

**Факултет инжењерских наука
Универзитета у Крагујевцу**



**Назив студијског програма: Машинско инжењерство
Ниво студија: Основне академске студије
Модул: Машинске конструкције и механизација
Предмет: Отпорност материјала
Број индекса: 31/2015**

Кристина Т. Банић

**Решавање проблема штапова
оптерећених ексцентричном
аксијалном силом**

завршни рад

Комисија за преглед и одбрану:

1. **Др Иван Милетић, доцент -ментор**
2. _____
3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

Изјављујем да сам овај завршни рад урадила самостално, служећи се стеченим знањем и искуством као и наведеном литературом.

31/2015 Кристина Банић

У оквиру овог завршног рада кандидат треба дати уводна разматрања, детаљан преглед косог савијања и ексцентрични притисак, као и пар рачунских примера

Препоручена литература:

- [1] Ћировић, М., Отпорност материјала I, Машински факултет, Крагујевац, 2008.
- [2] Рашковић, Д., Отпорност материјала, Машински факултет, Београд, 1980.
- [3] Васић, З., Отпорност материјала, Факултет техничких наука, Косовска Митровица, 2006.

Крагујевац, 26.02.2018.

Ментор:

Др Иван Милетић, доцент

САДРЖАЈ

Abstract	4
Резиме Завршног рада	5
1. УВОД	6
1.1. Објекат изучавања Отпорности материјала	6
1.2. Спољашње силе	6
1.3. Врсте напрезања	7
1.4. Напони	9
1.5. Деформације	9
1.6. Задатак Отпорности материјала	10
2. АКСИЈАЛНО НАПРЕЗАЊЕ	11
2.1. Унутрашње силе и напони	11
3. КОСО САВИЈАЊЕ	13
4. ЕКСЦЕНТРИЧНИ ПРИТИСАК	15
4.1. Језгро пресека	17
5. САВИЈАЊЕ И ИЗВИЈАЊЕ УСЛЕД ЕКСЦЕНТРИЧНОГ ПРИТИСКА	19
6. ПРИМЕРИ	23
6.1. Стуб правоугаоног попречног пресека	23
6.2. Стуб сложеног попречног пресека	25
7. ЗАКЉУЧАК	28
8. ЛИТЕРАТУРА	29

Abstract

Solving of problems of bars loaded by eccentric axial force

The subject of study in Strength of materials are solids loaded statically. The bars are the most frequently considered, especially loaded by axial forces.

In this Final thesis are considered problems related to bars loaded by eccentric axial force. Due to the eccentricity, in the cross-section of a bar appear not only internal axial forces, but the bending moments, as well. The eccentric compressive loading is a complex loading consisting of axial compression and biaxial bending, which is actually the sum of the two bendings about the two main cross-section axes.

The final thesis contains seven sections: Introduction, Axial loading, Biaxial bending, Eccentric compression, Bending and buckling due to eccentric compression, Examples and Conclusions. The list of references is given at the end of this Final thesis.

In Introduction is explained the subject of study in the science of the strength of materials, with considering the external forces, types of loadings, stresses and deformations and the Strength of material's task.

In the section on Axial loading are considered the internal forces that appear in the cross-section of the statically loaded solids, as well as stresses that are consequences of the external loads.

In the section on Biaxial bending is considered this type of loading, which presents the constitutive part of the eccentric compression loading. The notion of the neutral axis and the diagram of the stress in the cross-section are presented.

The fourth section is devoted to the main subject of this Final thesis – the eccentric compressive loading. The notions of the cross-section's core, the neutral axis and the cross-section stresses are explained. The examples of some most characteristics shapes of cross-sections are presented with explanation how the cores of those sections are obtained, both analytically and graphically.

In the fifth section is considered the complex loading that appears due to the eccentric compression and which consists of bending and buckling. The buckling appears in slender bars loaded in compression, where the stability of such structural elements have to be checked as well. The cases of the slender beam and console are presented.

In the sixth section is given calculation of the two examples of cross-sections of bars oared in eccentric compression: the rectangular and the cross-section that consists of four simple geometrical figures. For these two examples the complete computations were performed, which contain determination of the cross-section's center of gravity - COG (for the second case only), moments of inertia for the initial and the COG axes, determination of the cross-sections' main axes and moments of inertia and coordinates of the cross-section cores.

The seventh section contains the conclusions about the problems considered in this Final thesis.

The list of references contains six items.

Key words: Bars, stress, deformation, axial loading, biaxial bending, eccentric compression, the cross-section core.

Резиме

Решавање проблема штапова оптерећених ексцентричном аксијалном силом

Предмет изучавања Отпорности материјала су чврста тела, изложена статичким напрезањима. Штапови су најчешће проучавани, а посебно оптерећени на аксијално напрезање.

У овом завршном раду су разматрани проблеми штапова оптерећених ексцентричном аксијалном силом. Услед ексцентричности, у попречном пресеку штапа се јављају не само унутрашње аксијалне силе, већ постоје и моменти савијања. Ексцентрични притисак је сложено напрезање које се састоји од аксијалног притисног напрезања и косог савијања, које је у ствари збир два савијања око обе главне осе.

Завршни рад садржи седам поглавља и то: Увод, Аксијално напрезање, Косо савијање, Ексцентрични притисак, Савијање и извијање услед ексцентричног притиска, Примере и Закључак. На крају је дат и списак коришћене литературе.

У Уводу је објашњен предмет изучавања науке о отпорности материјала, уз разматрање спољашњих сила, врста напрезања, напона и деформација и задатка Отпорности материјала. У поглављу о аксијалном напрезању обрађене су унутрашње силе које се јављају у попречном пресеку статички оптерећених тела, као и напони који су последица спољашњих оптерећења.

У поглављу о Косом савијању је разматрано ово напрезање, које чини саставни део напрезања на ексцентрични притисак. Објашњен је појам неутралне линије и дијаграм напона у попречном пресеку штапа.

Четврто поглавље је посвећено главном предмету овог завршног рада – напрезању на ексцентрични притисак. Објашњени су појмови језгра попречног пресека, неутралне осе, као и напони у попречном пресеку. Дати су примери изгледа попречног пресека неких карактеристичних профила попречних пресека и објашњено је како се долази до облика језгра тих пресека, прорачунски и графички.

У петом поглављу је разматрано сложено напрезање услед ексцентричног притиска које се састоји од савијања и извијања. Извијање се јавља код витких штапова оптерећених на притисак и мора да се провери стабилност таквих конструкцијских елемената. Размотрени су случајеви витке греде и витке конзоле.

У шестом поглављу је дат прорачун два примера попречних пресека штапова оптерећених на ексцентрични притисак: правоугаоног попречног пресека и сложеног попречног пресека, који се састоји од четири основне геометријске фигуре. За ове примере је спроведен комплетан прорачун који садржи одређивање тежишта попречног пресека (за други пример, код првог то је познато), затим момената инерције попречног пресека за почетне и тежишне осе, одређивање главних оса и момената инерције и координата темена самог језгра попречног пресека.

Седмо поглавље садржи закључак о проблемима разматраним у завршном раду.

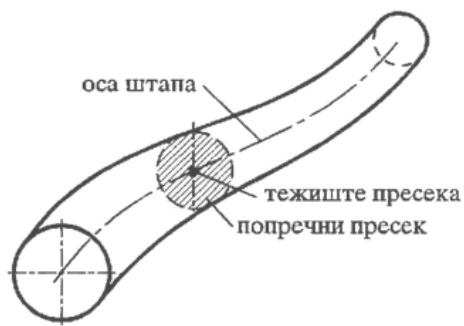
Списак коришћене литературе садржи шест референци.

Кључне речи: Штапови, напон, деформације, аксијално напрезање, косо савијање, ексцентрични притисак, језгро попречног пресека.

