

**Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу**



**Илић Г. Ивица**

**Анализа стабилности насуте бране применом  
методе коначних елемената**

**завршни рад**

**Крагујевац, 2019.**

**Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу**



**Назив студијског програма: Машинско инжењерство**

**Ниво студија: Основне академске**

**Модул: Примењена механика и аутоматско управљање**

**Број индекса: 12/2016**

**Ивица Г. Илић**

**Анализа стабилности насуте бране применом  
методе коначних елемената**

**завршни рад**

**Комисија за преглед и одбрану:**

1. **др Драган Ракић, доцент -ментор**

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Датум одбране: \_\_\_\_\_

Оцена: \_\_\_\_\_

У оквиру задате теме завршног рада кандидат треба да систематизује поступак нумеричке анализе стабилности насутих брана изложених дејству статичких и динамичких оптерећења која се јављају у току њихове експлоатације. Након систематизације, дефинисани поступак треба да примени на конкретном моделу насуте бране са припадајућом стенском масом.

Препоручена литература:

- [1]. М. Којић, Р. Славковић, М. Живковић и Н. Грујовић, Метод коначних елемената 1, Машински факултет у Крагујевцу, 2010.
- [2]. М. Којић, Р. Славковић, М. Живковић и Н. Грујовић, ПАК-С Програм за анализу конструкција МКЕ, Корисничко упутство, Крагујевац, 2016.
- [3]. Siemens, FEMAP User Guide Version 11.4.0, Siemens PLM Software Inc, 2017.

Крагујевац, датум:  
07.05.2019

Ментор:  
Др Драган Ракић, доцент

## Резиме

Одговорне грађевине као што су бране захтевају анализу стабилности како би се имао увид о дејствима различитих оптерећења на саму грађевину тј. брану. Током саме анализе стабилности неопходно је узети у обзир и утицај многобројних фактора који могу битно утицати на саму градњу бране као и на понашање бране у току експлоатације. Циљ овога рада јесте управо анализа стабилности, у конкретном случају, насуте бране. Анализа напонско-деформационих процеса је вршена применом методе коначних елемената коришћењем програма ПАК (*Програм за анализу конструкција*) док је за креирање мреже коначних елемената и постпроцесирање резултата коришћен програм *Femap* (*Finite Element Modeling And Postprocessig*).

У уводном делу рада су описане бране, њихова намена, подела, и основне карактеристике. У наставку је дефинисан материјални модел тла, односно теоријске основе материјалног модела као и параметри модела. Други део рада односи се на припрему добијеног 3D модела, креирање мреже коначних елемената, задавање оптерећења и граничних услова. Након анализе у програму ПАК, приказани су резултати за две прорачунске ситуације.

**Кључне речи:** насута брана, анализа стабилности, метода коначних елемената, *Femap*, ПАК

## Summary

Responsible structures such as dams require a stability analysis to be able to understand the effects of different loads on the structure itself. During the analysis of stability, it is necessary to take into account the influence of many factors that can significantly affect the construction of the dam itself as well as the behavior of the dam during its exploitation. The aim of this paper is precisely the analysis of the stability, in this case, of a dam. The stress-strain analysis is done by the finite element method using Femap (Finite Element Modeling And Postprocessig) software to create the finite element network. Then the model with the given loads and constraints is analyzed using PAK (Program for Analysis of Structures). The introductory part of the paper will describe the dams, their purpose, division, and basic characteristics. Next, the material model, that is, theoretical bases, as well as its parameters will be defined. The second part of the work will be related to the preparation of the obtained 3D model, creation of a finite element network, defining the load and boundary conditions. Then, after processing the model in PAK, the results for the two cases will be displayed.

**Keywords:** embanked dam, stability analysis, finite element method, Femap, PAK

## Садржај

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| 1. Увод .....                                         | 1  |
| 2. Брана .....                                        | 2  |
| 2.1 Кратак историјат .....                            | 2  |
| 2.2 Главни делови бране .....                         | 3  |
| 2.3 Подела брана .....                                | 4  |
| 3. Избор типа бране .....                             | 6  |
| 4. Насуте бране .....                                 | 9  |
| 4.1 Унутрашња ерозија .....                           | 9  |
| 4.1.1 Испирање – суфозија .....                       | 9  |
| 4.1.2 Флуидизација .....                              | 10 |
| 5. Опис бране “Власина” .....                         | 11 |
| 6. Теоријске основе за анализу стабилности .....      | 12 |
| 6.1 Методе за анализу стабилности .....               | 12 |
| 6.2 Метода коначних елемената .....                   | 12 |
| 6.3 Примена МКЕ .....                                 | 12 |
| 6.4 Одређивање степена сигурности бране .....         | 15 |
| 6.5 Метода редуковања смичуће чврстоће .....          | 16 |
| 7. Материјални модел .....                            | 17 |
| 8. Анализа стабилности насуте бране „ Власина “ ..... | 18 |
| 8.1 Геометрија модела .....                           | 18 |
| 8.2 Креирање мреже коначних елемената .....           | 20 |
| 8.3 Оптерећења и гранични услови .....                | 23 |
| 8.3.1 Сопствена тежина .....                          | 23 |
| 8.3.2 Хидростатички притисак .....                    | 23 |
| 8.3.3 Сеизмичко оптерећење .....                      | 24 |
| 8.4 Задавање граничних услова .....                   | 24 |
| 9. Прорачунске ситуације .....                        | 25 |
| 9.1 Прикази резултата .....                           | 25 |
| 9.1.1 Прва прорачунска ситуација .....                | 25 |
| 9.1.2 Друга прорачунска ситуација .....               | 43 |
| 10. Закључак .....                                    | 64 |
| Литература .....                                      | 65 |

## **1. Увод**

У овом раду представљен је комплетан поступак анализе стабилности насуте бране „Власина“ применом методе коначних елемената [1]. За потребе дораде модела и генерисање мреже коначних елемената, као и за приказивање добијених резултата коришћен је програм Femap [2]. За сврхе напонско деформационе анализе коришћен је програм ПАК [3].

Главни задатак овог рада јесте да се већ добијени тродимензионални CAD модел бране припреми, односно да се из модела отклоне све неправилности у погледу геометрије. Неправилности геометрије на које се најчешће наилази су преклапања површина на једном солиду (делу модела) или између солида, непоклапање тачака, линија или површина, задирање једног солида у други и слично. Затим се генерише мрежа коначних елемената, те се на таквом моделу задају одговарајућа оптерећења као и гранични услови, који би требало да одговарају реалним условима приликом експлоатације бране. Крајњи циљ овог рада јесте приказ резултата односно, приказ померања, деформације и напона, за две прорачунске ситуације.

Основни појмови о бранама као грађевинама, њихова подела као и пратећи објекти и основни делови брана дати су у првом делу рада. Такође дефинисани су материјални модел, теоријске основе и параметри истог. Представљене су најзаступљеније методе у анализи стабилности брана, као и методе за одређивање степена сигурности бране, као што је метода редукујуће чврстоће [4].

Други део рада састоји се из поглавља у којима је прецизније описан рад са тродимензионалним моделом насуте бране тј., отклањање неправилности геометрије и генерисање мреже коначних елемената. Последњи корак је задавање граничних услова и оптерећења на модел са генерисаном мрежом коначних елемената.

На самом крају дати прикази резултата за претходно поменуте две прорачунске ситуације, као и закључци о самим анализама модела, односно анализама стабилности бране.

## 2. Брана

Брана представља хидротехничку грађевину подигнуту преко корита природног или вештачки изграђеног водотока. Улога ових грађевина се састоји у томе да се водостај реке узводно од објекта подигне ради одређених потреба. Такво подизање нивоа воде се врши како би се повећала дубина узводно од бране ради побољшавања пловности реке. Затим, разлог градње може бити потреба за акумулацијом водене масе, како би се накупљена водена маса могла користити у току сушних дана у години, за снабдевање становништва водом (техничком или за пиће) или за наводњавање ради потребе заливања усева. Потенцијална енергија водене масе, која се јавља управо због разлике нивоа воде може се користити за потребе производње електричне енергије [5].

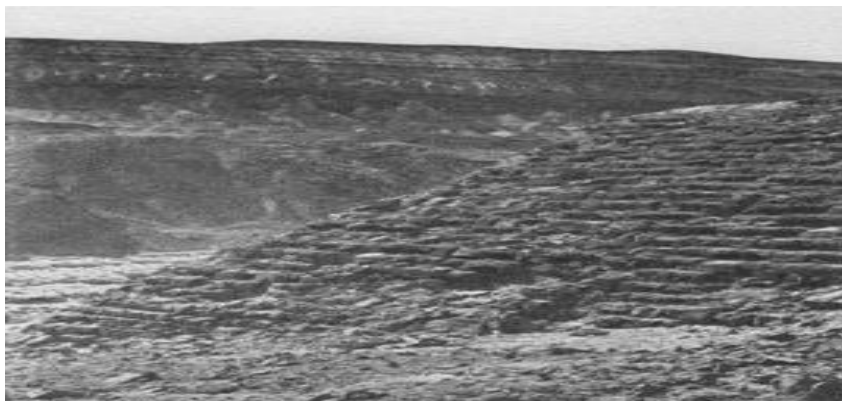
### 2.1 Кратак историјат

Са развојем првих цивилизација, јавила се потреба за наводњавањем пољопривредних усева, нарочито у сушном периоду. Како би се ово постигло, било је неопходно изградити акумулациони базен за потребе сушних дана када није било падавина.

Управо прве овакве грађевине биле су грађене чак 5000 година п.н.е. Оне су биле грађене на великим рекама као што су Тигар, Еуфрат и Нил. У Египту, Персији, Кини, Јемену и Индији грађене су прве насуте и зидане бране. Прва позната брана јесте брана Јава (*Jawa*) у садашњем Јордану 100km североисточно од града Амана. Ова гравитацијска брана била је висока 4,5 метра, широка око 1 а дугачка око 50 метра и датира од 3000 година п.н.е. У древном Египту била је саграђена зидана брана Сад-ел-Кафара (*Saad-el-Kafara*) 25 km јужно од Каира. Била је дугачка 102m, широка 87m и висине 15m. Сврха ове бране била је контрола и заштита од поплава. Саграђена је око 2700 године п.н.е. У северном Јемену брана Мариб зидана је од лаве, креча и песка у осмом веку п.н.е. Поново је изграђена 1986. године. Најстарија насута брана је Гуков (*Gukow*) у Кини висине 30 метара, изграђена 240. године п.н.е. Многе бране које датирају још из старог века сачуване су до данашњих дана [6]. Са развојем науке, архитектуре и применом нових материјала развили су се многи други концепти градње брана којима је знатно промењен облик и карактеристике истих.



Слика 1 Брана Јава



Слика 2 Брана "Saad-el-Kafara"

## 2.2 Главни делови бране

Тело, прелив, испуст и слапишта представљају основне елементе бране без којих нека брана не би могла да има правилну функцију. За прихватање притиска коју ствара акумулација воде служи тело бране. Та оптерећења тело преноси на темељ, односно темељне површине, на дно или бокове речне долине или корита. Горњи део тела завршава се круном бране, што представља највишу површину бране која се може користити као коловоз или пешачка стаза (Слика 3).



Слика 3 Круна бране

Доњи и бочни делови тела бране учвршћени су у дно и бокове речне долине или корита, а завршавају се обично темељном површином, што представља најнижу површину на брани. Преливи су смештени на највишој тачки акумулационог језера и служе за одвод поплавних вода (бујичне воде, кишне падавине) из језера у речно корито, тако да се вода из акумулације не прелива преко круне. По потреби се уз бране граде и корита за пропуштање дрва, рибље стазе, бродске преводнице и друге грађевине којима је сврха да омогуће корисне делатности реке, а које су онемогућене управо због пресецања водотока браном. Слапиште – умирујући базен је део евакуационог органа који служи за умиривање енергије преливне воде како не би дошло до поткопавања темеља и рушења бране.

## 2.3 Подела брана

Подела брана се може извршити према сврси, односно намени на:

- Акумулационе,
- Ретенцијске ,
- За захват воде,
- Повећање пловности река,
- Задржавање наноса ,
- Јаловишта и
- Насипе.

Према материјалу бране се деле на:

- Невезани материјал (насуте бране)
  1. Земљане бране од природних материјала
    - Хомогеног пресека без заптивног дела и
    - Хетерогеног пресека са непропусном глиненом вертикалом или косим језгром, или са језгром од неког другог непропусног или слабо пропусног материјала или водонепропусном облогом
  2. Бране са каменим набачајем
    - Са вертикалним или косим непропусним језгром од природних материјала,
    - Са вертикалном дијафрагмом од вештачких или припремљених материјала и
    - Са узводним водонепропусним екраном (армирани бетон, бетонски асфалт, ливени асфалт, геомембране итд.) и
- Везани материјали (бетонске бране)
  1. Армирани бетон (врло ретко се користи) и
  2. Дрво, метал, зидање (користило се у прошлости).

Подела бране према величини је:

- Велике дефинишу се као бране висине 15 или више метара мерећи од најниже површине на темељу до круне, или бране висине од 5-15 метара са акумулацијом језера веће од 3 милиона кубних метара. (Дефиниција према интернационалне комисије за велике бране- *ICOLD*),
- Све остале бране свставају се у мале

Подела према начину преношења оптерећења:

- Гравитационе и
- Лучне

Подела брана према одвођењу воде је следећа:

- Преливне (прелив на телу бране)
- Непреливне (прелив изнад тела бране)

Бетонске бране се могу поделити на [7]:

- Гравитационе
  1. Масивне,
  2. Олакшане гравитационе
    - Вишелучне и
    - Рашчлањене (са контрафором, плочама и слично),
  3. Покретне речне и
  4. Преднапрегнуте
- Лучне.

### 3. Избор типа бране

Избор типа бране уско је повезан са избором преградног профила. Избор преградног профила, односно, места на коме ће се брана подићи је први и основни задатак при пројектовању сваке бране. Место градње бране је значајан фактор који утиче на потенцијалну запремину будуће акумулације. Од величине акумулације зависи и хидролошки потенцијал расположив за потрошњу. Уз то, геолошке и геомеханичке особине терена на месту преградног профила битно утичу на услове постављања темеља који су један од најважнијих чинилаца за одређивање типа бране.

Најважнији чиниоци при избору преградног профила (профила бране) су:

1. **Количина воде.** Да би се утврдила количина воде неопходни су хидролошки подаци. Хидролошким подацима се доказује постојање очекиваних протока реке на којој се брана гради. Поред количине воде битан је и квалитет, тако да се одговарајућим анализама мора утврдити да ли је вода добра за коришћење (наводњавање, техничку употребу и сл.), као и то да ли је вода агресивна за објекат.
2. **Топографија терена.** Топографија терена одређује следеће:
  - Запремину акумулације,  $V$ , зависно од висине бране  $H$  ( захтева се што већа вредност односа  $V/H$ )
  - Ширину преградног зида (дужину бране), од чега зависи запремина бране, а често и тип као и сама цена бране.
  - Тип и диспозицију (распоред) бране и евакуационих органа, захвата и осталих објекатаНакон што је одређена макро локација, подручје на коме ће се брана градити, брана се најчешће поставља низводно у близини најужег пресека долине. Овако одређен положај бране утиче на то да бокови бране боље налегну на усеке долине.
3. **Геолошки и геомеханички услови** који утврђују:
  - Стање средине за темељ бране и темеље пратећих објеката. Обавезно треба одредити механичке карактеристике терена на коме ће се поставити брана. Те карактеристике су отпорност смицање, носивост средине као и деформабилност и водоиздрживост. Геомеханичке особине битно утичу на избор микролокације, конкретног места пројектовања бране.
  - **Вододрживост акумулације.** Веома битан параметар за пројектовање бране. Под овим се подразумева стабилност околног терена на дејство акумулације.
4. **Доступност грађевинских материјала** одговарајуће количине и квалитета може имати великог утицаја на цену изградње бране уколико потребни материјали нису лако доступни.
5. **Трошкови експлоатације земљишта** и измештање насеља индустрије и саобраћајница. Често се дешава да се због потребе акумулација мора поплавити насељено место.
6. **Еколошки, културни и политички чиниоци**

За одређени профил са својим топографским, хидролошким, геолошким и геомеханичким особинама тражи се технички и економски најповољнији и најисплативији тип бране. Избор типа бране веома зависи и од особина неког типа бране. Особине насутих и бетонских брана као најчешће коришћених типова бране се морају узети у обзир приликом изградње, што утиче на избор конкретног типа бране.

Предности бетонских брана су:

1. Велика издржљивост на преливање и процуривање, што даје могућност да се евакуациони органи и захвати граде у склопу саме грађевине. Како су издржљиве на дејство воде, евакуациони органи се могу димензионисати и на мањи проток воде.
2. Мања количина материјала је потребна у односу на насуте бране, са обзиром на далеко стмији нагиб косина.

Недостаци бетонских бране су:

1. Високи захтеви за услове темељења (ниска деформабилност при високој носивошћу и отпорности на смицање),
2. Висока јединична цена. На ову цену велики утицај има трошак за достављање цемента, а врло често и агрегата. Спорији рад који захтева бројнију радну снагу у односу на градњу насутих брана.
3. Код лучних брана се захтева се и оптимални однос висине и ширине долине. Ово је предодређено начином на који овај тип брана преноси оптерећење, што значи да су оне погодне само за релативно уске долине

Предности насутих брана су:

1. Минимални захтеви за услове темељења (нарочито код земљаних брана), како са гледишта носивости, тако и са гледишта слегања.
2. Прилагодљивост готово свим врстама терена. Овај тип брана прилагодљив је готово свим врстама терена: од стене до насипног терена, од широке равничарске долине до уске клисуре под условом да се може обезбедити простор за евакуацију великих вода.
3. Могућност коришћења разноврсног и хетерогеног материјала за насип. Ове врсте материјала су често расположиве на месту саме градње брана
4. Јефтино и брзо уграђивање коришћењем механизације, што само по себи смањује цену бране по јединици запремине.

Недостаци насутих брана

1. Висока осетљивост на преливање – спољашњу ерозију,
2. Велика осетљивост на неконтролисано процуривање и испирање материјала (унутрашња ерозија),
3. Као последица прва два недостатка, за евакуацију великих вода, као и за темељни испуст и захват потребни су посебни бетонски објекти ван тела

насипа, те се евакуациони орган мора димензионисати на већи проток него код бетонских брана због осетљивости насипа на преливање и

4. Велики обим радова услед благих косина узводног и низводног лица, што се надокнађује ниском јединичном ценом и применом механизације [7].

## 4. Насуте бране

Градња овог типа брана карактерише се постепеним, контролисаним насипањем и збивањем материјала од којег се праве. Одупирање дејству спољашњим силама остварује се, услед своје величине, сопственом тежином. Насуте бране, како им име само каже, могу се дефинисати као веома високи насипи који су стално у контакту са водом. Велика предност насутих брана у односу на бетонске је што преносе оптерећење на тло преко знатно веће површине, чиме се значајно смањују напони у тлу. Често су насуте бране једино решење за насуту тло. Уз то, насуте бране су мање осетљиве на слегање темеља у односу на бетонске.



Слика 4 Насута брана

### 4.1 Унутрашња ерозија

Унутрашња ерозија је посебно опасна код земљаних брана. Настаје одношењем честица неvezаног материјала које не могу да се одупру хидродинамичкој сили провирне воде. Унутрашња ерозија дели се на:

1. Испирање (суфозију) и
2. Подизање (флуидизацију)

#### 4.1.1 Испирање – суфозија

Како су насуте бране грађене од природних материјала (камен, земља, глина) вода са којом је брана у сталном и непосредном контакту, може доћи до продирања воде у тело бране. Вода која продире (провирна вода), услед дејства свог тока може однети честице тла или насипа. Ова појава се назива испирање – суфозија. Могу бити испране честице на низводном лицу због тога што иза њих нема честица које би је могле задржати. Испирање честица из унутрашњости се дешава уколико је испрана честица малих димензија, тако да је околне крупније честице не могу задржати. Испирање унутрашњих честица се јавља на додиру између материјала различите гранулације, па се често назива и суфозија на контакту. Испирање честица не мора да значи нужну опасност

по стабилност бране, уколико су то честице једне исте фракције. Ситније честице могу бити испране из хетерогене мешавине без нарушавања стабилности објекта ако преосталле честице нису угрожене резултујућим повећањем брзине провирања воде, и ако су одржале подупрт систем. У оваквом случају, првобитно мутна провирна вода, постаће бистра када све честице буду испране. Напротив, повећање мутноће и провирног протока, значи да је ерозија добила на интезитету, што за крајњи исход може имати потпуно испирање тла и рушења објекта.

Хидродинамичка сила којом вода делује на честице тла сразмерна је филтрационој брзини  $vD$  која зависи од градијента филтрације  $I$  и коефицијента филтрације (коефицијената водопрпусности)  $K$ . Градијент филтрације представља пад пијезометарске разлике,  $h = -\Delta\P$ , и дужине провирног пута,  $L = \Delta I$ , на којој се пијазометријска разлика оствари

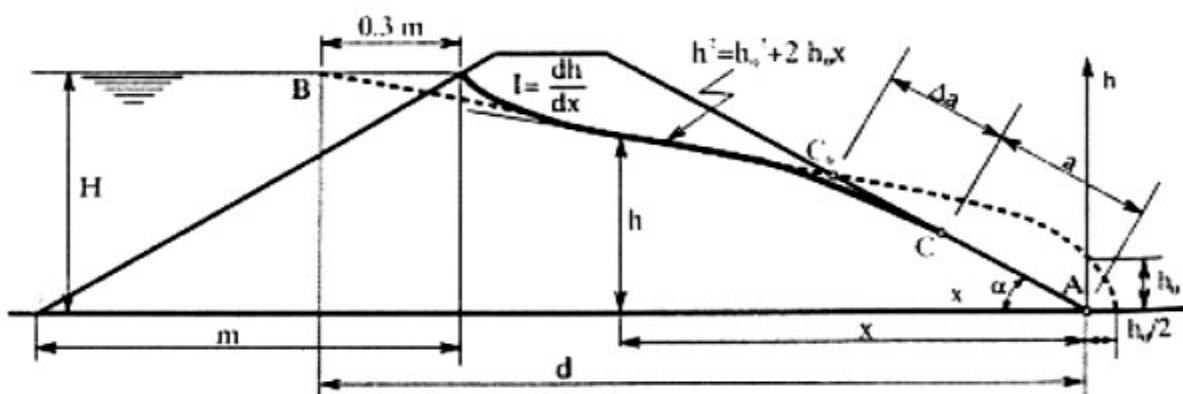
$$\nu D = K^* I = I \left( -\frac{\Delta \Pi}{dl} \right) = K^* h / L \quad (4.1)$$

Где негативни предзнак означава да пијезметријска линија ***Π*** опада у смеру тока воде (Слика 5).

Опасност да честица одређене крупноће буде испрана (услед дејства хидродинамичке силе) расте са повећањем градијента и коефицијента филтрације. Градијент при коме долази до суфозије разматраног тла назива се критични градијент филтрације на суфозију.

### 4.1.2 Флуидизација

Флуидизација (подизање, „кључање“, „течење“) настаје када хидродинамичка сила воде која провири навише постане већа од тежине тла. Тло у потпуности губи носивост, долази до слома тла. Без обзира на слом тла, бубрење се одвија на контакту воде и тла, што ствара ерозију контактне површине [7].

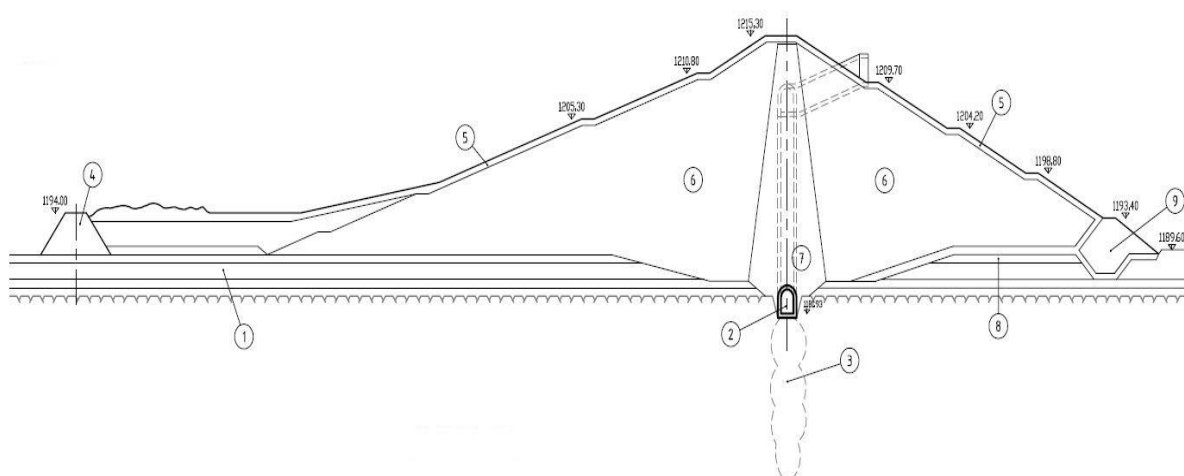


Слика 5 Ток провирне воде

## 5. Опис бране “Власина”

Насута брана „Власина” представља тип насуте бране од каменог набачаја са централним вертикалним глиненим језгром. Утемељена је на палеозојским шкриљцима, у кориту реке на речном материјалу. Извршено је инјектирање до дубине од 40m из инјекционе галерије. Тело бране насута је од распаднутих шкриљаца, а језгро од глине. Испод низводног дела бране изведена је дренажа заштићена контрафилтрима и ножицом од камена у дну бране. Евакуациони органи су темељни испуст и слободан (бочни) прелив.

Скица насуте бране налази се на слици 6.



Слика 6 Скица бране „Власина”

Локација акумулације и бране се налази у близини Сурдулице на водотоку Власине (слика 7). Грађевинска висина бране је 34,3m, док је хидраулична висина 25,7m. Ширина у круни бране износи 5,5m, дужина по круни је 239,0m. Запремина бране, тј. самог насипа износи 365000 метара кубних. Запремина скумулације износи око 167 милиона метара кубних [8].



Слика 7 Брана „Власина”

## 6. Теоријске основе за анализу стабилности

### 6.1 Методе за анализу стабилности

Методе које се најчешће користе за испитивање анализе стабилности насутих брана су аналитичке и нумеричке. Најзаступљеније методе су: метода теорија пластичности, метода коначних елемената и метода граничне равнотеже. Нумеричка метода која ће се користити у овом раду јесте метода коначних елемената.

### 6.2 Метода коначних елемената

Метод коначних елемената (МКЕ) је данас најзаступљенији нумерички метод, примењен готово у свим наукама, највише у областима инжењерства. Сматра се да је МКЕ метод који је, у поређењу са другим, имао највећи утицај на развој и домете техничких дисциплина у двадесетом веку.

Особине које овај метод издвајају од других јесте широка могућност примене на различите области. Може се применити на области солида, флуида, као и на проблеме провођења топлоте и физичких поља. Овом методом се могу решавати како проблеми линеарне, тако и проблеми нелинеарне природе. Још једна особина која битно издваја овај метод јесте погодност у смислу примене рачунара.

Са експанзијом примене МКЕ у инжењерској пракси, развијени су комерцијални пакети опште, а то су: NASTRAN, MARC, ANSYS, ADINA, ABAQUS, SAP и други. Код нас развијен је програм овог типа, ПАК (*Програм за Анализу Конструкција*). Развој програма ПАК започео је на Институту за аутомобиле и Рачунарском центру „Заставе“, 1975, прво за област линеарне анализе, а затим за проблеме нелинеарне анализе (нелинеарно понашање материјала, геометријска нелинеарност, велика померања), провођења топлоте, механику флуида биомеханику и спрегнуте проблеме физичких величина [1].

### 6.3 Примена МКЕ

При решавању просторних проблема применом методе коначних елемената, неопходно је да тај простор буде подељен односно дискретизован на мање делове, поддомене. На тако подељен простор примењују се знања из области механике континуума и нумеричке математике. Поддомени на које се дели простор се називају коначни елементи. Анализа система коначних елемената у спрези даје могућност за нумеричку симулацију одзива континуума на задате побуде.

Физичке величине које су обухваћене моделом добијају се у дискретном облику, тј. у тачкама које произилазе из дискретизације. Ове тачке зову се чворне тачке или једноставно чворови. На основу дискретизације физичког проблема, интерполирањем и увођењем интерполационих функција уз увођење природног (локалног) координатног система, успостављањем равнотежне једначине за елементе и за целокупну структуру, долази се до матрица елемената и система. Увођењем ограничења и сила које делују на

модел и решавањем одређених једначина добијају се померања тачака која представљају решење проблема. На основу померања тачака могу се израчунати и остале физичке величине које су битне ради веродостојног приказа резултата. Величине које се могу одредити на основу померања тачака су вектори померања, деформације и напони.

Како је тема рада тродимензионални модел бране, за креирање мреже коначних елемената користиће се тродимензионални елементи. Конкретно коришћен је тетраедарски коначни елемент са међучворовима. Тетраедарски коначни елемент се формира од основног елемента који се састоји од 6 површи које га ограничавају. Одакле следи да се интерполационе функције и померања чворова тетраедарског елемента могу поистоветити са интерполационим функцијама и померањима чворова основног елемента, уколико се узме у обзир поклапање одговарајућих чворова [1].

Интерполација геометрије и матрица померања дате су релацијама:

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{X} \quad (6.1)$$

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{U} \quad (6.2)$$

Где је интерполациона матрица  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 \dots & h_N & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 \dots & 0 & h_N & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 \dots & 0 & 0 & h_N \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Вектори координата чворова  $\mathbf{X}$ , и померања чворова  $\mathbf{U}$

$$\mathbf{X}^T = [X_1^1 \quad X_2^1 \quad X_3^1 \quad X_1^2 \quad X_2^2 \quad X_3^2 \dots \quad X_1^N \quad X_2^N \quad X_3^N] \quad (6.4)$$

$$\mathbf{U}^T = [U_1^1 \quad U_2^1 \quad U_3^1 \quad U_1^2 \quad U_2^2 \quad U_3^2 \dots \quad U_1^N \quad U_2^N \quad U_3^N] \quad (6.5)$$

За тетраедар се добијају само 4 интерполационе функције, о којих су  $h_6$  и  $h_7$  непромењене, а кориговане су  $h_1^*$  и  $h_5^*$ :

$$h_1^* = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \quad (6.6)$$

$$h_5^* = h_5 + h_6 \quad (6.7)$$

Како су сада познате релације на основу којих се добијају вредности померања, сада се могу одредити деформације. По својој природи разликују се две врсте деформација: нормална (линијска) и смичућа (угаона). Нормална деформација у правцу

осе  $x$  у некој тачки  $A$  материјала, према дефиницији, представља однос прираштаја дужине правог линијског елемента  $d(ds)$  према његовој почетној дужини  $ds$ . Ако је линијски елемент пре деформације био у правцу  $x$ , онда је деформација  $e_{xx}$  једнака:

$$e_{xx} = \frac{d(dx)}{dx} \quad (6.8)$$

Смичућа деформација представља промену угла између два почетно управна линијска елемента. Смичућа деформација која одговара осама  $x$  и  $y$  је:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (6.9)$$

где је  $\alpha$  угао између линијских елемената који су се пре деформације поклапали са осама  $x$  и  $y$ . На основу ових једначина могу се аналогно дефинисати како нормални напони у било ком другом правцу или било којој другој тачки, тако и за било која друга два (првобитно међусобно управна) правца. Скуп свих нормалних деформација у некој тачки даје слику издужења свих линијских елемената у посматранј тачки, док скуп свих смичућих деформација у посматраној тачки материјала карактерише кривљење, односно промену облика материјала.

Компоненте деформације у односу на Декартов координатни систем, тј. скуп нормалних и смичућих деформација која се односе на овај систем, може се једноставно изразити помоћу поља померања. Уколико су позната померања  $u(x,y,z)$ ,  $v(x,y,z)$ ,  $w(x,y,z)$  у правцу оса  $x,y,z$ , онда се може доћи до следећих једначина за нормалне и смичуће деформације.

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Често се у литератури користе ознаке за смичуће напоне облика  $e_{xy} = \gamma_{xy}/2$ ,  $e_{yz} = \gamma_{yz}/2$ ,  $e_{zx} = \gamma_{zx}/2$ , тако да се, користећи индексну нотацију може писати

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.11)$$

Компоненте  $\gamma_{ij}$  се такође називају и инжењерске смичуће деформације, а  $e_{ij}$ - тензорске.

