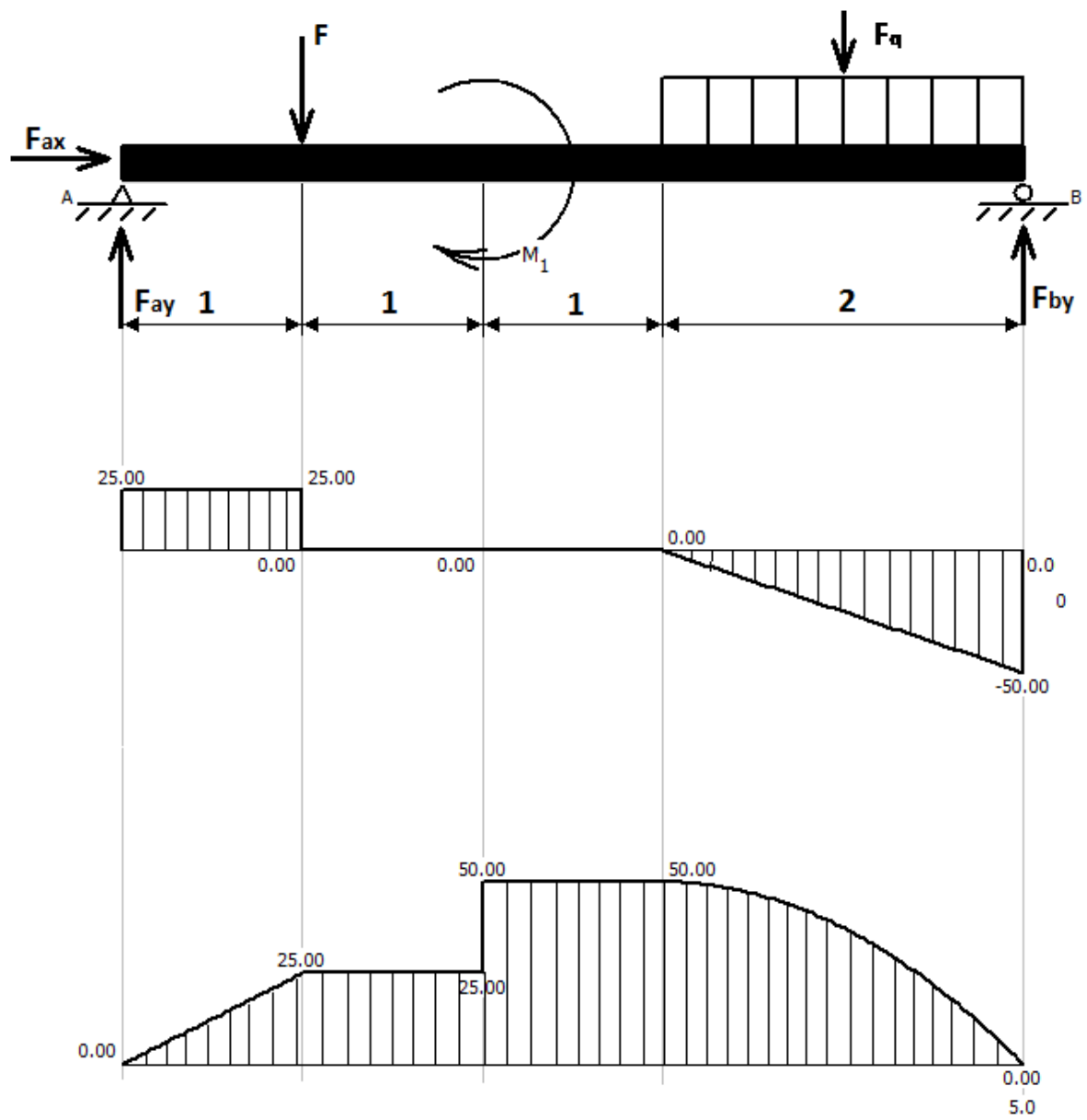
$$F_{By} = 50 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow F \cdot e + M + F_q \cdot \left(l - \frac{d}{2}\right) - F_{By} \cdot l = 0$$

$$25 \cdot 1 + 25 + 50 \cdot 4 - 50 \cdot 5 = 0$$

$$250 - 250 = 0$$

$$0 = 0$$



b) Димензионисање

$$\sigma_{max} = \frac{M_{fmax}}{W_y} \leq \sigma_d$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}}$$

$$z_{max} = 3 \cdot a$$

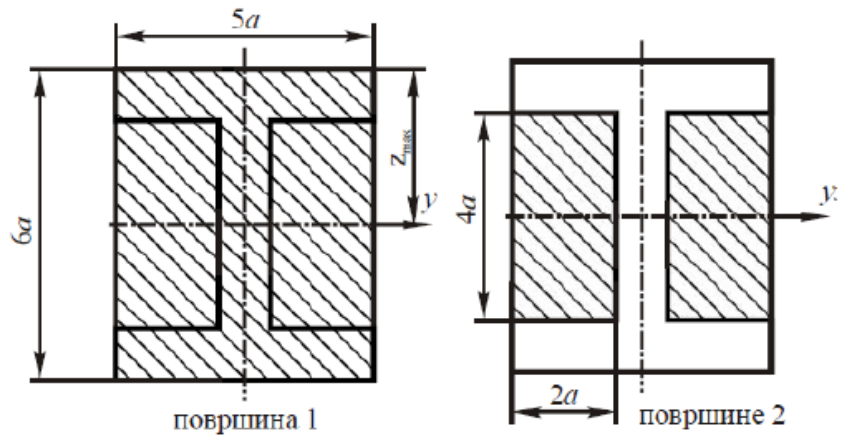
$$I_y = I_y^{(1)} - 2 \cdot I_y^{(2)}$$

$$I_y^{(1)} = \frac{(5 \cdot a) \cdot (6 \cdot a)^3}{12} = 90 \cdot a^4$$

$$I_y^{(2)} = \frac{(2 \cdot a) \cdot (4 \cdot a)^3}{12} = \frac{32}{3} \cdot a^4$$

$$I_y = I_y^{(1)} - 2 \cdot I_y^{(2)} = 90 \cdot a^4 - 2 \cdot \frac{32}{3} \cdot a^4$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{206}{9} a^3 \rightarrow \sigma_{max} = \frac{M_{fmax}}{W_y} \rightarrow a \geq \sqrt[3]{\frac{9 \cdot M_{fmax}}{206 \cdot \sigma_d}} \geq \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 50 \cdot 10^3}{206 \cdot 150}} \geq 0.0244 \rightarrow a = 24 \text{ mm}$$



c) Напони у задатом пресеку

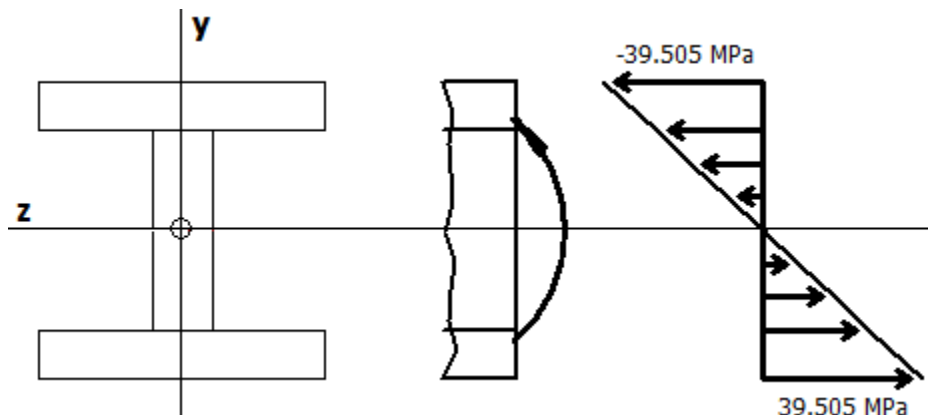
1. Нормални напон

$$\sigma_x = \frac{M_x}{W_y}$$

$$M_x = 12,5 \text{ kNm}$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{206}{9} a^3 = \frac{206}{9} 24^3 = 316.416 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\sigma_x = \frac{M_x}{W_y} = \frac{12.5 \cdot 10^3}{316.416 \cdot 10^{-6}} = 39.5 \text{ MPa}$$