1. УВОД

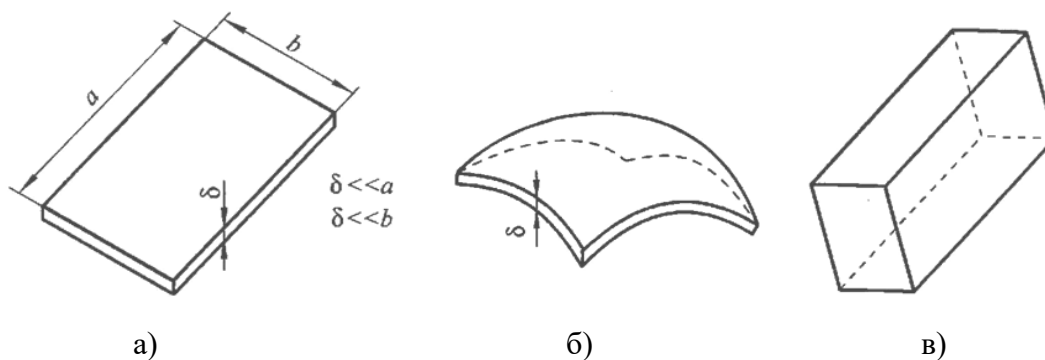
1.1. Објекат изучавања Отпорности материјала

Објекат изучавања Отпорности материјала представљају чврста тела. Чврста тела којима се у Отпорности материјала посвећује највише пажње су штапови. Штап представља чврсто тело чија је дужина знатно већа од димензија његовог попречног пресека, слика 1. Оса штапа представља линију која спаја тежишта свих попречних пресека.



Слика 1. Штап

Плоче, љуске и масиви такође спадају у чврста тела, али се мање изучавају, слика 2. Плоча представља равно тело код кога је једна димензија, дебљина, много мања од димензија у равни плоче (ширине и дужине). Љуска представља просторно тело код кога је дебљина зида δ много мања од осталих димензија. Може се рећи да је равна љуска у ствари плоча. Масив или масивно тело представља тело чије су све димензије величине истог реда.



Слика 2. Плоча а), љуска б) и масив в)

1.2. Спољашње силе

Поред активних сила или оптерећења, у спољашње силе се убрајају и реакције веза или реактивне силе, које одржавају систем у равнотежи.

Спољашње силе се могу поделити на две групе:

- 1) Запреминске силе и
- 2) Површинске силе.

Запреминске силе делују на сваки део запремине тела, а у њих спадају: сила земљине теже или гравитациона сила, инерцијалне силе, магнетне, центрифугалне силе и друге.

Површинске силе представљају деловање других чврстих тела, течности или гасова на површину посматраног тела. У зависности од величине и облика површине на коју делују постоје праве површинске силе, линијске силе и концентрисане силе.

По карактеру дејства, спољашње силе се могу поделити на статичке и динамичке. Статичке силе су такве силе код којих се величина постепено повећава од нуле до неке коначне вредности, која се затим не мења. Убрзања и инерцијалне силе, које се јављају при овим оптерећењима, могу се занемарити као веома мале величине. У Отпорности материјаласе разматра само дејство статичких сила. Супротно од статичких сила, динамичке силе знатно мењају величину у кратком временском интервалу. Када су у питању динамичке силе, инерцијалне силе покретних елемената конструкције се не могу занемарити. Динамичке силе чији се интензитет знатно промени у кратком временском интервалу, практично тренутно, се називају ударне силе.

1.3.Врсте напрезања

Одређивање унутрашњих сила у попречном пресеку напрегнутог штапа, које настају као последица дејства спољашњих напрезања, је веома важно. Силе и моменти услед тих сила су: аксијалне или уздужне силе, трансверзалне или попречне силе, моменти савијања (флексије) и моменти увијања (торзије). У попречном пресеку могу да делују комбинације ових величина, само једна од њих, или све величине. Могући су следећи случајеви:

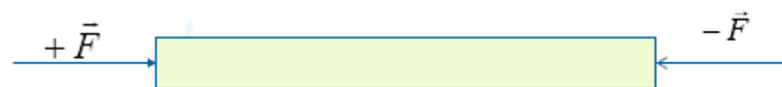
- 1) Аксијално напрезање—настаје када у попречном пресеку делује само аксијална сила. У зависности од смера деловања силе разликују се затезање и притисак, слика 3;
- 2) Чисто смицање—настаје када на тело делује само трансверзална сила, слика 4;
- 3) Торзија или увијање—настаје када делује само момент увијања, слика 5;
- 4) Чисто савијање—настаје када делује само момент савијања, а трансверзалних сила нема, слика 6;
- 5) Савијање силама—настаје када у попречном пресеку делују и момент савијања и трансверзална сила истовремено, слика 7.

У основна или проста напрезања спадају она напрезања код којих се у попречном пресеку јавља само једна унутрашња сила. Основна напрезања су: аксијално напрезање (затезање или притисак), чисто смицање, увијање и чисто савијање. Савијање силама се сврстава у проста напрезања само условно, пошто трансверзална сила, која се при таквом напрезању јавља у попречном пресеку штапа, има знатно мањи утицај од момента савијања.

Сложена напрезања су она напрезања код којих у попречном пресеку истовремено делују две унутрашње силе или више њих.

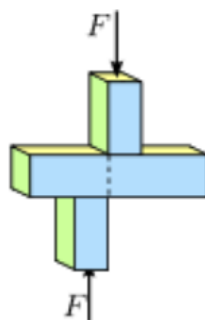


а)

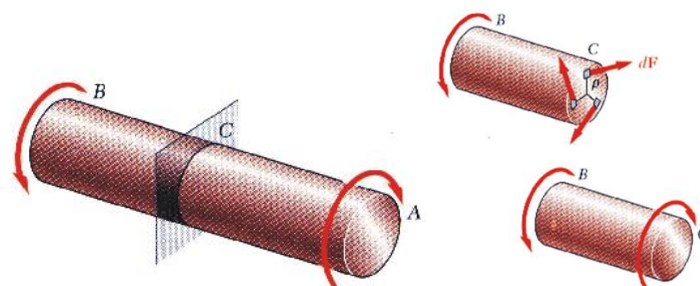


б)

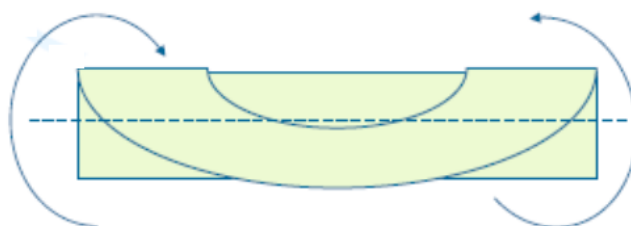
Слика 3. Аксијално напрезање: а) затезање, б) притисак



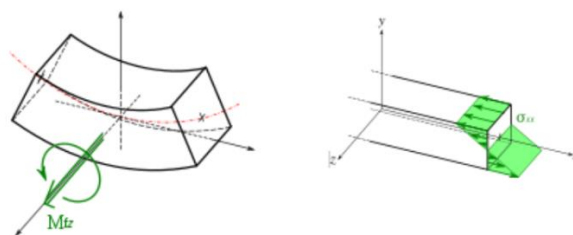
Слика 4. Смицање



Слика 5. Увијање



Слика 6. Савијање



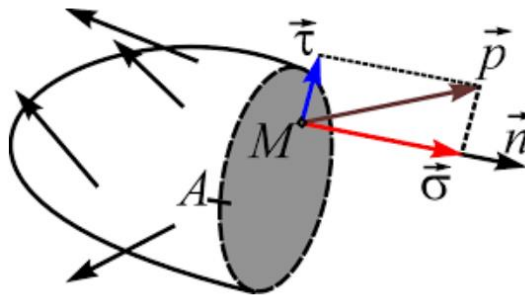
Слика 7. Савијање силама

1.4.Напони

Дефиниција: напон је гранична вредност односа елементарне унутрашње силе ΔF , која делује на елементарну површину ΔA пресека оптерећеног тела, и величине те површине, када се та површина смањује до бесконачно малих димензија.

Средњи напон представља однос унутрашње силе и површине на коју она делује другачије се назива интензитет силе.