Одакле се вектор деформације може записати у матричном облику

$$e = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

Напон  $\sigma$  у материјалној тачки одређен је на основу конститутивних релација

$$\sigma = Ce \quad (6.13)$$

Где је  $C$ - еластична конститутивна матрица [1].

## 6.4 Одређивање степена сигурности бране

За степен сигурности може да се каже да представља меру резерве сигурности неке конструкције у односу на гранично стање при коме може доћи до лома конструкције или великих неприхватљивих деформација услед дејства оптерећења.

Како је свака инжењерска процена оптерећена бројним неизвесностима, степен сигурности јесте и одређена мера резерве у односу на познавање и могућност квантификације свих релевантних својстава и процеса. Из тог разлога, приликом избора минималног степена сигурности, процену треба заснивати са извесним степеном уздржаности. Уколико се узроци несигурности могу елиминисати, мање вредности степена сигурности могу бити усвојене. Фактори који утичу на избор минималних степена сигурности су:

1. последице евентуалног лома
2. степен поверења у расположиве инжењерске податке
3. нивои пажње и детаљност истраживања и анализе
4. претходна искуства

Анализом степена сигурности, односно његове дефиниције, материјалних модела, сложених оптерећења као и других параметара који се односе на степен сигурности брана долази се до закључка да минимално захтевана вредност степена сигурности доста варира. Па како би се преписао правилна вредност степена сигурности мора се имати детаљан увид у поузданост улазних података, мора се детаљно изучити и објаснити примена одређених претпоставки и метода како се не би дошло до погрешних закључака и усвајања степена сигурности који није оптималан. Прописивање нижих вредности степена сигурности је оправдано уколико је могуће прецизније одређивање улазних параметара за детаљну и свеобухватну напонско-деформацијску анализу. Ово значи да уколико је степен сигурности неке бране већи у односу на другу брану, не мора нужно подразумевати да је брана са већим степеном сигурности и сигурнија, већ како се до степена сигурности у конкретном случају дошло. Минималне препоручене степена сигурности дате су у табели 1.

**Табела 1** Препоручене вредности степена сигурности

| Тип анализе                               | Заховани минимални<br>степен сигурности | Косина             |
|-------------------------------------------|-----------------------------------------|--------------------|
| Завршетак изградње                        | 1.3                                     | Узводна и низводна |
| Дугорочни степен<br>сигурности            | 1.5                                     | Низводна           |
| Максимална количина<br>воде у акумулацији | 1.5                                     | Низводна           |
| Брзо пражњење<br>акумулације              | 1.1-1.3                                 | Узводна            |
| Анализа дејства<br>земљотреса             | 1.0                                     | Узводна и низводна |

За одређивање степена сигурности насутих брана најчешће користе две методе:

1. Прва метода представља постепено повећање оптерећења до номиналног, а затим и преко номиналног (*Gravity Increase Method*). Применом ове методе, степен сигурности представља однос оптерећења при рушењу и номиналног оптерећења бране.
2. У анализи проблема механике тла није оправдано повећати оптерећења преко номиналних вредности. Из тог разлога се за одређивање степена сигурности у механици тла чешће се користи метода редуковања смичуће чврстоће (*Strenght Reduction Method*) [4].

## 6.5 Метода редуковања смичуће чврстоће

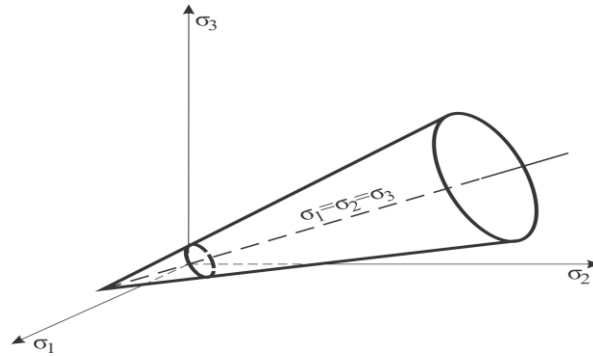
Глобални степен сигурности објекта, применом методе редуковања смичуће чврстоће представља однос смичуће чврстоће материјала и смичућих напона у материјалу. Одакле се закључује да ће до губитка стабилности бране доћи када смичући напони у материјалу  $\tau$  превазиђу вредност смичуће чврстоће материјала  $\tau_f$ , што се може засипсати формулом

$$F = \frac{\tau_f}{\tau}$$

Када је у питању нумеричка анализа стабилности бране, најпре треба одредити почетно напонско стање, при којем се за вредност фактора смичуће чврстоће узима вредност  $F=1$ . Затим се фактор редуковања постепено повећава, што за последицу има смањење смичуће чврстоће материјала, до мере док објекат не изгуби стабилност. Губитак стабилности приликом нумеричких прорачуна се представља као немогућност постизања конвергенције решења. Максимална вредност фактора редуковања смичуће чврстоће за објекат који је стабилан и за који постоји конвергенција нумеричких решења јесте управо глобални степен сигурности.

## 7. Материјални модел

Дракер-Прагеров материјални модел (енг. *Drucker-Prager*) представља један од најстаријих материјалних модела у механици тла [4]. Настао је поједностављењем Мор-Кулоновог материјалног модела како би се превазишао проблем дисконтинуитета. Површ течења овог модела у напонском простору представља конус чија се оса поклапа са хидростатичком осом, као што је приказано на следећој слици (Слика 8).



Слика 8 Површ течења Дракер-Прагеровог материјалног модела

Једначина површи течења овог модела је функција напона дефинисана једначином:

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_{2D}} - k$$

док је за случај неасоцијативног услова течења површ пластичног потенцијала дефинисана изразом:

$$g = \beta I_1 + \sqrt{J_{2D}}$$

где  $I_1$  представља прву инваријанту напона, док је  $J_{2D}$  друга инваријанта девијатора напона. Величине  $\alpha$ ,  $k$  и  $\beta$  представљају материјалне константе модела које је могуће израчунати посредно коришћењем материјалних константи Мор-Кулоновог модела што је приказано у табели 2.

**Табела 2.** Веза материјалних константи Дракер-Прагеровог и Мор-Кулоновог модела

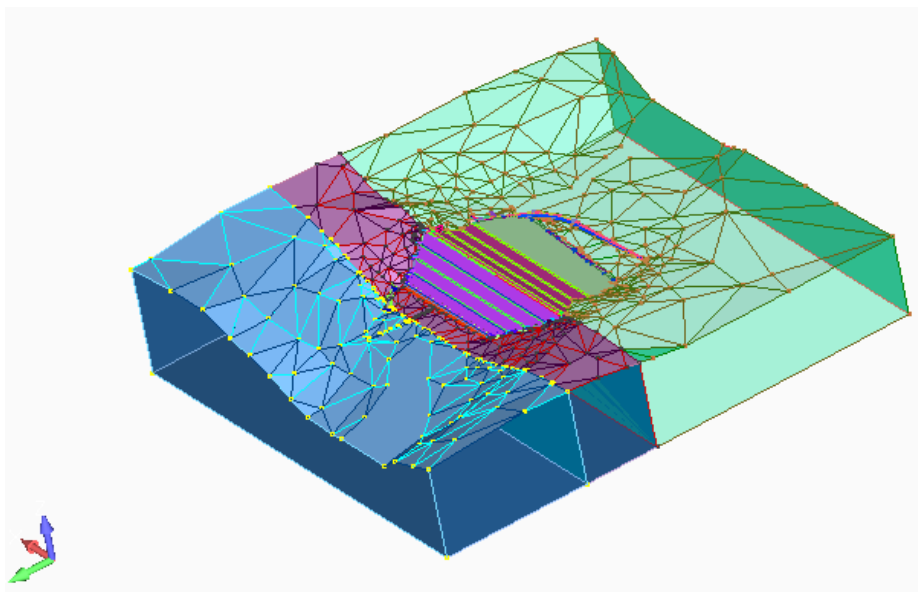
|                                                          |                                                    |                                                                |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}$   | $k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}$ | Конус који пролази кроз спољашња темена Мор-Кулонове пирамиде  |
| $\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}$   | $k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}$ | Конус који пролази кроз унутрашња темена Мор-Кулонове пирамиде |
| $\alpha = \frac{2 \sin \phi}{9 - \sin^2 \phi}$           | $k = \frac{2\sqrt{3}c \cos \phi}{9 - \sin^2 \phi}$ | Средњи конус                                                   |
| $\alpha = \frac{\tan \phi}{\sqrt{(9 + 12 \tan^2 \phi)}}$ | $k = \frac{3c}{\sqrt{(9 + 12 \tan^2 \phi)}}$       | Конус који тангира Мор-Кулонову пирамиду са унутрашње стране   |

## 8. Анализа стабилности насуте бране „Власина“

Као што је предходно напоменуто, како би се дошло до анализе стабилности бране на конкретном моделу, потребно је припремити добијену геометрију како би се извршило генерисање мреже коначних елемената, задавање граничних услова и оптерећења. Након тога се могу очитати резултати, односно вредности померања, деформација и напона.

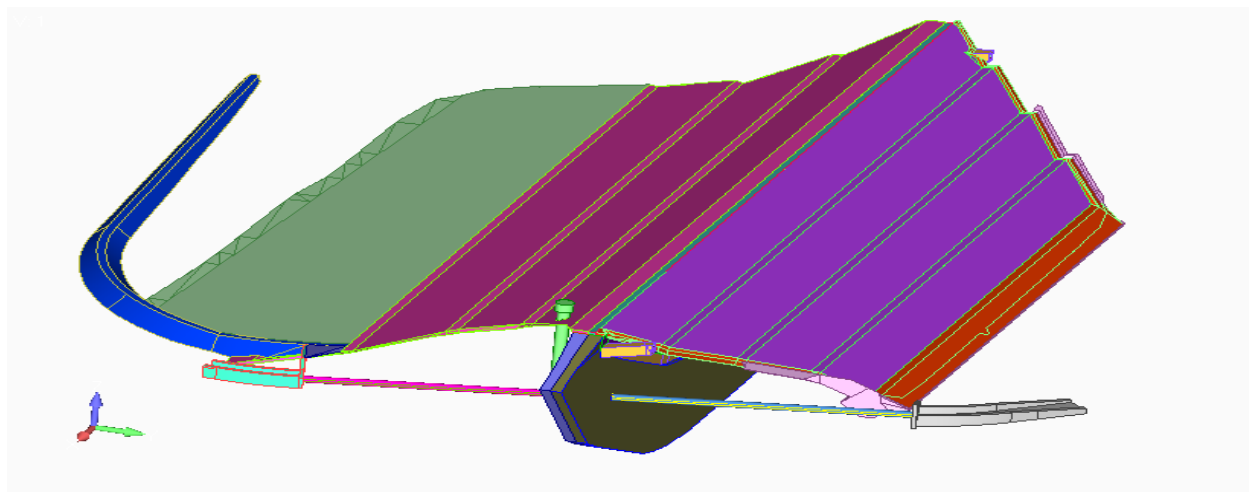
### 8.1 Геометрија модела

Геометрију коју је потребно припремити налази се на слици 9. Ова модел обухвата саму брану и околни терен на коме се брана налази



Слика 9 Геометрија модела

Модел се састоји из више запремина (солида) који представљају главне елементе насуте бране, дакле, сам насип, дренажне канале, тунеле, инјекциону завесу и сам терен на коме је брана постављена. Ради лакшег разликовања геометрије бране од геометрије терена на слици 10 дат је приказ геометрије саме бране.



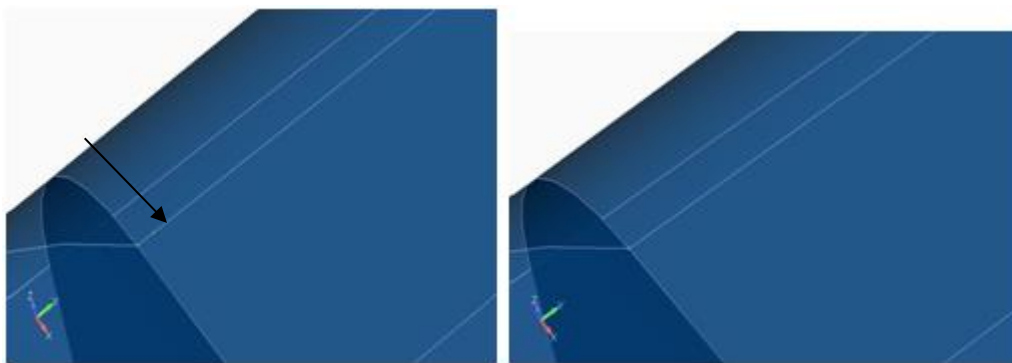
Слика 10 Геометрија без стенсе масе

Припрема геометрије модела састоји у уклањању грешака при моделирању истог. Грешке које се јављају су у виду непоклапања површина, линија и тачака суседних солида на међусобном месту контакта. Како је циљ креирати правилну мрежу коначних елемената, што захтева да се чворови на површинама у међусобном контакту поклапају, непоклапање геометрије за резултат може имати потешкоћу при креирању мреже коначних елемената. Нејвећи проблем који се јавља при уређивању геометрије јесте то што грешке махом нису одмах уочљиве. Тако да се најчешће приликом генерисања мреже, када програм јави да је неуспешно креирана мрежа, оне пронађу и отклоне.

Опције које се најчешће користе приликом уређивања модела су:

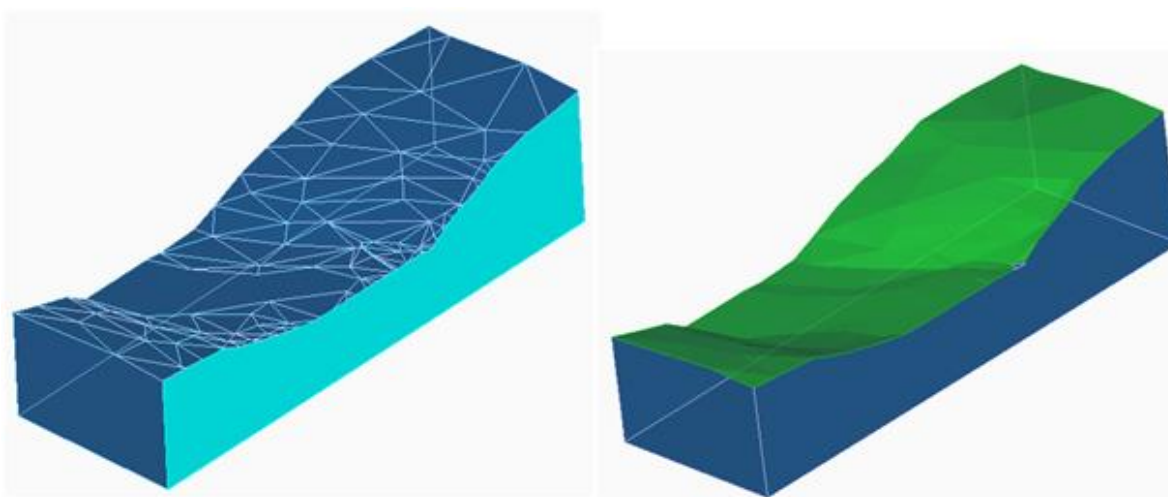
- *combined/composite curves*
- *combined/boundary surfaces*
- *geometry editing*
- *feature removal*

Опција *combined/composite curves/add by point* се користи у ситуацијама кад се две линије спајају у једну, преко заједничке тачке која нема значаја за геометрију модела. Пример употребе ове опције дат је на примеру солида галерије модела бране на слици 11.



Слика 11 Употреба функције *combined/composite curves*

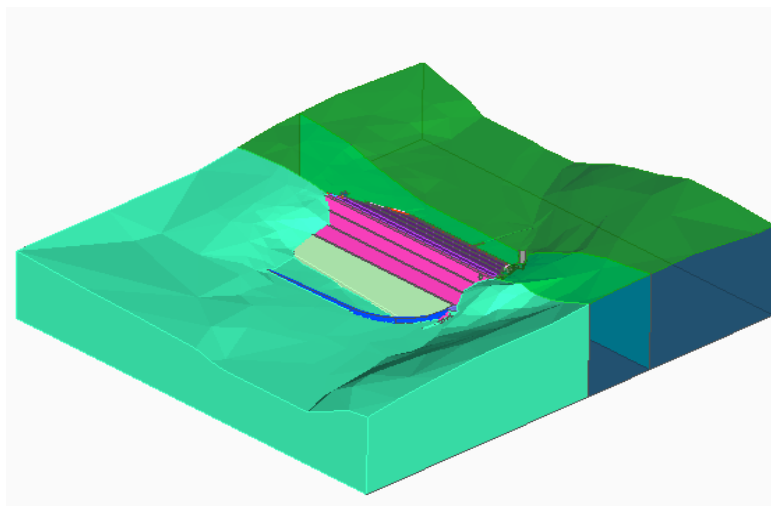
Опција *u*, користи се у случају када је површина подељена линијом, која је сувишна. Ова опција се може искористити и на запремини терена задатог модела како би се креирала једна површина. На слици је дат пример дела терена на коме се користи ова опција (слика12).



Слика 12 Коришћење функције *combined/composite curves*

Опција *geometry editing* пружа нам могућности да се уцрта линија, подели линија на два дела у жељеној тачки, продужи линија, пројекција линије на неку површину и слично.

Постоје многи други начини за припремање геометрије модела, а овде су побројани они најчешће коришћени на задатом моделу. Када је припремљена геометрија сваке запремине, односно солида може се приступити креирањем мреже коначних елемената. Наравно важно је напоменути да најчешће креирање мреже коначних елемената не успе из првог покушаја код овако комплексних модела, те се мора приступити корекцијама као би се генерисала мрежа коначних елемената. Приказ модела са сређеном геометријом дат је на слици 13.

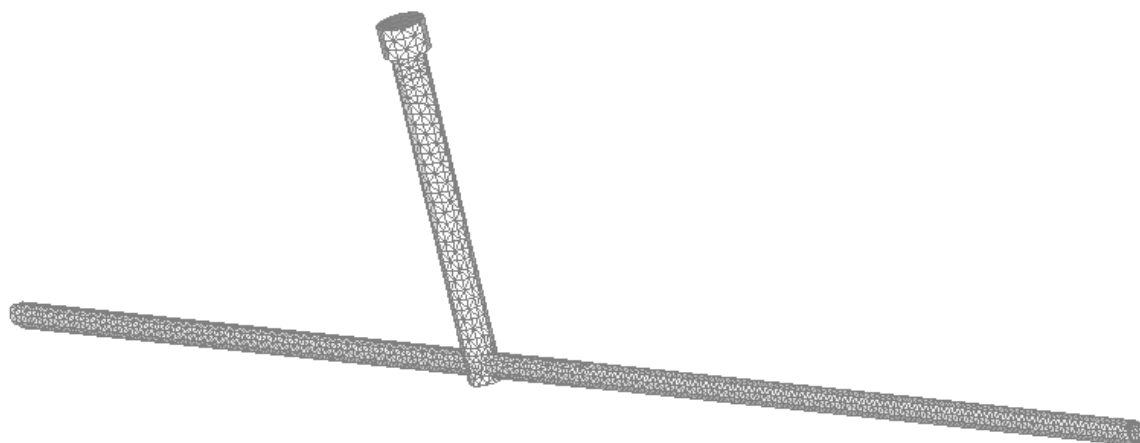


Слика 13 Модел са сређеном геометријом

## 8.2 Креирање мреже коначних елемената

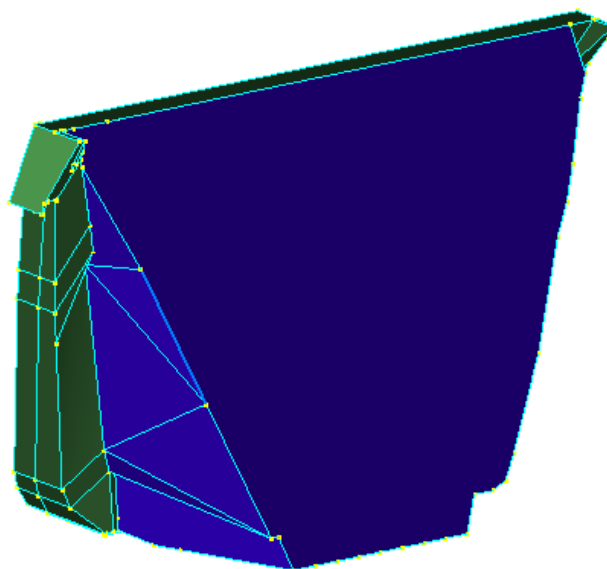
Када је геометрија модела коначно припремљена приступа се генерисању мреже коначних елемената. Како би се мрежа правилно креирала потребно је обезбедити идентичну поделу елемената по додирној површини два солида у контакту. Поред идентичне поделе по површини неопходно је и одредити одговарајућу величину елемената за сваки солид. Број елемената у солиду треба да буде оптималан, односно да не буде превише велик, али да елементи у потпуности испоштују геометрију. Како задати модел садржи одређени број солида, са генерисањем мреже се почело управо од ових мањих солида.

Имајући у виду да солиди који представљају тунеле су мали у односу на величину бране, овде се генерише ситнија мрежа. Величина мреже на овим солидима је у просеку око 0,5m. На слици 14 приказана је мрежа генерисана на овим солидима.

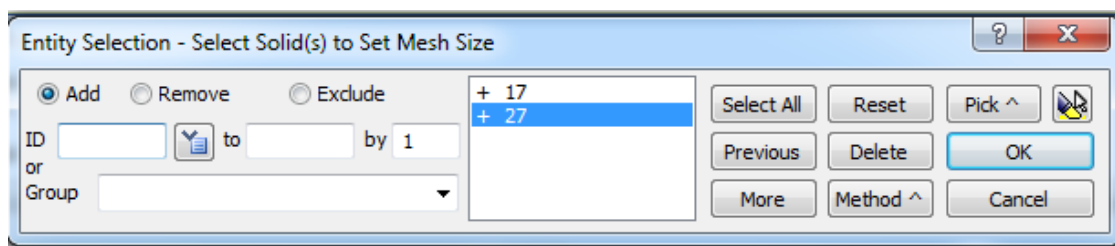


Слика 14 Мрежа на тунелима

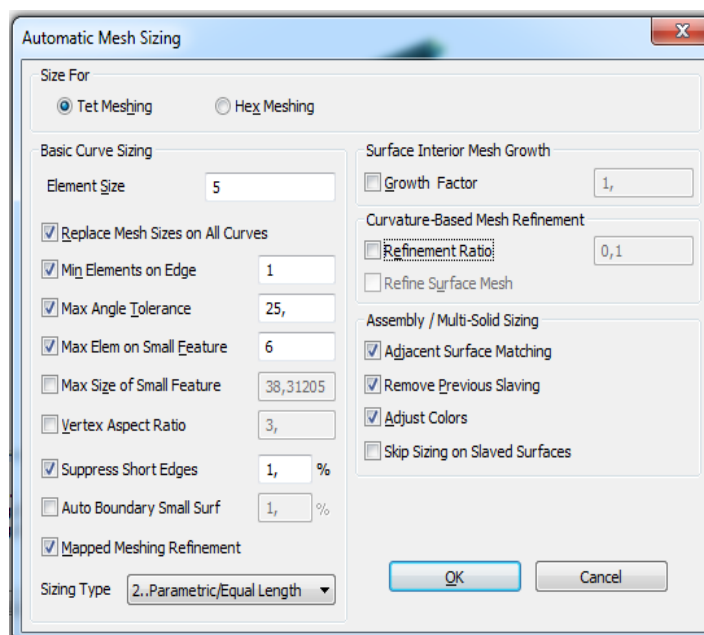
Наравно требало је водити рачуна о мрежи на додирним површинама између солида и расподелити чворовима између њих. Постоји више начина да се обезбеди идентична подела чворова на додирне површине између солида. Један од начина је да се опцијом *mesh/mesh control/ size on solid* изабере два солида (слика 15 и 16) између којих је захтевана идентична подела чворова по површини. Затим се у поље за величину зада жељена вредност величине елемената (слика 17), и у истом прозору, у подменију *Assembly/ Multi- Solid Sizing*, поља *Adjacent Surface Matching*, *Remove Previous Slaving* и *Adjust Colors*, су аутоматски озанчена, и кликне се ОК. Након тога солиди постају једнобојни, прозирних површина, док се додирне површине боје плавом бојом што означава да је подела по додирној површини идентична. Уколико се додирне површине не обоје, значи да се површине не поклапају, тј нису исте.



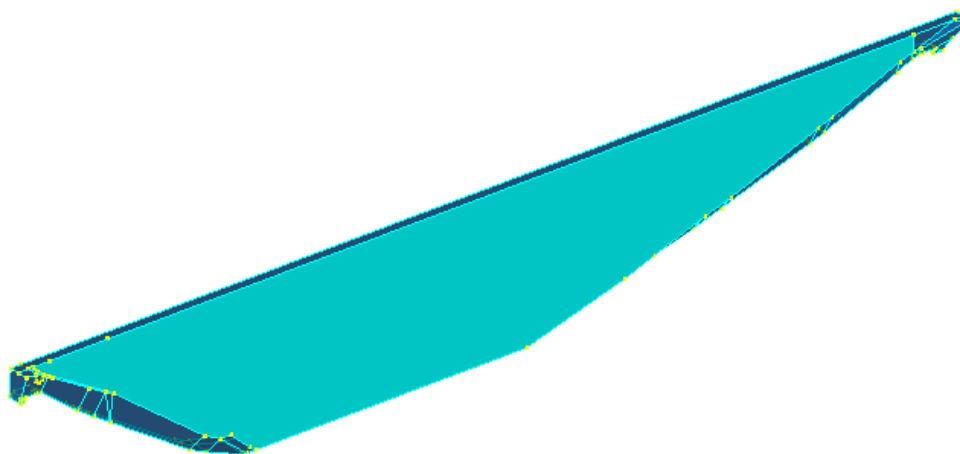
Слика 15 Сольди са заједничком контктном површином



Слика 16 Прозор који показује изабране солиде



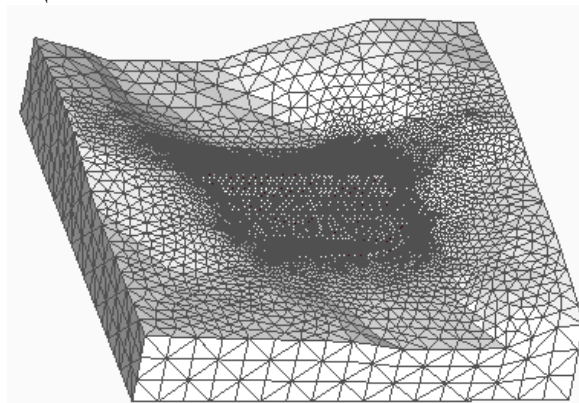
Слика 17 Прозор за унос величине мреже



Слика 18 Додирна површина између солида

Након одабира одговарајућих величина мрежа, овако се могу остварити идентичне поделе по додирним површинама. Један други начин да се ово оствари је помоћу опције *mesh/mesh control/approach to surface*. Овом опцијом се омогућава да се повежу површине (линкују) и тиме омогући идентичан распоред чворова. Прво се по ободима, на линијама додирних површина подеси идентична подела. Затим се опцијом *mesh/mesh control/approach to surface* одабере површина којој се прилази, она на коју се додељује подела чворова. Након тога се у прозору изабере опција *Matched-Link to Surface* и одабере површина са које се „преписује“ подела чворова. Понављањем ових поступака

и комбиновањем истих може се генерисати мрежа на целом моделу. Модел са коначним елементима дат је на слици 19.



Слика 19 Модел са мрежом коначних елемената

### 8.3 Оптерећења и гранични услови

Грађевина као што је брана трпи веома сложена оптерећења која делују на њу. Са обзиром да је у питању насута брана, оптерећења која су узета у разматрање су хидростатички притисак и сопствена тежина. Као додатно оптерећење у једном прорачунском случају, разматре ће се и сеизмичко оптерећење.

#### 8.3.1 Сопствена тежина

Насуте бране, као што је већ поменуто, саме по себи заузимају велику запремину. Тако да се приликом анализе оваквог једног објекта не сме занемарити маса коју оне имају као и то како та маса делује на сам терен. Тежина бране изазива слегање терена, тј. деформацију тла на коме је изграђена.

Тежина неке насуте бране, као бране која се може правити од разних хомогених или хетерогених материјала, зависи директно од запремине коју ће заузимати, али наравно и од геометрије самог објекта (пад косина, дужина, висина...). Овакво оптерећење се задаје као иницијално оптерећење, почетно оптерећење модела. Како је предмет анализе дејство хидростатичког притиска, након изарчунавања напона и померања услед сопствене тежине, добијене вредности се занемарују. Ово оптерећење се задаје преко опције *model/load/body* где се бира оса по којој се задаје оптерећење (најчешће у негативном правцу *z* осе). Овде се приликом задавања вектора дејства сопствене тежине мора водити рачуна да ли се задаје гравитационо убрзање или јединични вектор убрзања. Ово зависи од тога да ли је у карактеристикама материјала задата вредност густине или специфичне тежине (која урачунава гравитационо убрзање).

#### 8.3.2 Хидростатички притисак

Оптерећење у виду притиска се задаје на елементе. Елементи на које делује притисак су они елементи на делу површина који су покривене водом. Оптерећење се задаје на лицу елемента који представља површину модела покривену водом. На хидростатички притисак оптерећене су површине како бране тако и терена. Што се тиче дејства хидростатичког притиска, разматраће се ситуација при висини горње коте воде од 1210,3мнм.

### 8.3.3 Сеизмичко оптерећење

Сеизмичке инерцијалне силе повећавају могућност клизања косина. Ова врста анализе неизбежна је код насутих брана. Ово оптерећење се задаје преко убрзања стенске масе у правцу управно на брану, где убрзање износи  $0,05g$ .

### 8.4 Задавање граничних услова

Правилно задавање граничних услова је неопходно како би се модел очекивано понашао. Прво се задају ограничења померања у хоризонталном правцу. Овај вид оптерећења се задаје на усправним страницама модела. На површинама терена управним на раван  $xu$  задаје се услов симетрије. Ово се задаје како би се узело у обзир дејство околне стенске масе изван модела. Конкретно, на површинама, тј. на чворовима тих површина, паралелним  $uz$  задаје се ограничење померања у правцу  $x$  осе, док се на чворовима површинама паралелним  $zx$  задаје ограничење кретања у  $u$  правцу. Дно модела се фиксира, односно задаје се ограничење померања у свим правцима.

## 9. Прорачунске ситуације

Како би се анализирао степен сигурности, модел се мора испитати на деловање реалних оптерећења. У овом раду представљене су две прорачунске ситуације. Прва прорачунска ситуација представља случај када на модел делује само хидростатички притисак, када је висина воде на коти 1210,3мнм.

Друга прорачунска ситуација представља ситуацију деловања хидростатичког притиска, где је вода на истој коти и сеизмичког оптерећења.