2. Смицајни напон

$$\tau = \frac{F_t}{I_y} \left(\frac{S'_y}{\xi} \right)$$

$$F_t = 25 \text{ kN}; \quad I_y = \frac{206}{3} a^4 = 22.78 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$2a \leq y' \leq 3a$$

$$S'_y = A' \cdot z'_c \quad A' = 5a(3a - z') \quad z'_c = \frac{3a+z'}{2}$$

$$S'_y = A' \cdot z'_c = \frac{5}{2} a [9a^2 - (z')^2] \quad \xi = 5a$$

$$\tau = \frac{F_t}{I_y} \left(\frac{S'_y}{\xi} \right) = \frac{F_t}{I_y} \left\{ \frac{1}{2} [9a^2 - (z')^2] \right\}$$

$$z' = 3a \rightarrow \tau = 0 \text{ MPa}$$

$$z' = 2a \rightarrow \tau = 1.58 \text{ MPa}$$

$$0 \leq y' \leq 2a$$

$$S'_y = A' \cdot z'_c = A_1 \cdot z_{c1} + A_2 \cdot z_{c2}$$

$$A_1 = 5a \cdot a \quad z_{c1} = \frac{5}{2} a$$

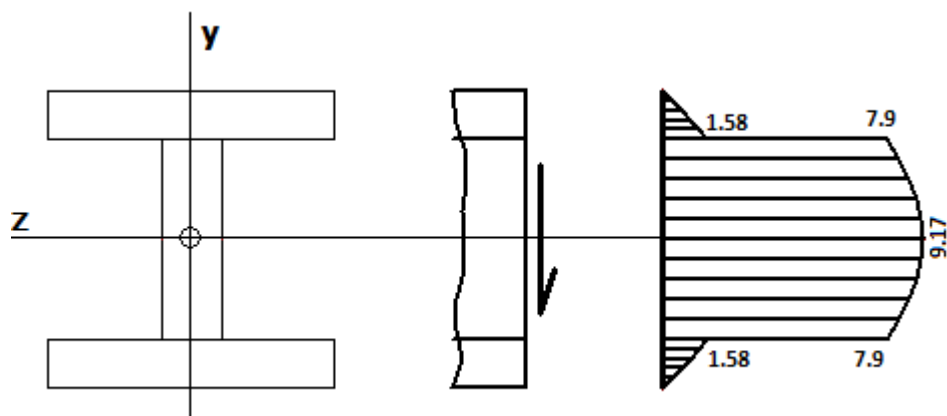
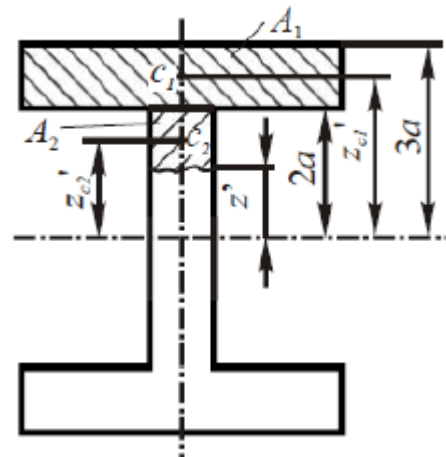
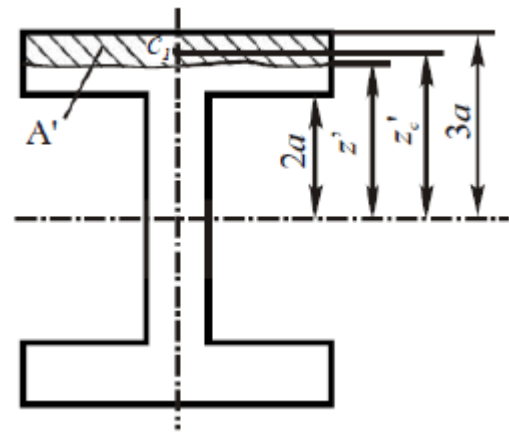
$$A_2 = a(2a - z') \quad z_{c2} = \frac{2a+z'}{2}$$

$$S'_y = A' \cdot z'_c = \frac{25}{2} a^3 + a[4a^2 - (z')^2] \quad \xi = a$$

$$\tau = \frac{F_t}{I_y} \left(\frac{S'_y}{\xi} \right) = \frac{F_t}{I_y} \left\{ \frac{25}{2} a^3 + a[4a^2 - (z')^2] \right\}$$

$$z' = 2a \rightarrow \tau = 7.9 \text{ MPa}$$

$$z' = 0 \rightarrow \tau = 9.17 \text{ MPa}$$



d) Пошто је греда оптерећена трансферзалном силом, моментом и континуалним оптерећењем, еластична линија се рачуна укупним збиром сваког оптерећења понаособ за неко одређено растојање.

За оптерећење силом, еластична линија се прорачунава преко обрасца:

$$y = \frac{F \cdot l^3}{6 \cdot B} \left\{ \frac{b}{l} \cdot \frac{z}{l} \left[1 - \left(\frac{b}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right] + \left(\frac{z-a}{l} \right)^3 \right\}$$

За оптерећење спрегом, еластична линија се прорачунава преко обрасца:

$$y = -\frac{M}{6} \cdot \frac{l^2}{b} \left\{ \frac{z}{l} \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{b}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right] + 3 \cdot \left(\frac{z-a}{l} \right)^2 \right\}$$

За континуално оптерећење, еластична линија се прорачунава преко обрасца:

$$y = \frac{q \cdot l^4}{24 \cdot B} \left\{ \frac{z}{l} \left(2 - \frac{a}{l} \right)^2 \left(\frac{a}{l} \right)^2 - \frac{z}{l} \left[2 \left(2 - \frac{a}{l} \right) \frac{a}{l} \left(\frac{z}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^3 - \left(\frac{z-a}{l} \right)^4 \right] \right\}$$

Еластичне линије у овом примеру једнака је збиру ове три једначине:

$$y = \frac{F \cdot l^3}{6 \cdot B} \left\{ \frac{b}{l} \cdot \frac{z}{l} \left[1 - \left(\frac{b}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right] + \left(\frac{z-a}{l} \right)^3 \right\} - \frac{M}{6} \cdot \frac{l^2}{B} \left\{ \frac{z}{l} \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{b}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right] + 3 \cdot \left(\frac{z-a}{l} \right)^2 \right\} + \frac{q \cdot l^4}{24 \cdot B} \left\{ \frac{z}{l} \left(2 - \frac{a}{l} \right)^2 \left(\frac{a}{l} \right)^2 - \frac{z}{l} \left[2 \left(2 - \frac{a}{l} \right) \frac{a}{l} \left(\frac{z}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^3 - \left(\frac{z-a}{l} \right)^4 \right] \right\}$$

У случају када је $z=1m$

$$y = \frac{25000 \cdot 5^3}{6 \cdot 553980} \left\{ \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2 - \left(\frac{1}{5} \right)^2 \right] + \left(\frac{1-1}{5} \right)^3 \right\} - \frac{25000}{6} \cdot \frac{5^2}{553980} \left\{ \frac{1}{5} \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^2 - \left(\frac{1}{5} \right)^2 \right] + 3 \cdot \left(\frac{1-2}{5} \right)^2 \right\} + \frac{25000 \cdot 5^4}{24 \cdot 553980} \left\{ \frac{1}{5} \left(2 - \frac{2}{5} \right)^2 \left(\frac{2}{5} \right)^2 - \frac{1}{5} \left[2 \left(2 - \frac{2}{5} \right) \frac{2}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^2 - \left(\frac{1}{5} \right)^3 - \left(\frac{1-2}{5} \right)^4 \right] \right\} = 0.940166 \cdot 0.0512 - 0.1880333 \cdot 0.096 + 1.17521 \cdot 0.07168 = 0.04814 - 0.01805 + 0.08424 = 0.11433 \text{ m} = 114.33 \text{ mm}$$

У случају када је $z=2m$

$$y = \frac{25000 \cdot 5^3}{6 \cdot 553980} \left\{ \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2 - \left(\frac{2}{5} \right)^2 \right] + \left(\frac{2-1}{5} \right)^3 \right\} - \frac{25000}{6} \cdot \frac{5^2}{553980} \left\{ \frac{2}{5} \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^2 - \left(\frac{2}{5} \right)^2 \right] + 3 \cdot \left(\frac{2-2}{5} \right)^2 \right\} + \frac{25000 \cdot 5^4}{24 \cdot 553980} \left\{ \frac{2}{5} \left(2 - \frac{2}{5} \right)^2 \left(\frac{2}{5} \right)^2 - \frac{2}{5} \left[2 \left(2 - \frac{2}{5} \right) \frac{2}{5} \left(\frac{2}{5} \right)^2 - \left(\frac{2}{5} \right)^3 - \left(\frac{2-2}{5} \right)^4 \right] \right\} = 0.940166 \cdot 0.072 - 0.1880333 \cdot (-0.096) + 1.17521 \cdot 0.10752 = 0.0677 + 0.01805 + 0.12636 = 0.21211 \text{ m} = 212.11 \text{ mm}$$

У случају када је $z=3m$

$$y = \frac{25000 \cdot 5^3}{6 \cdot 553980} \left\{ \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right] + \left(\frac{3-1}{5} \right)^3 \right\} - \frac{25000}{6} \cdot \frac{5^2}{553980} \left\{ \frac{3}{5} \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^2 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right] + 3 \cdot \left(\frac{3-2}{5} \right)^2 \right\} + \frac{25000 \cdot 5^4}{24 \cdot 553980} \left\{ \frac{3}{5} \left(2 - \frac{2}{5} \right)^2 \left(\frac{2}{5} \right)^2 - \frac{3}{5} \left[2 \left(2 - \frac{2}{5} \right) \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^2 - \left(\frac{3}{5} \right)^3 - \left(\frac{3-2}{5} \right)^4 \right] \right\} = 0.940166 \cdot 0.064 - 0.1880333 \cdot (-0.144) + 1.17521 \cdot 0.09728 = 0.06017 + 0.027077 + 0.11432 = 0.201567 \text{ m} = 201.567 \text{ mm}$$

2. НЕКОЛИКО КАРАКТЕРИСТИЧНИХ ПРИМЕРА

Греда (гредни носач) или штап представља тело коме је једна димензија знатно већа од преостале две. Греда је ограничена са цилиндричном површином (тзв. бочна површина греде) и са две равни које су управне на бочну површину греде (тзв. основе греде). Греда, као таква, представља један од основних конструктивних елемената у већини грађевинских и машинских конструкција. Она може бити оптерећена на разне начине, на пример, на истезање или притисак, торзију, савијање или комбинацију ових оптерећења.