Вектор укупног напона може да се растави на две компоненте, и то једну у правцу нормале на пресек која представља нормални напон σ и другу у правцу тангенте у равни пресека који представља тангентни или смицајући напон τ , слика 8.

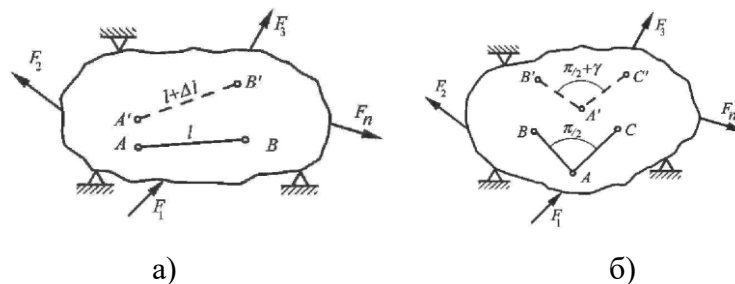


Слика 8. Силе и напони у пресеку

1.5.Деформације

Услед дејства спољашњих сила, чврсто тело мења облик и величину, настају померања тачака, мења се међусобни положај појединих дужи као и међусобна растојања, односно тело се деформише. Апсолутна линијска деформација представља промену растојања тачака на телу и може бити издужење или скраћење у зависности да ли се тачке међусобно приближавају или удаљавају, слика 9 а). Однос апсолутне линијске деформације и првобитног растојања назива се релативна линијска деформација или дилатација.

Услед оптерећивања тела прав угао између две међусобно управне бесконачно мале дужи се мења и та промена представља угаону деформацију или угао клизања, слика 9 б).



Слика 9. Апсолутна линијска а) и угаона деформација б)

Деформацијско стање представља скуп линијских и угаоних деформација у разним равнима и правцима у одређеној тачки.

1.6.Задатак Отпорности материјала

Провере чврстоће, крутости и стабилности су веома битне при пројектовању конструкција.Отпорност материјала проучава проблеме чврстоће, крутости и стабилности чврстих тела под дејством оптерећења.

Прорачун чврстоће представља одређивање димензија елемената које искључују могућност лома услед оптерећења, уз изабрани материјал. Лом не представља само рушење и кидање материјала, већ и прекорачење одређене величине напона.

Дозвољени напони представљају највеће напоне којеоптерећено тело може да поднесе, а да се не прекораче дозвољене деформације, односно промене димензија, или не угрози стабилност конструкције.

Прорачун крутости или деформабилности представља одређивање димензија приликом којих се елемент конструкције, при датом оптерећењу, деформише у дозвољеним границама и као и проверавање деформација тог елемента под оптерећењем. Крутост представља способност тела да се опире деформисању.

Прорачун стабилности обезбеђује да елемент конструкције у експлоатацији задржи првобитан облик, то јест да не изгуби стабилну равнотежу под дејством оптерећења.

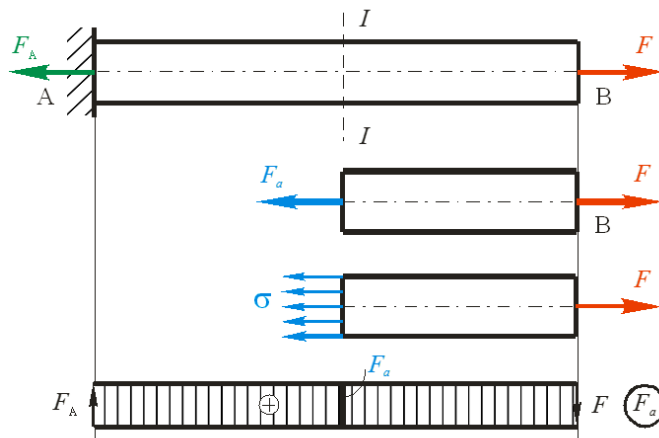
2. АКСИЈАЛНО НАПРЕЗАЊЕ

2.1. Унутрашње силе и напони

Напрезање приликом кога се у попречном пресеку правог штапа јављају само аксијалне унутрашње силе, а све друге унутрашње силе (трансверзалне силе, моменти увијања и моменти савијања) су једнаке нули назива се аксијално напрезање.

Аксијално напрезање се јавља у случају када су спољашње силе колинеарне са осом штапа, али и у случају када силе секу осу штапа под неким углом, а при томе се њихове резултанте поклапају са том осом. Површина попречног пресека штапа може бити константна или променљива по дужини штапа, а попречни пресек може бити произвољног облика.

Општу прорачунску шему за аксијално напрезање чини прав штап који је на једном крају причвршћен, а на другом крају оптерећен спољашњом аксијалном силом F , слика 10. Реакција ослона уравнотежава спољашњу силу па је $F_a = F$. У овом случају се тежина штапа занемарује.



Слика 10. Унутрашње силе и напони аксијално напрегнутог штапа

На основу методе пресека одређује се унутрашња аксијална сила F_a у произвољном попречном пресеку штапа. Ако се штап пресече на произвољном месту, неком равни I-I управном на његову осу, и ту се уцрта сила F_a , из услова равнотеже сила за подужну осу штапа (z):

$$\Sigma F_z = F - F_a = 0, \quad (1)$$

се одређује та сила за одсечени део штапа:

$$F_a = F \quad (2)$$

У овом случају реч је о затезању, па због тога сила делује од пресека, константна је по дужини штапа и позитивна је а њен дијаграм је приказан на слици 10. Када је у питању притисак, сила делује ка пресеку и негативна је.

Метода пресека може да се примени и при одређивању унутрашњих сила приликом сложенијих случајева.

Услови равнотеже се из практичних разлога постављају за онај део штапа на ком делује мањи број спољашњих сила, јер приликом одређивања унутрашњих сила нема значаја за који се део штапа са једне стране пресека постављају услови равнотеже. Позитиван знаку резултату приликом одређивања унутрашњих сила указује да је претпостављени смер тачан, а негативан знак да је претпостављени смер нетачан и да га треба променити.

На основу Бернулијеве хипотезе следи да је нормалан напон у свакој тачки попречног пресека константан па из обрасца:

$$F_a = \sigma \int dA = \sigma \cdot A, \quad (3)$$

па на основу тога следи да је напон:

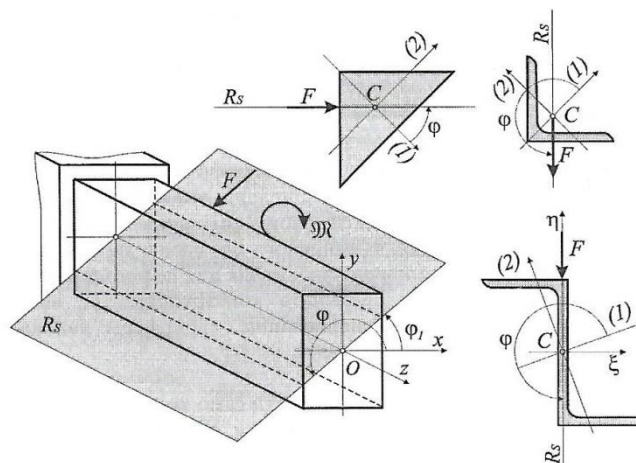
$$\sigma = \frac{F_a}{A}, \quad (4)$$

при чему је σ - нормални напон, а A - површина попречног пресека.

Напонско стање се назива хомогеним ако су у једном делу штапа или његовој целини унутрашња сила и попречни пресек константни, а уз то је и напон константан. Нехомогено напонско стање представља такво напонско стање приликом ког нормалан напон зависи од координате дуж осе штапа (z), односно напон је различит у различитим пресецима, али је у једном одређеном пресеку константан. Та z координата дефинише положај попречног пресека од ког зависе унутрашња сила и површина попречног пресека $F_a = F_a(z)$.