### 9.1 Прикази резултата

Резултати ће бити приказани у појединим пресецима за сваку прорачунску ситуацију. Пресеци у којима ће бити приказани резултати су:

- Подужни пресек по оси бране ( $y=0$ )
- Попречни пресек 1 ( $x=105\text{m}$ )
- Попречни пресек 2 ( $x=128\text{m}$ )
- Попречни пресек 3 ( $x=150\text{m}$ )
- Попречни пресек 4 ( $x=168\text{m}$ )
- Попречни пресек 5 ( $x=195\text{m}$ )
- Попречни пресек 6 ( $x=214\text{m}$ )
- Попречни пресек 7 ( $x=240\text{m}$ )

Величине које се приказују као резултати напонско деформационе анализе су:

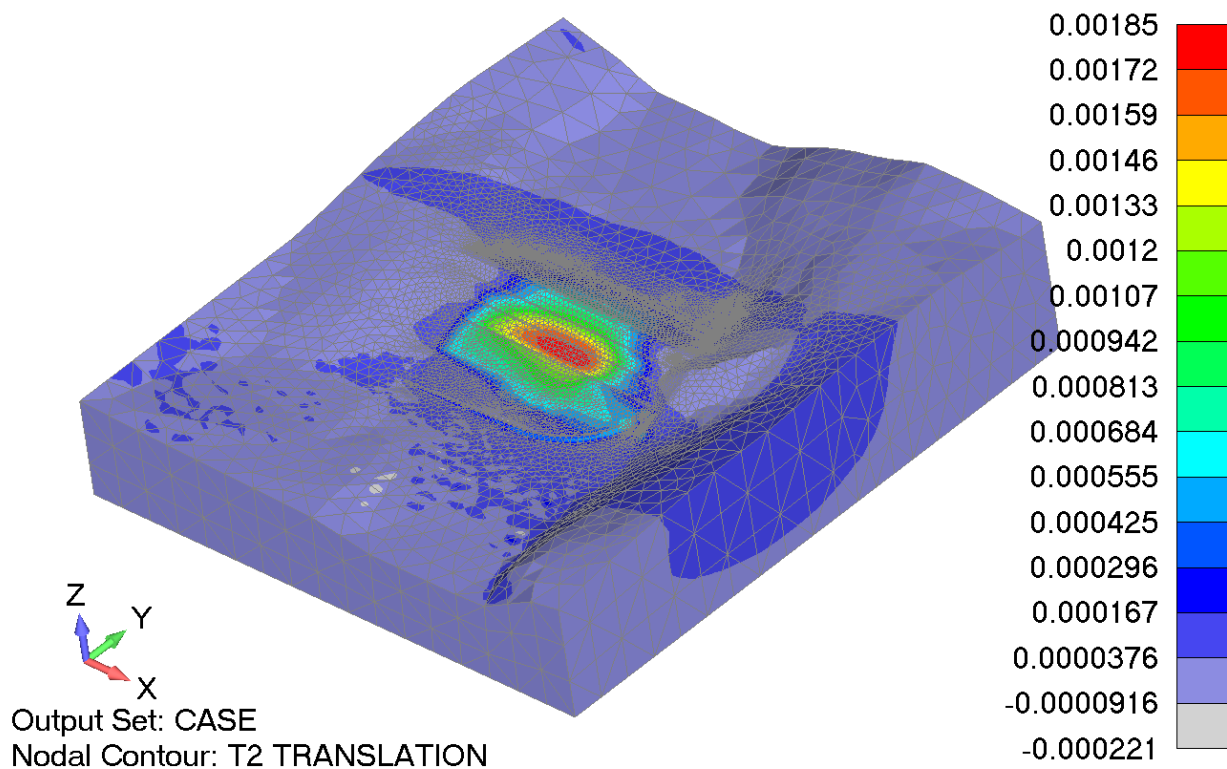
1. Померања у у правцу тока реке правцу
2. Вериткална померања
3. Укупна померања
4. Пластичне деформације

#### 9.1.1 Прва прорачунска ситуација

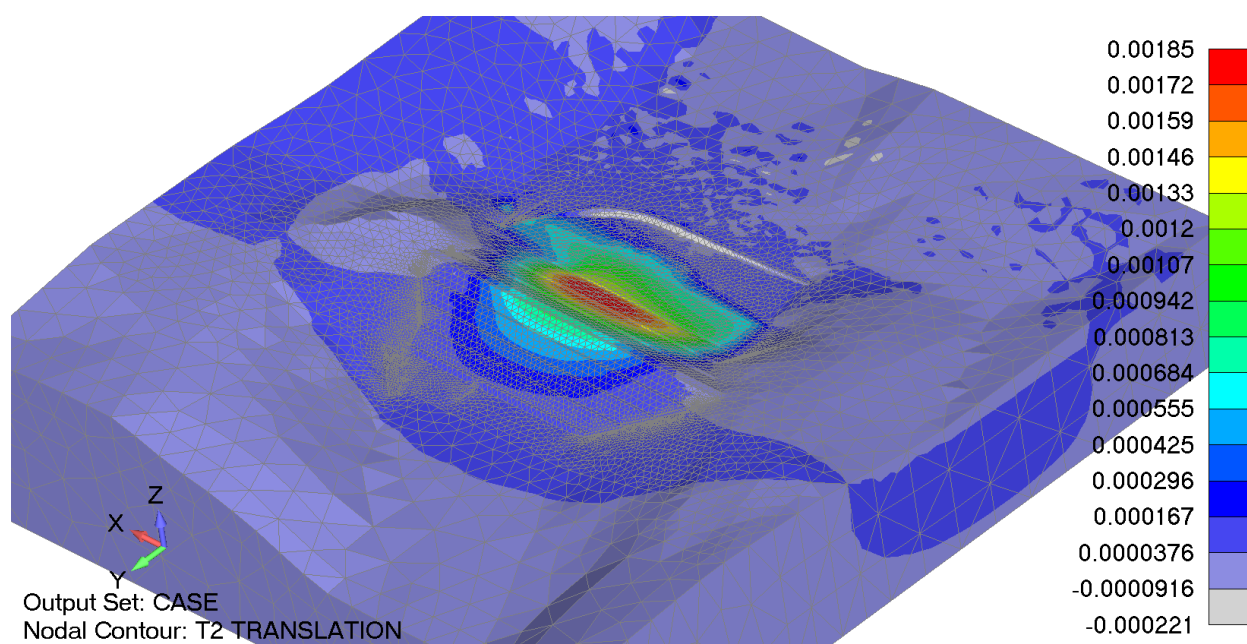
Прва прорачунска ситуација подразумева оптерећење бране при коти воде на 1210,3 мнм. Приказ резултата на 3D моделу (Слика 20) представља поља кретања у правцу тока реке узводног лица. Такође су приказани резултати за низводно лице (Слика 21).

Резултати добијени у наведеним пресецима биће приказани следећим редоследом

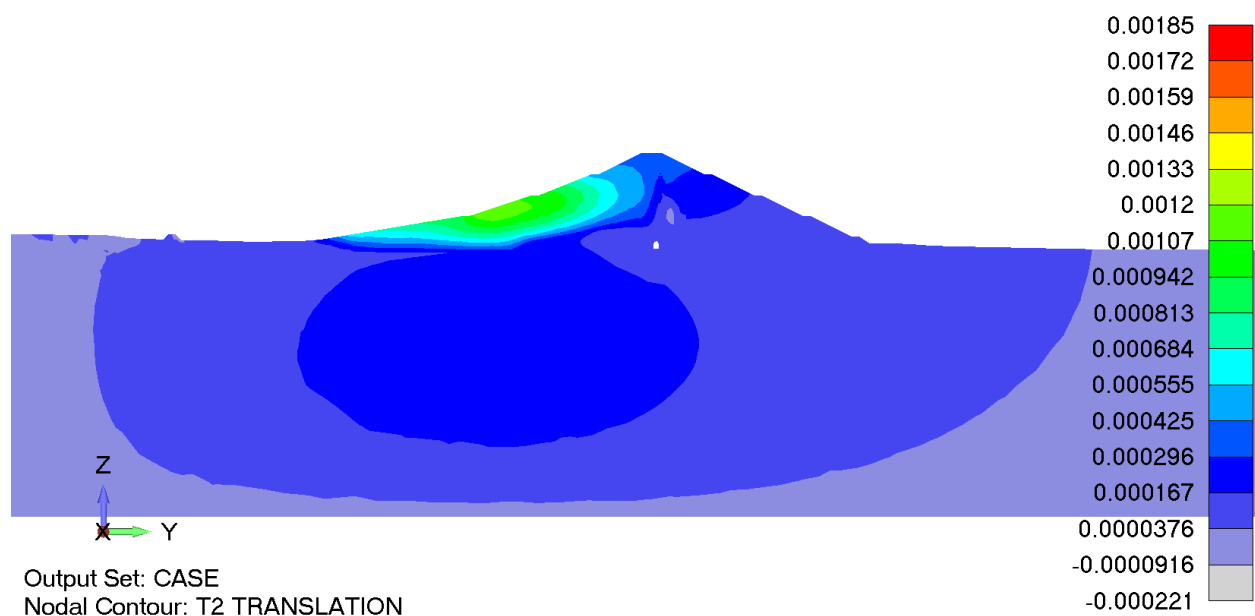
- Померање у правцу тока реке (Слика 22-Слика 29)
- Померање у вертикалном правцу (Слика 30-Слика 37)
- Укупна померања (Слика 38-Слика 45)
- Пластичне деформације (Слика 46-Слика 53)



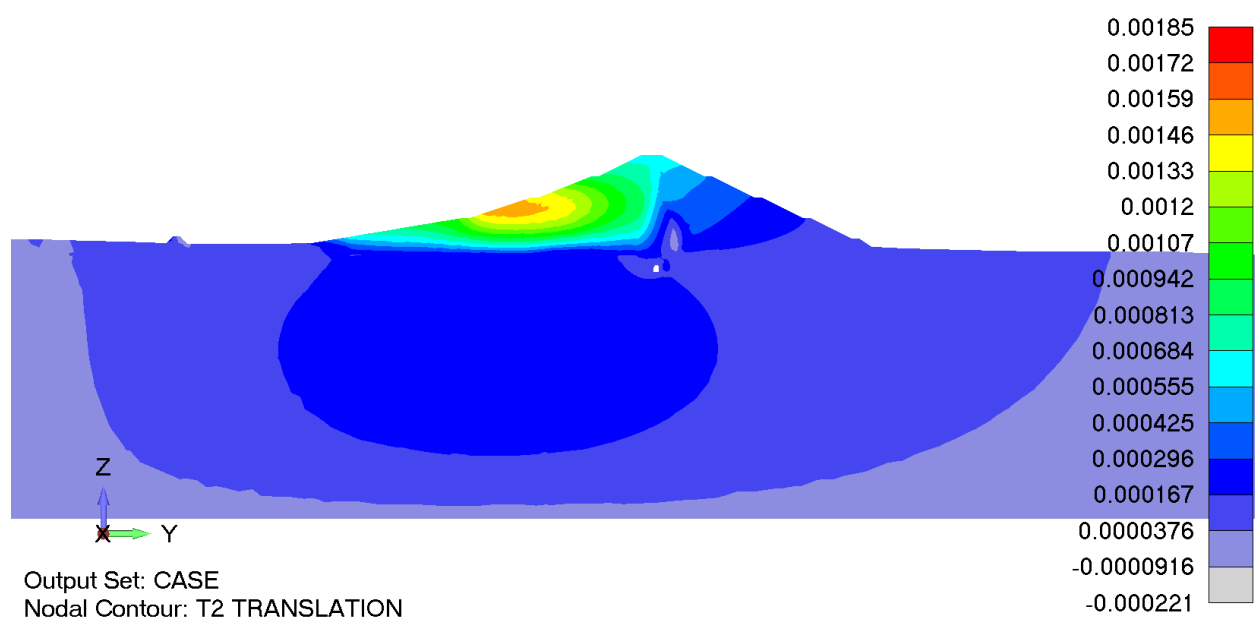
Слика 20 Померање узводног лица бране у правцу тока реке



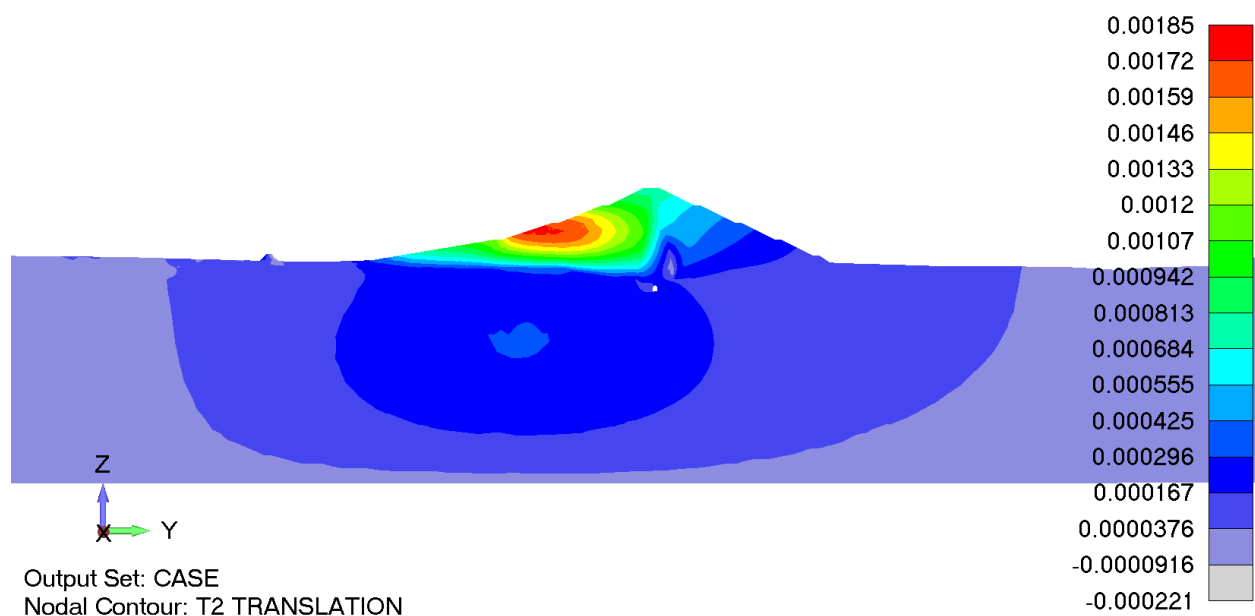
Слика 21 Померање низводног лица бране у правцу тока реке



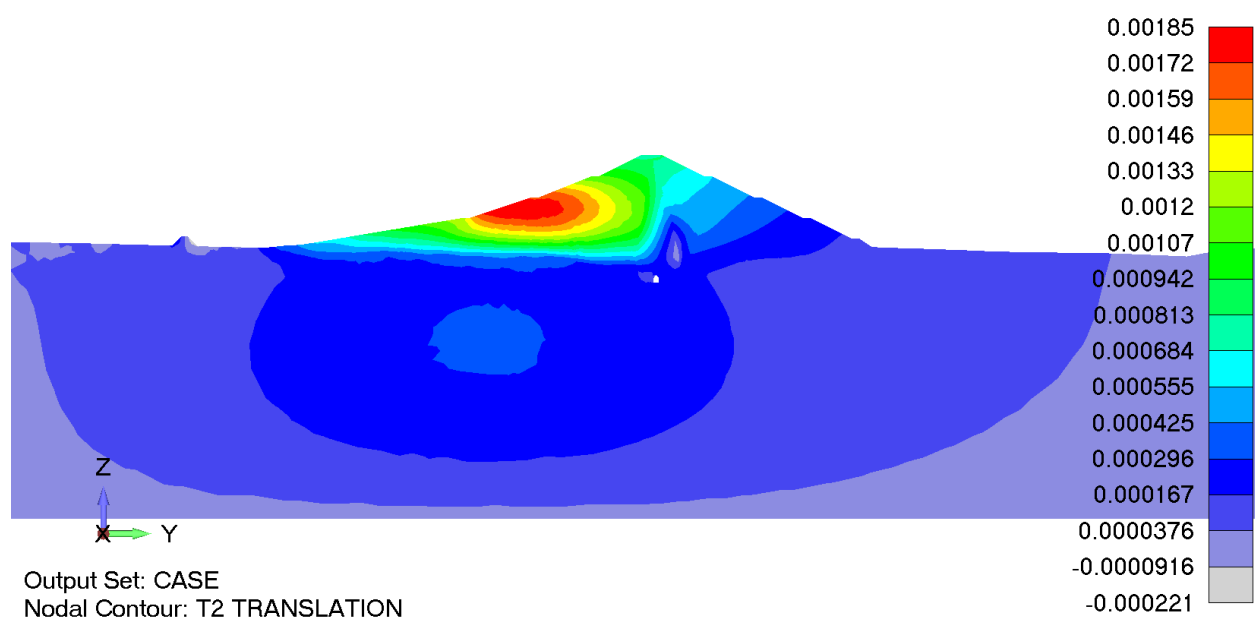
Слика 22 Померање у правцу тока реке  $x=105$



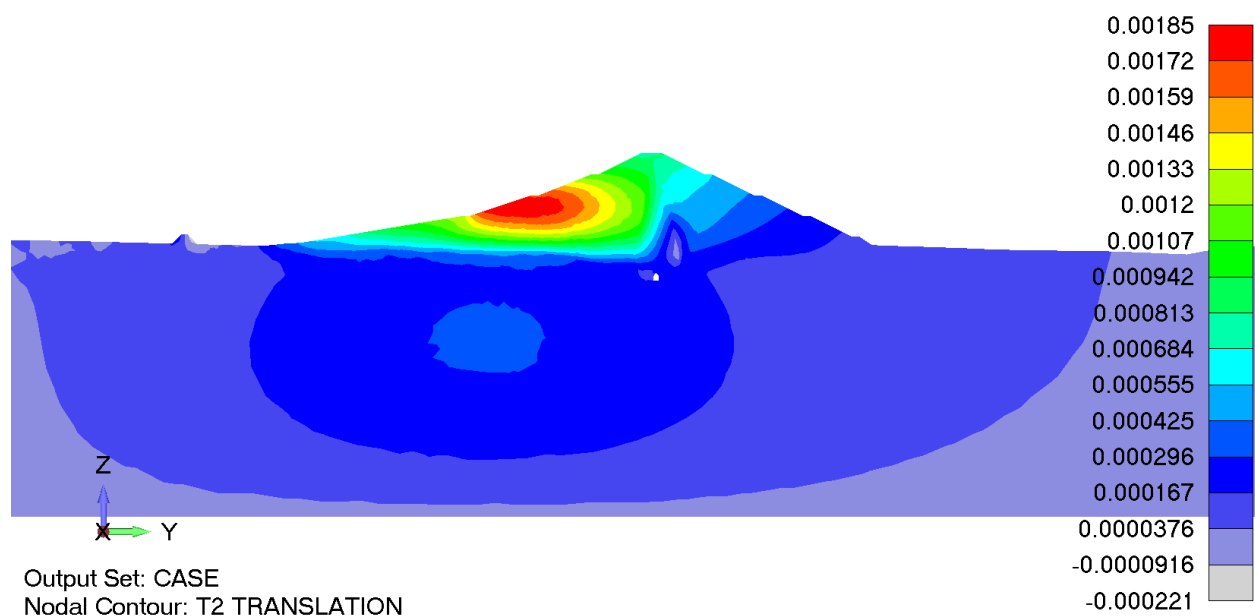
Слика 23 Померање у правцу тока реке  $x=128$



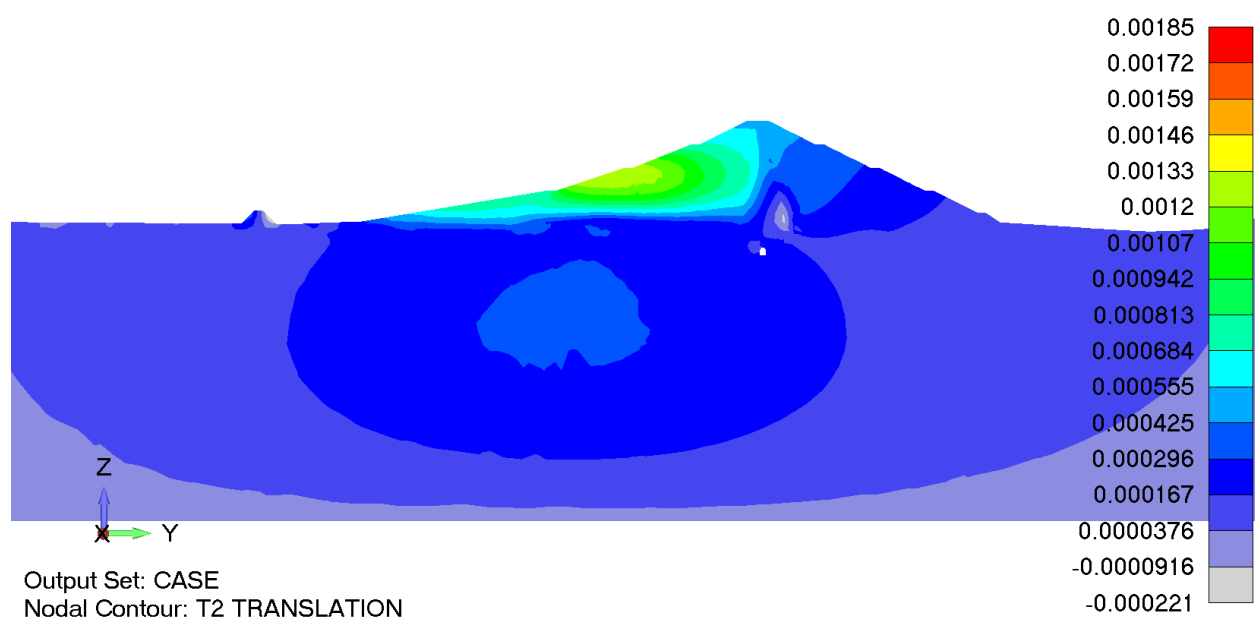
Слика 24 Померање у правцу тока реке  $x=150$



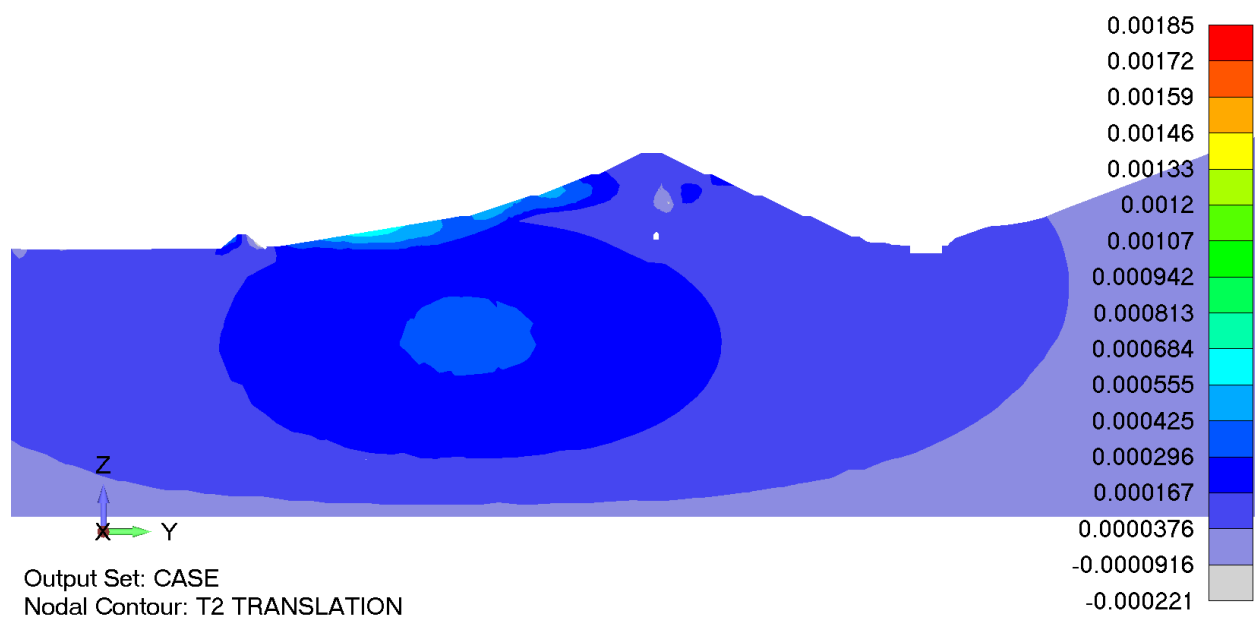
Слика 25 Померање у правцу тока реке  $x=168$



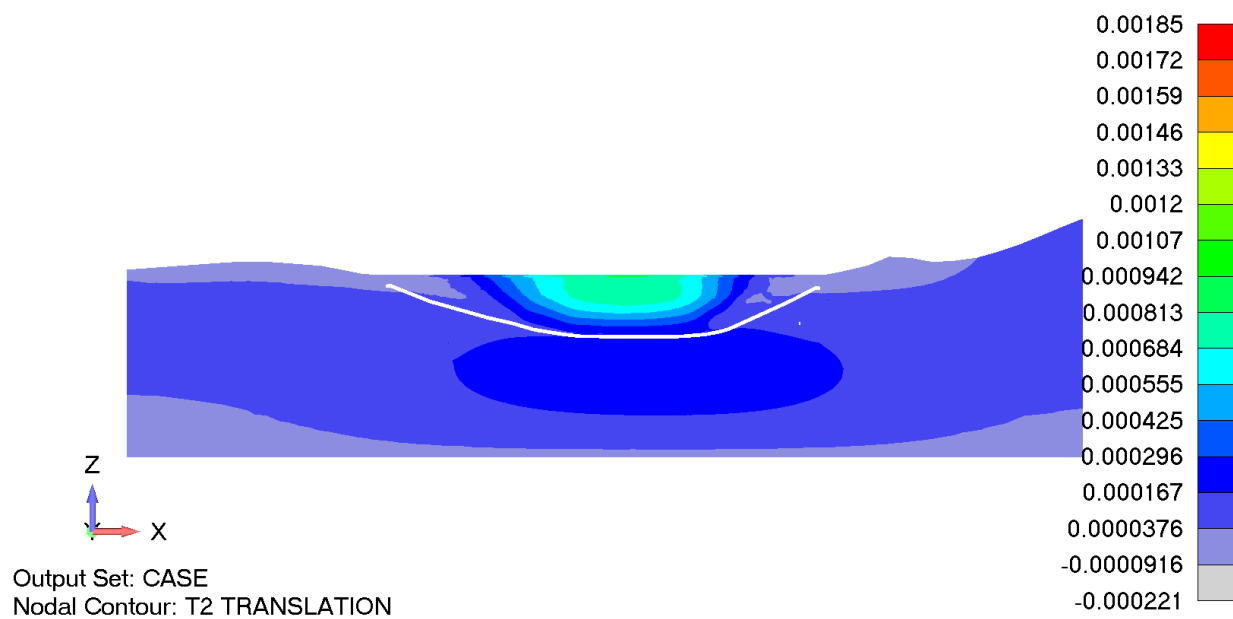
Слика 26 Померање у правцу тока реке  $x=195$



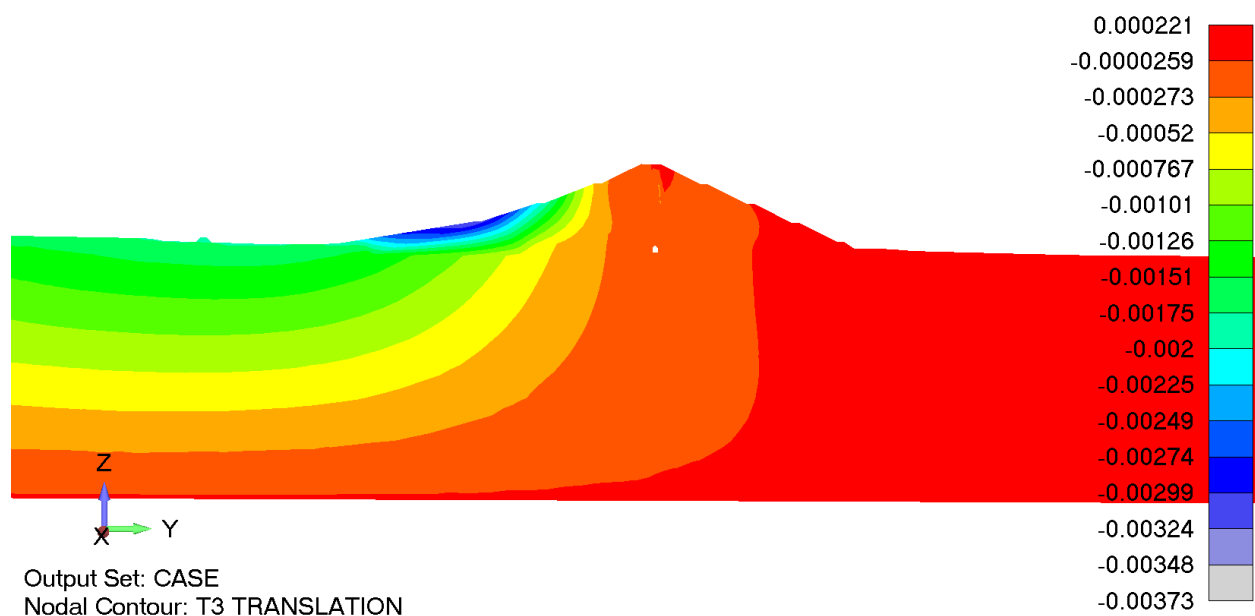
Слика 27 Померање у правцу тока реке  $x=214$



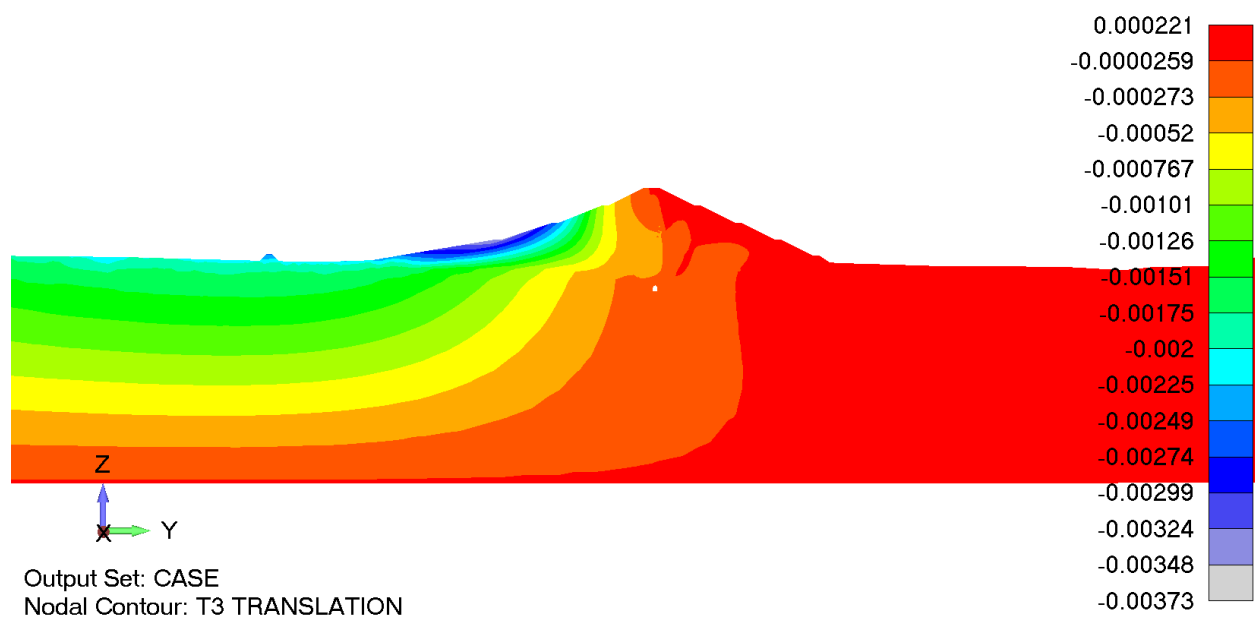
Слика 28 Померање у правцу тока реке  $x=240$



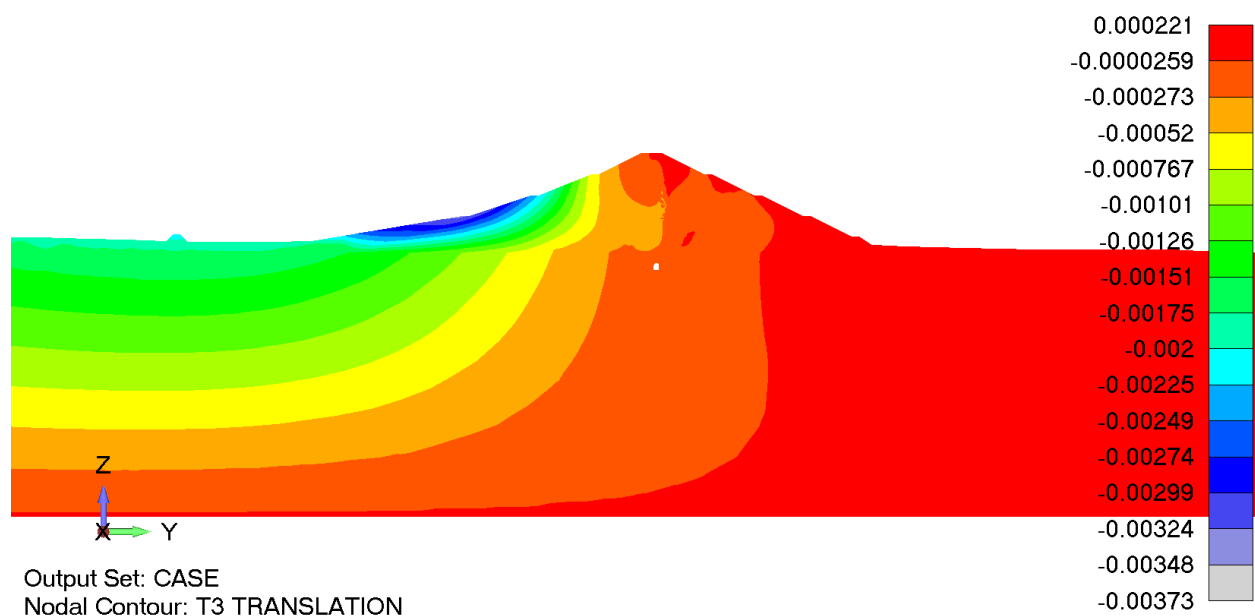
Слика 29 Померање у правцу тока реке  $y=0$