Када се посматра неко тело на које делују спољашње силе (површинске и запреминске), као резултат тог дејства унутар тела јављају се унутрашње сила између делова тела, које се преносе преко замишљених површина које раздвајају те делове. Површинске силе су силе које се преносе по спољашњој површини тела и последица су контакта (додира) другог тела којим се остварује дејство на посматрано тело. Запреминске силе су силе које делују на све тачке тела, тј. унутар целе његове запремине, и последица су дејства на даљину других тела (на пример, гравитационе, магнетне или инерцијалне силе). Ако се посматра већ поменута површина која раздваја делове, на њима се јавља вектор $\vec{tn}$ који представља вектор напона у тачки за неку површину чија је нормала $\vec{n}$. Овај вектор представља меру напрезања, односно силу по јединици површине, у датој тачки у односу на посматрану површину која пролази кроз ту тачку. Ако се вектор напона у тачки разлаже на две компоненте, једна компонента има правац тангенте, док друга има правац нормале. [6]

$$\vec{tn} = \sigma_n \cdot \vec{n} + \tau_n \cdot \vec{e}$$

Компонента σ_n представља нормални напон, односно компоненту вектора напона за површину са нормалом $\vec{n}$ у правцу нормале $\vec{n}$.

Компоненте τ_n представља смичући напон, односно компоненту вектора напона за површину са нормалом $\vec{n}$ у правцу тангенте на посматрану површину $\vec{e}$.

Нормални напон представља меру истезања или притиска у одређеној тачки по површини са нормалом, док смичући напон представља меру тангенцијалног напрезања, или што сам назив каже смицања, у одређеној тачки посматране површине

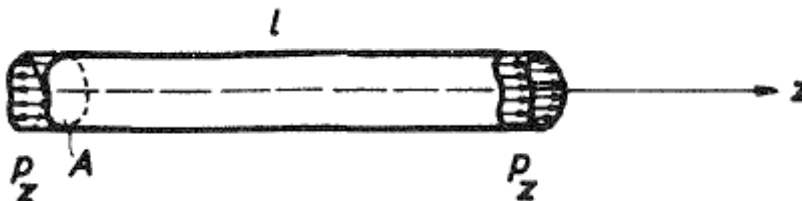
Што се тиче деформације, тело се деформисало у случају ако су његове материјалне тачке промениле свој релативни положај. Деформација тела не представља само промену дужине влакна, већ и њихов правац и углове између тих правца. Односно познавање деформације је условљено познавањем дилатација у тачки и углова између било која два правца у тој тачки. Током даље анализе коришћена су померања тела која су веома мала и најчешће се јављају у машинству. У том случају вектор померања $\vec{u}$ са свим својим компонентама $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ има веома мале вредности у односу на димензије тела.

Током овог поглавља потребно је да се за сваку од ових врста оптерећења (напрезања) види разлика између израза за напоне и деформације, и тиме све припреми за њено димензионисање и проверу издржљивости, флексибилности и стабилности.

У низу примера који прате теоријско излагање посматрани су како гредни носачи, тако и носачи састављени из више греда, тј. штапова (на пример, рамови, решеткасти носачи и сл.), и показан је начин њиховог решавања. [6,3,4]

2.1 Аксијално напрезање

Ако је греда оптерећена на базама са равномерним специфичним притиском p_z у аксијалном правцу, то оптерећење се може редуковати у аксијалну силу која делује у тежишту базе и добија вредност уз помоћ обрасца $T_z = p_z \cdot A$. Овакав начина напрезања је приказан на следећој слици.



Слика 2.1.1 Аксијално напрезање греде [6]

Ако се претпостави да је напонско стање ове греде дато на следећи начин:

$$\sigma_{zz} = \text{const.}, \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$$

Из ових услова се види да су сва ограничења задовољена, јер су све компоненте осим σ_{zz} једнаке нули. Напон σ_{zz} једнак је равномерној специфичној површинској сили која делује на базама p_z . У средишњем делу греде стање напона се може добити уз помоћ једначине: $\sigma_{zz} = \frac{T_z}{A}$, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$, док се напони на крајевима греде одређују компликованије.

Што се тиче деформација аксијалног напрезања, могу се одредити директно преко Хуковог закона који гласи: „Промена дужине тела је једнака сили која на њега делује и доводи до истезања, односно савијања.“ Ово се другачије може приказати преко формула:

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E} \cdot p_z, \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \cdot p_z, \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \cdot p_z, \varepsilon_{xy} = 0, \varepsilon_{yz} = 0, \varepsilon_{zx} = 0.$$

Из оваквог приказа Хуковог закона очигледно је да $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu \cdot \varepsilon_{zz}$

Ако се специфични притисак изрази преко укупне силе истезања, односно $p_z = T_z$, издужење се може добити из формуле:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

Односно издужење греде се може представити као директно пропорционално са силом и дужином греде, а обрнуто пропорционално са производом $E \cdot A$ (крутост на истезање).

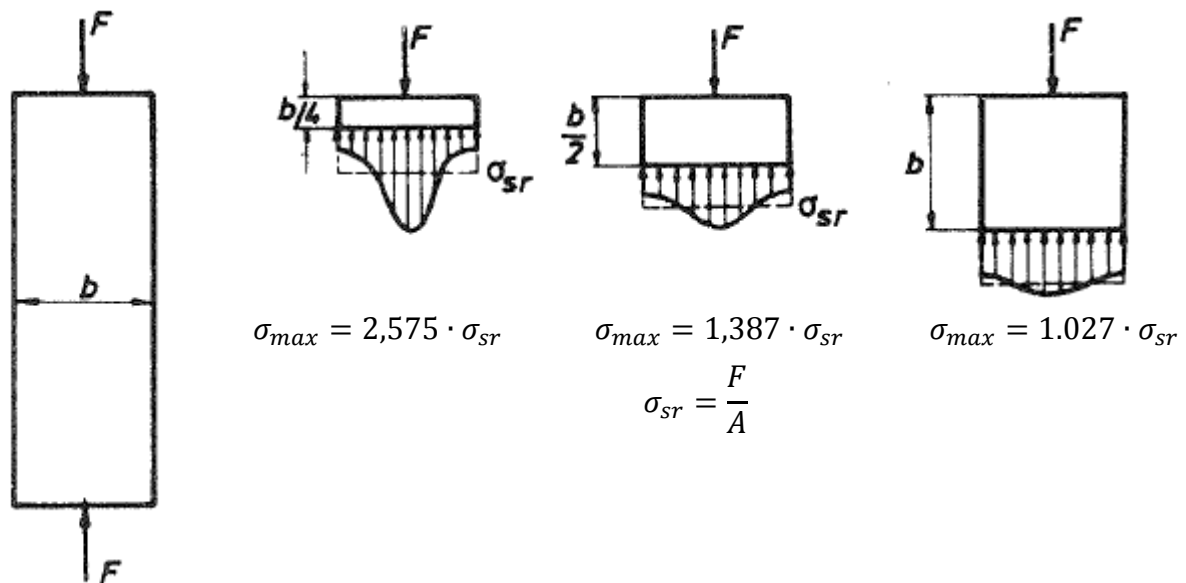
Када се претходна једначина подели са дужином штапа добија се:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{E \cdot A} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \varepsilon_{zz}$$

тако да се из ове једначине види да је дилатација уствари једнака релативној промени дужине штапа. [6,3,4]

Ако је греда оптерећена аксијално концентрисаним силама на основама греде, тада се у тачки дејства концентрисане силе јавља бесконачно велики напон. Ово се зове концентрација напона у тачки дејства концентрисане силе. Међутим, напони постају равномерно распоређени по попречном пресеку, исто као да је аксијално напрезање изазвано равномерно распоређеним силама на осовинама греде. У пракси се уводи тзв. фактор концентрације напона, који зависи од геометрије тела, тако да је:

$$\sigma_{max} = K \cdot \frac{F}{A}$$



Слика 2.1.2 Пример аксијалног напрезања са концентрацијом напона [6]

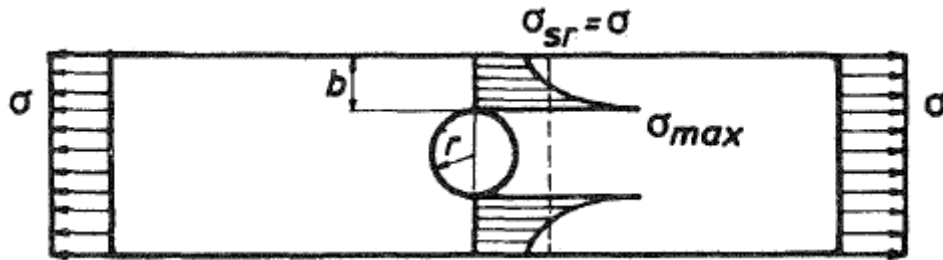
Тачно решење датог примера на слици 2.1.2 је тешко одредити, из тог разлога се уводи параметар K .

До неправилности у расподели напона долази када је напон у неким тачкама далеко већи него просечни напон, што опет представља концентрацију напона приказану на слици 2.1.3. У овом случају на местима концентрације напона долази до појаве пластичне деформације и пукотине, што може довести до лома конструктивног елемента.



Слика 2.1.3 Неправилност у расподели напона [6]

Концентрација напона се такође види у случају када у греди постоји отвор, што је приказано на слици 1.1.4.