3. КОСО САВИЈАЊЕ

Када је у питању косо савијање, раван савијања је постављена косо према главним равнима савијене греде, слика 11. Уколико су главне тежишне равни косо, раван савијања може бити хоризонтална или вертикална. Конзола са слике је изложена косом савијању, јер раван савијања гради угао φ_1 према главној оси Oyz . Такође, гредачији је попречни пресек облика правоуглог троугла или стандардног L или Z профила, је оптерећена на косо савијање ако оптерећење делује у хоризонталној или вертикалној равни, пошто су главне тежишне равни ових пресека косо.



Слика 11. Косо савијање

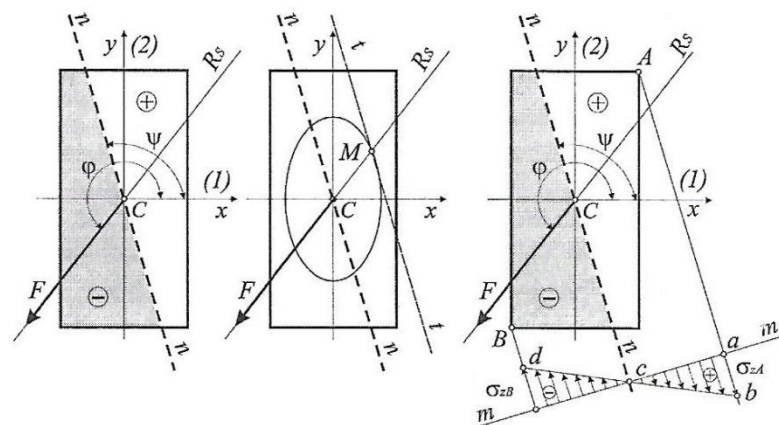
Код чистог косог савијања на греду делује спрег, при чему је нападни момент у сваком попречном пресеку греде једнак моменту спрега. Када је у питању косо савијање силама, јављају се и редукциона сила и редукциони спрег.

Нормални напон се одређује тако што се нападни момент M_z у било ком пресеку греде z разложи на компоненте које савијају око тих оса, па се сабирају нормални напони услед савијања око једне и друге осе обрасцем који важи за право савијање. Вредност нормалног напона добија се са одговарајућим знаком, који је по договору у Статици: момент је позитиван са леве стране пресека уколико окреће у смеру кретања казаљке на сату, а са десне стране пресека у супротном смеру.

Геометријско место тачака у којима је нормални напон за попречни пресек једнак нули представља неутралну осу, слика 12. Ако се образац за нормални напон изједначи са нулом добија се једначина неутралне осе:

$$y = -\left(\frac{I_x}{I_y} \cdot \operatorname{ctg} \varphi\right) \cdot x = x \cdot \operatorname{tg} \psi \quad (5)$$

где су I_x и I_y моменти инерције попречног пресека за главне осе и ψ је угао који неутрална оса гради са централном осом.



Слика 12. Неутрална оса код косог савијања

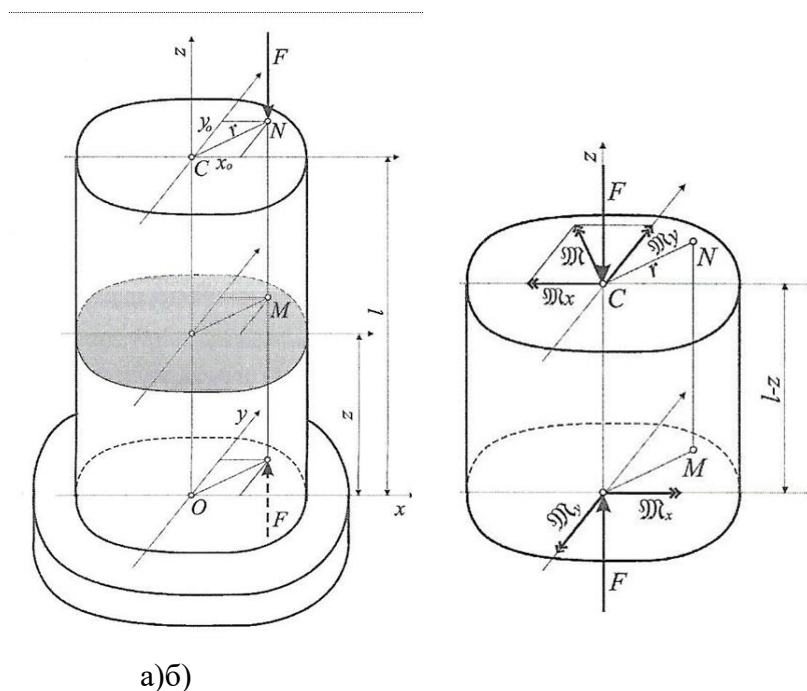
Неутрална оса је права линија која пролази кроз тежиште попречног пресека греде и гради угао ψ са главном централном осом. Код косог савијања, неутрална оса није управна на раван савијања. Помоћу централне елипсе инерције попречног пресека може се одредити положај неутралне осе.

4. ЕКСЦЕНТРИЧНИ ПРИТИСАК

Ексцентротични притисак је такво напрезање код кога притисна сила не делује у тежишту попречног пресека. Ексцентрична аксијална сила притиска напада стуб у тачки $N(x_0, y_0)$, слика 13 а). Редукцијом силе на тежиште попречног пресека добија се сила F и спрег $F \cdot r$. Спрег се може разложити на две компоненте $F \cdot y_0$ и $F \cdot x_0$ у правцима главних централних оса инерције попречног пресека Cx и Cy , слика 13 б).

Значи, ексцентрични притисак је сложено напрезање којесе састоји од аксијалног напрезања услед центричне силе F и чистог косог савијања услед спрега.

Нормални напон се одређује у произвољној тачки $M(x, y)$ првог квадранта попречног пресека штапа удаљеног на било ком растојању z од укљештења. У пресеку ће се јавити унутрашње силе које се супротстављају дејству датог оптерећења. Центричној сили F и спреговима M_x и M_y се супротстављају унутрашње силе које могу да се редукују на силу и спрегове истих вредности, али супротних смерова, а централној сили притиска се супротстављају унутрашње силе распоређене по целом пресеку.



Слика 13. Ексцентрични притисака) и редукција силе на тежиште б)

Нормални напон у тачки M је:

$$\sigma' = -\frac{F}{A} . \quad (6)$$

Спрегови M_x и M_y изазивају чисто право савијање око оса Cx и Cy , па се нормални напони у тачки M израчунавају према изразима:

$$\sigma'' = -\frac{M_x}{I_x} \cdot y \text{ и } \sigma''' = -\frac{M_y}{I_y} \cdot x. \quad (7)$$

Напони у свим тачкама првог квадранта су негативни, а укупни напон у посматраној тачки је:

$$\sigma_z = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' = -\frac{F}{A} - \frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x. \quad (8)$$

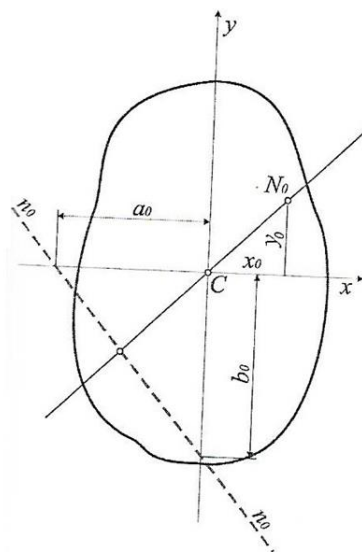
Напон не зависи од координате z , већ је исти за све попречне пресеке штапа у тачкама са истим координатама.

Неутрала оса пресека је геометријско место тачака попречног пресека штапа у којима је нормални напон σ једнак нули. Једначина неутралне осе:

$$1 + \frac{x_0}{i_y^2} \cdot x + \frac{y_0}{i_x^2} \cdot y = 0. \quad (9)$$

Неутрална оса је права линија која не пролази кроз координатни почетак, већ на координатним осама гради отсечке:

$$a_0 = -\frac{i_y^2}{x_0} \quad b_0 = -\frac{i_x^2}{y_0}. \quad (10)$$



Слика 14. Неутрална оса

Из једначина се види да неутрална оса сече супротни квадрант од квадранта у коме делује сила F , јер су отсечки a_0 , b_0 и координате нападне тачке x_0 и y_0 супротног знака, слика 14. Вредност отсечака зависи од облика попречног пресека и положаја нападне тачке.