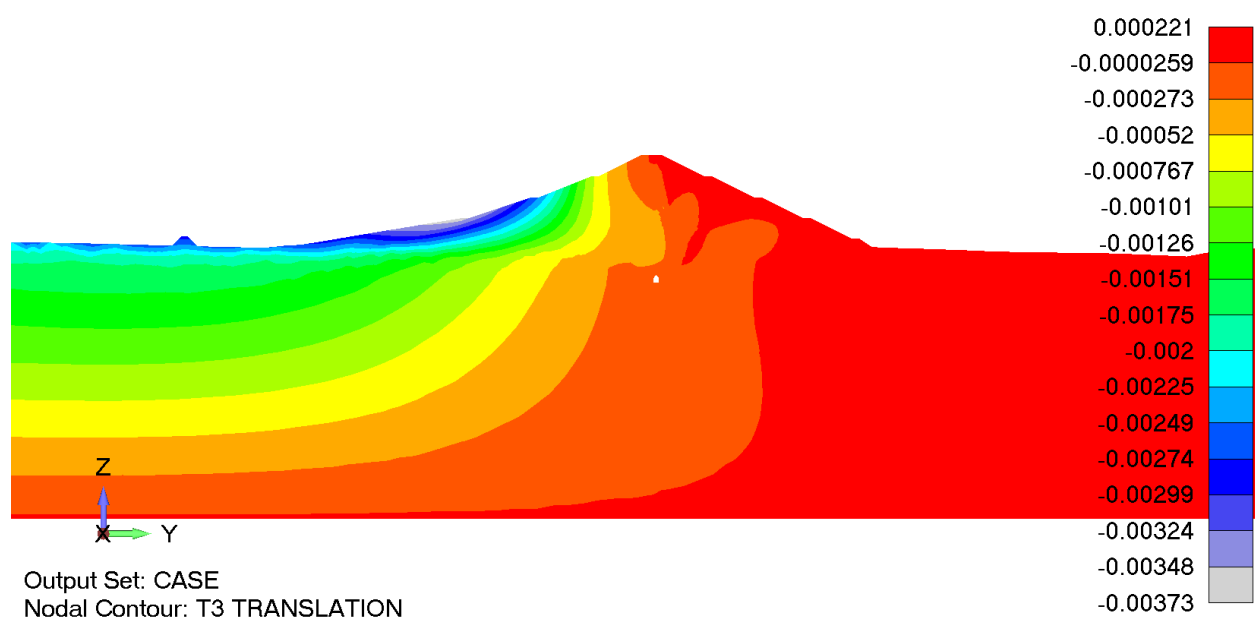
Слика 30 Вертикано померање за  $x=105$



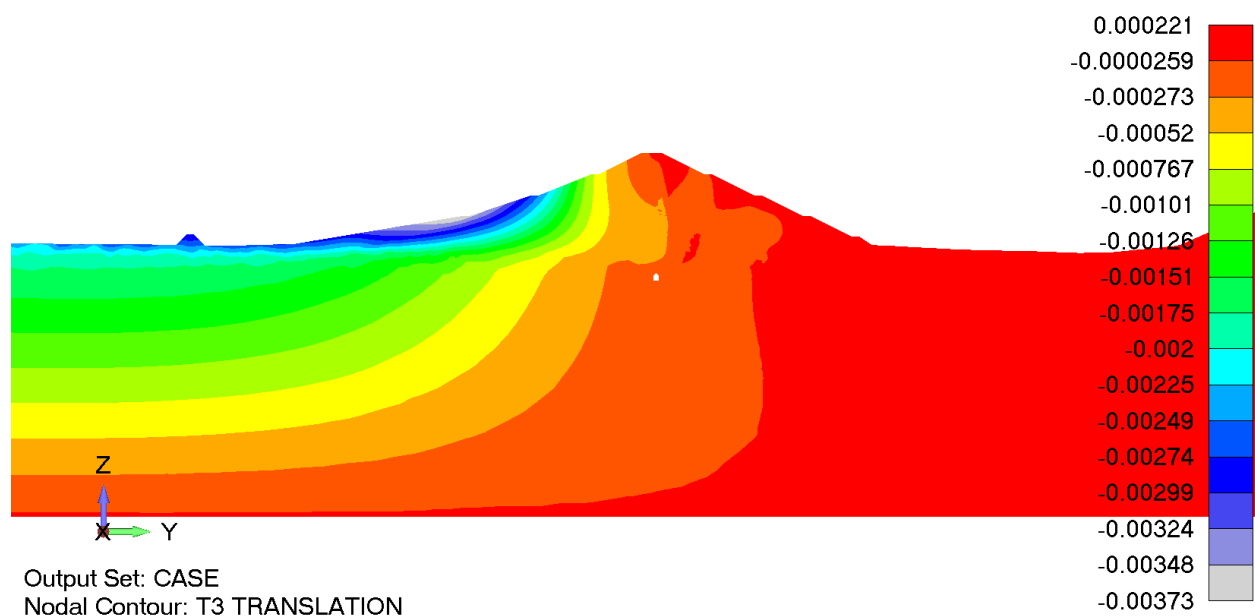
Слика 31 Вертикано померање за  $x=128$



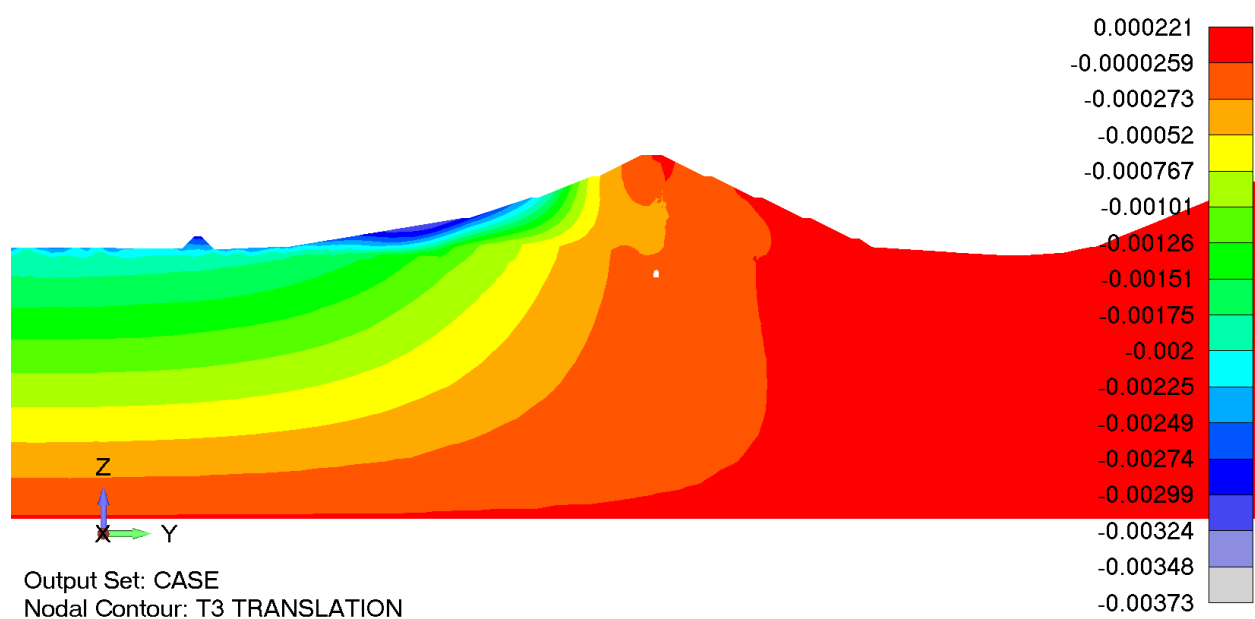
Слика 32 Вертикано померање за  $x=150$



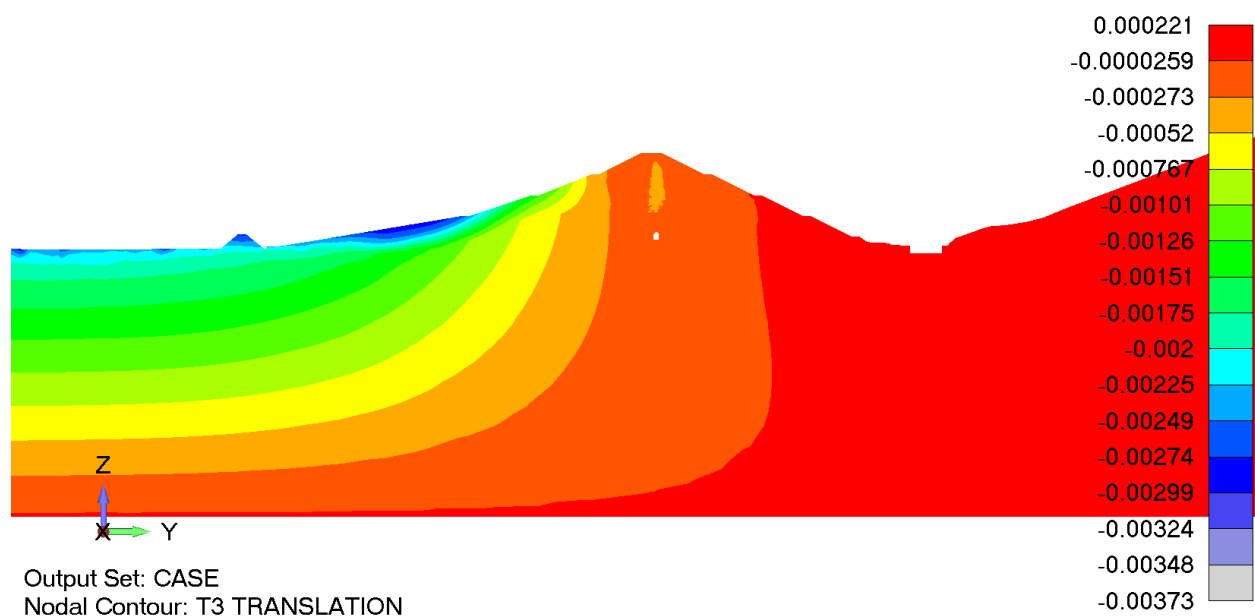
Слика 33 Вертикано померање за  $x=168$



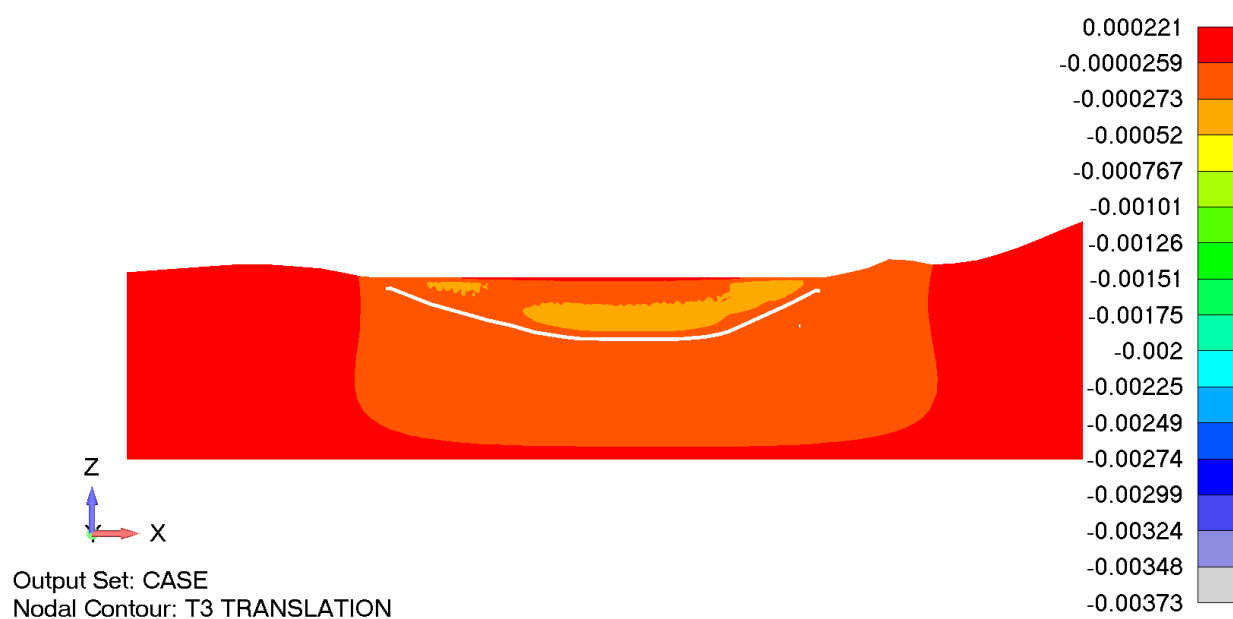
Слика 34 Вертикано померање за  $x=195$



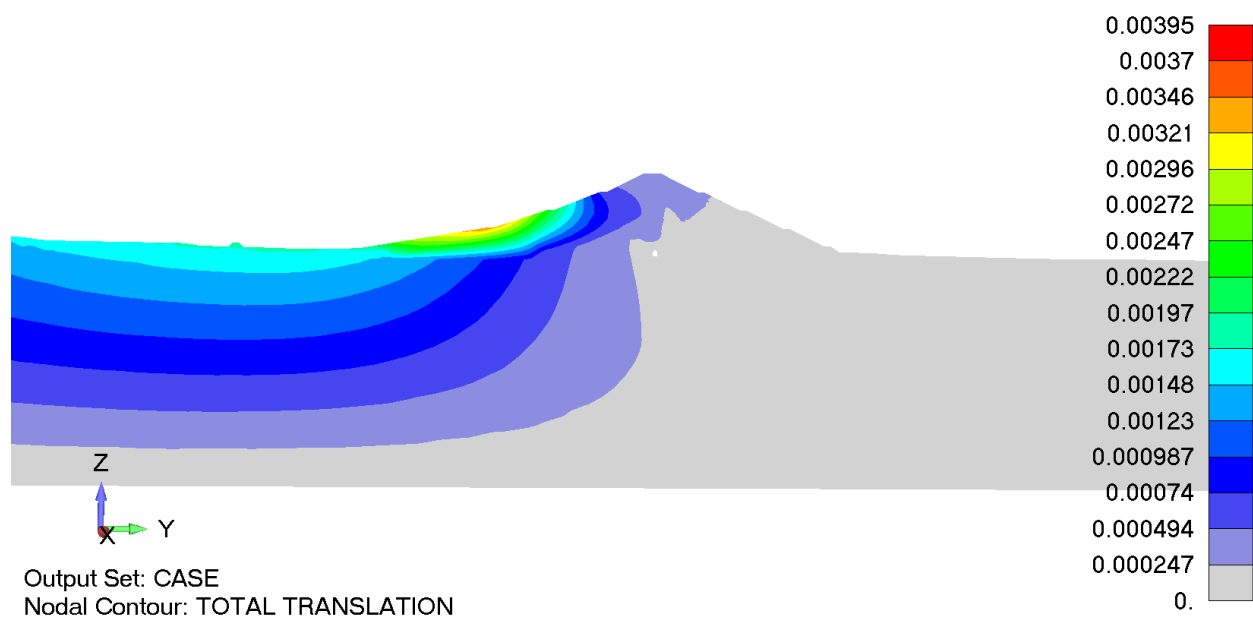
Слика 35 Вертикано померање за  $x=214$



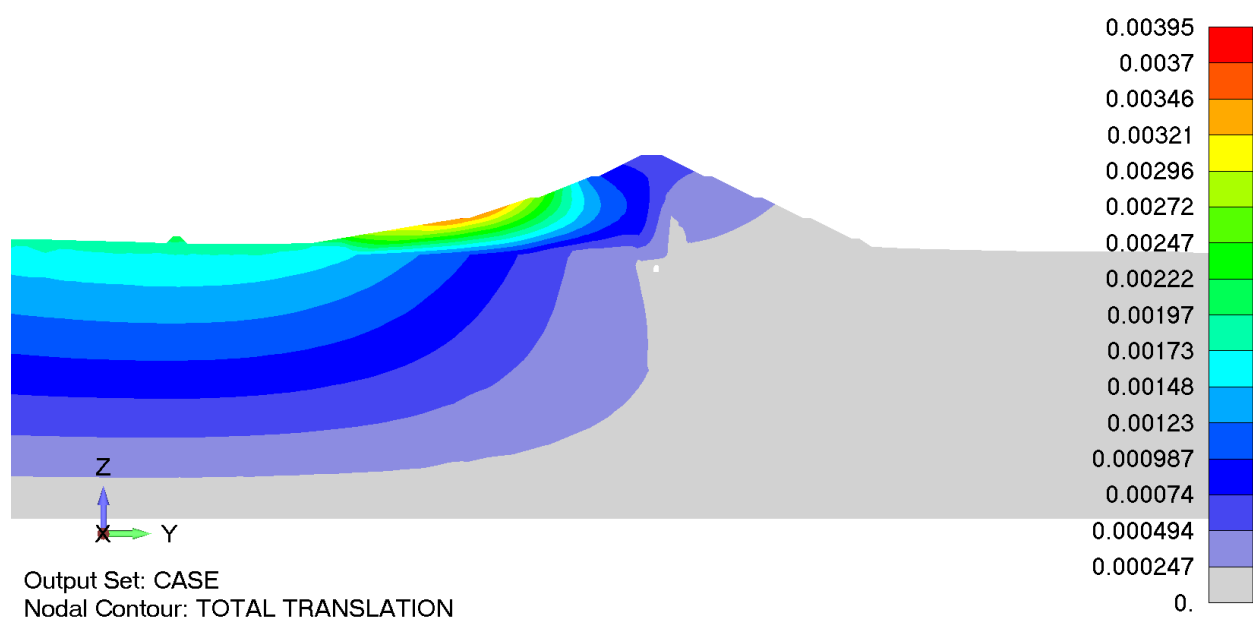
Слика 36 Вертикано померање за  $x=240$



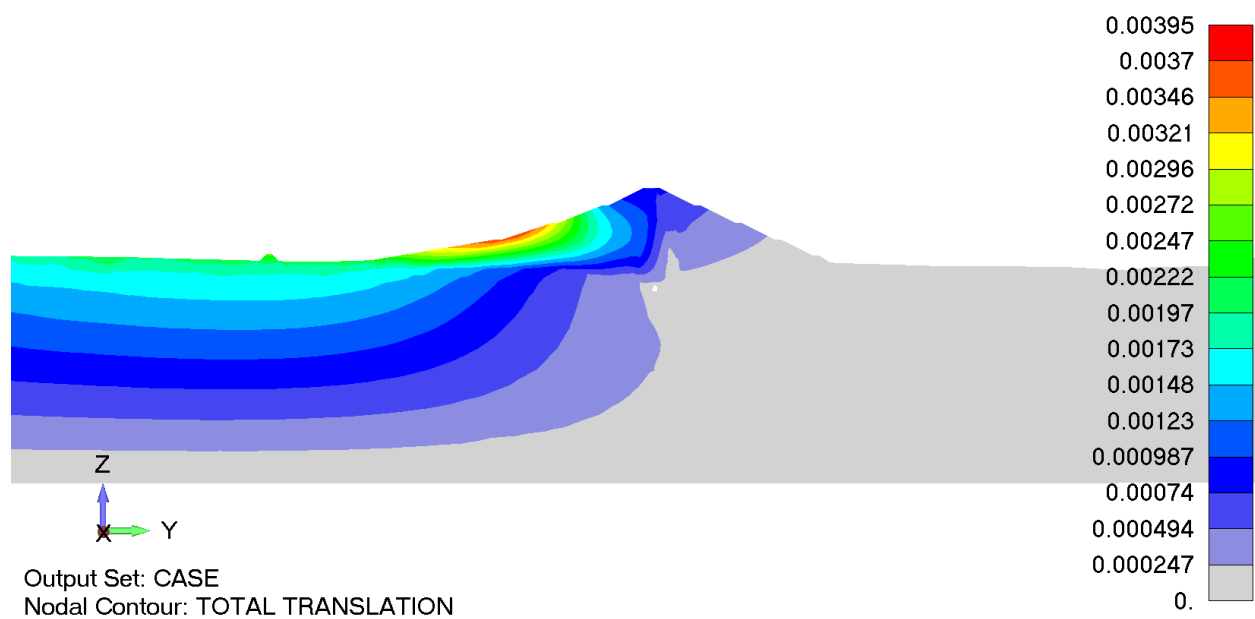
Слика 37 Вертикано померање за  $y=0$



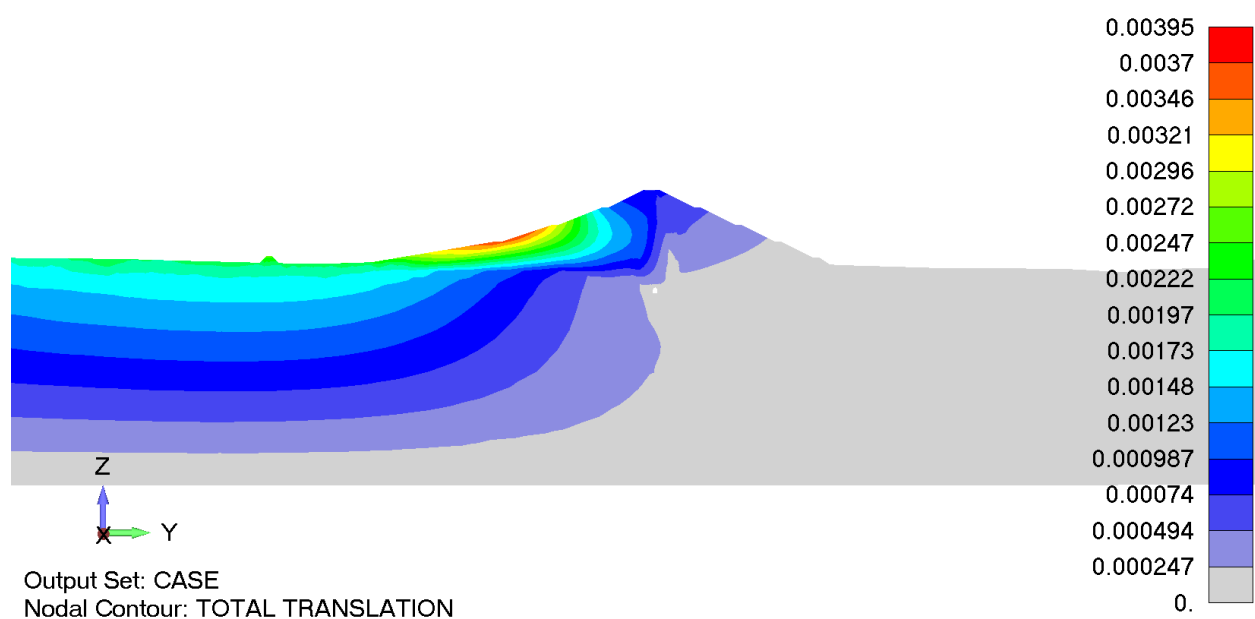
Слика 38 Укупна померања за  $x=105$



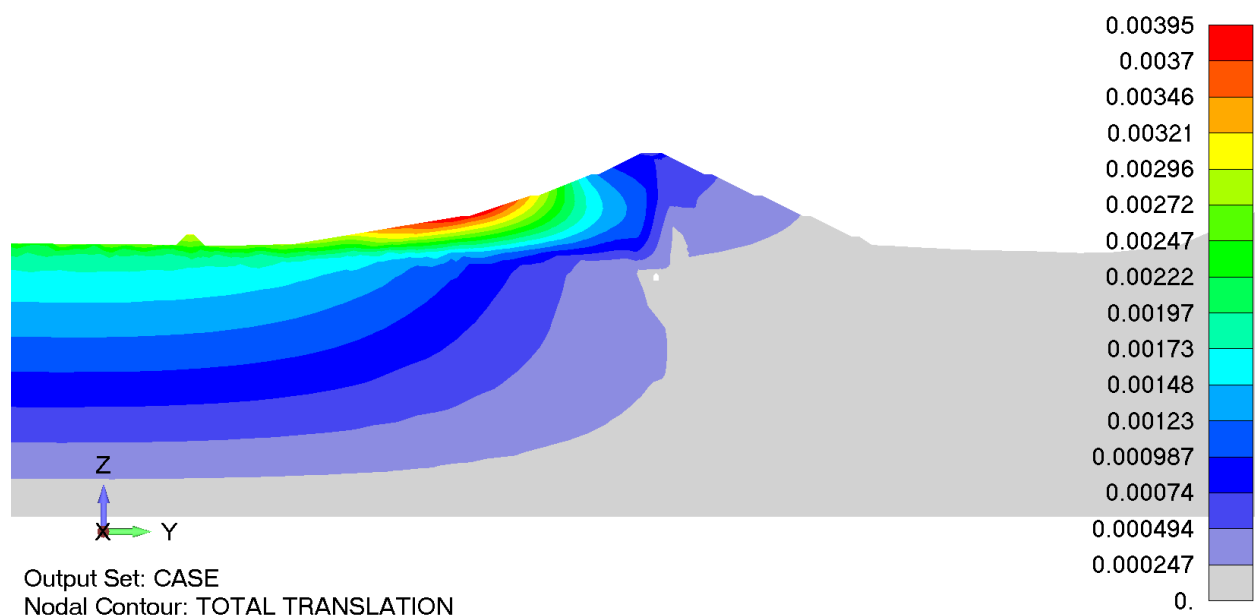
Слика 39 Укупна померања за за  $x=128$



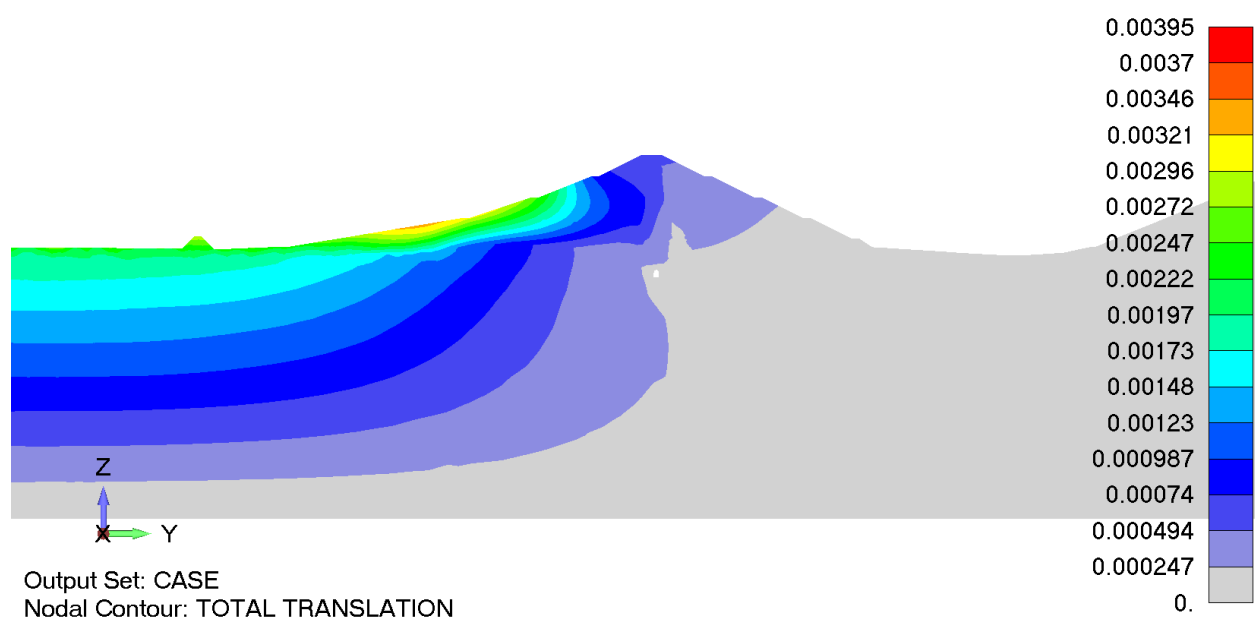
Слика 40 Укупна померања за за  $x=150$



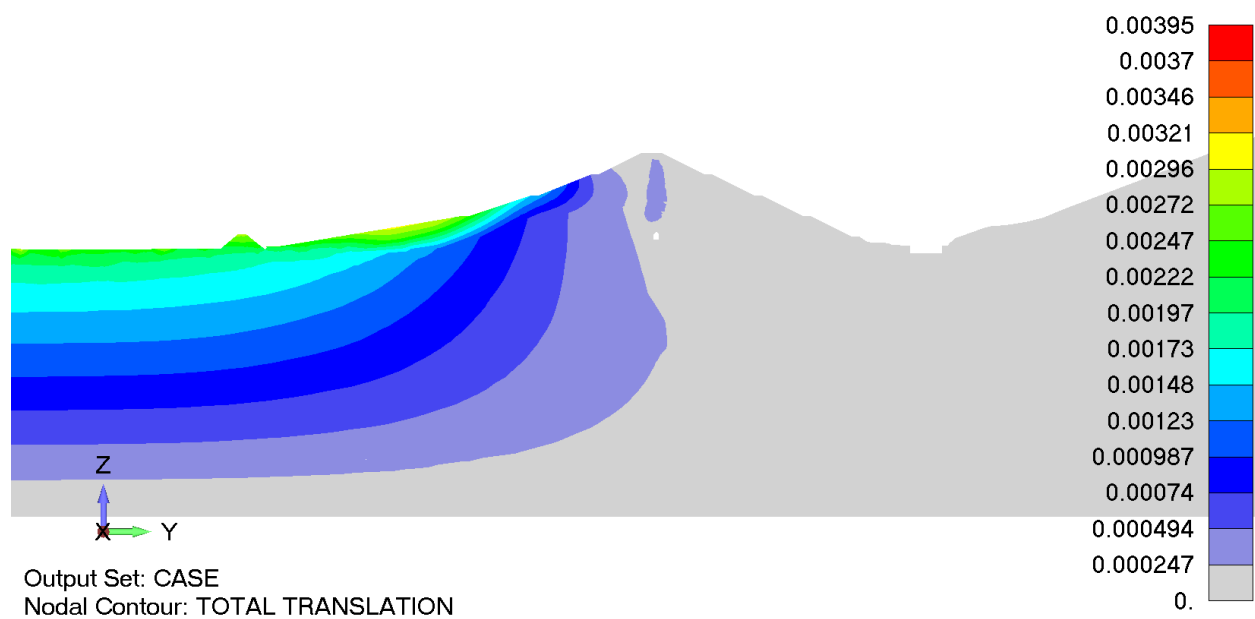
Слика 41 Укупна померања за за  $x=168$



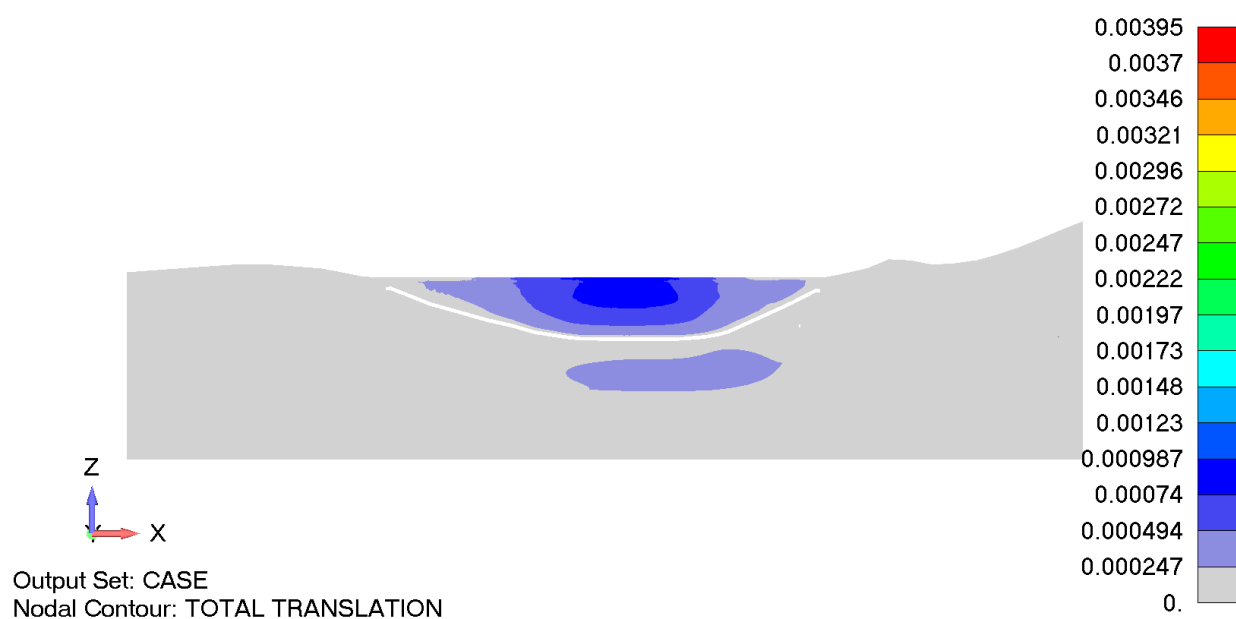
Слика 42 Укупна померања за  $x=195$



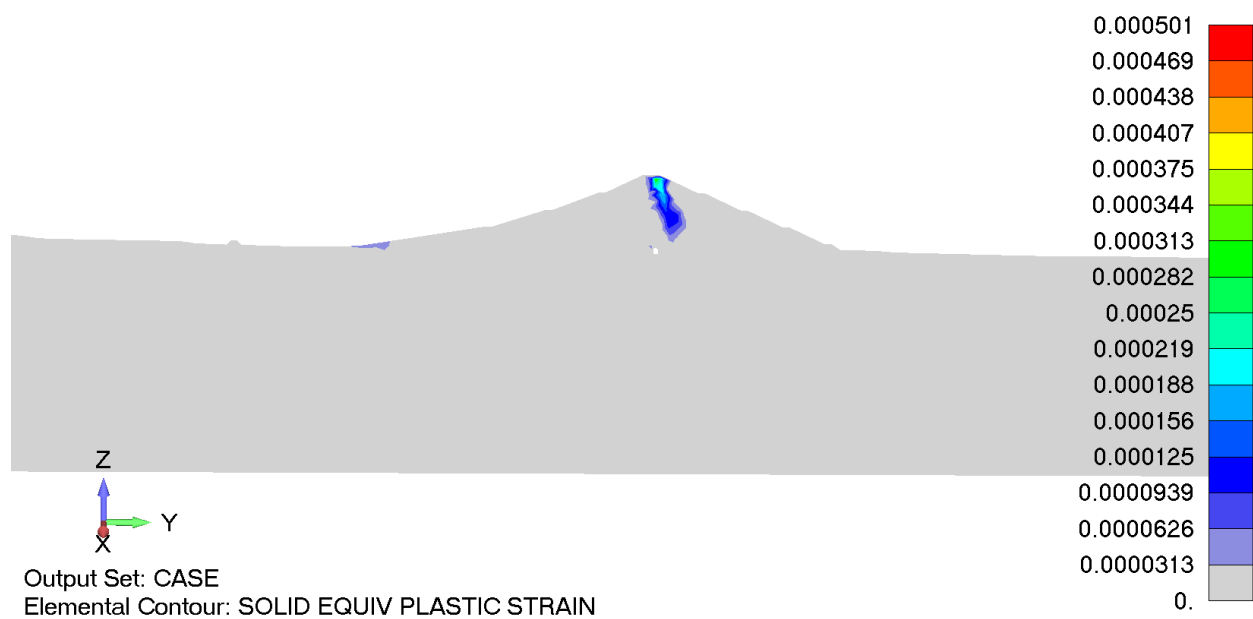
Слика 43 Укупна померања за  $x=214$



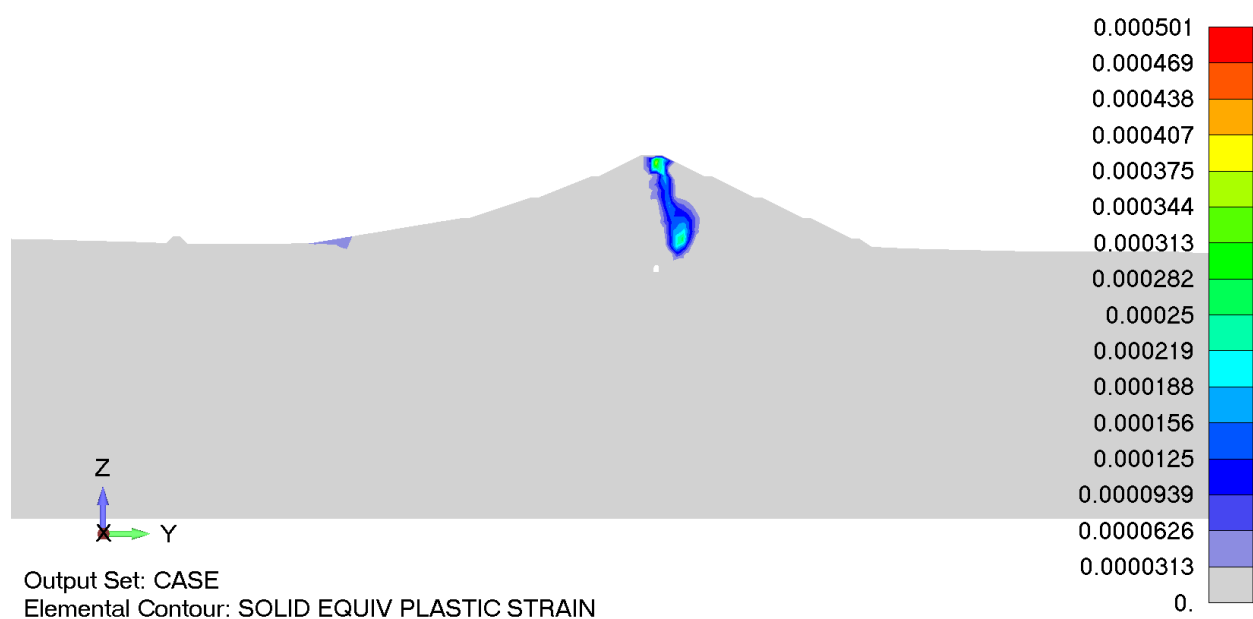
Слика 44 Укупна померања за  $x=240$



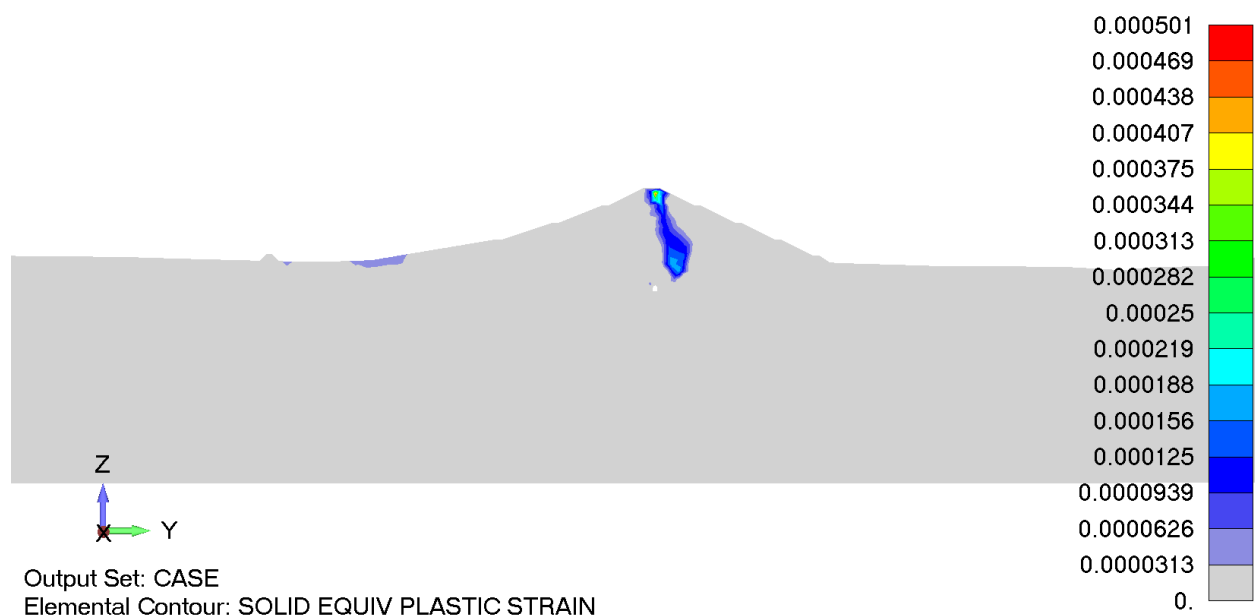
Слика 45 Укупна померања за  $y=0$



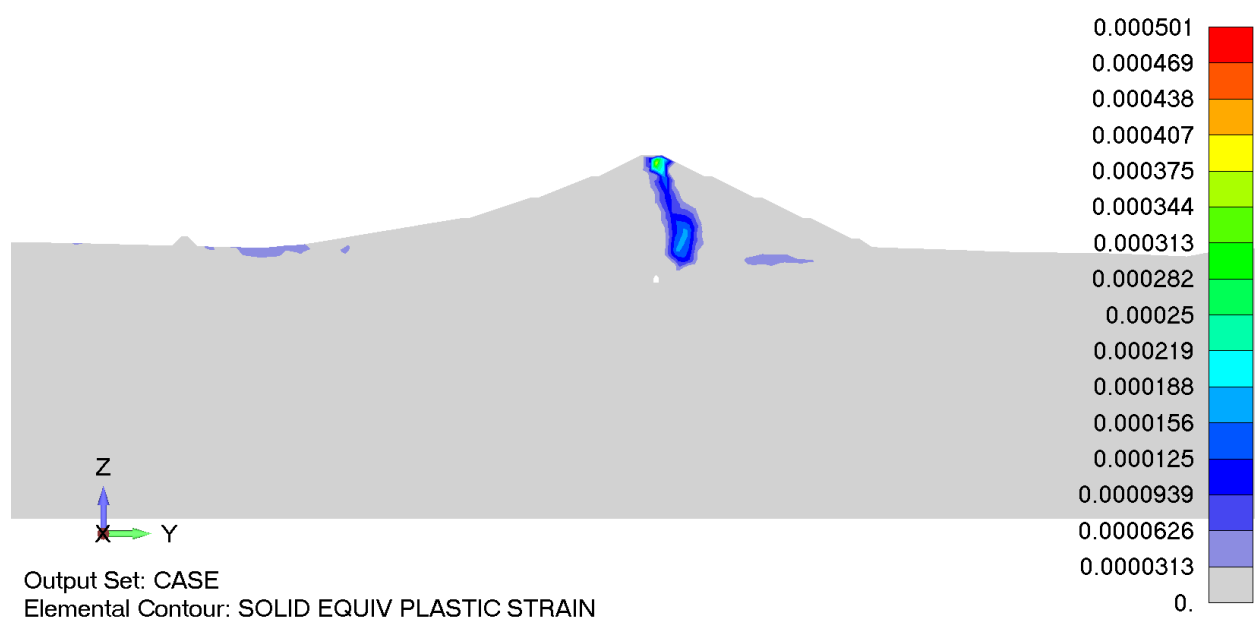
Слика 46 Пластичне деформације у пресеку  $x=105$



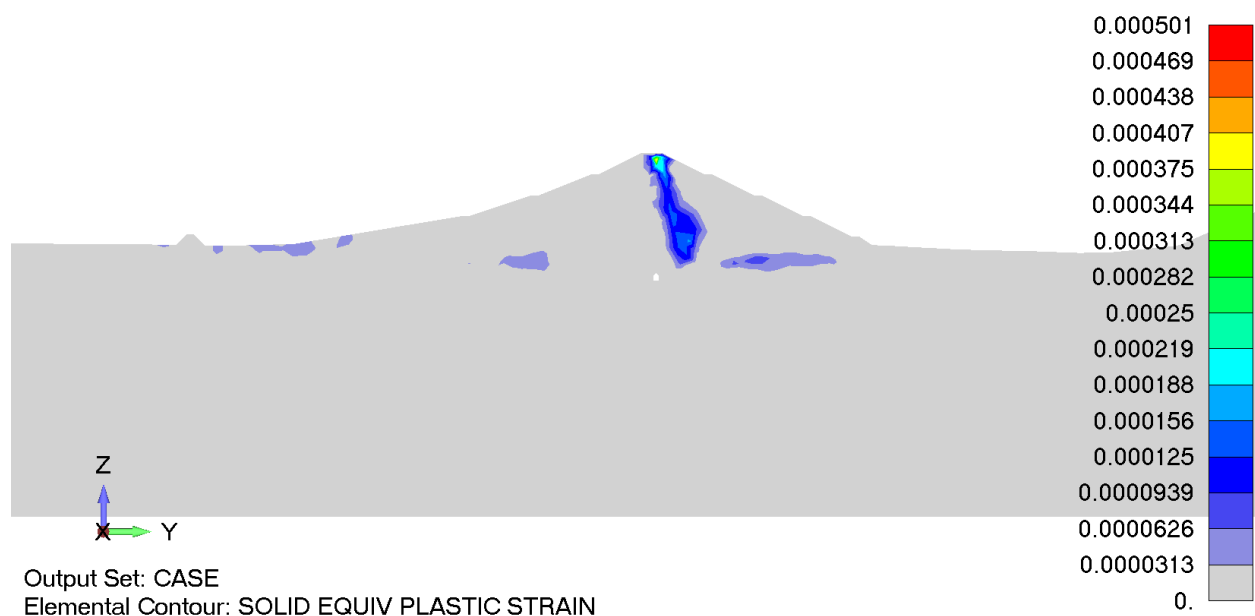
Слика 47 Пластичне деформације у пресеку  $x=128$



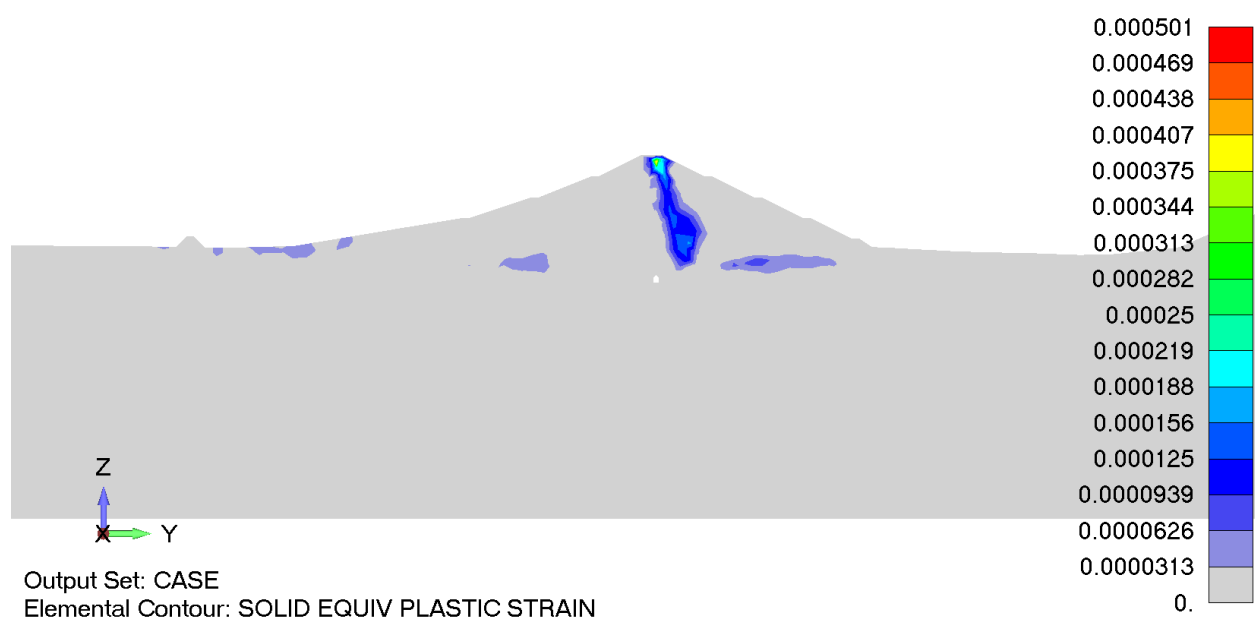
Слика 48 Пластичне деформације у пресеку  $x=150$



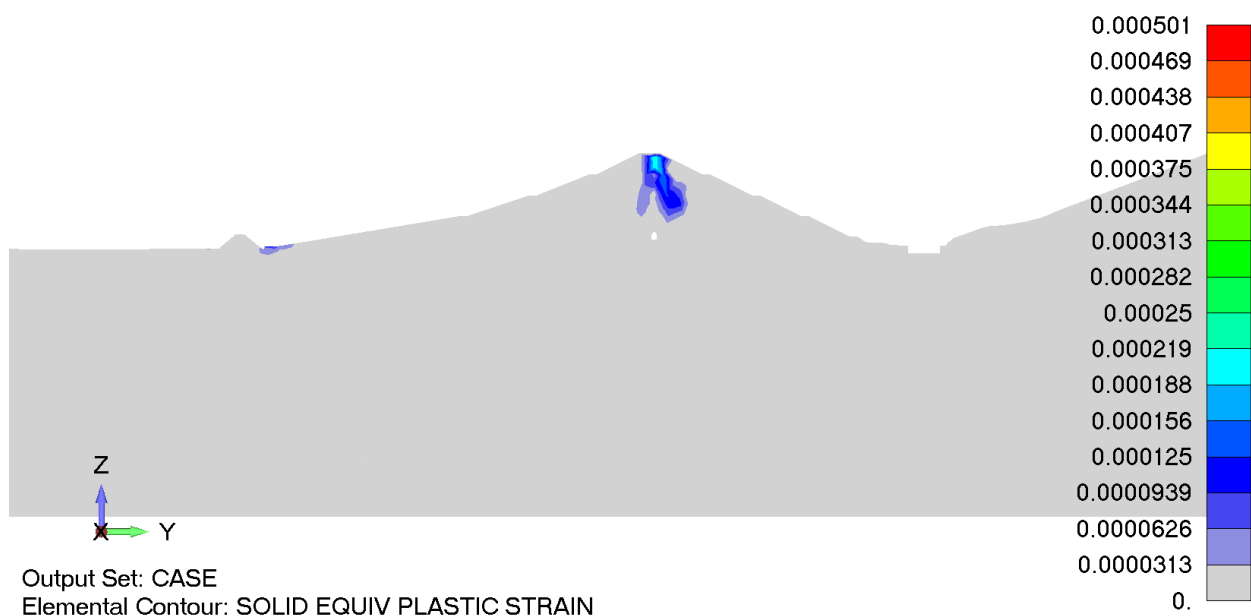
Слика 49 Пластичне деформације у пресеку  $x=168$



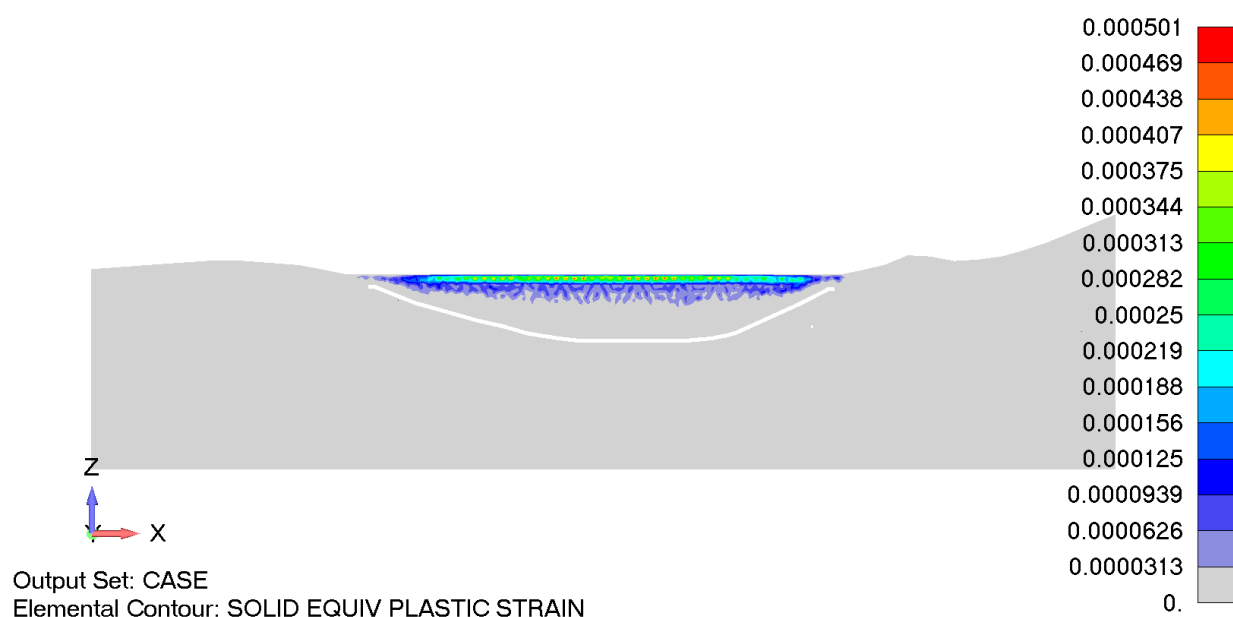
Слика 50 Пластичне деформације у пресеку  $x=195$



Слика 51 Пластичне деформације у пресеку  $x=214$