Слика 2.1.4 Греда са отвором [6]

У овом случају фактор концентрације напона K износи:

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{sr}} = K\left(\frac{r}{b}\right)$$

Вредности овог фактора се у овом случају читају из техничких приручника.

При проучавању аксијалног напрезања претпостављено је да греда има призматични облик. Када је таква греда напрегнута аксијално, напони су једнако распоређени по површини попречног пресека. [6,3,4]



Слика 2.1.5 Греда призматичног облика [6]

Једнака расподела напона може се апроксимативно претпоставити и у случају греде променљивог попречног пресека ако се пресек мења постепено, као што је приказано на слици 1.1.5. На пример, ако је угао $\alpha = 20^\circ$, грешка при прорачуну нормалног напона је само три процената, а израчунава се по формули:

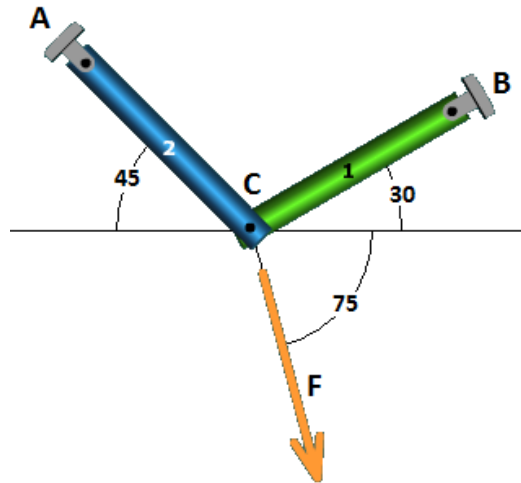
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Пример задатка аксијалног напрезања:

Систем се састоји од два штапа АС и ВС који су зглобно спојени и оптерећени силом F .

- Одредити силе у штаповима
- Димензионисати штапове ако је попречни пресек штапа АС квадрат, а штапа ВС једнакостранични троугао
- Одредити вредност нормалног напона и смицајног напона у пресеку под углом од 45° у штапу ВС. [5]

$$55 \cdot \cos 75^\circ = 14,24 \text{ kN} \quad 55 \cdot \sin 75^\circ = 53,26 \text{ kN}$$



a)

$$1. \sum X_i = 0 \quad F_2 \sin 45^\circ - F \cos 75^\circ - F_1 \cos 30^\circ = 0$$

$$2. \sum Y_i = 0 \quad -F_2 \cos 45^\circ + F \sin 75^\circ - F_1 \sin 30^\circ = 0$$

$$1. F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 55 \cos 75^\circ - F_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$2. -F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 55 \sin 75^\circ - F_1 \frac{1}{2} = 0$$

$$1. F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 14,24 - F_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$2. F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 53,26 - F_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$39,02 - F_1 \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 0 \rightarrow F_1 = \frac{39,02}{1,366} = 28,56 \text{ kN}$$

$$-F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 53,26 - 28,56 \cdot \frac{1}{2} = 0 \rightarrow F_2 = \frac{39,98}{0,707} = 55,126 \text{ kN}$$

b)

$$\sigma = \frac{F_A}{A} \leq \sigma_d$$

AC:

$$F_A = F_2 = 55,126 \text{ kN}$$

$$A = a^2 = 18^2 = 324 \text{ mm}^2$$

$$\frac{F_a}{a^2} \leq \sigma_d \rightarrow a \geq \sqrt{\frac{F_a}{\sigma_d}} = \sqrt{\frac{55,126 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^3}} \rightarrow a \geq 17,5$$

$$a \geq 19,1$$

$$a = 18 \text{ mm}$$

BC:

$$F_A = F_1 = 28,56 \text{ kN}$$

$$A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{20^2 \sqrt{3}}{4} = 173,2$$

$$\frac{F_a}{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}} \leq \sigma_d \rightarrow a \geq \sqrt{\frac{4 F_a}{\sqrt{3} \sigma_d}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 28,56 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 180 \cdot 10^3}} \rightarrow$$

$$a = 19 \text{ mm}$$

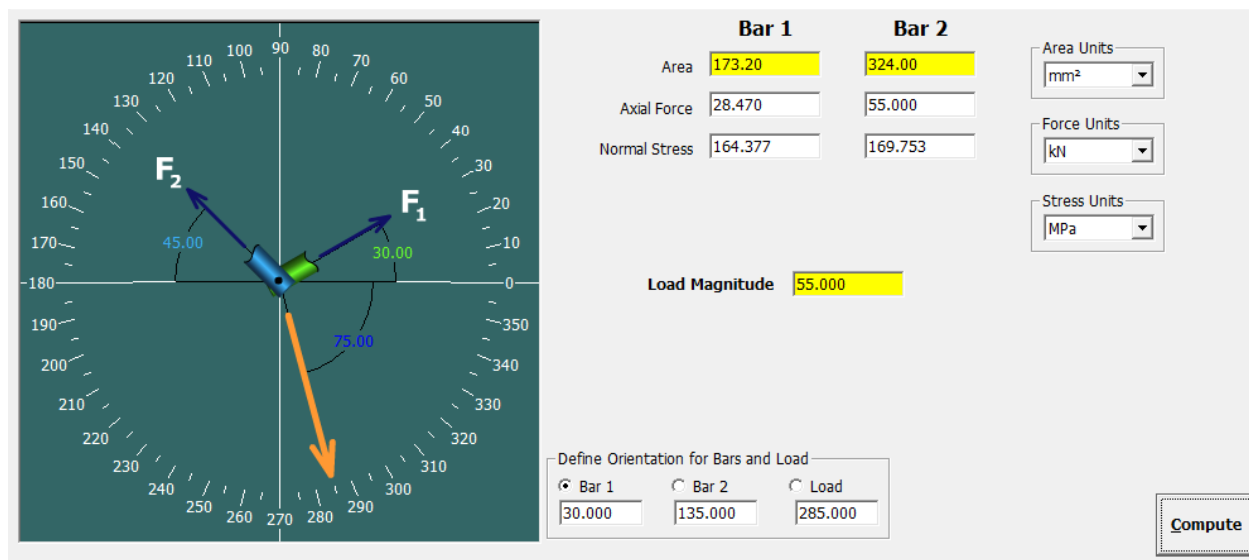
c)

$$\sigma = \frac{F_A}{A} = \frac{F_1}{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{55,126 \cdot 10^3}{173,2} = 164,89 \text{ MPa}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2} \sigma = 0,5 \cdot 164,89 = 82,445 \text{ MPa}$$

$$\tau_\varphi = \frac{1}{2} \sigma = 0,5 \cdot 164,89 = 82,445 \text{ MPa}$$

Горе наведено решење представља аналитички поступак решавања задатка. Сада је тај исти задатак представљен у програмском пакету *MdSolids*. По уласку у програм, у падајућем менију *Modules* има опција *Problem Library*. Унутар тог прозора врши се одабир подпоља нормални напон у коме се може вршити избора склопа два штапа под углом који је и потребан за израду овог задатка. Да се конкретно овај пример одради, потребно је да се прво ван овог дела софтвера, уз помоћ попречног пресека изврши прорачун површине тог истог пресека, коју је потребно унети као познати податак. Пошто је та површина већ одрађена у претходном делу, да не би по ко зна који пут био поновљен поступак прорачуна површине попречног пресека, искоришћена је добијена вредност из аналитичког поступка. На слици 2.1.6 приказан је изглед прозора у коме су унете познате вредности и извршен је прорачун који се тражи поставком задатка.



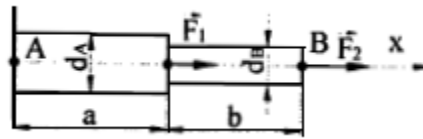
Слика 2.1.6 Пример задатка аксијалног напрезања [8]

Поља која су обојена у жуто са претходне слике, представљају поља чије вредности софтвер захтева од корисника да унесе. Прва два поља захтевају површине попречних пресека штапова, док последње поље захтева вредност оптерећења штапова, односно вредност силе која делује на те штапове. Када су унете потребни подаци извршена је потребна операција *Compute* и добијене су прорачунате вредности. У овом случају вредности које су добијене односе се на силе које делују у штаповима и нормалне напоне. Када се вредности упореде са вредностима из претходног поступка израде, примећена је присутност неких неслагања, која су занемарљива, јер су у питању децималне разлике, које су при аналитичком поступку настале због заокруживања неке вредности.