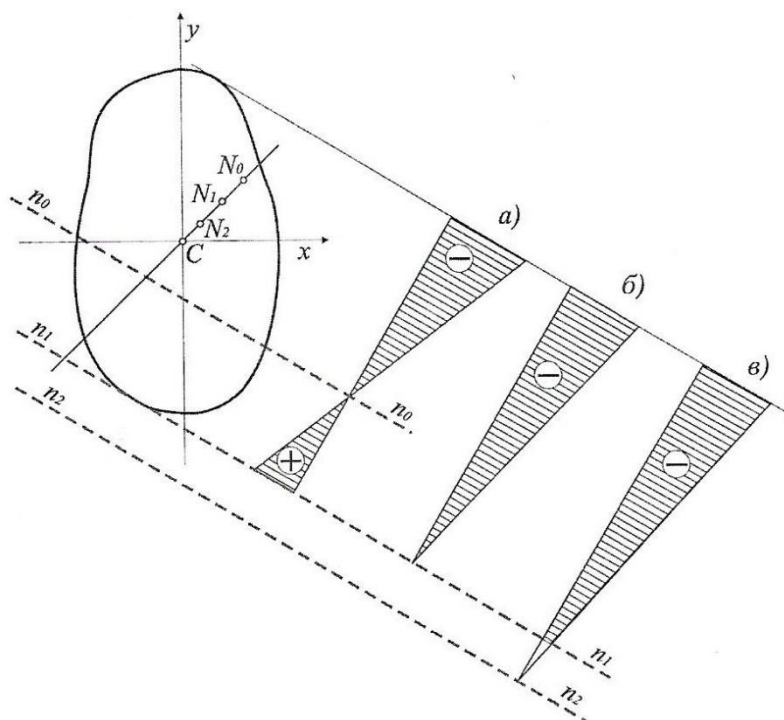
Ако се нападна тачка силе помери до бесконачности, отсечци неутралне осе биће једнаки нули, па неутрална оса пролази кроз координатни почетак, а то се дешава приликом чистог косог савијања.

Положај неутралне осе се може одредити и графички, помоћу централне елипсе инерције попречног пресека.

4.1. Језгро пресека

Неутрална оса је дефинисана скупом тачака у којима је нормалан напон једнак нули, а њен положај зависи од облика попречног пресека и места нападне тачке силе. Приликом удаљавања нападне тачке силе од тежишта пресека неутрална оса се приближава средишту пресека и обрнуто, док се нападна тачка силе приближава тежишту неутрална оса се удаљава од средишта пресека.

За одређени положај нападне тачке силе N_0 неутрална оса n_0-n_0 дели пресек на област затезања и област притиска, слика 15 – дијаграм а), а положају нападне тачке N_1 одговара неутрална оса n_1-n_1 која додирује контуру попречног пресека, слика 15 – дијаграм б). Напон је у додирној тачки једнак нули, а у осталим тачкама пресека је истог знака. Овакво напонско стање је погодно за материјале који добро подносе притисак без отпорности на затезање. У таквим случајевима сила треба да делује у



Слика 15. Померање неутралне осе

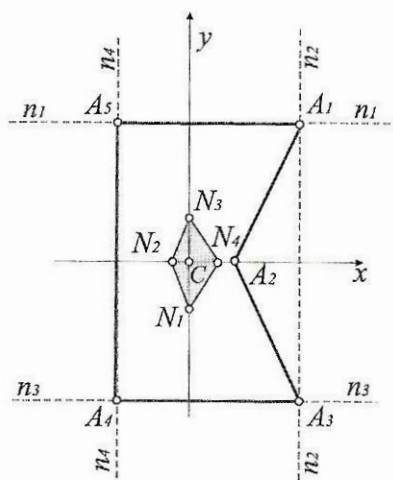
тачкама попречног пресека тако да неутрална оса увек буде изван пресека или да га додирује, слика 15 – дијаграм в), а то се обезбеђује постављањем неутралних осе по контури попречног пресека. Свакој неутралној оси одговара по једна нападна тачка силе на попречном пресеку, а геометријско место тих тачака омеђује део површине пресека који се назива *језгро пресека*. Неутрална оса која додирује контуре попречног пресека одговара нападној тачки силе на контури језгра пресека, а оса ван

пресека одговара нападној тачки унутар језгра. И у једном и у другом случају напони су истог знака по целом попречном пресеку.

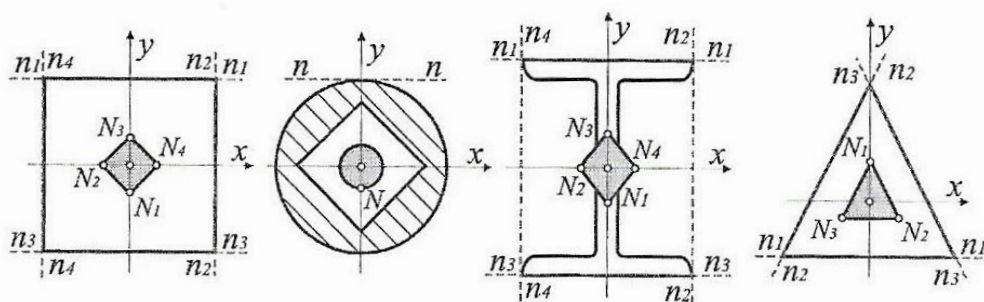
Једначина контуре језгра пресека се може одредити аналитичким путем, ако је контура попречног пресека континуална крива линија и ако сазна њена једначина.

На пример, за стуб чији је пресек са издубљењем, нема потребе повлачити тангенте у теменима и страницама контуре које би секле површину пресека. За конструкцију језгра пресека са слике 16 судовољне су тангенте n_1-n_1 , n_2-n_2 , n_3-n_3 и n_4-n_4 .

Неки од карактеристичних облика језгра су приказани на слици 17, за квадрат, кружну цев и I профил, где су централне осе истовремено и осе симетрије попречног пресека и језгра пресека, док је вертикална оса код троугла оса симетрије иза пресека иза језгра. На облик језгра пресека не утиче облик унутрашње контуре пресека.



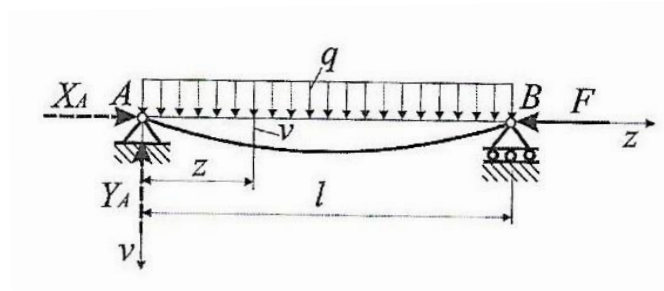
Слика 16. Језгро пресека са издубљењем



Слика 17. Језгра пресека неких карактеристичних профила

5. САВИЈАЊЕ И ИЗВИЈАЊЕ УСЛЕД ЕКСЦЕНТРИЧНОГ ПРИТИСКА

Приликом изучавања савијања витке греде изложене дејству континуалног оптерећења и аксијалне силе, слика 18, мора се узети у обзир и њено извијање. Ако оптерећење делује у равни Az_v , која се поклапа са једном од главних централних оса попречног пресека, тада је угиб греде у истој равни, а нападни момент у било ком пресеку z .