Слика 52 Пластичне деформације у пресеку  $x=240$



Слика 53 Пластичне деформације у пресеку  $y=0$

На основи приказаних резултата на сликама 3D модела (Слика 20 и Слика 21) и слика резултата наведеним у пресецима (Слика 22-Слика 29) примећује се да су вредности померања у правцу тока реке највеће на узводном лицу бране. Ово се може закључити и са слика поља укупног померања (Слика 38 - Слика 45). Пластичне деформације достижу највеће вредности (Слика 46 - Слика 53) у глиеном језгру бране. Нешто веће вредности пластичних деформација се јављају у глиеном језгру у околини врха на средини бране.

### 9.1.2 Друга прорачунска ситуација

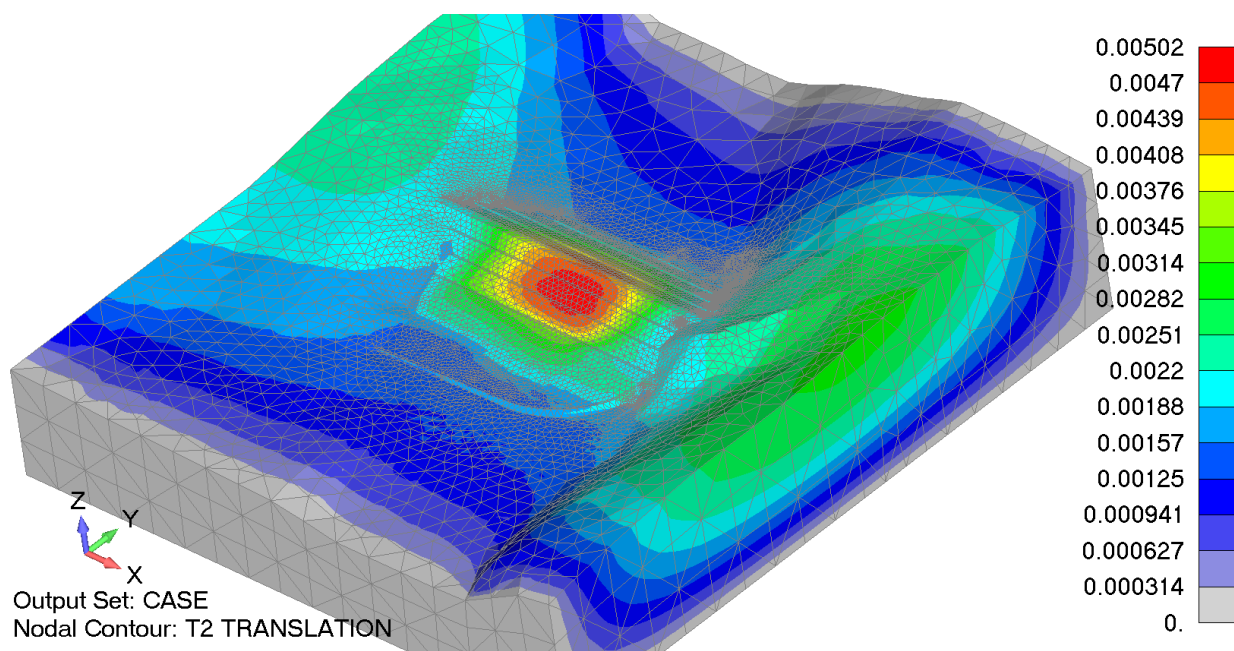
У другој прорачунској ситуацији се поред хидростатичког притиска задаје и сеизмичко оптерећење. Сеизмичко оптерећење се задаје преко убрзања стенске масе, при чему убрзање износи  $0,05g$ . Резултати добијени приликом ове врсте оптерећења. Прво су гати изиметарски погледи за добијене резултате напонско деформационе анализе за величину померања у правцу тока реке. На слици (Слика 54) се налази поље померања за узводно лице.

Прикази резултата за прво су дати у изиметријском погледу, и то следећим редоследом:

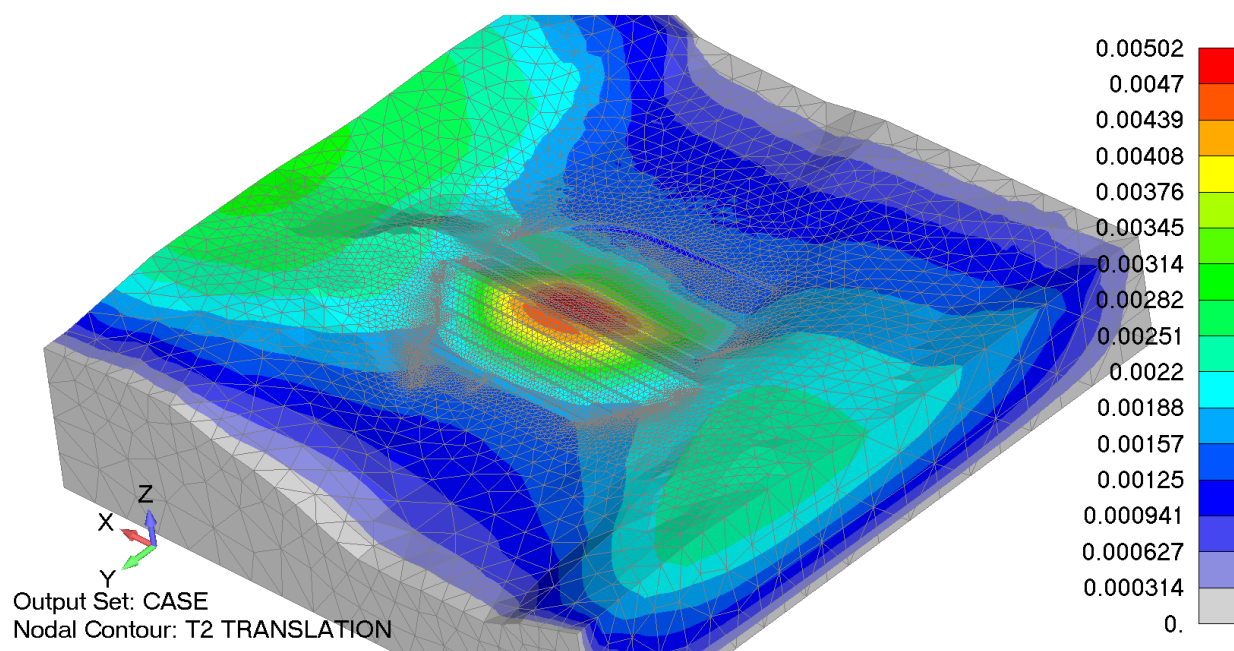
- Померања у правцу тока реке за узводно и низводно лице бране (Слика 54 и Слика 55)
- Померања у вертикалном правцу за узводно и низводно лице бране (Слика 56-Слика 57)
- Укупна померања за узводно и низводно лице (Слика 58-Слика 59)
- Пластичне деформације узводног и низводног лица (Слика 60- Слика 61)

Даље ће се резултати приказати за претходно наведене пресеке следећим редоследом:

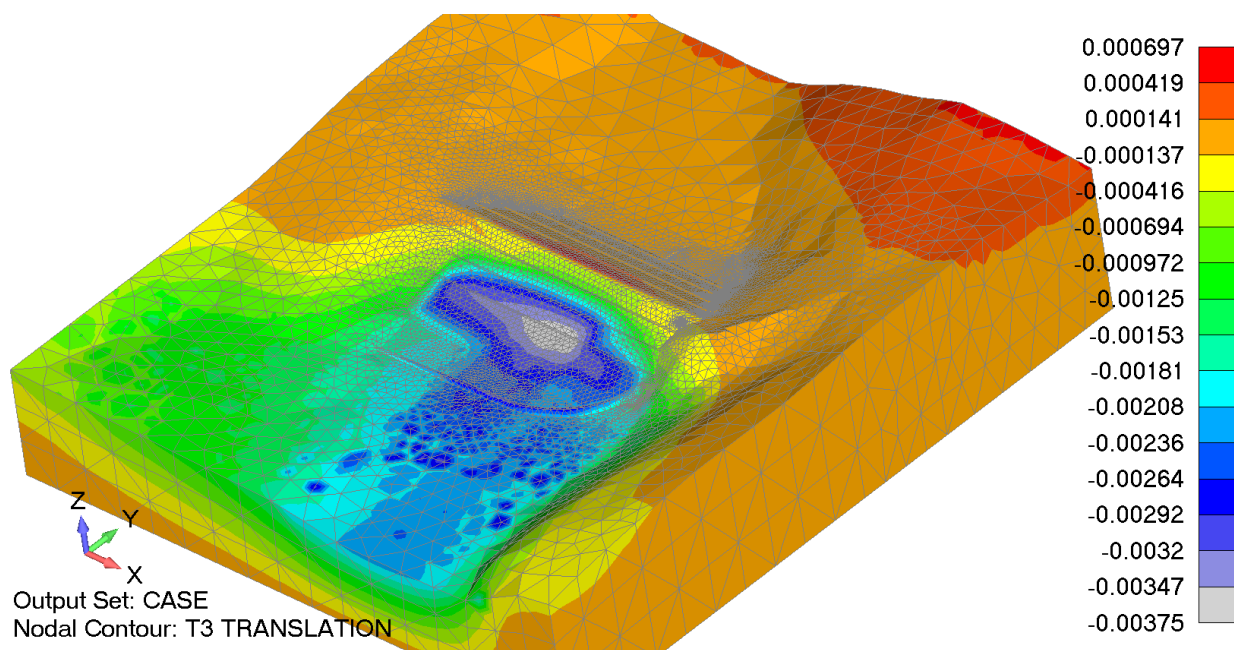
- Померање у правцу тока реке (Слика 62-Слика 69)
- Померање у вертикалном правцу (Слика 70-Слика 77)
- Укупна померања (Слика 78-Слика 85)
- Пластичне деформације (Слика 86-Слика 93)