Пример задатка аксијалног напрезања:

Вратило приказано на слици оптерћено је силама F_1 и F_2 . Према датим подацима:

$F_1 = 10 \text{ kN}$, $F_2 = 30 \text{ kN}$, $a=40 \text{ cm}$, $b=80 \text{ cm}$, $E=2 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $d_A = 4 \text{ cm}$, $d_B = 2 \text{ cm}$, треба одредити нормалне напоне у тачкама А и В вратила и укупно издужење вратила. [5]



$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_2 + F_1 - F_A = 0 \rightarrow F_A = F_2 + F_1 = 10 + 30 = 40 \text{ [kN]}$$

$$A_A = \frac{d_A^2 \cdot \pi}{4} = \frac{4^2 \cdot \pi}{4} = 12.56 \text{ [cm}^2\text{]}, \quad A_B = \frac{d_B^2 \cdot \pi}{4} = \frac{2^2 \cdot \pi}{4} = 3.14 \text{ [cm}^2\text{]}$$

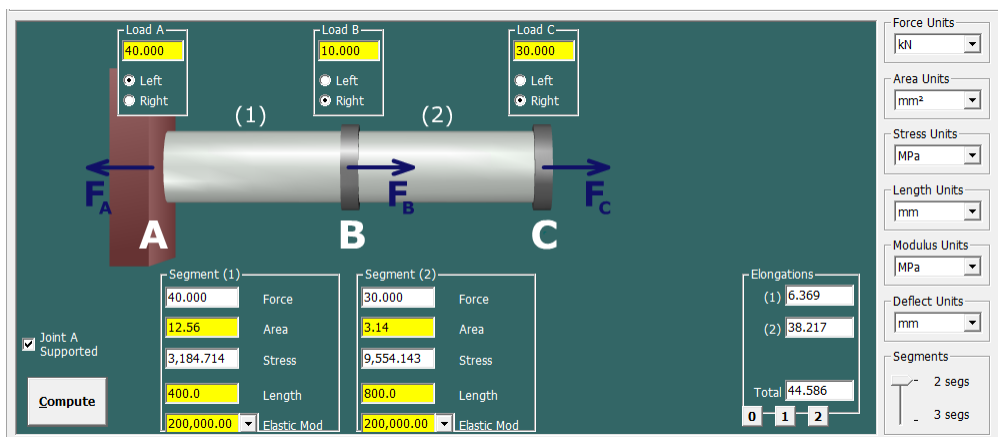
$$\sigma_A = \frac{F_A}{A_A} = \frac{40}{12.56} = 3.19 \left[\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right], \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A_B} = \frac{30}{3.1} = 9.55 \left[\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right]$$

$$\Delta l = \Delta l_A + \Delta l_B$$

$$\Delta l_A = \frac{F_A \cdot a}{E \cdot A_A}, \quad \Delta l_B = \frac{F_2 \cdot b}{E \cdot A_B}$$

$$\Delta l = \frac{F_A \cdot a}{E \cdot A_A} + \frac{F_2 \cdot b}{E \cdot A_B} = \frac{40 \cdot 40}{2 \cdot 10^4 \cdot 12.56} + \frac{30 \cdot 80}{2 \cdot 10^4 \cdot 3.14} = 0.045 \text{ [cm]}$$

Применом софтвера до решења се долази на веома лак начин. По поставци задатка је дата дужина сваког сегмента, величина аксијалних сила и модул еластичности који су тражени за прорачун. Потребно је да се прво ван овог дела софтвера, уз помоћ попречног пресека изврши прорачун површине тог истог пресека, коју је потребно унети као познати податак. Пошто је та површина већ одрађена у претходном делу, да не би по ко зна који пут био поновљен поступак прорачуна површине попречног пресека, искоришћена је добијена вредност из аналитичког поступка. Поља која су жута, то су поља која захтевају унос вредности. На слици 2.1.7 приказан је изглед прозора у коме су унете познате вредности и извршен је прорачун који је потребан.

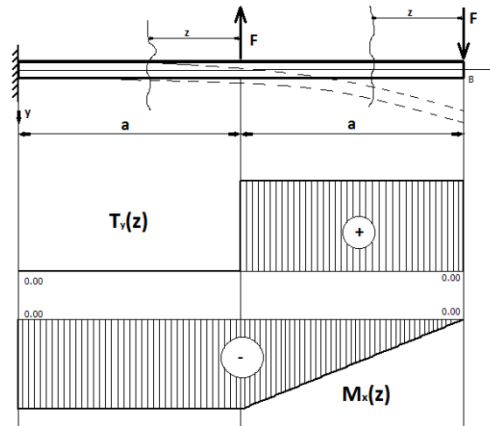


Слика 2.1.7 Пример задатка аксијалног напрезања [8]

По уносу тражених вредности добијене су вредности силе у ослоњу, нормалне напоне на сегментима појединачно и издужења вратила на сегментима и укупно. По добијеним резултатим приметне су разлике у прорачуну, оне које су добијене при заокруживању вредности током аналитичког поступка.

2.2 Чисто савијање греде

У случају када спољашње силе делују управно на подужну осу греде, тада се каже да је та иста греда изложена савијању. У попречним пресецима се јављају смичуће силе и моменти савијања. На слици 2.2.1 је приказано оптерећење греде, греде типа конзоле.

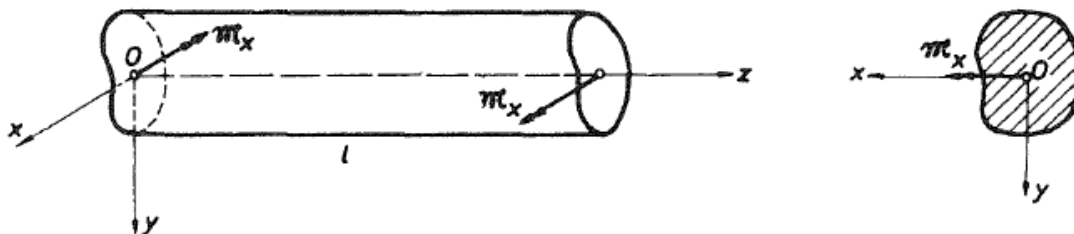


Слика 2.2.1 Конзолна греда [3]

Под оваквим дејством оптерећења доћиће до кривљења, односно савијања носача. Подужна влакна ће се издужити на испупченој, а скратити на удубљеној страни носача. На претходној слици се види много пута увећано савијање носача при дејству оптерећења, испрекиданом линијом. Када се каже да се носач савија, напрезање на које је тај носач изложен се назива напрезање на савијање.

Када је нека греда оптерећена само моментом савијања, тада је та греда оптерећена на чисто савијање, а у случају када је та греда оптерећена и моментом савијања и трансферзалном силом на неком делу распона греде, у том случају јавља се савијање силама.

Греда која је оптерећена на крајевима са два једнака а смером супротна спрега савијања, који леже у једној од главних равни саме греде, кажемо да је у стању чистог правог савијања око осе x , односно да је у главној равни инерције yz . Оваква греда је приказана на слици 2.2.2.



Слика 2.2.2 Чисто савијање [6]

Што се тиче напона и деформације, по семиинверзној теорији еластичности претпостављамо да су:

$$\sigma_{zz} = c \cdot y, \quad c = \text{const.}, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$$

Овом претпоставком су задовољени сви услови равнотеже и гранични услови. Из граничног услова на базама греде добија се вредност константе c .

$$c = \frac{M_x}{I_x}, \quad I_x = \int_A y^2 dA$$

Према овим изразима, нормални напон је представљен као линеарна пормена напона по висини попречног пресека греде, односно изразом:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

Из Хуковог закона следе изрази за деформације код чистог савијања греде:

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E} \cdot \frac{M_x}{I_x} \cdot y, \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \cdot \frac{M_x}{I_x} \cdot y, \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \cdot \frac{M_x}{I_x} \cdot y, \varepsilon_{xy} = 0, \varepsilon_{yz} = 0, \varepsilon_{zx} = 0.$$

Интеграцијом претходних изрази добија се померање тачаке греде. Претпоставља се да је тежиште леве базе фиксирано, односно $x=y=z=0$, што говори и да су померања јендака нули. Раван y је представљена као неутрална равна греде, па се у том случају уздужна влакна која леже у тој равни нити издужују нити скраћују. Уздужна влакна која се налазе испод неутралне равни се издужују, док се влакна која се налазе изнад сабијају. Централна оса греде, која се још и назива неутрална оса (z оса), има померање по y оси:

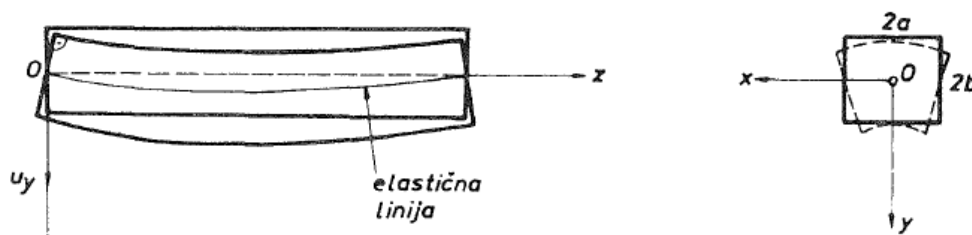
$$u_y = -\frac{1}{2 \cdot E} \frac{M_x}{I_x} (z^2 - l \cdot z)$$

Ова једначина представља еластичну линију греде, односно деформацију неутралне осе греде. Средњавањем ове једначине се добија:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x} = \text{const.}$$

Што значи да је полупречник криве еластичне линије константан, односно код правог чистог савијања, еластична линија има скоро облик кружног лука.

Пошто нема клизања између праваца x , y и z , уздужна влакна греде остају нормална на попречне пресеке и после деформације, што се види на слици 2.2.3. Деформисани облик попречног пресека греде може се у потпуности наћи даљом анализом померања.