Слика 18. Савијање и извијање

У овом случају диференцијална једначина еластичне линије је

$$EI_x v'' = -\frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2} - Fv. \quad (11)$$

Ако се уведе смена

$$k^2 = \frac{F}{EI_x} \quad (12)$$

Добијасе диференцијална једначина облика

$$v'' + k^2 v = -k^2 \frac{ql^2}{2F} \left[\frac{z}{l} - \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Решење нехомогене диференцијалне једначине (13) добијасекао:

$$v = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + \frac{ql^2}{2F} \left[\left(\frac{z}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right) - \frac{2}{(kl)^2} \right], \quad (14)$$

при чему су C_1 и C_2 непознате интеграционе константе. Из услова ослањања $v(0) = 0$, $v(l) = 0$ одређујусе константе:

$$C_1 = \frac{q}{Fk^2}, \quad C_2 = \frac{q}{Fk^2} \cdot \frac{1 - \cos kl}{2F}, \quad (15)$$

па је крајња једначина еластичне линије

$$v = \frac{q}{Fk^2} \left[\cos kz + \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kz + \frac{k^2 z}{2} (z - 1) - 1 \right], \quad (16)$$

а њен први извод, тј. једначина нагиба греде

$$v' = \frac{q}{Fk^2} \left[-\sin kz + \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \cos kz - \frac{k}{2} (1 - 2z) \right]. \quad (17)$$

Уз помоћ једначина еластичне линије и једначине нагиба греде могу да се одреде угиб или нагиб у било ком пресеку греде. Највећи угиб је на средини распона и износи

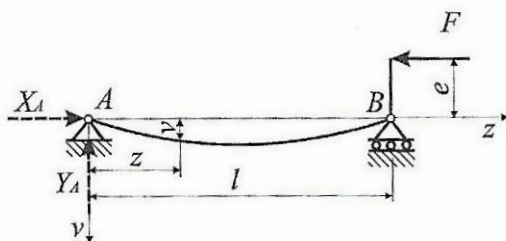
$$f_{\max} = \frac{5ql^4}{384\mathcal{B}} \cdot \frac{24 \left(\sec m - 1 - \frac{m^2}{2} \right)}{5m^4}, \quad m = \frac{kl}{2}. \quad (18)$$

Нагиб пресека над ослонцима износи:

$$\alpha = -\beta = \frac{ql^3}{24\mathcal{B}} \cdot \frac{3(\operatorname{tg} m - m)}{m^3}. \quad (19)$$

У зависности од вредности аксијалне силе F , тј. од коефицијента m , зависи деформација греде. У случају када су мале вредности m , утицај аксијалне силе је незнатан, а вредности угиба и нагиба одређене претходним обрасцима се мало разликују од вредности истих величина за греду континуално оптерећену по целом распону. У случају када m није мала величина, као у случају витких греда, тада се угиб и нагиб греде одређују претходним обрасцима. У том случају померање пресека није пропорционално оптерећењу, па не може да се примени метода суперпозиције при одређивању деформације греде. Код витких греда сила F , поред притиска, заједно са континуалним теретом изазива и накнадно савијање. Укупна деформација не може да се добије једноставним сабирањем деформације од силе притиска F и деформације услед савијања континуалним теретом.

На исти начин се угиб и нагиб греде одређују и када је греду оптерећена аксијалним ексцентричним притиском, слика 19.



Слика 19. Ексцентрични притисак витке греде

У случају када је ексцентрицитет у правцу једне од главних централних оса попречног пресека, диференцијална једначина еластичне линије је:

$$\mathcal{B}v'' = -\left(\frac{Fe}{l}\right) \cdot z - Fv, \quad v'' + k^2 v = -k^2 \left(\frac{e}{l}\right) \cdot z, \quad (20)$$

а њено решење је:

$$v = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz - \left(\frac{e}{l}\right) \cdot z. \quad (21)$$

Из услова ослањања $v(0) = 0$ и $v(l) = 0$ одређују се интеграционе константе:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \left(\frac{e}{\sin kl}\right). \quad (22)$$

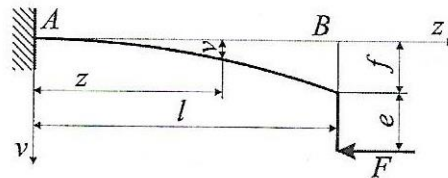
Крајња једначина еластичне линије је:

$$v = \left(\frac{e}{\sin kl}\right) \sin kl - \left(\frac{e}{l}\right) \cdot z. \quad (23)$$

Из једначине еластичне линије и њеног првог извода може да се одреди угиб на средини распона и нагиб пресека над ослоњцима греде:

$$\begin{aligned} f_{(z=l/2)} &= \frac{(Fe)l^2}{16\mathcal{B}} \cdot \frac{2\left(\sec m - 1 - \frac{m^2}{2}\right)}{m^2}, \\ \alpha &= \frac{(Fe)l}{6\mathcal{B}} \cdot \frac{3}{m} \cdot \left(\frac{1}{\sin 2m} - \frac{1}{2m}\right), \\ \beta &= \frac{(Fe)l}{3\mathcal{B}} \cdot \frac{3}{2m} \cdot \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2m}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Када је у питању конзола оптерећена ексцентричном аксијалном силом F , слика 20, диференцијална једначина еластичне линије и њено решење су:



Слика 20. Ексцентрични притисак витке конзоле

$$\begin{aligned} \mathcal{B}v'' &= F(f + e - v) \\ v'' + k^2 v &= k^2 (f + e) \\ v &= C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + f + e. \end{aligned} \quad (25)$$

Из услова ослањања $v(0) = 0$ и $v'(0) = 0$ на месту укљештења могу да се одреде интеграционе константе:

$$C_2 = 0, \quad C_1 = -(f + e), \quad (26)$$

па је крајња једначина еластичне линије

$$v = (f + e)(1 - \cos kz). \quad (27)$$

На основу претходне једначине, за $z = l$, може се одредити непознати угиб f на крају конзоле:

$$f = \frac{e(1 - \cos kl)}{\cos kl}. \quad (28)$$

Ако се овај израз убаци у једначину еластичне линије, добијасе:

$$v = \frac{e(1 - \cos kz)}{\cos kl} \quad (29)$$

Уз помоћ једначине (29) може да се одреди угиб, а првим изводом и нагиб било ког пресека конзоле:

$$v' = \frac{ek \sin kz}{\cos kl}. \quad (30)$$

Када су у питању кратке конзоле, где не постоји могућност извијања услед дејства аксијалне ексцентричне силе F , број kl је мали у поређењу са јединицом, у том случају важи релација:

$$\cos kl = 1 - \frac{(kl)^2}{2}. \quad (31)$$

Уз помоћ релације (31), када се занемари члан $(kl)^2/2$ у односу на јединицу, угиб је:

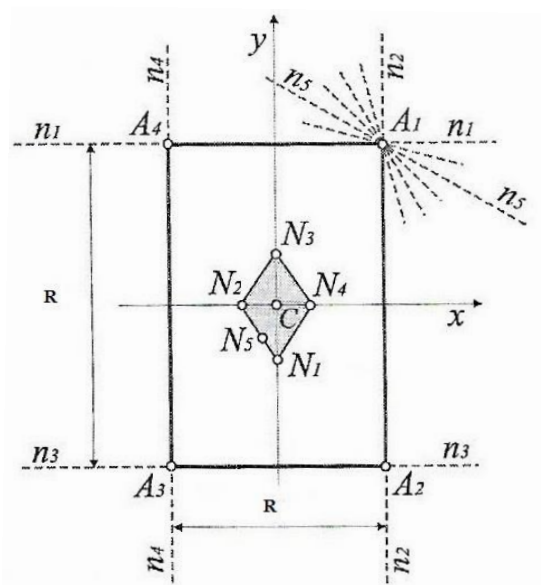
$$f = \frac{(Fe)l^2}{2\mathcal{B}}. \quad (32)$$

Овај образац одговара угибу пресека на крају конзоле под дејством спрега чији је момент Fe .

6. ПРИМЕРИ

6.1. Стуб правоугаоног попречног пресека

Посматра се стуб правоугаоног попречног пресека димензија $R \times R$.