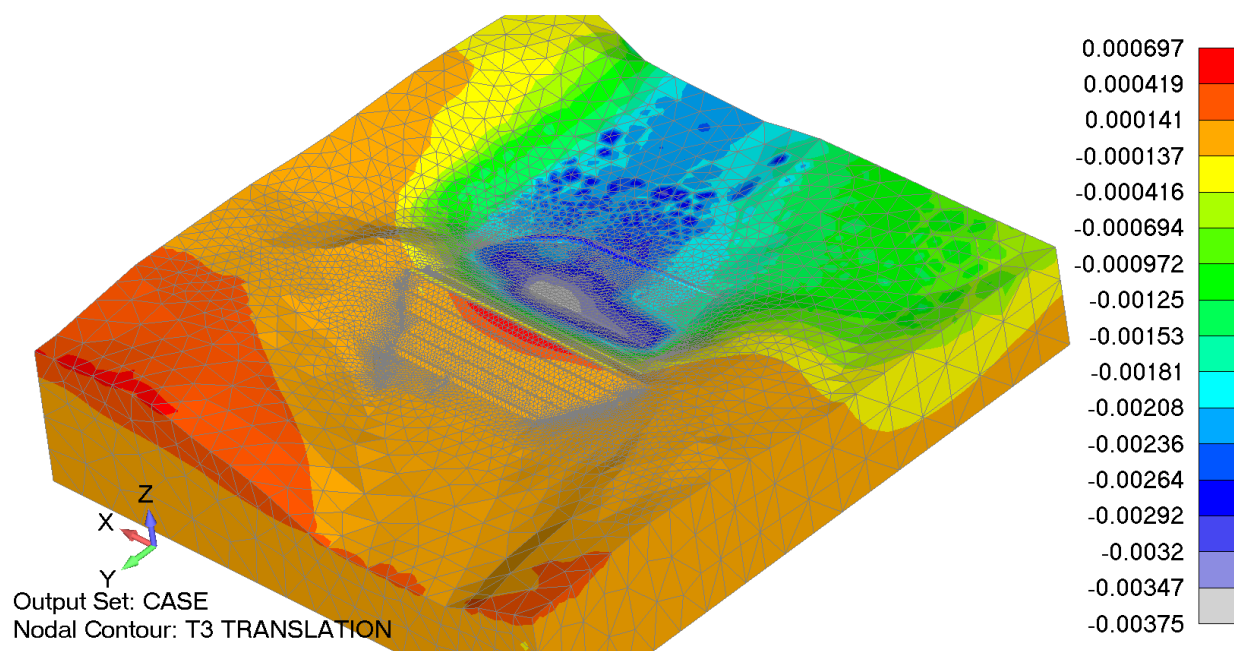
Слика 54 Поље померања за узводно лице



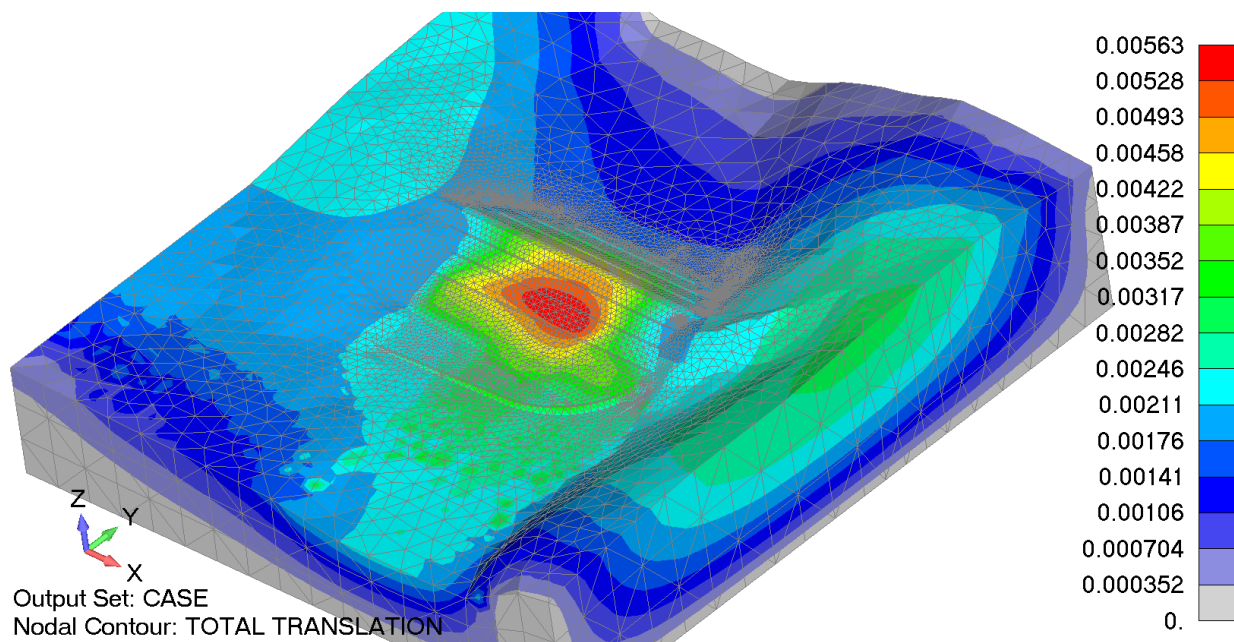
Слика 55 Поље померања за низводно лице



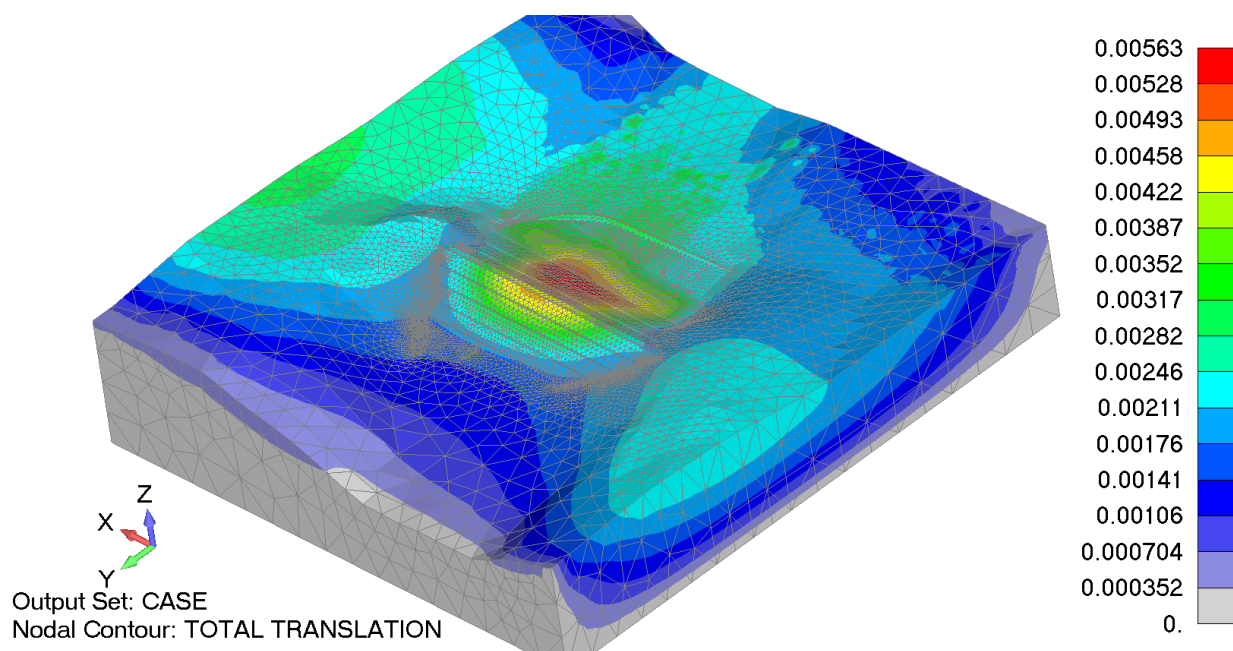
Слика 56 Померања у вертикалној оси за узводно лице



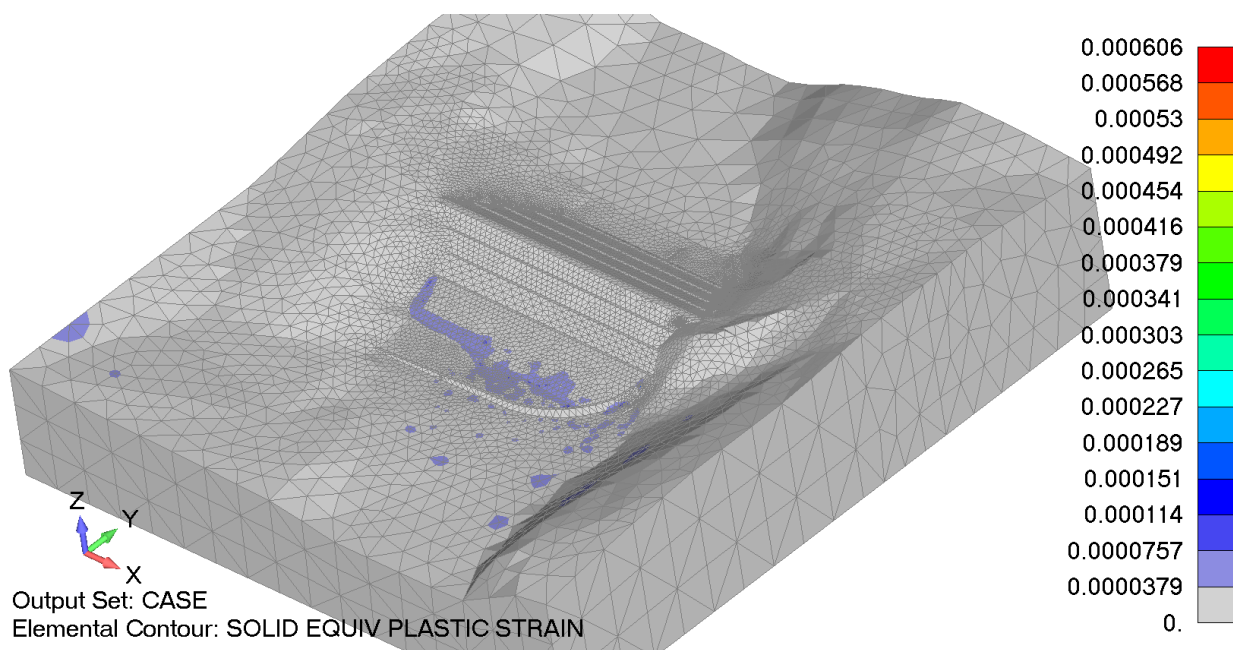
Слика 57 Померања у вертикалној оси за низводно лице



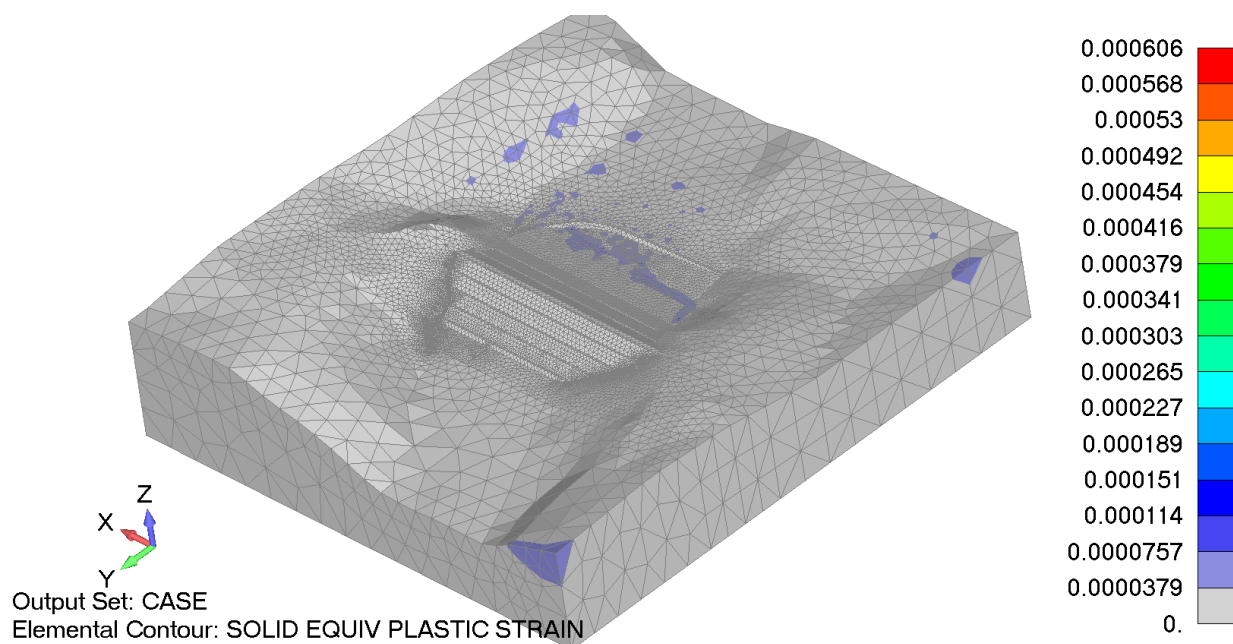
Слика 58 Укупна померања



Слика 59 Укупна померања за низводно лице

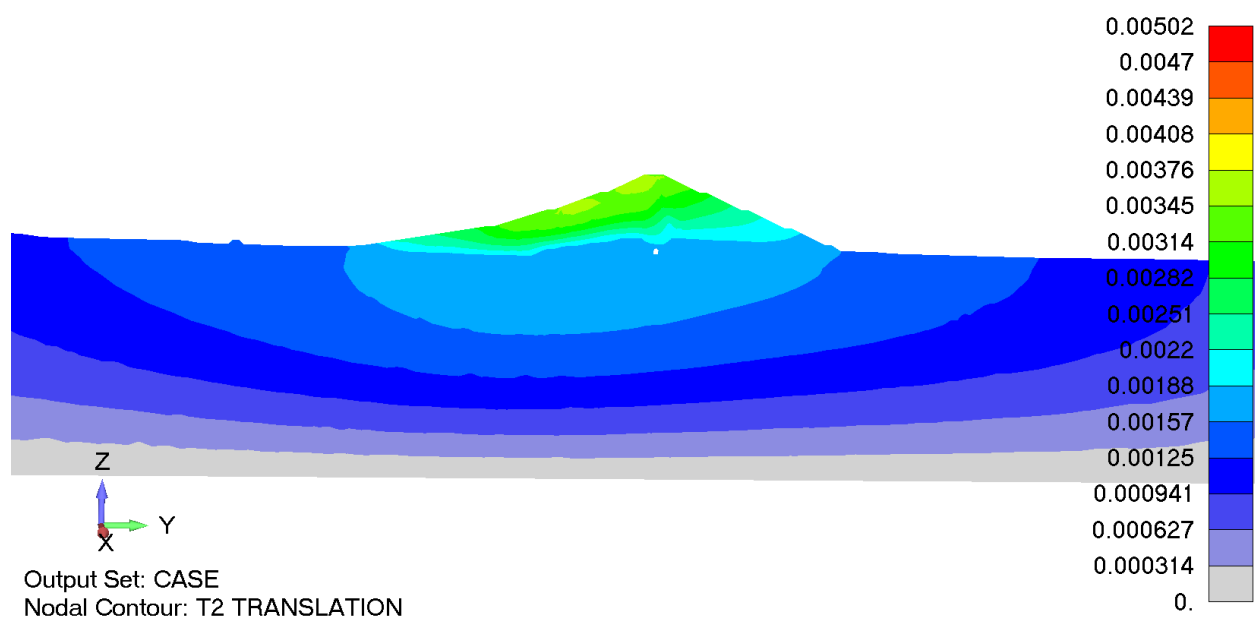


Слика 60 Пластичне деформације на узводном лицу

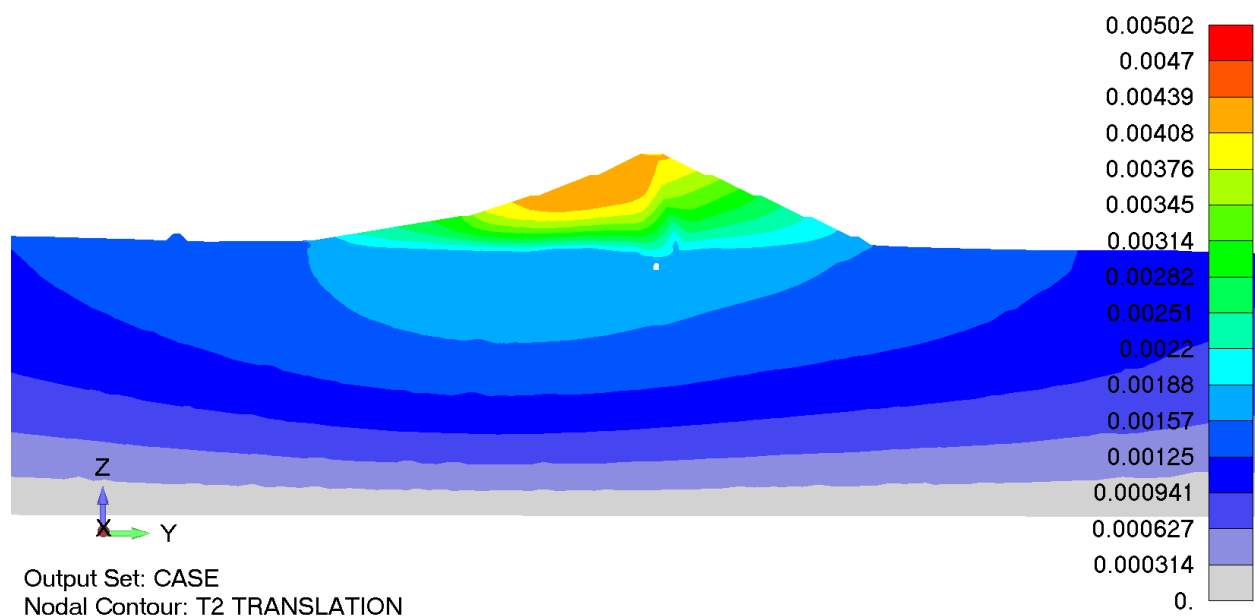


Слика 61 Пластичне деформације на низводном лицу,

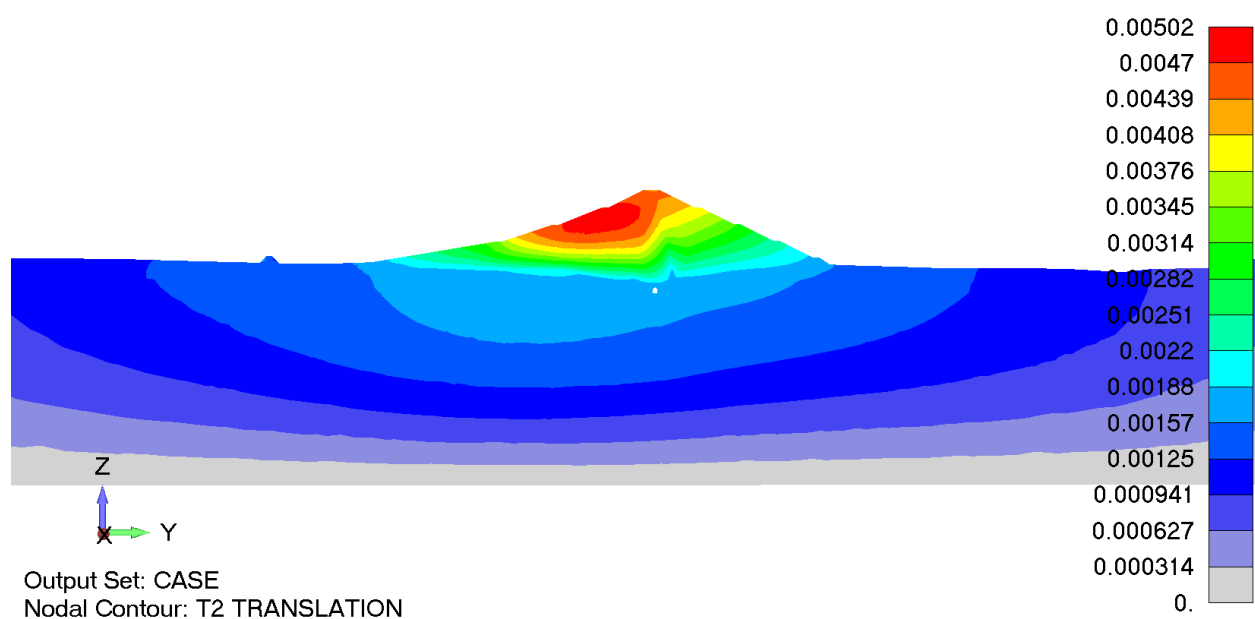
Померања у правцу тока реке на пресецима показани су сликама



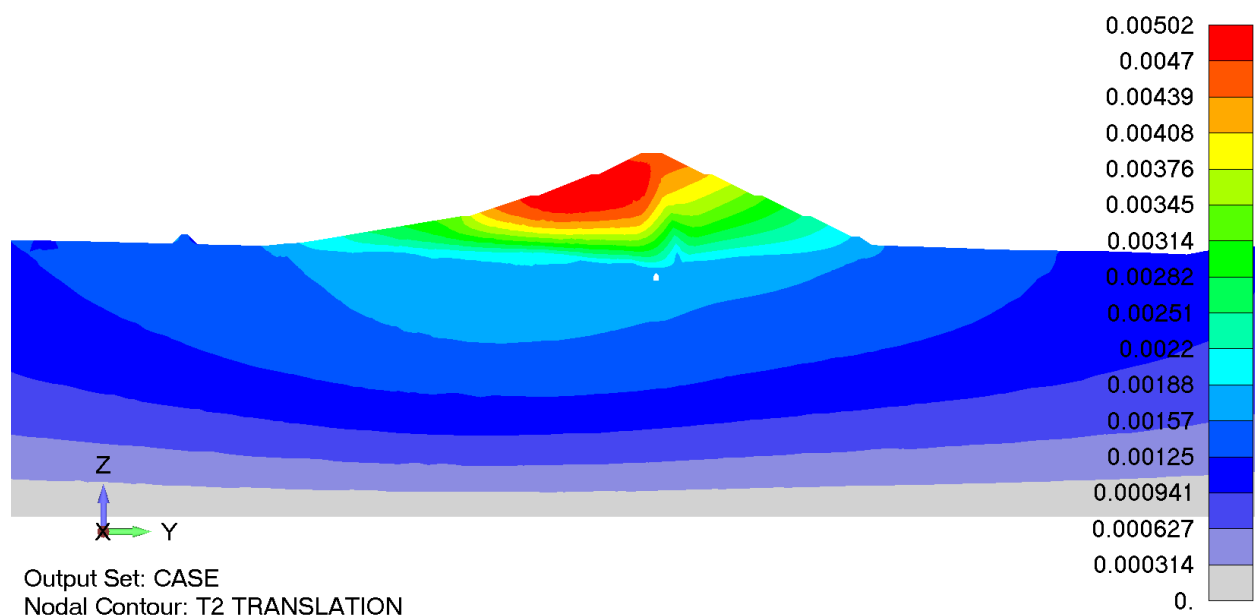
Слика 62 Померања у правцу тока реке за  $x=105$



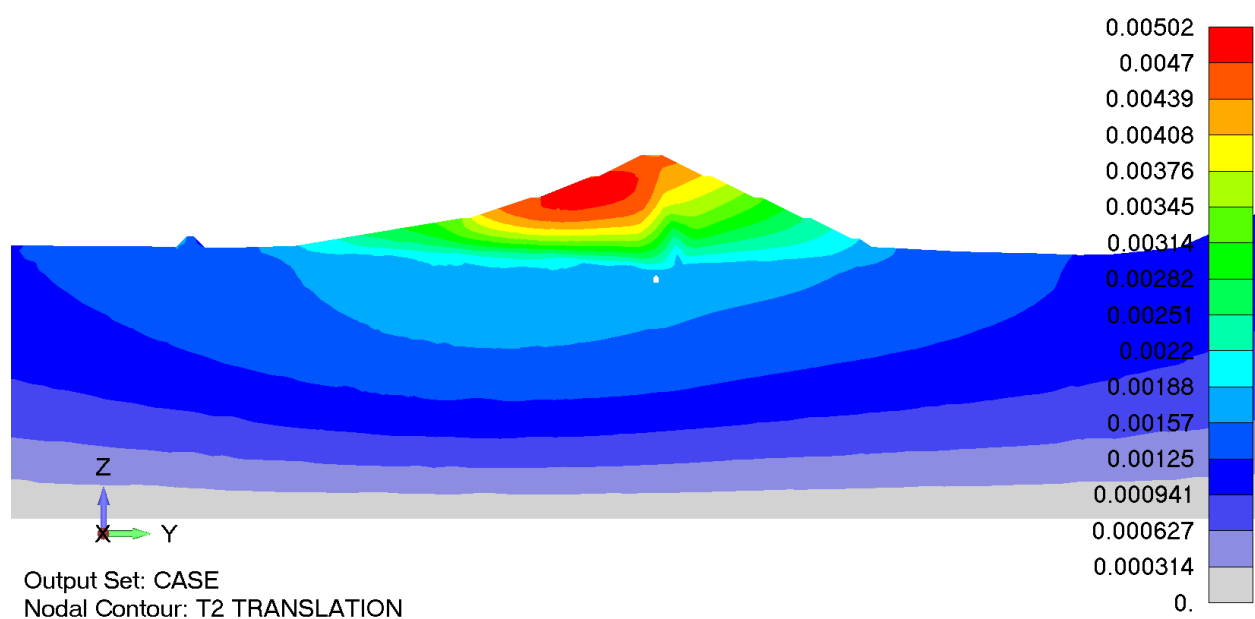
Слика 63 Померања у правцу тока реке за  $x=128$



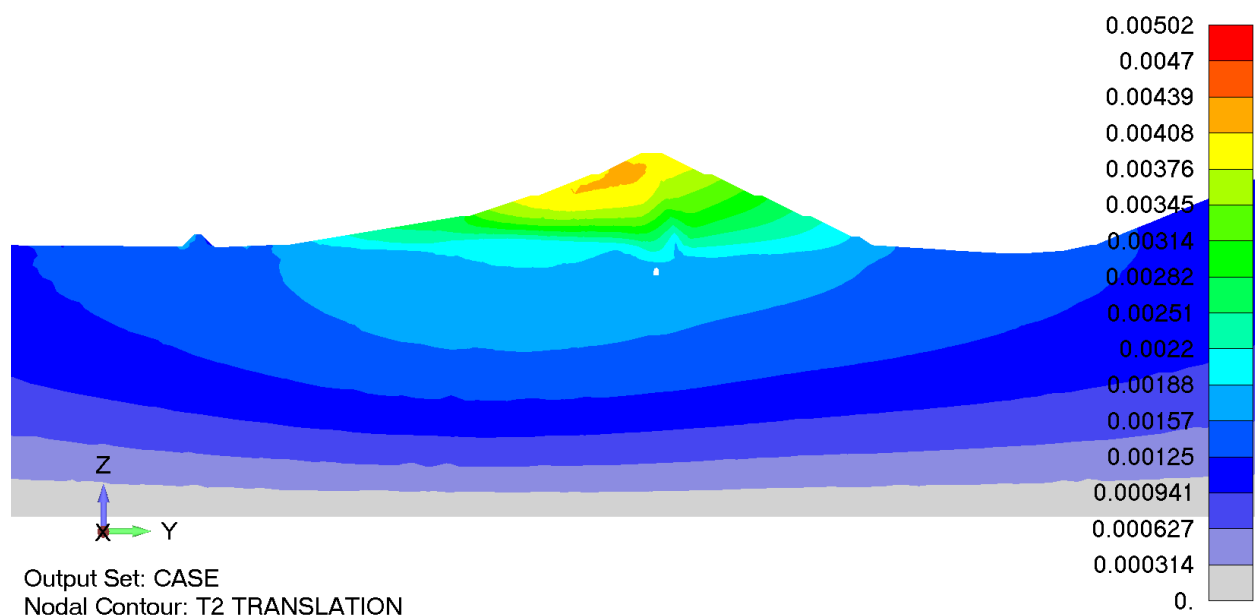
Слика 64 Померања у правцу тока реке за  $x=150$



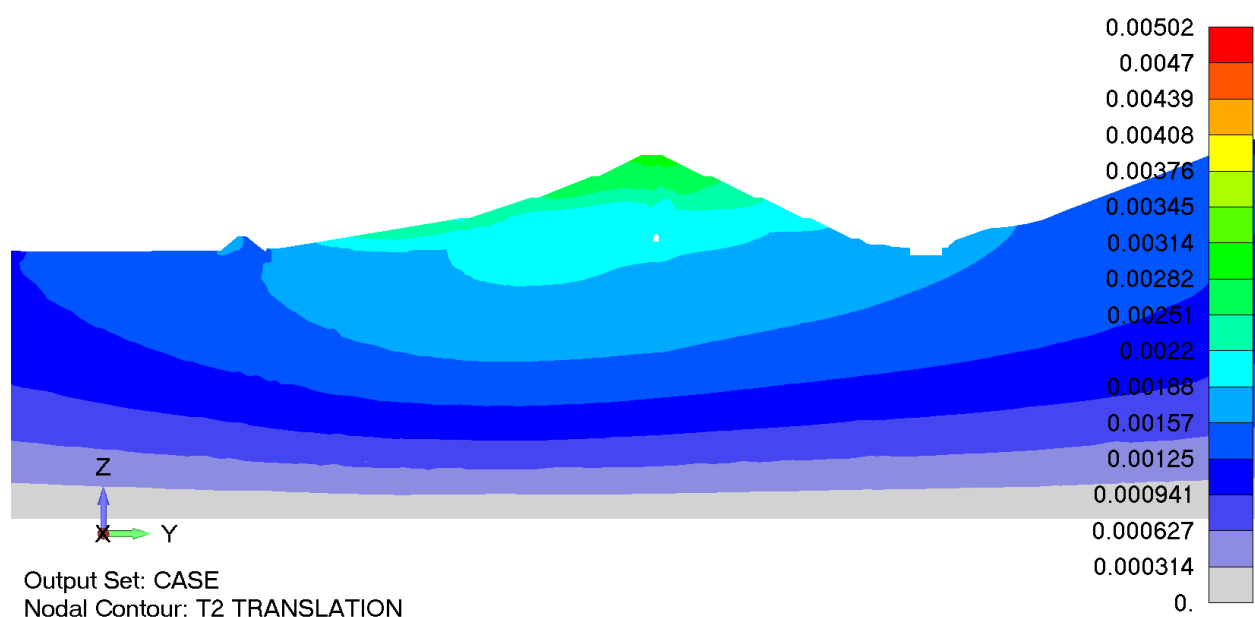
Слика 65 Померања у правцу тока реке за  $x=168$



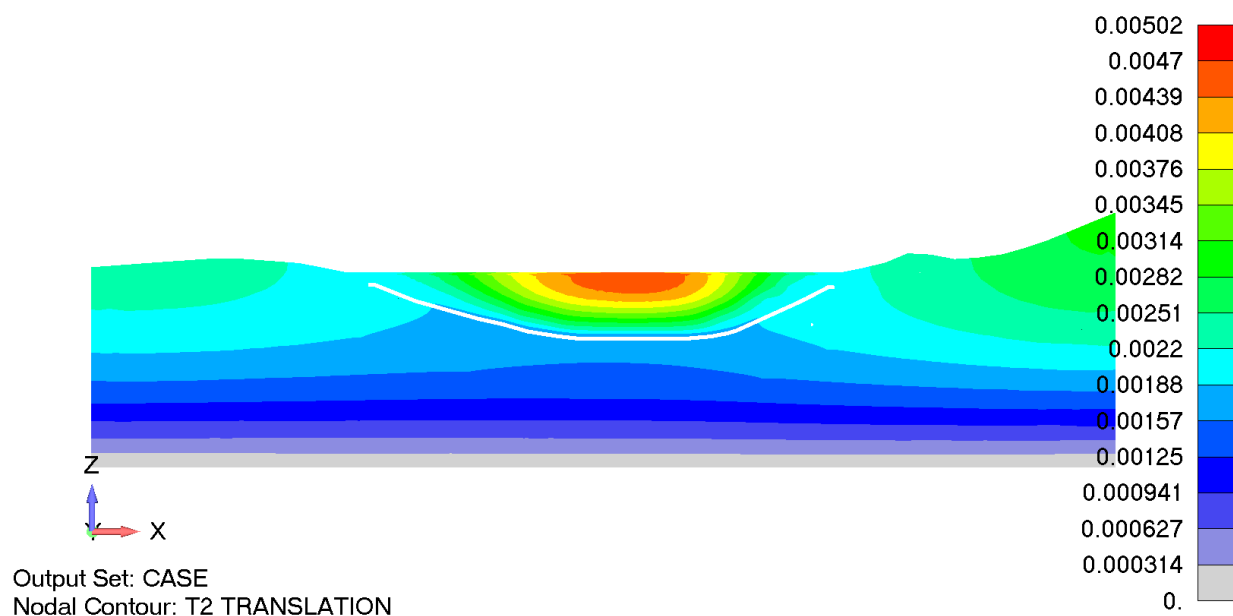
Слика 66 Померања у правцу тока реке за  $x=195$