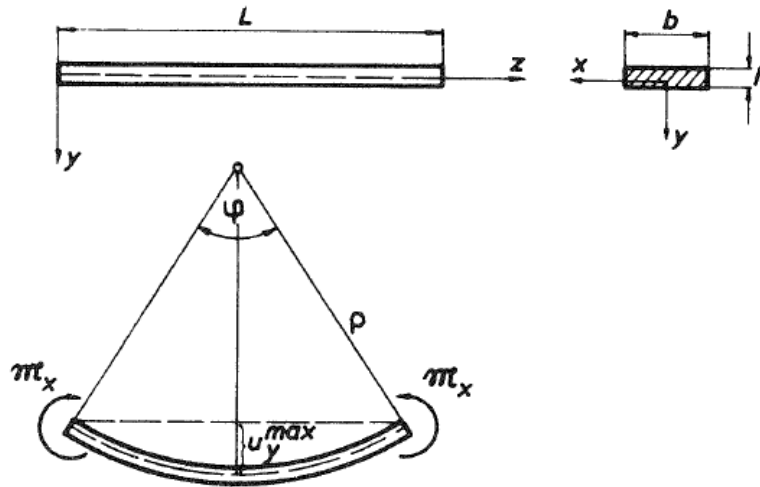
Слика 2.2.3 Деформација при напрезању [6]

Може се показати да правоугаони попречни пресек након деформације има изглед приказан испрекиданом линијом на претходној слици.

Угиб је померање неке тачке греде из њеног првобитног положаја, а нагиб је мера нагнутости деформисане греде у односу на њен почетни недеформисани подужни правац. Познавање тачне вредности угиба различитих конструкција које посматрамо као греде, потребно је да би се омогућило њихово склапање у одговарајуће склопове. Док је облик савијене греде потребно познавати да би могли проучити њихове вибрације. [6,3,4]

Пример задатка чистог правог савијања греде:

Танки алуминијумски штап правоугаоног попречног пресека $b \times h = 2 \cdot \frac{1}{20} \text{ cm}$ и дужине $L = 40 \text{ cm}$ савијен је спрегивама у кружни лук централног угла $\varphi = 60^\circ$. Колики је максимални напон у штапу? Модул еластичности је $E = 7 \text{ MN/cm}^2$. Колики је максимални угиб? [5]



До деформације ове греде долази услед деловања спрегова M_x који су истог интензитета а супроних смерова. При овој деформацији греда прелази у облик кружног лука, при чему попречни пресек греде остаје раван и управан на уздужна влакна исте. Након деформације греде постоји површина влакна која не мења своју дужину, негде између горњих и доњих влакана те греде. Та површина је неутрална површина греде, а неутрална оса греде представља пресек главне равни и неутралне површине.

ρ је полупречник кривине деформисане осе штапа који се израчунава као:

$$\rho = \frac{L}{\varphi} = \frac{40}{\frac{\pi}{3}} = \frac{120}{\pi} = 38,22 \text{ cm}$$

Израз за напон у савијеној греди:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

Заменом израза за коресподентни момент се добија израз за напон:

$$M_x = \frac{E \cdot I_x}{\rho} \quad , \quad \sigma_{zz} = \frac{E}{\rho} \cdot y$$

Тако је максимални напон у штапу:

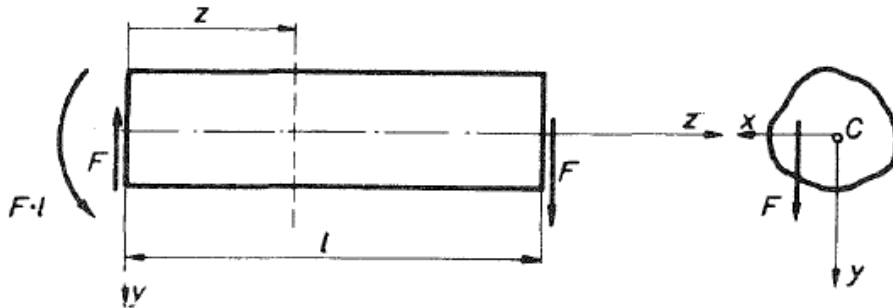
$$\sigma_{zz} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{h}{2} = \frac{7 \cdot 10^3}{38,22} \cdot \frac{1}{40} = 4,58 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Максимални угиб можемо одредити геометријски преко слике:

$$u_y^{\max} = \rho \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right) = 38,22 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 5,12 \text{ cm}$$

2.3 Савијање греде силама

Знатно сложенији случај оптерећења у односу на чисто савијање је савијање греде попречним силама. При савијању силама јавља се сложено напрезање, смицање и савијање, самим тим се јављају и две врсте напона у сваком влакну попречног пресека. То је појава смицајних напона услед дејства трансферзалних сила, и нормалних напона услед дејства спрега. На слици 2.3.1 приказана је призматична пуна греда која је са десне стране оптерећена силом F , а на левом крају греде делује сила $-F$ и спрег интензитета $F \cdot l$ који обезбеђује равнотежу греде.



Слика 2.3.1 Оптерећена греда [6]

На неком растојању z од левог краја греде, под дејством поменуте силе F , јавља се компонентални напон који се редукује у попречном пресеку на трансферзалну силу T_y .

$$T_y = F$$

$$M_x = -F \cdot (l - z)$$

Трансферзална сила T_y је резултат смичућих напона који се јављају у равни попречног пресека, а момент M_x је резултат нормалних напона σ_{zz} равни попречног пресека греде. Из овог разлога се и у овом случају служимо семиинверзном методом па се претпоставља:

$$\sigma_{zz} \neq 0, \quad \sigma_{zx} \neq 0, \quad \sigma_{zy} \neq 0, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$$

Претпоставља се да су нормални напони σ_{zz} у попречном пресеку распоређени као и код чистог савијања са спреговима на крајевима греде, самим тим је момент M_x различит за различите попречне пресеке.

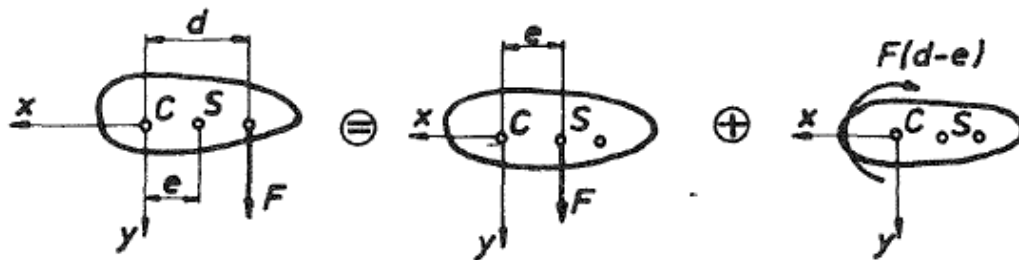
$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{F \cdot (l - z)}{I_x} \cdot y$$

Смицајни напон зависи од трансферзалних сила када је греда константног попречног пресека и када је момент инерције константне вредности. Што се тиче смицајних напона, прорачунава се за места где је у влакнима попречног пресека трансферзална сила највећа. Поред трансферзалних сила, смицајни напон, зависи још и од момента површине пресека и ширине попречног пресека.

$$\tau = \frac{F_t \cdot S'_x}{I_x \cdot \xi}$$

На слици 2.3.2 дати су примери дејства сила који доводе до савијања греде на коју оне делују. Када нападна линија силе F пролази кроз тачку S , та тачка се назива центар савијања (или центар смицања). Међутим ако сила F не пролази кроз центар савијања, тада се поред савијања јавља и торзија.



Слика 2.3.2 Утицај трансферзална силе на греду [6]

И у овом случају оптерећења компоненте деформације добијамо преко Хуковог закона, односно:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \frac{\nu}{E} \cdot \frac{F \cdot (l-z)}{I_x} \cdot y, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{E} \cdot \frac{F \cdot (l-z)}{I_x} \cdot y, \quad \varepsilon_{xy} = 0,$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2 \cdot G} \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{F}{2I_x} + f(x) \right], \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Где је:

G – Модул клизања, представља коефицијент сразмере, пошто је клизање сразмерно тангенцијалном напону.

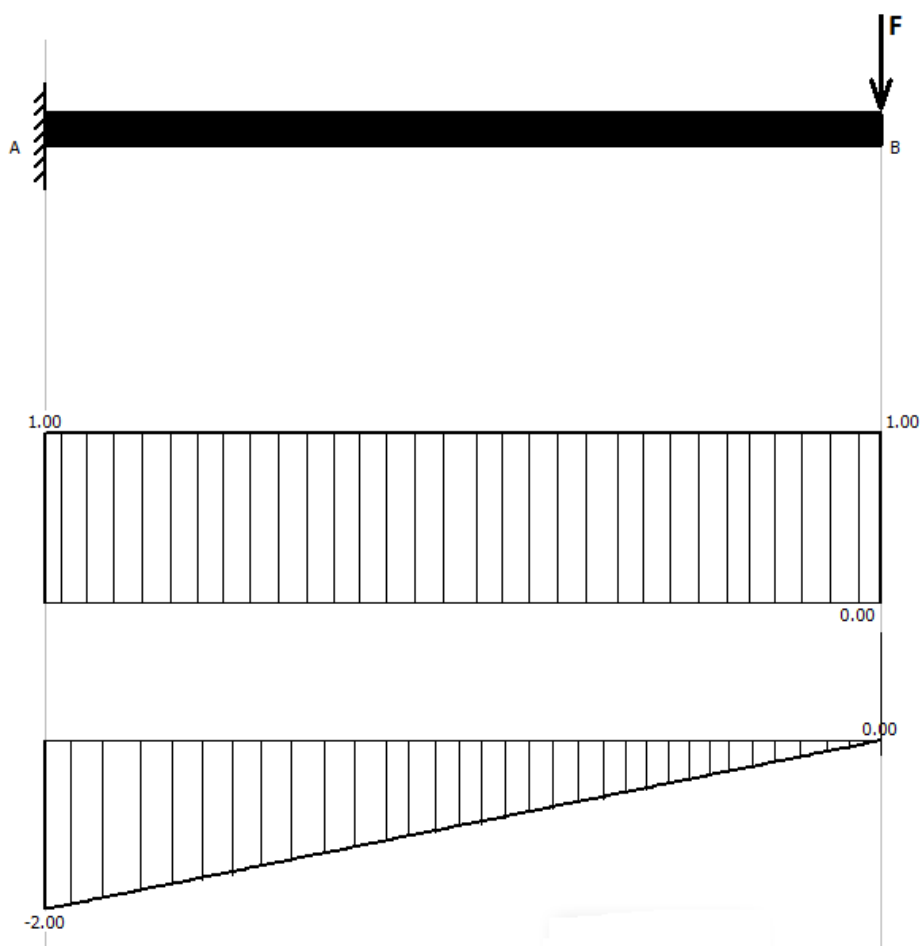
Φ – функција од чијег извода зависе вредности напона.