Слика 21. Језгро пресека стуба квадратног попречног пресека

Главни централни полупречници инерције су:

$$i_x^2 = \frac{\frac{2R(R)^3}{12}}{R \cdot R} = \frac{\frac{2 \cdot 8R^4}{12}}{R^2} = \frac{8R^4}{6R^2} = \frac{4R^2}{3}$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{2R \cdot (2R)^3}{12}}{R \cdot R} = \frac{4}{3}R^2$$

Одсечци на неутралним осама $n_1 - n_1$, $n_2 - n_2$, $n_3 - n_3$ и $n_4 - n_4$ су:

$$a_1 = \infty, b_1 = \frac{2R}{2} = R$$

$$a_2 = \frac{2R}{2} = R, b_2 = \infty$$

$$a_3 = \infty, b_3 = \frac{2R}{2} = R$$

$$a_4 = \frac{2R}{2} = R, b_4 = \infty$$

Неутралној оси $n_1 - n_1$ одговара нападна тачка N_1 :

$$x_1 = -\frac{i_y^2}{a_1} = 0, \quad y_1 = -\frac{i_x^2}{b_1} = -\frac{\frac{4}{3}R^2}{R} = -\frac{4}{3}R$$

Неутралној оси $n_2 - n_2$ одговара нападна тачка N_2 :

$$x_2 = -\frac{i_y^2}{a_2} = -\frac{\frac{4}{3}R^2}{R} = -\frac{4}{3}R, \quad y_2 = -\frac{i_x^2}{b_2} = 0$$

Неутралној оси $p_3 - p_3$ одговара нападна тачка N_3 :

$$x_3 = \frac{i_y^2}{a_3} = 0, \quad y_3 = \frac{i_x^2}{b_3} = \frac{\frac{4}{3}R^2}{R} = \frac{4}{3}R$$

Неутралној оси $p_4 - p_4$ одговара нападна тачка N_4 :

$$x_4 = \frac{i_y^2}{a_4} = \frac{\frac{4}{3}R^2}{R} = \frac{4}{3}R, \quad y_4 = \frac{i_x^2}{b_4} = 0$$

Једначина неутралне осе $p_5 - p_5$ кроз теме A_1 :

$$y - \frac{2R}{2} = m \cdot \left[x - \frac{2R}{2} \right] \text{односно:}$$

$$\frac{x}{\frac{m \cdot 2R - 2R}{2m}} + \frac{y}{\frac{2R - m \cdot 2R}{2}} = 1$$

Одсечци које оса гради на координатним осама су:

$$a_5 = \frac{m \cdot 2R - 2R}{2m}, \quad b_5 = \frac{2R - m \cdot 2R}{2}$$

Па на основу тогасе добијају координате нападне тачке:

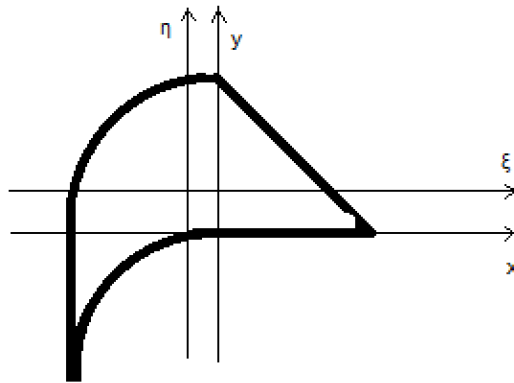
$$x_5 = -\frac{i_y^2}{a_5} = -\frac{\frac{4}{3}R^2}{\frac{2R(m-1)}{2m}} = -\frac{4mR}{3(m-1)}, \quad y_5 = -\frac{i_x^2}{b_5} = -\frac{\frac{4}{3}R^2}{\frac{2R(1-m)}{2}} = -\frac{4R}{3(1-m)}$$

Неутралним осама од $p_1 - p_1$ до $p_2 - p_2$ кроз теме A_1 одговарају нападне тачке сила на правој линији $N_1 - N_2$. Аналогно, неутралним осама кроз темена A_2, A_3 и A_4 одговарају линије $N_2 - N_3, N_3 - N_4, N_4 - N_1$, па зато језгро има облик ромба.

Конвексној полигоналној контури попречног пресека одговара полигонална контура језгра пресека. Симетрични попречни пресек има симетрично језгро са заједничком осом симетрије, а пресек са средиштем симетрије има језгро са заједничким средиштем симетрије.

6.2. Стуб сложеног попречног пресека

Посматра се стуб сложеног попречног пресека приказан на слици 22.



Слика 22. Стуб сложеног попречног пресека

Површине и координате саставних делова сложеног попречног пресека су:

- 1) Троугао: $P_1 = \frac{R^2}{2}$, $x_{c1} = \frac{R}{3}$, $y_{c1} = \frac{R}{3}$
- 2) Четвртина круга: $P_2 = \frac{R^2\pi}{4}$, $x_{c2} = -\frac{4R}{3\pi}$, $y_{c2} = \frac{4R}{3\pi}$
- 3) Квадрат: $P_3 = R^2$, $x_{c3} = -\frac{R}{2}$, $y_{c3} = -\frac{R}{2}$
- 4) Четвртина круга: $P_4 = \frac{R^2\pi}{4}$, $x_{c4} = -\frac{4R}{3\pi}$, $y_{c4} = -(R - \frac{4R}{3\pi}) = -\frac{R}{3\pi}(3\pi - 4)$

Укупна површина попречног пресека износи:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 - P_4 = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2\pi}{4} + R^2 - \frac{R^2\pi}{4} = \frac{3}{2}R^2$$

Координате тежишта попречног пресека су:

$$x_c = \frac{P_1 \cdot x_{c1} + P_2 \cdot x_{c2} + P_3 \cdot x_{c3} - P_4 \cdot x_{c4}}{P} = \frac{\frac{R^2}{2} \cdot \frac{R}{3} + \frac{R^2\pi}{4} \cdot \left(-\frac{4R}{3\pi}\right) + R^2 \cdot \left(-\frac{R}{2}\right) - \frac{R^2\pi}{4} \cdot \left(-\frac{4R}{3\pi}\right)}{\frac{3}{2}R^2} = -\frac{2}{9}R$$

$$y_c = \frac{P_1 \cdot y_{c1} + P_2 \cdot y_{c2} + P_3 \cdot y_{c3} - P_4 \cdot y_{c4}}{P} = \frac{\frac{R^2}{2} \cdot \frac{R}{3} + \frac{R^2\pi}{4} \cdot \frac{4R}{3\pi} + R^2 \cdot \left(-\frac{R}{2}\right) - \frac{R^2\pi}{4} \cdot \left(-\frac{R}{3\pi}(3\pi - 4)\right)}{\frac{3}{2}R^2} = \frac{R\pi}{18}(3\pi - 4)$$

Моменти инерције за координатни систем xOy:

$$I_{x1} = I_{y1} = \frac{R^4}{12}, \quad I_{xy1} = \frac{R^4}{24}$$

$$I_{x2} = I_{y2} = \frac{R^4\pi}{16}, \quad I_{xy2} = \frac{R^4}{8}$$

$$I_{x3} = I_{y3} = \frac{R^4}{3}, \quad I_{xy3} = \frac{R^4}{4}$$

$$I_{x4} = \frac{R^4\pi}{16}, \quad I_{xy4} = I_{\xi\eta4} + x_{c4} \cdot y_{c4} \cdot P_4 = R^4 \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8} \right) + \left(-\frac{4R}{3\pi} \right) \cdot \left[-\frac{R}{3\pi}(3\pi - 4) \right] \cdot \frac{R^2\pi}{4} = \frac{5}{24}R^4$$

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} - I_{x4} = \frac{R^4}{12} + \frac{R^4\pi}{16} + \frac{R^4}{3} - \frac{R^4\pi}{16} = \frac{5}{12}R^4 = 0,417R^4$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} - I_{y4} = \frac{R^4}{12} + \frac{R^4\pi}{16} + \frac{R^4}{3} - (I_{\xi 4} + y_{c4}^2 \cdot P_4) = R^4(0.61293 + 0.3152) = 0.928R^4$$

$$I_{xy} = I_{xy1} + I_{xy2} + I_{xy3} - I_{xy4} = R^4\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{5}{24}\right) = \frac{5}{24}R^4 = 0.2083 R^4$$