Слика 67 Померања у правцу тока реке за  $x=214$

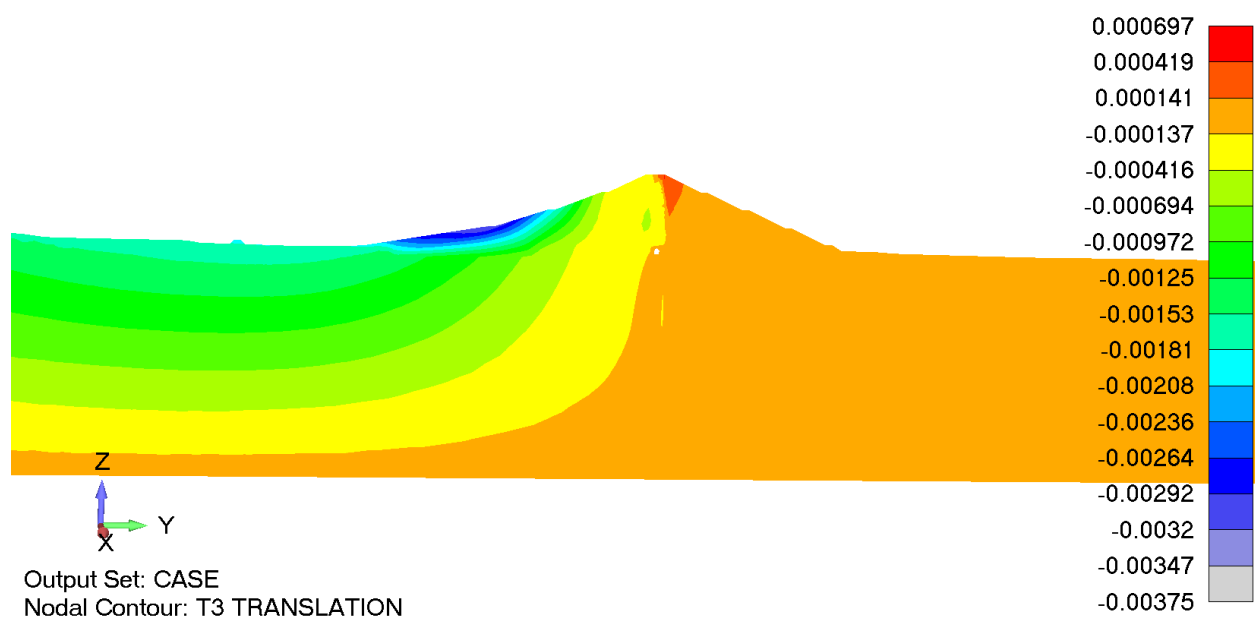


Слика 68 Померања у правцу тока реке за  $x=240$

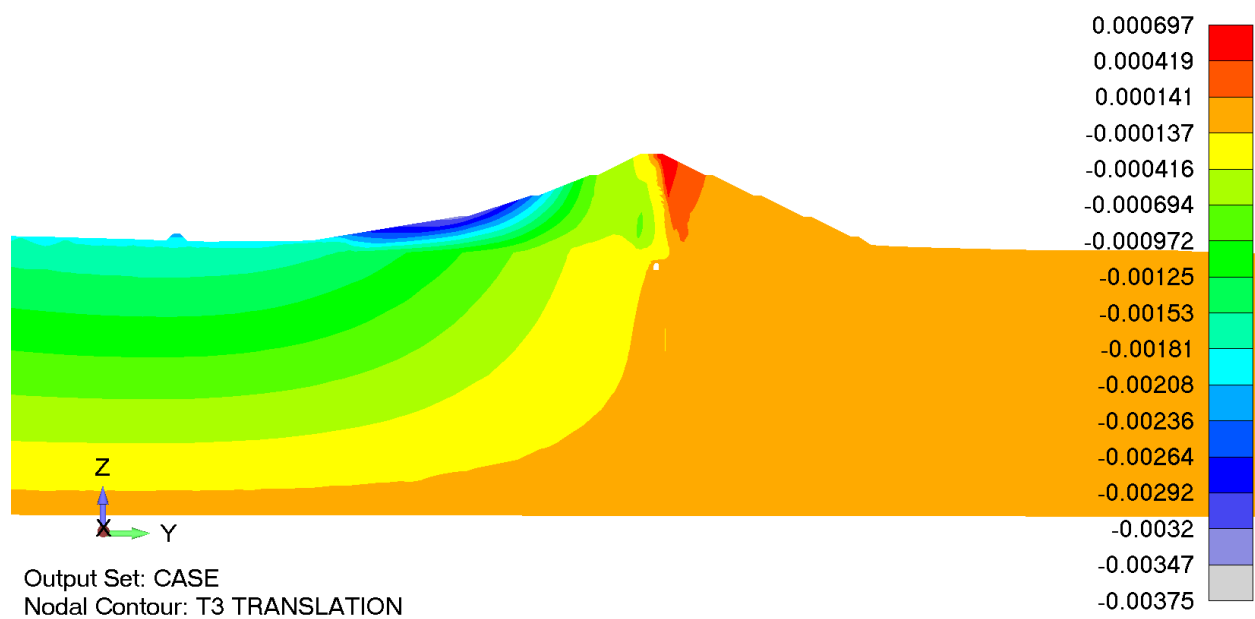


Слика 69 Померања у правцу тока реке за  $y=0$

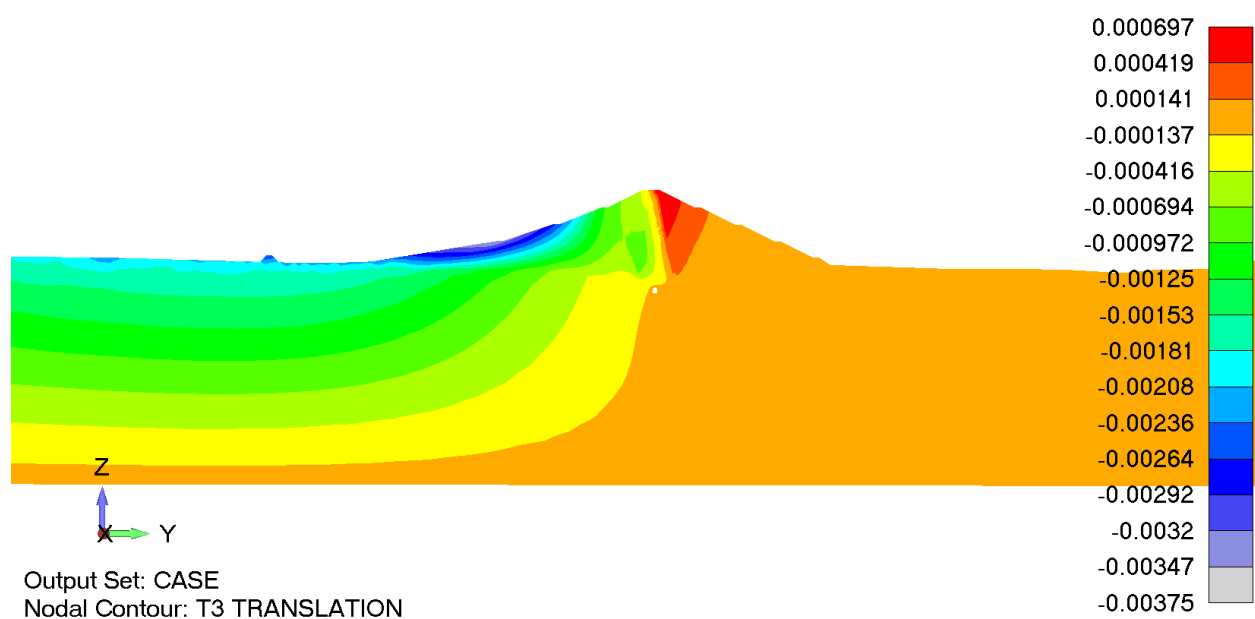
Померања дуж осе  $z$  приказана су на следећим сликама од до



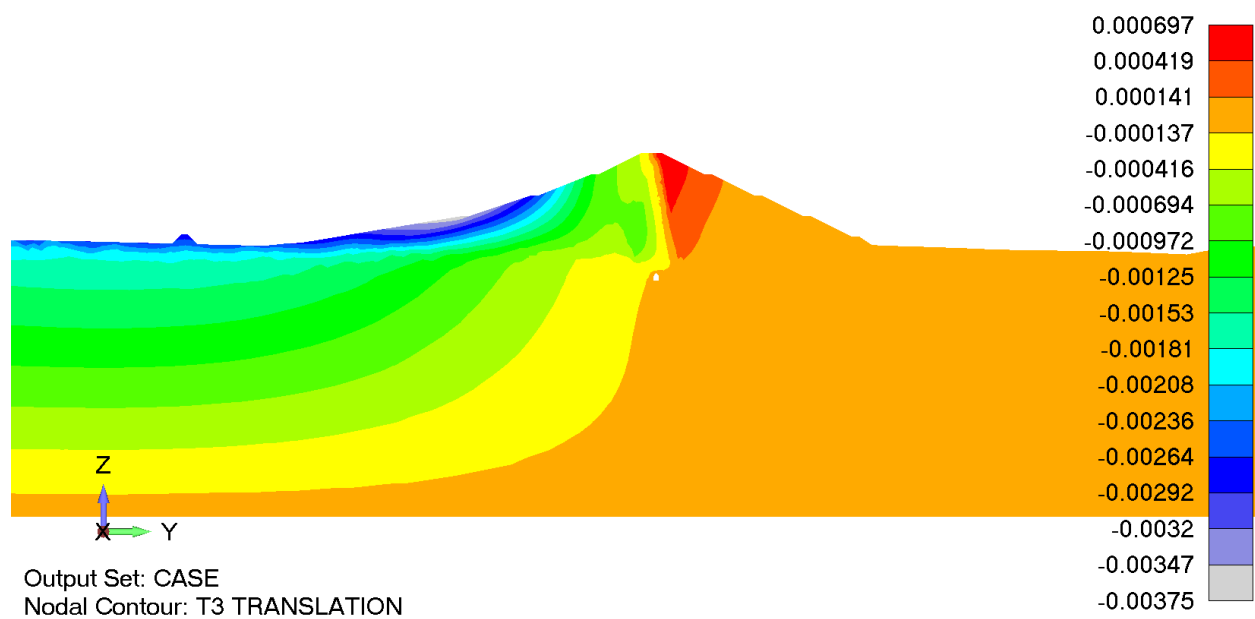
Слика 70 Померања у вертикалном правцу за  $x=105$



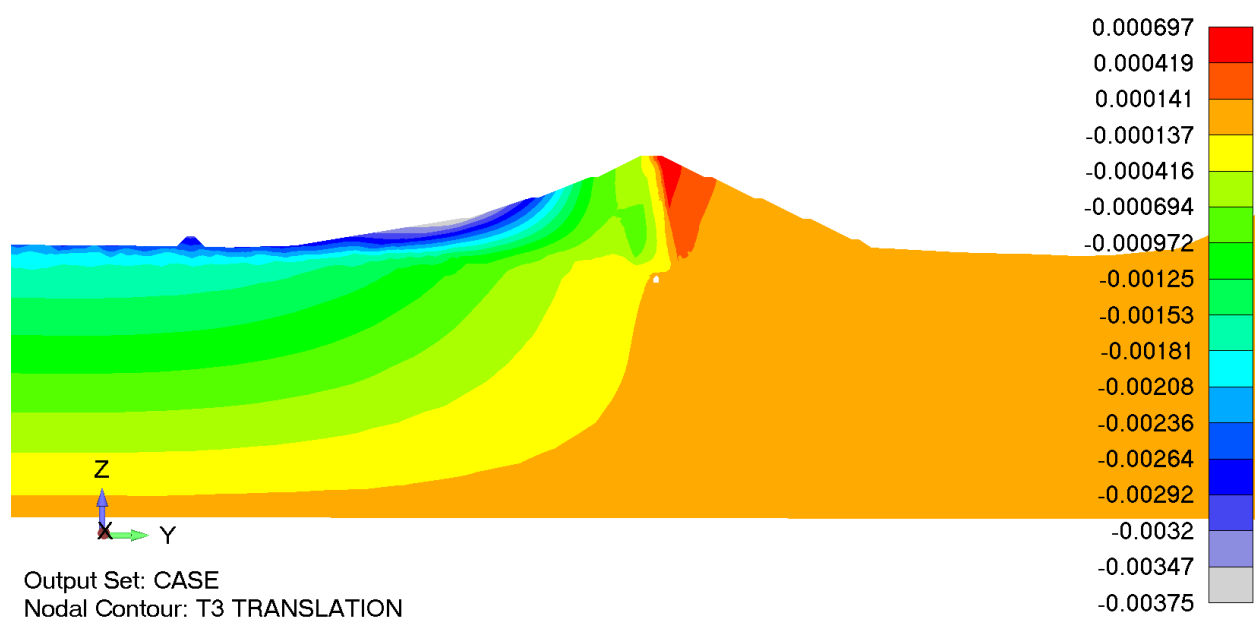
Слика 71 Померања у вертикалном правцу за  $x=128$



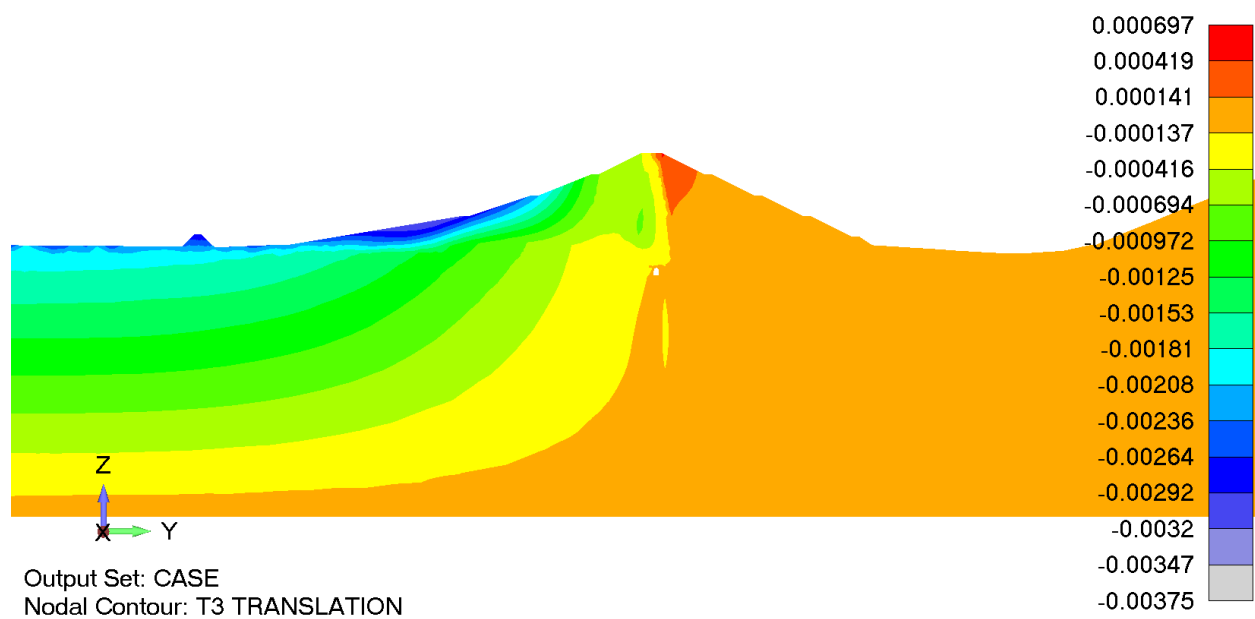
Слика 72 Померања у вертикалном правцу за  $x=150$



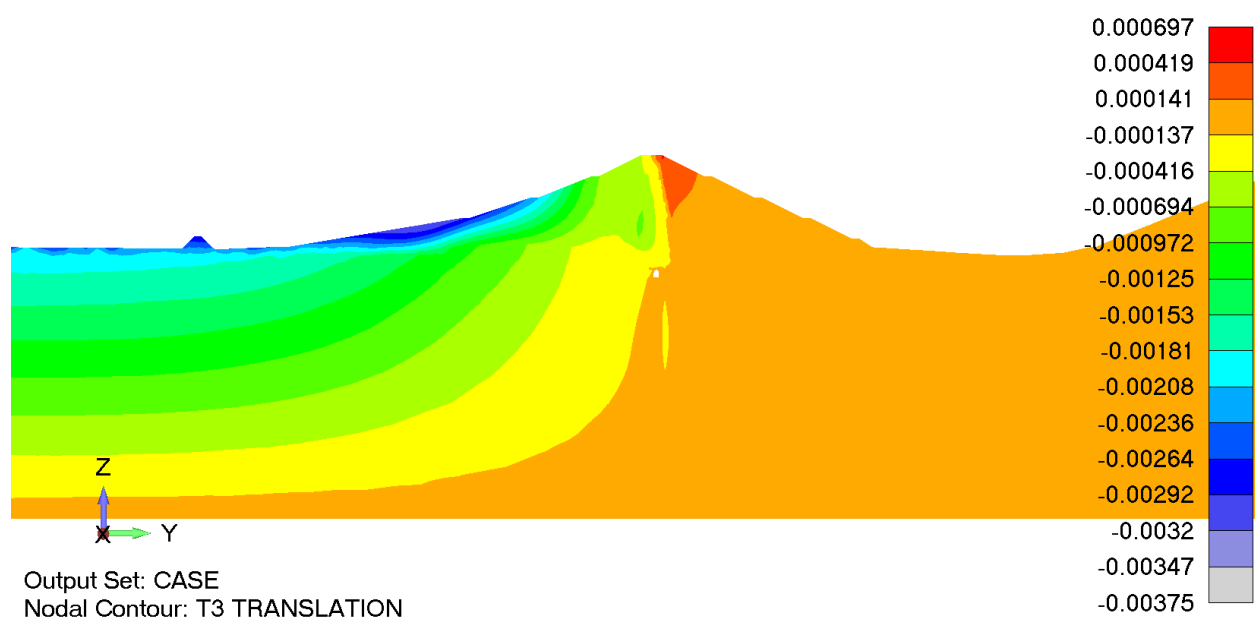
Слика 73 Померања у вертикалном правцу за  $x=168$



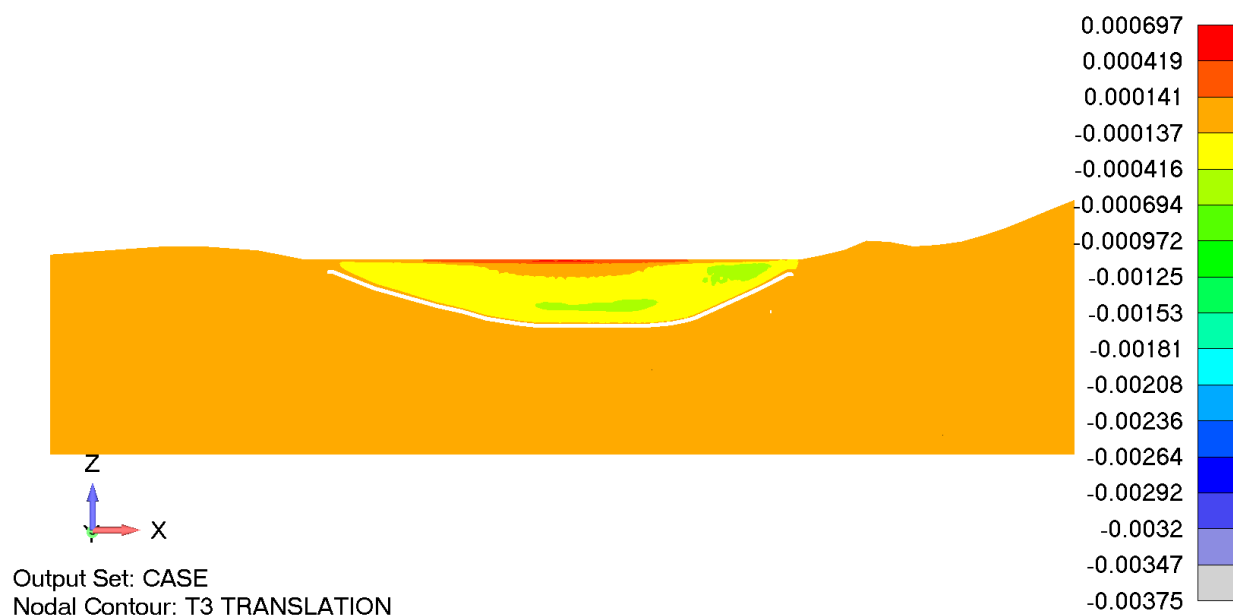
Слика 74 Померања у вертикалном правцу за  $x=195$



Слика 75 Померања у вертикалном правцу за  $x=214$

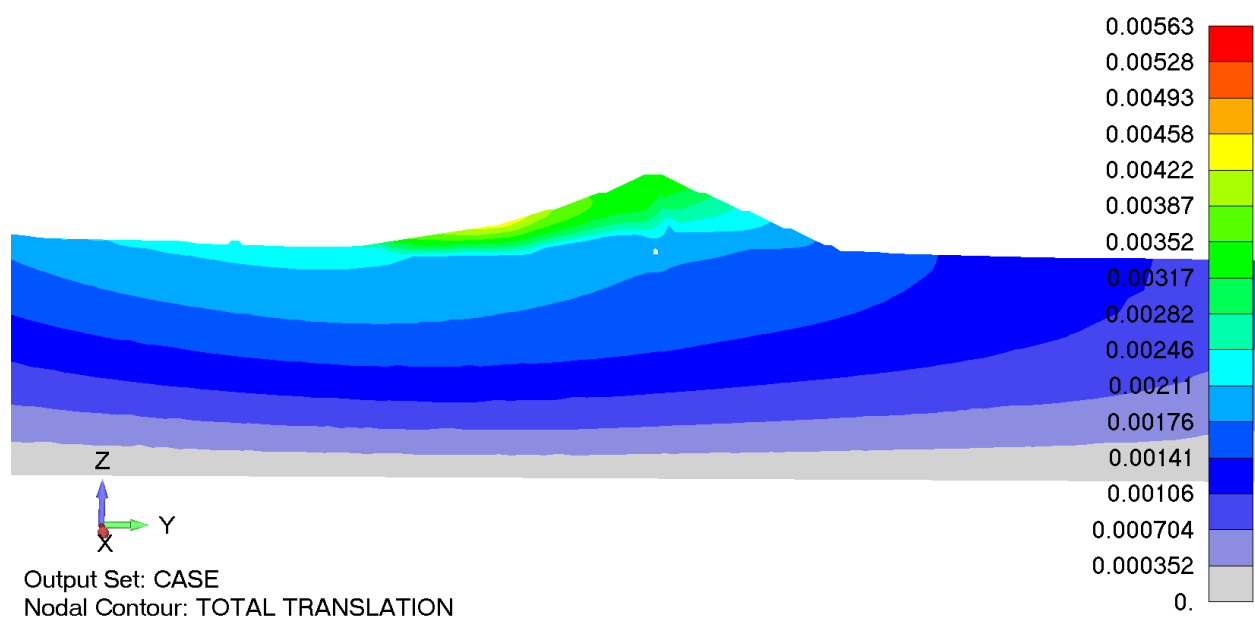


Слика 76 Померања у вертикалном правцу за  $x=240$

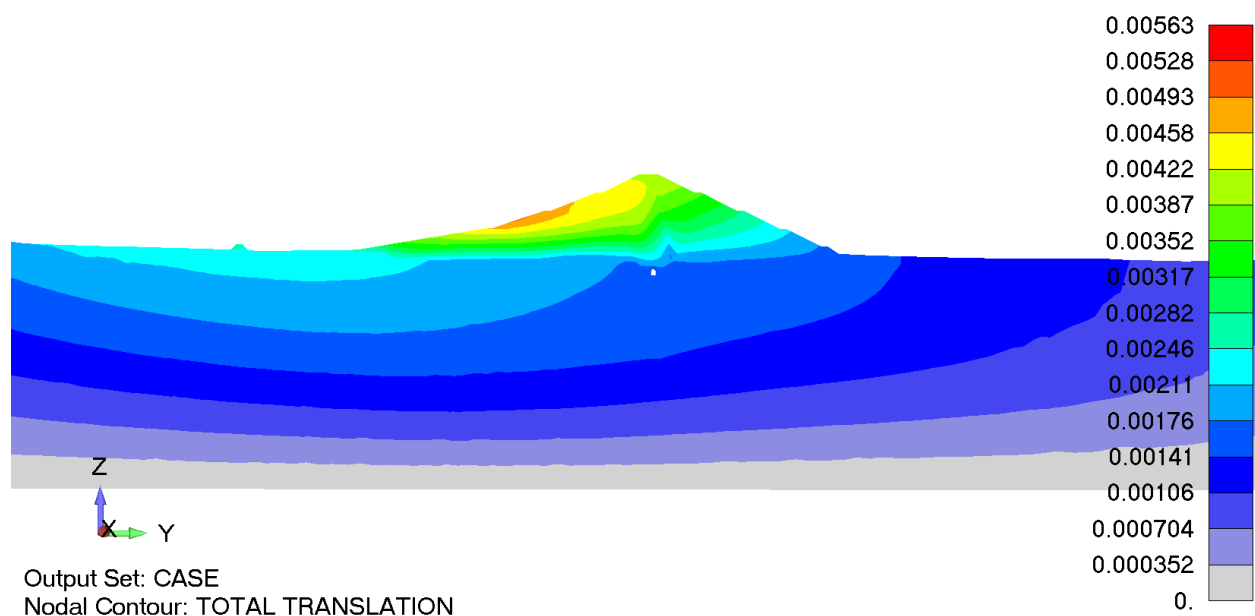


Слика 77 Померања у вертикалном правцу за  $y=0$

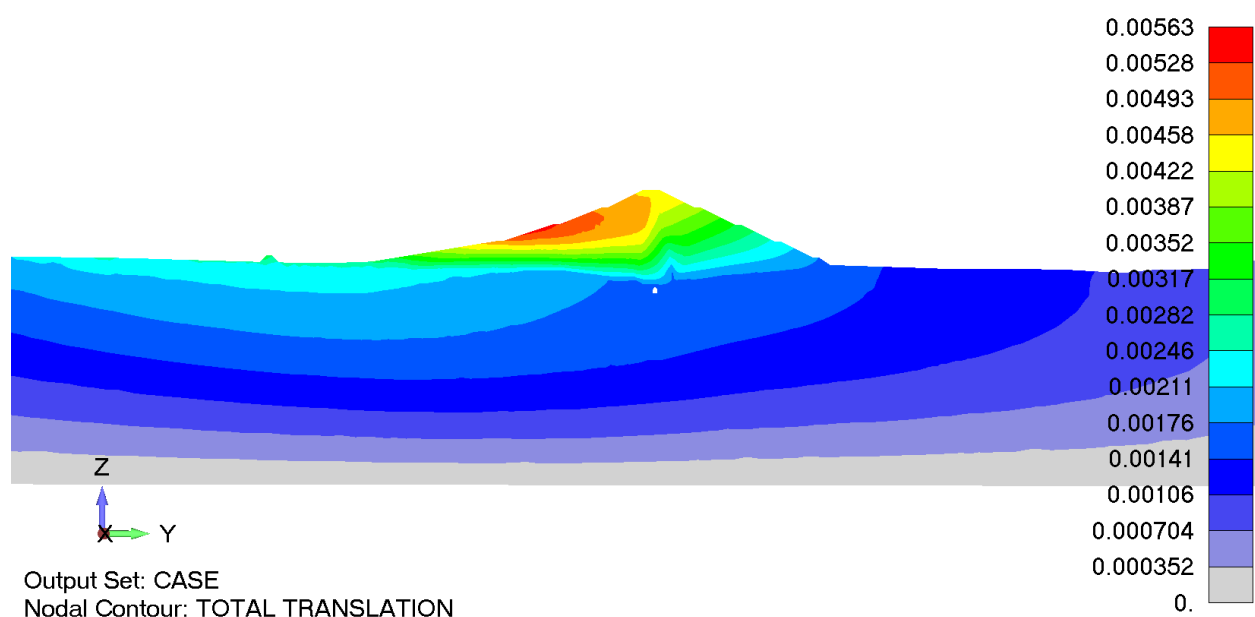
Укупна померања модела за задате пресеке дате су на сликама **Error! Reference source not found.**-**Error! Reference source not found.**



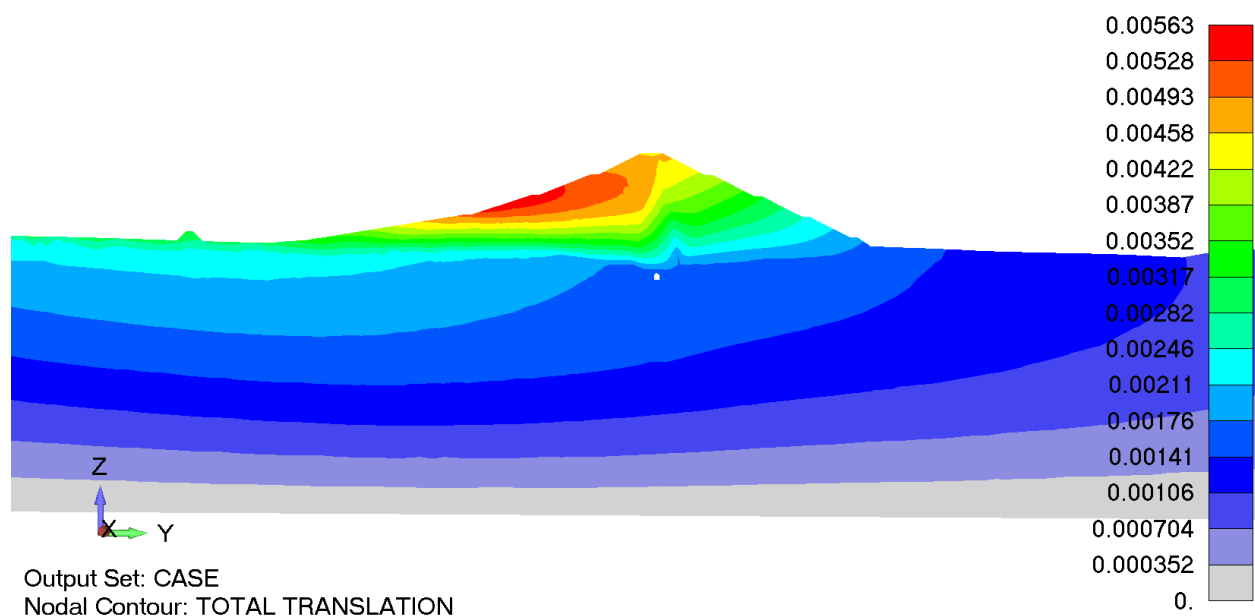
Слика 78 Укупна померања у пресеку  $x=105$



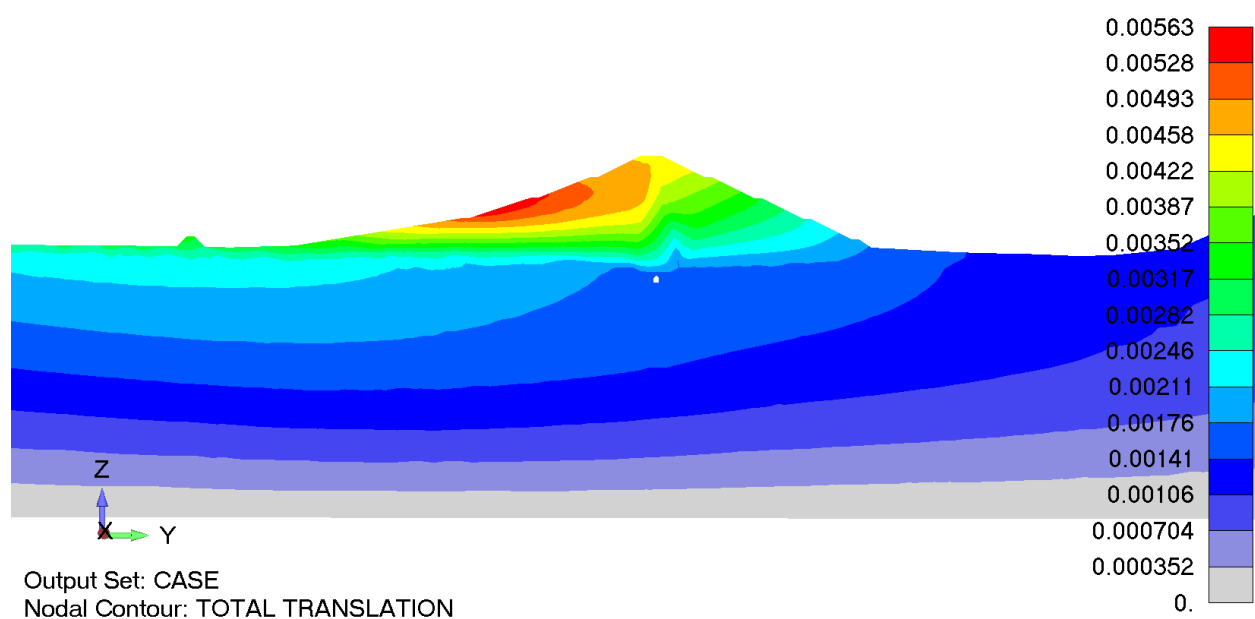
Слика 79 Укупна померања у пресеку  $x=128$