Као и у претходним примерима, померања се добијају интеграцијом претходних израза.

Раван $y=0$ је неутрална раван, односно раван чија се уздужна влакна не издужују. Поменута раван је управна на раван савијања yz , у којој лежи деформисани облик осе греде (право савијање). Попречни пресеци не остају равни као код чистог савијања, јер њихово померање није линеарна функција од координате y . Сада се већ јасно види да уздужна оса греде и попречни пресеци греде не остају управни након деформације. Еластичну линију греде представља деформациони облик осе греде. Све претходно поменуто се односи на случај када сила F делује кроз центар савијања попречног пресека, и паралелна је са главном централном осом инерције, односно у оси. Међутим ако сила F пролази кроз центар савијања и притом има произвољни правац, тада се поменута сила мора разложити на компоненте које су паралелне правцима главних централних оса инерција. Овај случај представља тзв. косо савијање силом, за разлику од правог савијања које настаје у случају када је сила F паралелна са једном од главних централних оса инерције попречног пресека. [6,3,4]

Пример задатка савијања греде дејством сила:

Челична конзола, распона 2 метара, оптерећена је на свом крају силом $F=1 \text{ kN}$. Попречног пресека I20, и дозвољеним напонам 1000 N/cm^2 . Одредити тангенцијалне напоне. [5]



Из таблица учитавамо податке по задатом попречном пресеку:

$$I_x = 2140 \text{ cm}^4$$

$$S'_x = 125 \text{ cm}^3$$

$$\xi = 0.75 \text{ cm}$$

$$W = 200 \text{ cm}^2$$

Највећа вредност трансферзалне силе и момента савијања:

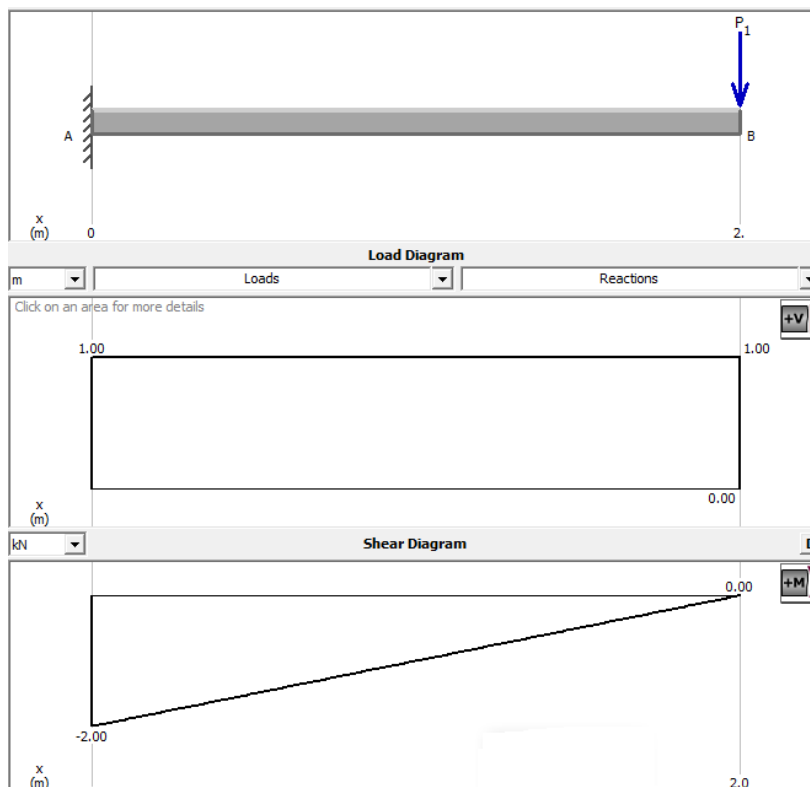
$$F_{Tmax} = 1 \text{ kN}$$

$$M_{fmax} = 2 \text{ kNm}$$

$$\tau = \frac{F_t \cdot S'_x}{I_x \cdot \xi} = \frac{1000 \cdot 125}{210 \cdot 0.75} = \frac{50000}{642} = 78 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

Што се тиче примене софтвера за решавање оваког проблема првенствено је потребно исцртати задату греду и доделити јој одговарајући попречни пресек, а затим унети утицај трансферзалне силе да бисмо добили вредност смицајног напона.

У табели 2.3.1 биће приказани корацу уношења тражених података. Корак по корак се уносе димензије греде и сила којом је она оптерећена. Након добијања статичких дијаграма приказано је како се уноси попречни пресек и добија вредност смичућег напона.

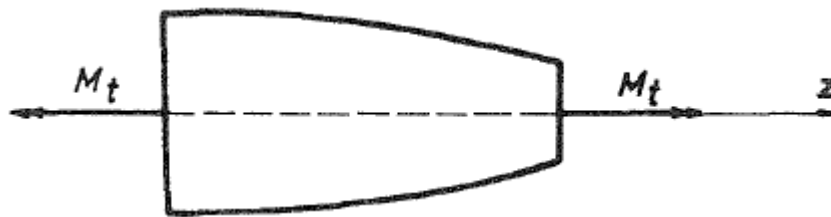


Табел 2.3.1 Поступак добијања смичућег напона [8]

Корак 1. По добијању статичких дијаграма, извршено је димензионисање попречног пресека.	Корак 2. У односу на попречни пресек добијају се потребне вредности за прорачун.	Корак 3. По уносу величине трансферзалне силе добија се смицајни напон који одговара већ извршеном прорачуну.

2.4 Торзија греде

Када се посматра непризматичну греду, односно греду променљивог попречног пресека оптерећену на торзију са два спрега на крајевима, која је приказана на слици 2.4.1, тада је напонско и деформационо стање знатно сложеније него код призматичне греде.



Слика 2.4.1 Непризматични облик греде [6]

Коресподентна померања у равни попречног пресека немају чисту ротацију истог, као што је случај код призматичне греде, већ се јавља и деформација у тој равни. У случају када је промена попречног пресека греде по њеној дужини постепена, тада се може рећи да је максимални напон у греди једнак:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t^{min}}$$

Односно представља исти прорачун као код призматичне греде, само што се за непризматични облик греде узима најмањи отпорни момент, који одговара најужем делу греде.

Код непризматичних греда са наглим променама попречног пресека, примери су дати на слици 2.4.2, јављају се велики локални напони у околним местима прелаза, што представља концентрацију напона на тим местима.

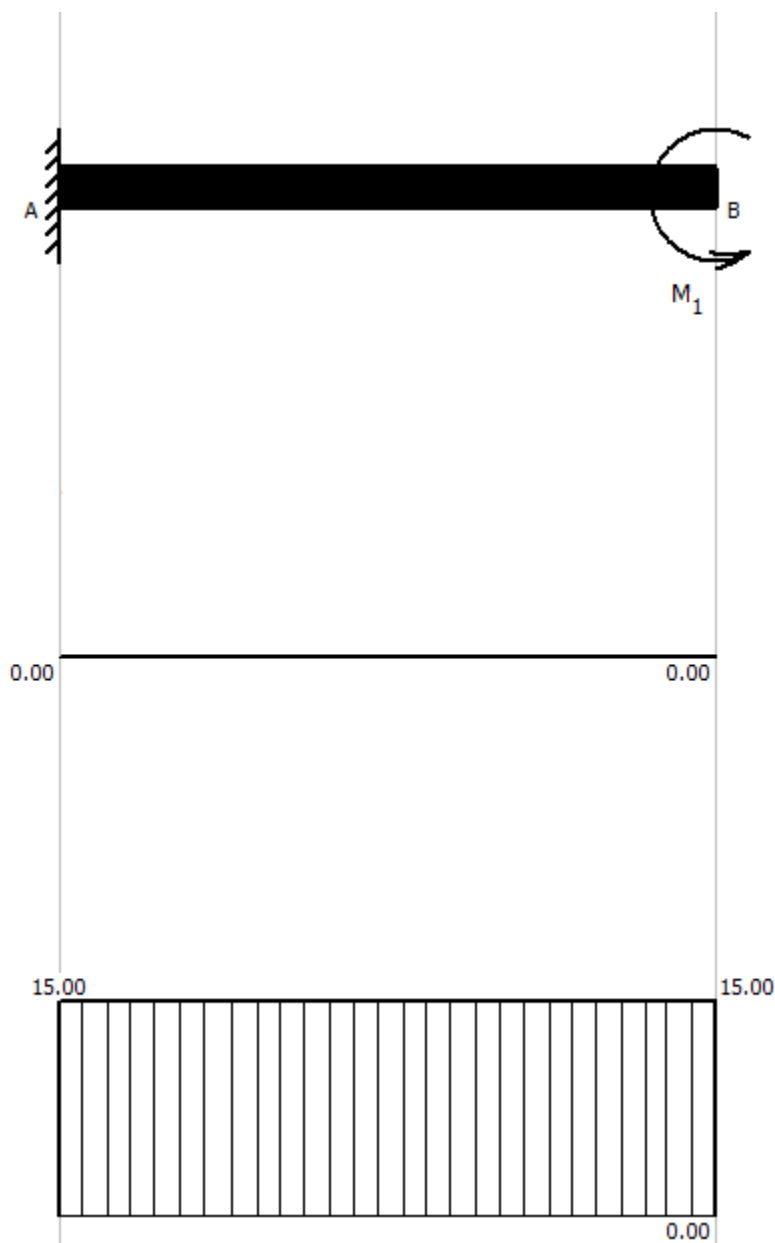


Слика 2.4.2 Торзија код греде са наглом променом попречног пресека [6]