Тежишни моменти инерције:

$$I_{\xi 1} = I_{\eta 1} = \frac{R^4}{36}, \quad I_{\xi \eta 1} = -\frac{R^4}{72}$$

$$I_{\xi 2} = I_{\eta 2} = R^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right), \quad I_{\xi \eta 2} = R^4\left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8}\right)$$

$$I_{\xi 3} = I_{\eta 3} = \frac{R^4}{12}, \quad I_{\xi \eta 3} = 0$$

$$I_{\xi 4} = I_{\eta 4} = R^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right), \quad I_{\xi \eta 4} = R^4\left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8}\right)$$

$$I_{\xi} = I_x - y_c^2 \cdot P = 0.417R^4 - (0.3R)^2 \cdot 1.5R^2 = 0.282 R^4$$

$$I_{\eta} = I_y - x_c^2 \cdot P = R^4 - (-0.22R)^2 \cdot 1.5R^2 = 0.855R^4$$

$$I_{\xi \eta} = I_{xy} - (x_c) \cdot (y_c) \cdot P = 0.2083R^4 - (-0.22R) \cdot (0.3R) \cdot 1.5R^2 = 0.307R^4$$

Главни моменти инерције су:

$$I_{12} = \frac{1}{2}(I_{\xi} + I_{\eta}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{\xi} - I_{\eta})^2 + 4I_{\xi \eta}^2} = \left(\frac{1}{2} \cdot (0.282 + 0.855)\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(0.282 - 0.855)^2 + 4 \cdot (0.307)^2}R^4 = 0.5685 \pm \frac{1}{2} \cdot 0.8396$$

$$I_1 = (0.5685 + 0.42) R^4 = 0.989 R^4$$

$$I_2 = (0.5685 - 0.42) R^4 = 0.1485 R^4$$

Полупречници инерције (полуосе елипсе инерције) су:

$$i_1^2 = \frac{I_1}{P} = \frac{0.989R^4}{1.5R^2} = 0.66 R^2$$

$$i_2^2 = \frac{I_2}{P} = \frac{0.1485R^4}{1.5R^2} = 0.099 R^2$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{\xi \eta}}{I_{\xi} - I_{\eta}} = -1.63$$

$$2\alpha = 58.58^\circ, \quad \alpha = 29.29^\circ$$

Одсечци на неутралним осама n_1 - n_1 , n_2 - n_2 , n_3 - n_3 I n_4 - n_4 су:

$$a_1 = 0.92R, \quad b_1 = \infty$$

$$a_2 = 0.67R, \quad b_2 = \infty$$

$$a_3 = \infty, \quad b_3 = 0.64R$$

$$a_4 = \infty, \quad b_4 = 0.82R$$

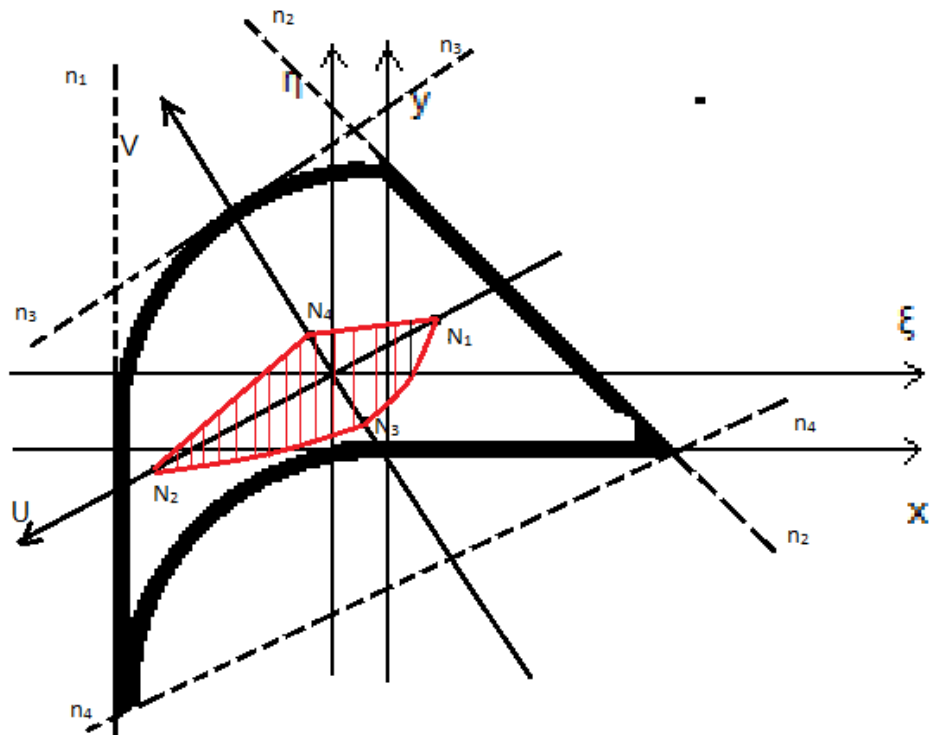
Координате нападних тачака:

$$u_1 = -\frac{i_y^2}{a_1} = -\frac{0.66R^2}{0.92R} = -0.71R, \quad v_1 = \frac{i_x^2}{b_1} = 0$$

$$u_2 = \frac{i_v^2}{a_2} = \frac{0.66R^2}{0.67R} = 0.98R, \quad v_2 = \frac{i_u^2}{b_2} = 0$$

$$u_3 = -\frac{i_v^2}{a_3} = 0, \quad v_3 = -\frac{i_u^2}{b_3} = -\frac{0.099R^2}{0.64R} = -0.16R$$

$$u_4 = \frac{i_v^2}{a_4} = 0, \quad v_4 = \frac{i_u^2}{b_4} = -\frac{0.099R^2}{0.82R} = 0.12R$$



Слика 23. Језгро пресека

7. ЗАКЉУЧАК

У овом раду су разматрани проблеми штапова оптерећених ексцентричним аксијалним силама. Приликом таквог оптерећења долази је до појаве сложеног напрезања. Услед редукције ексцентричне аксијалне силе на тежиште јавља се аксијално напрезање (затезно или притисно) и косо савијање, које је збир два савијања око две главне осе попречног пресека.

Нормални напон је количник централне силе, којој се супротстављају унутрашње силе, и површине попречног пресека.

Геометријско место тачака попречног пресека у којима је нормални напон једнак нули представља неутралну осу пресека.

Неутрална оса увек сече супротни квадрант од оног у коме делује сила. Вредности отсечака неутралне осе на координатним осама не зависе од вредности силе, већ само од облика попречног пресека и положаја нападне тачке силе. Уколико се нападна тачка помери до бесконачности, отсечци неутралне осе ће бити једнаки нули, па ће самим тим неутрална оса пролазити кроз координатни почетак. У случају да се нападна тачка силе поклопи са тежиштем пресека, неутрална оса се онда помера у бесконачност, па је реч о "обичном" аксијалном напрезању, без компоненти косог савијања.

Разматрање проблема ексцентричног аксијалног оптерећења у штаповима, као деловима конструкције, је врло значајно при њеном пројектовању. Овакво оптерећење треба избегавати уколико материјали штапова различито подносе напрезања на притисак и затезање, односно, при прорачуну се о томе мора стриктно водити рачуна.

8. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ћировић, М., Отпорност материјала I, Машински факултет, Крагујевац, 2008.
- [2] Рашковић, Д., Отпорност материјала, Машински факултет, Београд, 1980.
- [3] Рашковић, Д., Таблице из отпорности материјала, Машински факултет, Београд, 1976.
- [4] Николић, Р., Марјановић, В. и Милетић, И., Отпорност материјала, Скрипта у електронској форми, Машински факултет, Крагујевац, 2012.
- [5] Васић, З., Отпорност материјала, Факултет техничких наука, Косовска Митровица, 2006.
- [6] Милетић, И., Предавања из Отпорности материјала, Факултет инжењерских наука, Крагујевац, школске 2014/2015. године.
- [7] Анђелић Н., Милованчевић М., Отпорност материјала, Машински факултет, Београд, 2010.