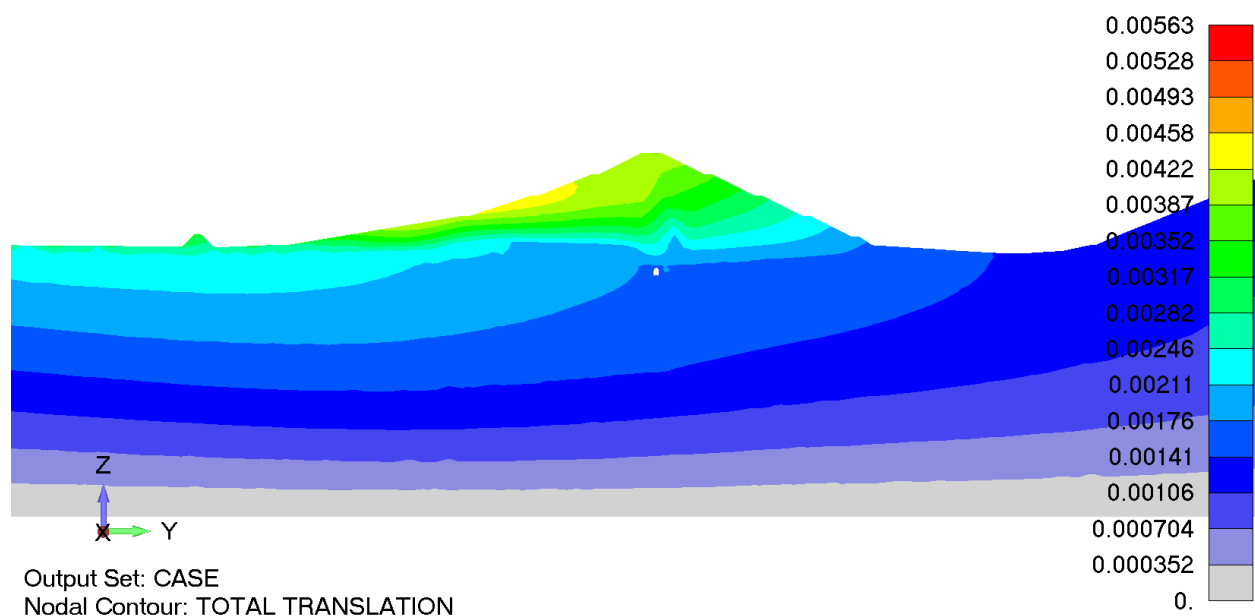
Слика 80 Укупна померања у пресеку  $x=150$



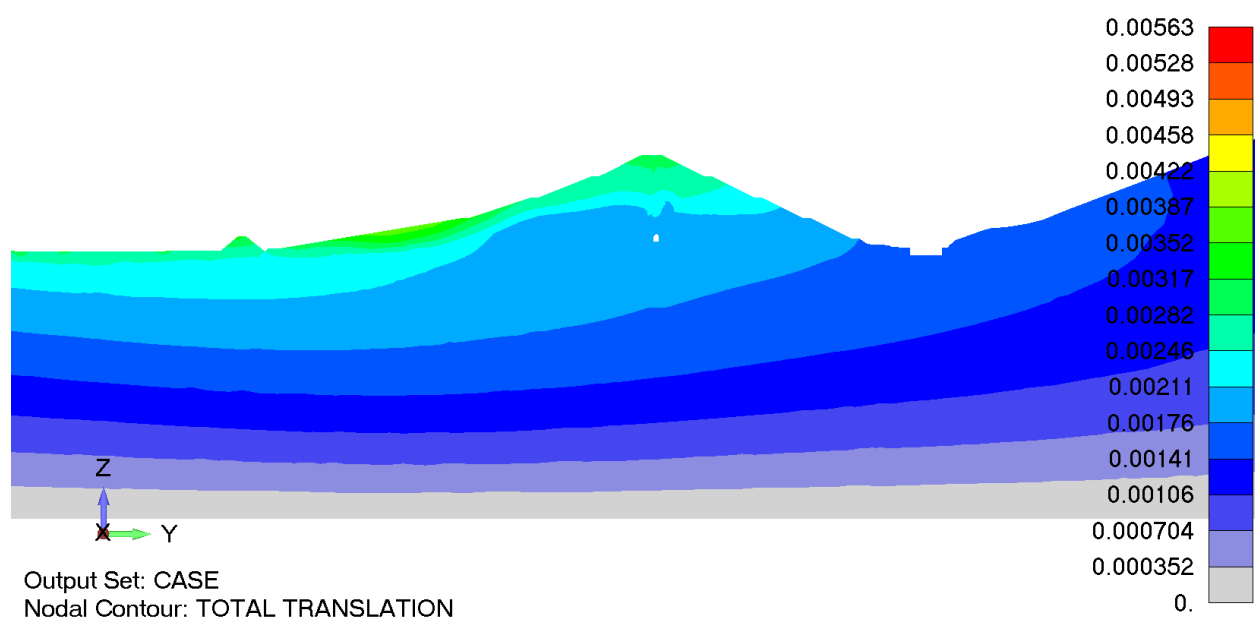
Слика 81 Укупна померања у пресеку  $x=168$



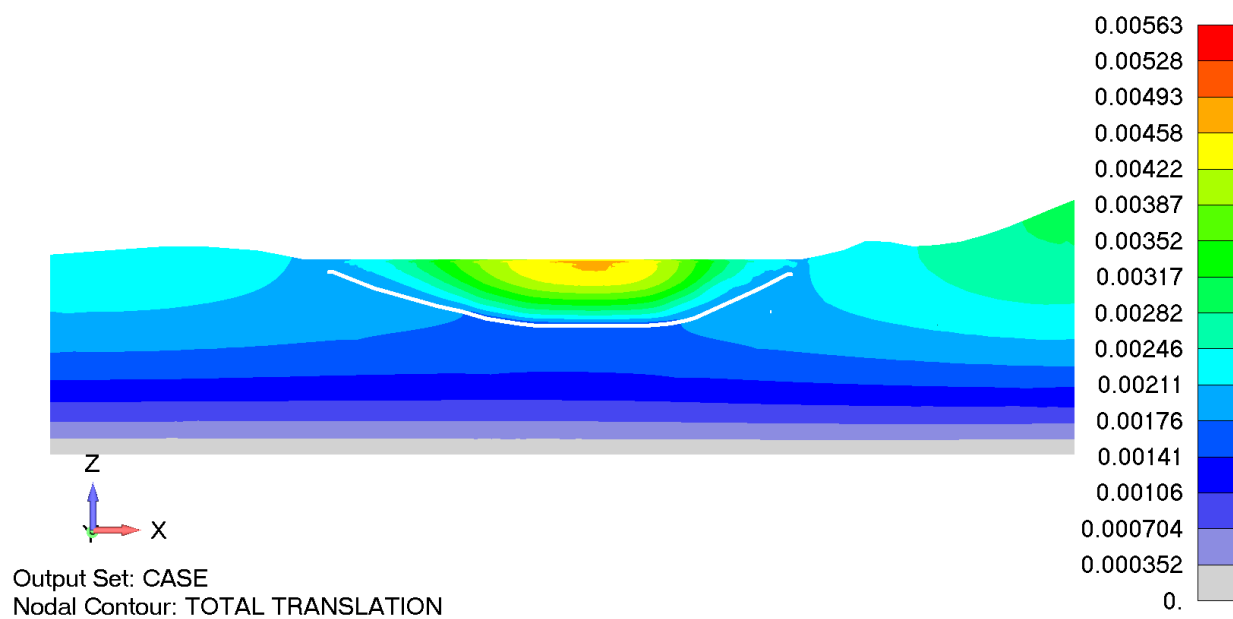
Слика 82 Укупна померања у пресеку  $x=195$



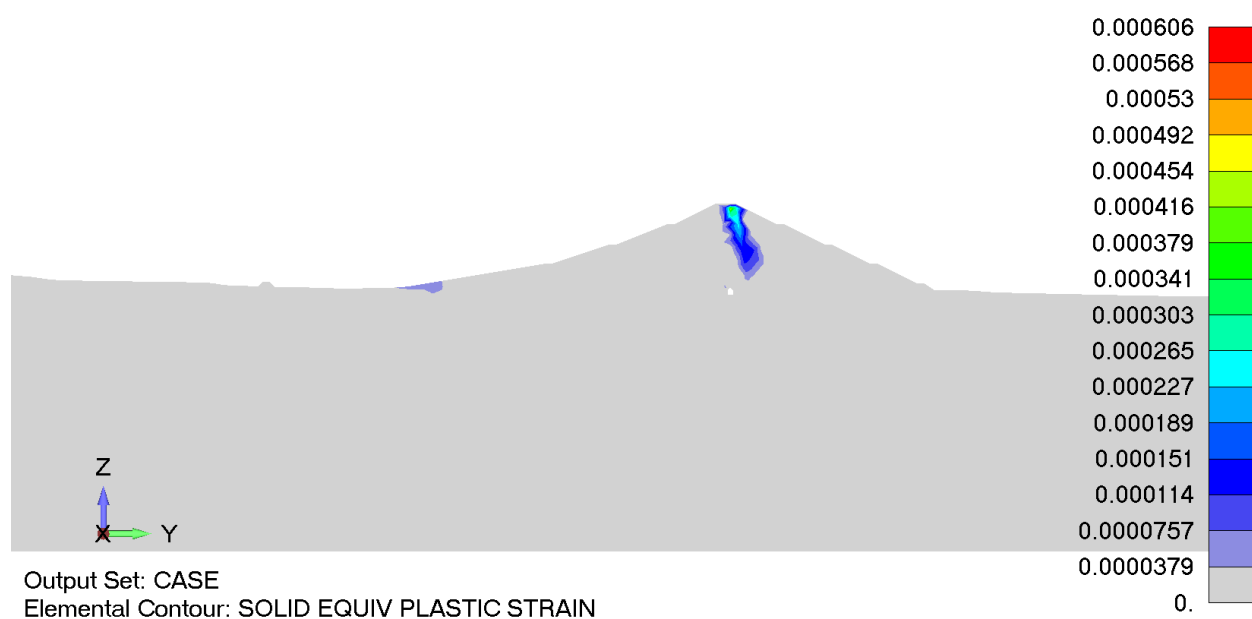
Слика 83 Укупна померања у пресеку  $x=214$



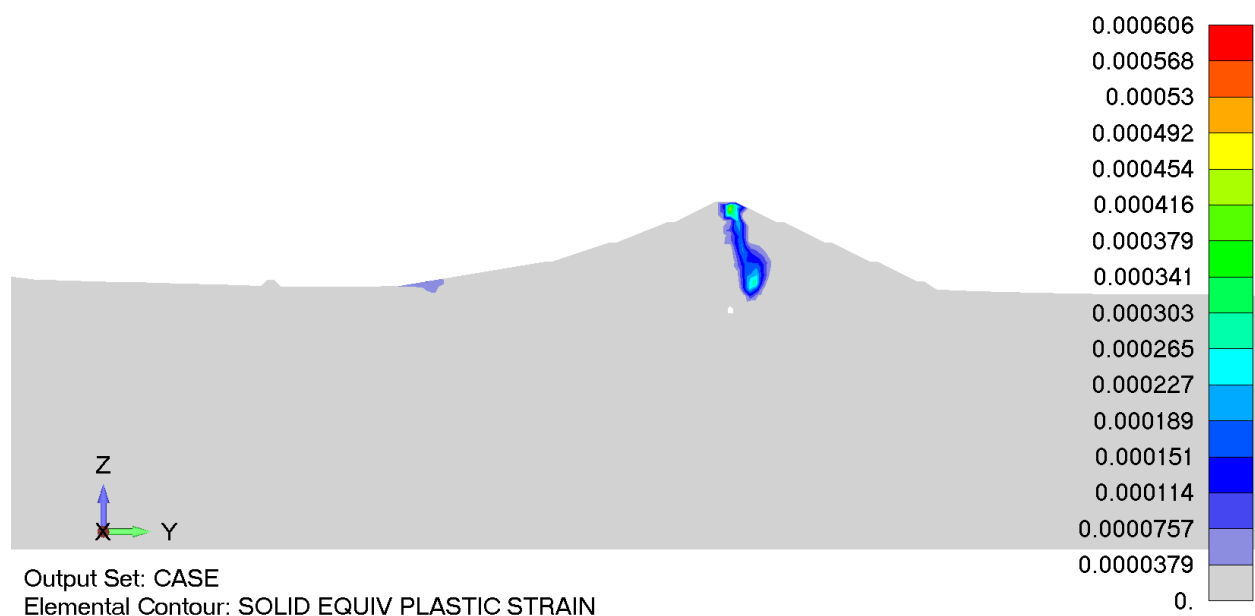
Слика 84 Укупна померања у пресеку  $x=240$ .



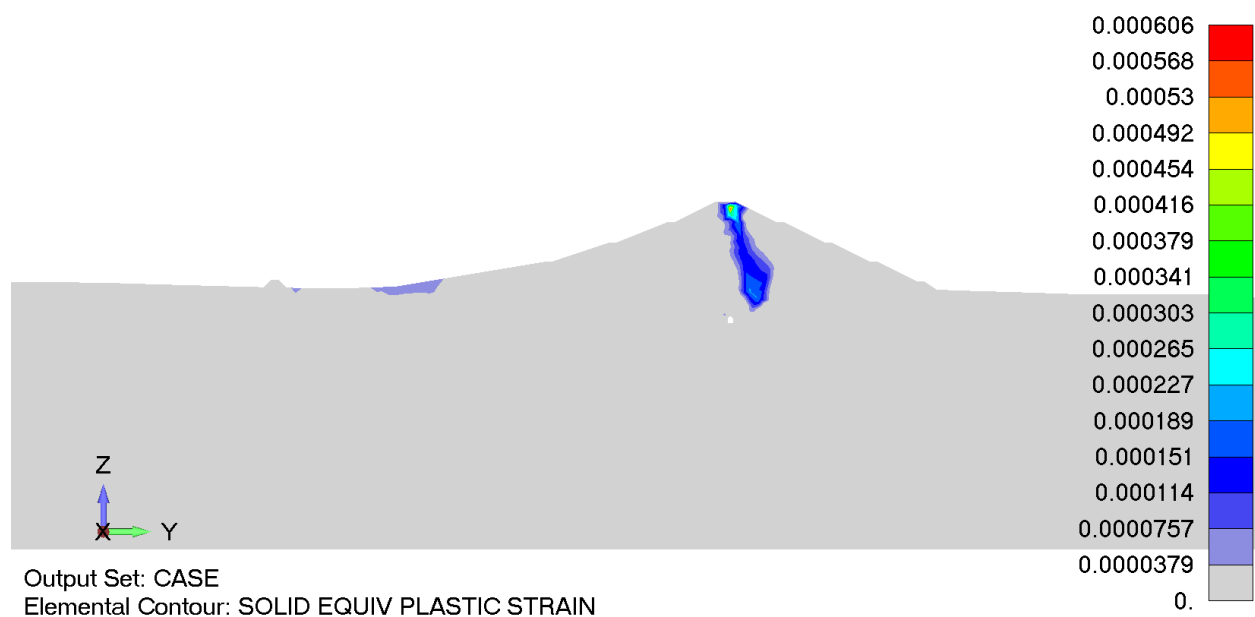
Слика 85 Укупна померања у пресеку  $y=0$



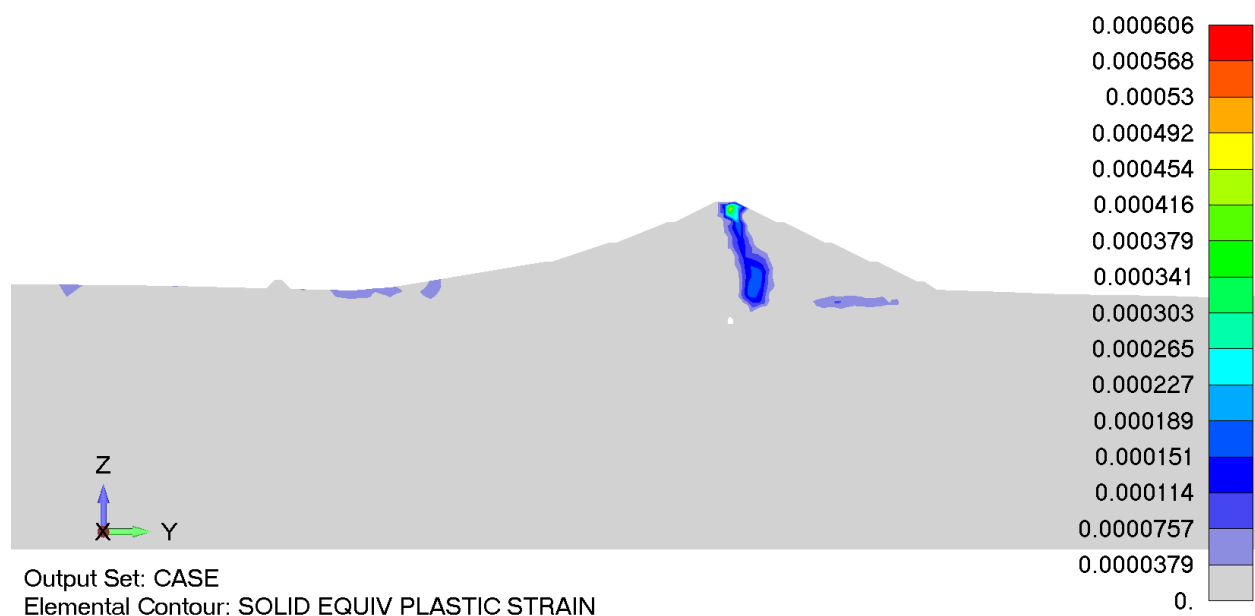
Слика 86 Пластичне деформације у  $x=105$



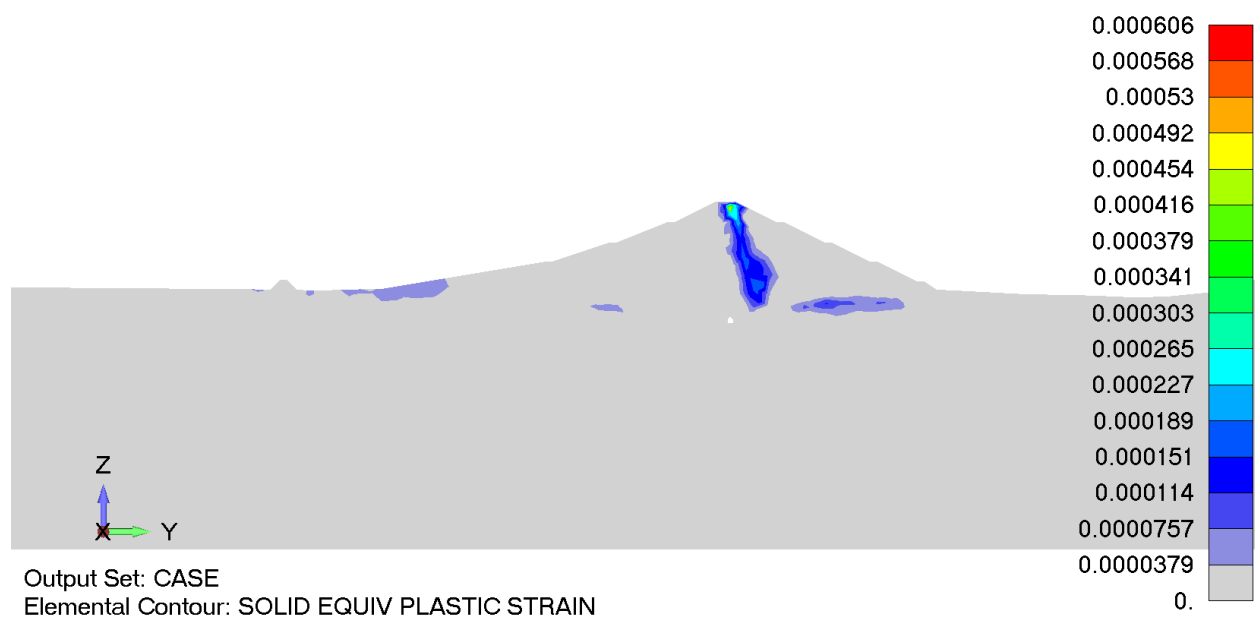
Слика 87 Пластичне деформације за  $x=128$



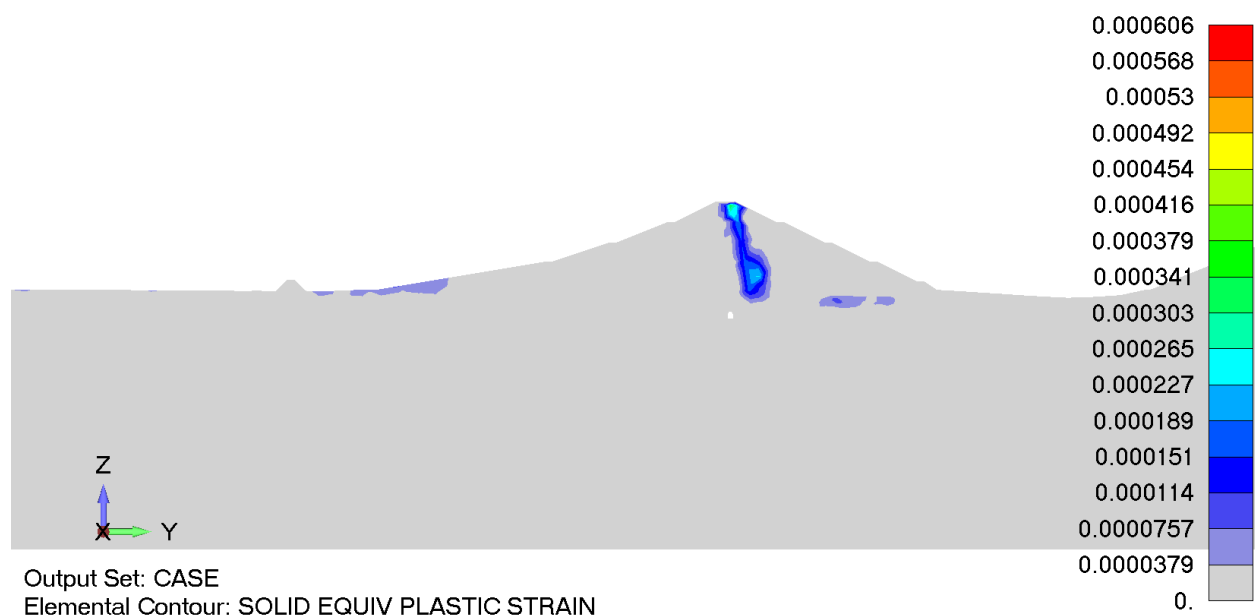
Слика 88 Пластичне деформације за  $x=150$



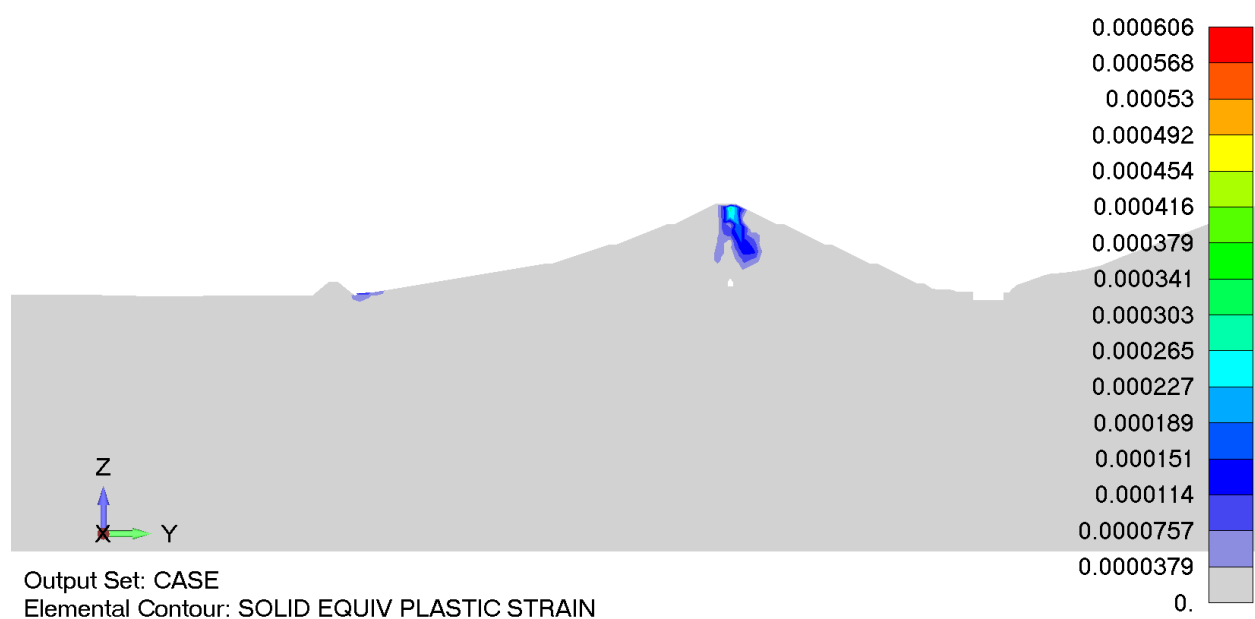
Слика 89 Пчастичне деформације за  $x=168$



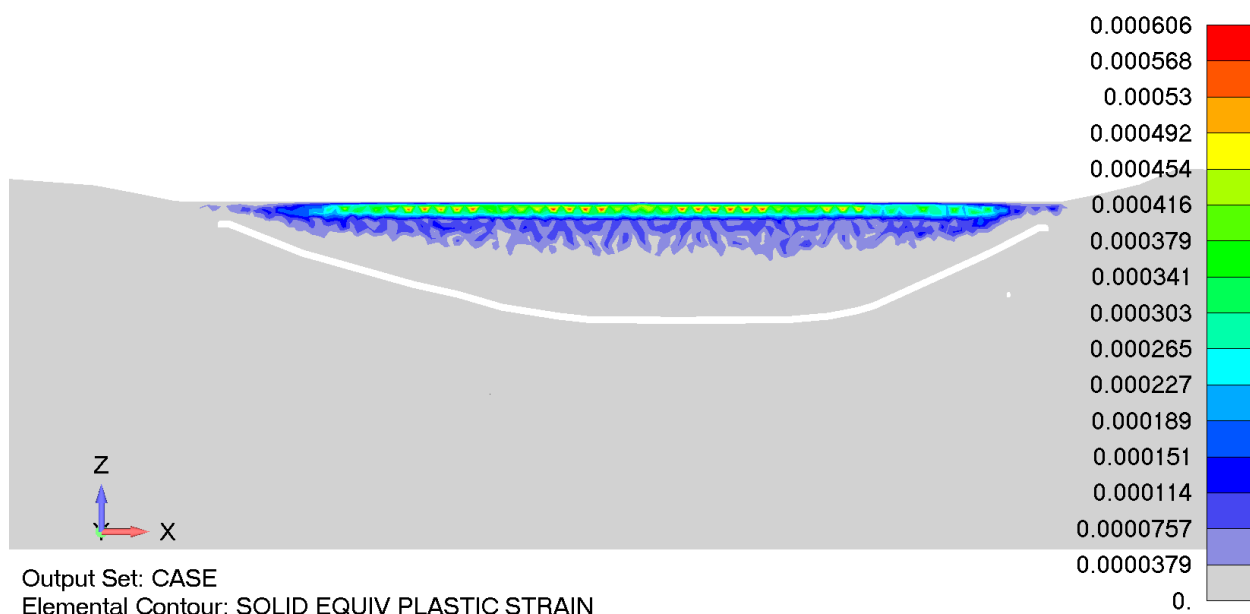
Слика 90 Пчастичне деформације за  $x=195$



Слика 91 Пчастичне деформације за  $x=214$



Слика 92 Пчастичне деформације за  $x=240$



Слика 93 Пластичне деформације за  $y=0$

За случај оптерећења када је укључено и сеизмичко оптерећење примећује се да су померања и пластичне деформације веће у односу на прву прорачунску ситуацију. Повећане величине кретања управо су последица дејства сеизмичких инерцијалних сила. Највећа померања у правцу тока реке остварена су на узводном лицу бране. Пластичне деформације су и у овом случају концентрисане у језгру бране где достижу највеће вредности. Такпђе се може уочити и повећање померања у  $z$  правцу, на врху бране тј. круни.

## 10. Закључак

Циљ рада је била анализа стабилности насуте бране „Власина“. Анализа је извршена применом методе коначних елемената. За пре и постпроцесуирање је коришћен програм *Фетар*, док је за напонско деформационе анализе коришћен ПАК (*Програм за Анлизу Конструкција*).

Опис самих брана као грађевина дат је на почетку рада. Описане су њихове особине, подела и намена сваког типа брана, као и предности и недостаци различитих типова брана. У наставку су описане методе помоћу којих се може анализирати стабилност брана. Детаљније су описане насуте бране. Ближе су размотрене предности и недостаци ове врсте брана и описани најчешћи узроци њихових оштећења и рушења. Даље је описан материјални модел који је коришћен при овој стабилности. Материјални модел који се користио је Дракер-Прагеров модел.

Описана је метода коначних елемената, као једна од најзаступљенијих нумеричких метода за испитивање стабилности не само брана, већ и других објеката и конструкција. Описане су релације на основу којих се, решавањем једначина, добијају решења која представљају вредности померања, деформација и напона.

Након упознавања са теоријским основама приступило се припреми геометрије и генерисању мреже коначних елемената. Приликом генерисања мреже водило се рачуна о величини елемената и квалитету мреже. Након генерисања мреже добио се модел са 372909 елемената и 524567 чворова. Затим су задата оптерећења за две прорачунске ситуације. Прва прорачунска ситуација представљала је дејство хидростатичког притиска на брану и стенску масу. У другој прорачунској ситуацији укључено је и сеизмичко оптерећење из разлога што су насуте бране осетљиве на сеизмичке инерцијане силе.

На крају су приказани резултати за обе прорачунске ситуације. Приказана су померања и пластичне деформације у одређеним пресецима који су кључни за процену стабилности. Такође су дати изометријски прикази померања и деформација за обе прорачунске ситуације.

Имајући у виду све претходно написано може се са сигурношћу закључити да је метода коначних елемената најзаступљенија и највише коришћена метода за анализу стабилности грађевина и конструкција. Ова метода готово је незаобилазна метода при прорачуну сложених конструкција и грађевина. Са појавом бољих рачунара, неминовно је да ће се ова метода даље развијати, самим тим ће и време обраде података бити брже и једноставније.

## Литература

- [1] М. Којић, С. Радован, М. Живковић and Н. Грујовић, Метод коначних елемената 1, Крагујевац: Машински факултет у Крагујевцу, 2010.
- [2] Siemens, FEMAP User Guide Version 11.4, Siemens PLM Software Inc, 2017.
- [3] К. Милош, Р. Славковић, М. Живковић and Н. Грујовић, ПАК - С Програм за анализу конструкција МКЕ, Корисничко упутство, Крагујевац, 2016.
- [4] Д. Ракић, Развој и примена материјалних модела порозних медија у статичкој и динамичкој анализи насутих брана, Крагујевац: Факултет инжењерских наука, 2014.
- [5] Д. Ивановић, Хидроенергија, Подгорица: Инжењерска комора Црне Горе, 2014.
- [6] Н. Куспилић, Хидротехничке грађевине - трећи дио - скрипта, Загреб: Грађевински факултет, Свеучилиште у Загребу, 2009.
- [7] С. Колаковић, Хидротехнички објекти и системи-скрипта, Нови Сад: Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду.
- [8] "Извештај о анализама применом МКЕ модела термичких, филтрационих и напонско-деформационих процеса," Институт за водопривреду "Јарослав Черни", Београд, 2019.