Теоријско одређивање највећег напона на местима нагле промене попречног пресека је изузетно сложен проблем, па се за њихово решавање користе експерименталне и нумеричке методе. У досадашњем разматрању торзија је била изазвана са два спрега који делују на крајевима греде, док је бочна површина слободна. Међутим, могуће је изазвати торзију расподелом момената по бочној површини, што представља нови проблем. [6,3,4]

Пример задатка торзије греде:

Вретенасто вратило кружног попречног пресека, пречника $d=175\text{ mm}$, је на слободном крају оптерећено спрегом $M = 10\text{ kN}$ као на слици. Одредити угао увијања и смицајни напон попречног пресека ако је модул клизања $G=0.8 \cdot 10^5\text{ MPa}$ и дужина вратила $l=3\text{ m}$. дозвољена вредност напона је $\tau_d = 20\text{ MPa}$. [5]



$$\theta_{AB} = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I} = \frac{15 \cdot 3000}{0.8 \cdot 10^5 \cdot 92.08 \cdot 10^6} = 6.109 \cdot 10^3 \cdot \frac{180}{\pi} = 0.35^\circ$$

$$I = \frac{d^4 \cdot \pi}{32} = 92.08 \cdot 10^6$$

$$W = \frac{d^3 \cdot \pi}{16} = 1052310.82\text{ mm}^3 \rightarrow W = 1052.31\text{ mm}^2$$

$$\tau = \frac{M_t}{W} = \frac{15 \cdot 10^3}{1052.31} = 14.254\text{ MPa}$$

Поступак израде оваквог задатка у програмском пакету је још једноставнији. У могућности сте да директно по уносу података бирате које су вам величине познате, а остале величине које не унесете ће вам бити израчунате. На наредној слици је приказано радно окружење овог програма за прорачун торзије вратила.

State of stress at a typical point in the shaft

Torque Orientation
Clockwise ☒
Counterclockwise ☐

Shaft twist angle exaggerated for clarity

Further explanations

Torsion Module - Simple Torsion

Using the torsion stress formula ($\tau = Tc/J$), compute the shaft shear stress from the torque, the polar moment of inertia, and the shaft radius.

Shear Stress $\tau = (15.000 \text{ kN-m} \times 87.5 \text{ mm}) \div 92.08\text{E}+06 \text{ mm}^4 = 14.254 \text{ MPa}$
Note: Make the units consistent before performing the hand calculation.

Use the torsion twist angle formula ($\phi = TL/GJ$) to solve for the shaft twist angle.

Twist angle $\phi = (15.000 \text{ kN-m} \times 3,000.0 \text{ mm}) \div (92.08\text{E}+06 \text{ mm}^4 \times 80,000.00 \text{ MPa}) = 0.3500 \text{ degrees}$
Note: Make the units consistent before performing the hand calculation.

Shearing Stress

15.000 Torque ☒
14.254 Shear Stress ☐
175.0 Outside Diameter ☒
0.000 Ratio ID / OD ☒
0.0 Inside Diameter ☐
Select 2 or 3 input variables

Angle of Twist

3,000.0 Shaft Length ☒
0.3500 Twist Angle ☐
80,000.00 Shear Modulus ☒
92.08E+06 J (mm⁴) ☐
Select 2 or 3 input variables from this group

Optional Effects

25.0 Axial Force ☐
☐ Tension ☒ Compression
0.000 Pressure ☐
☒ Internal ☐ External

Power Units: W
Speed Units: rpm
Torque Units: kN-m
Stress Units: MPa
Diameter Units: mm
Length Units: mm
Angle Units: degrees
Modulus Units: MPa
Force Units: N
Pressure Units: MPa

Compute Mohr's Circle

Слика 2.4.3 Пример задатка – торзија [8]

Пошто се у поставци задатка види 5 понатих величина, те величине се уносе у одговарајућа поља и добијају се остале вредности које недостају. Потребно је само напоменути да ако се ради о вратилу које није шупље, у пољу које захтева вредност односа спољашњег и унутрашњег пречника уписује се вредност 0. У прозору испод слике програм омогућава да се пропрати прорачун поступно уз помоћ ког је дошао до крајњег решења и таксативно представља вредности које се уписују и које су прорачунате. Пољу под називом *Optional Effects* има функцију додавања аксијалног оптерећења вратила на истезање или сабијање, што омогућава добијање вредности мало сложенијег случаја.

ЗАКЉУЧАК

У данашње време смо сведоци веома брзог развоја науке и технике, па је самим тим потребно да се и образовање развија у корак са тим. Уз помоћ примене сад већ многобројних апликација или софтвера, независно да ли су намењене за рачунаре или телефоне, може се на веома лак начин доћи до потребног решења, уз свега неколико потеза. У виду треба имати да се сам поступак решавања не види, па је у сваком случају потребно елементарно познавање материје како би било једноставније разумевање и употреба добијених решења. Из тог разлога се каже да је софтвер едукативан, јер уз помоћ њега се могу научити основе. Тек када се савлада основа може се користити као помоћно средство, да уштеди време приликом прорачуна и да би у неком тренутку при раду могли да преконтролишете своје резултате.

Увођењем софтвера *MDSolids* у наставу на машинским, грађевинским, технолошким и сличним факултетима много је олакшало посао како студентима и асистентима тако и професорим. Приликом израде задатака од стране студената у виду домаћег или колоквијалног задатка, асистентима и професорима је знатно олакшана провера резултата путем софтвера.

Неке од предности овог софтвера се огледају у брзини израде задатка, односно времену које је потребно за прорачун, пошто је рачунар преузео рачунски део, скраћено је време за израду прорачуна. Исто тако је могуће приликом израде неког прорачуна мењати неке задате вредности и истог тренутка добити резултате. Те промене можемо вршити све док не задовољимо неке тражене услове, док при прорачуну који је извршен аналитичким путем мора се рачунати све испочетка. При употреби софтвера долазак до бржег решења подпомаже то што у себи садрже базе стандардних профила и неких честих оптерећења. Једна од главних предности овог софтвера је у томе што се на факултетима користи потпуно бесплатно, а постоји и могућност да студенти добију лиценцу за бесплатно коришћење преко факултета.

Што се тиче мана, односно недостатака овог софтвер, оне и нису нешто значајне. Приликом прорачуна, у неким задацима је потребно унети вредности попречног пресека, тако да ако у поставци задатка нису дате те вредности, требало би их независно од дела задатка прорачунати па искористити у софтверу, или пак их прорачунавати ручно. Димензионисање уз помоћ овог софтвера мало је отежано. При изради задатка са Герберовим зглобом јавља се мали проблем, јер конкретно овај софтвер не садржи могућност убацивања Герберовог зглоба.

У овом раду су поред решења која су добијена уз помоћ овог софтвера, приказана и решења добијена аналитичким путем за исте проблеме. Упоредивани су добијени резултати. Приметно је да се јављају мање разлике приликом прорачуна.

Поред примене софтвера, у овом раду је представљена и примена апликација на мобилним уређајима које имају широк спектар употребе у машинству и грађевинарству. Почев од статичких прорачуна штапова, савијених греда, решеткастих контрукција и веза под углом, затим одређивања напона и деформација унутар њих, све до прорачуна разних компликованих конструкција.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Денић М., Прорачун и конструисање решеткастих носача применом савремених софтверских решења, мастер рад, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац, 2015.
- [2] Жига А., Бољи квалитет наставе из отпорности материјала са применом едукативног софтвера MdSolids 2.5, Машински факултет у Зеници, Зеница, 2003.
- [3] Рашковић Д., Отпорност материјала, Издавачка радна организација „Грађевинска књига“, Београд 1983.
- [4] Милованчевић М., Анђелић Н., Отпорност материјала, Машински факултет Универзитета у Београду, Београд 2006.
- [5] Солдат Д., Збирка решених задатака из отпорности материјала, Издавачка радна организација „Грађевинска књига“, Београд 2009.
- [6] Лубарда В., Отпорност материјала (увод у механику деформабилног тијела), НИО „Универзитетска ријеч“. Титоград 1989.
- [7] <http://www.autodesk.com/>
- [8] Софтверски пакет *MdSolids*