

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу

Жељко М. Вукићевић

**АНАЛИЗА ОДЗИВА СТРУКТУРЕ НА ПРОИЗВОЉНУ ПОБУДУ
У ФРЕКВЕНТНОМ ДОМЕНУ**

-дипломски рад-

Крагујевац, 2016.

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу



Назив студијског програма: Машинско инжењерство

Ниво студија: Дипломске академске студије

Модул: Информатика у инжењерству

Предмет: Софтверски инжењеринг

Број индекса: 52/1999

Жељко М. Вукићевић

АНАЛИЗА ОДЗИВА СТРУКТУРЕ НА ПРОИЗВОЉНУ ПОБУДУ У ФРЕКВЕНТНОМ ДОМЕНУ

-дипломски рад-

Комисија за преглед и одбрану:

1. Проф. др Радован Славковић -ментор

2. _____

3. _____

Датум одбране: _____

Оцена: _____

У оквиру овог завршног рада кандидат треба да

- Опише теоријске основе на којима се заснива анализа одзива грађевине на сеизмичке утицаје
- Опише алате и алгоритме који се користе за израду фреквентне анализе одзива система
- Направи модел грађевине
- Уради модалну анализу за израђени модел
- Изврши фреквентну анализу утицаја потреса на израђени модел
- Изведе одговарајуће закључке

Препоручена литература:

- [1] Chopra AK (2012). Dynamics Of Structures - Theory and Applications to Earthquake Engineering, Fourth Edition, Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall, One Lake Street, Upper Saddle River, NJ 07458.
- [2] Којић М, Славковић Р, Живковић М, Грујовић Н (2010). Метод Коначних Елемената I - Линеарна анализа, Машински факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац
- [3] Clough RW, Penzien J (2003). Dynamics Of Structures, Third Edition, Computers & Structures, Inc. 1995 University Ave. Berkeley, CA 94704 USA

Проф. др Радован Славковић
Крагујевац 2016

Sadržaj

Резиме.....	1
Abstract.....	2
1. Увод.....	3
1.1 Формат сеизмичких улазних података.....	4
Временски домен (Time History Records)	5
Фреквентни садржај потреса	6
2. Метода Коначних Елемената	7
2.1 Опште о МКЕ.....	7
2.2 Основни кораци у МКЕ	8
2.2.1. Дискретизација домена и избор врсте елемента	9
2.2.2. Избор функције померања	10
2.2.3. Дефинисање релација деформација-померање и напон-деформација.....	10
2.2.4. Матрица крутости и једначине	11
2.2.5. Рачунање глобалне матрице крутости	12
2.2.6. Одређивање померања целе структуре	13
2.2.7. Рачунање деформација и напона	13
2.2.8. Интерпретација резултата	13
2.3 Координатни системи	13
2.3.1. Основни или глобални координатни систем	14
2.3.2. Локални координатни систем	14
2.3.3. Координатни систем елемента.....	15
2.4 Материјали	15
2.5 Примена методе коначних елемената	16
3. Модална анализа	19
4. Анализа одзива система на произвољну побуду.....	23
4.1 Линеарни системи независни од времена	23
4.2 Фуријеова трансформација.....	26
4.3 Брза Фуријеова трансформација (FFT)	36
4.4 Одзив LTI система.....	38
4.5 Одзив SDOF (Single degree of freedom - систем са једним степеном слободе) система на периодичну функцију	40
4.6 Одзив система на непериодичну (произвољну) функцију	43
4.7 Одзив MDOF (Multi degree of freedom - систем са више степени слободе) система ..	45
5. Пример.....	47

6.	Закључак	59
7.	Прилог	60
	Програм за трансформацију сигнала	60
	Програм за штампање дијаграма померања и убрзања	61
	Literatura	62

Резиме

Структурна анализа се углавном бави понашањем физичке структуре када је иста подвргнута некој сили. Ова акција може бити у облику оптерећења насталог од тежине људи, опреме, снега, утицаја ветра исл. или неке друге побуде као што је земљотрес, потреси земљишта услед експлозије у близини итд. У суштини сва ова оптерећења су динамичка, укључујући и утицај масе структуре, јер у неком тренутку времена ова оптерећења нису постојала. Разлика је направљена између динамичке и статичке анализе на основу тога да ли примењена акција има довољно убрзања у односу на природну фреквенцију саме структуре. Ако се оптерећење примењује довољно полако, силе инерције могу се занемарити и анализа се може поједноставити у виду статичке. Структурна динамика, дакле, је врста структурне анализе која обухвата понашање конструкција изложених динамичким (акције имају велико убрзање) оптерећењима. Свака структура може бити подвргнута динамичком оптерећењу. Динамичка анализа може се користити да се утврде динамичка померања, временске серије, и модалне анализе.

Динамичка анализа се такође односи на силе инерције које се јављају у структурама када су изложене изненадним динамичким оптерећењима. (нпр. ударима ветра, земљотресима, експлозијама)

У овом раду се бавимо теоретски различитим приступима и поступцима динамичке анализе сеизмичког деловања на конструкције. Прво су објашњене статичке па затим и модалне анализе да би на крају објаснили фреквентну анализу и показали на примеру коришћење исте у спрези са методом коначних елемената. Анализа у фреквентном домену је урађена на примеру модела седмоспратнице који је направљен помоћу МКЕ софтвера FEMAP, анализиран је утицај конкретног земљотреса који се догодио 1979. године са епицентром у Петровцу (Црна Гора), а сама анализа је урађена спрегом солвера NX NASTRAN и MATLAB софтверског пакета.

На основу изложене теорије и урађених примера на крају је изнето неколико основних запажања везаних за примену различитих приступа у инжењерској пракси.

Кључне речи: динамика конструкција, динамичка анализа, земљотрес, метода коначних елемената, анализа у фреквентном домену

Abstract

Structural analysis is mainly concerned with finding out the behavior of a physical structure when subjected to force. This action can be in the form of load due to the weight of people, equipment, wind, snow, or some other kind of excitation such as an earthquake, shaking of the ground due to a blast nearby, etc. In essence all these loads are dynamic, including the self-weight of the structure because at some point in time these loads were not there. The distinction is made between the dynamic and the static analysis on the basis of whether the applied action has enough acceleration in comparison to the structure's natural frequency. If a load is applied sufficiently slowly, the inertia forces can be ignored and the analysis can be simplified as static analysis. Structural dynamics, therefore, is a type of structural analysis which covers the behavior of structures subjected to dynamic (actions having high acceleration) loading. Any structure can be subjected to dynamic loading. Dynamic analysis can be used to find dynamic displacements, time history, and modal analysis.

A dynamic analysis is also related to the inertia forces developed by a structure when it is excited by means of dynamic loads applied suddenly (e.g., wind blasts, explosion, earthquake).

In this work we are dealing theoretically with different approaches and methods of dynamic analysis of seismic activity on structures. Firstly we explain the static and modal analysis until eventually explaining frequency analysis which is demonstrated in conjunction with the finite element method. Analysis in the frequency domain is performed on seven floors design that is made by using FEM software FEMAP, the influence of a particular earthquake that occurred in 1979, with its epicenter in Petrovac (Montenegro), but the analysis itself was performed by using solver NX NASTRAN and MATLAB software package.

Based on the exposed theory and solved examples set forth at the end is few basic observations related to the application of different approaches in engineering practice.

Key words: structural dynamics, dynamical analysis, earthquake, finite element method, frequency domain analysis

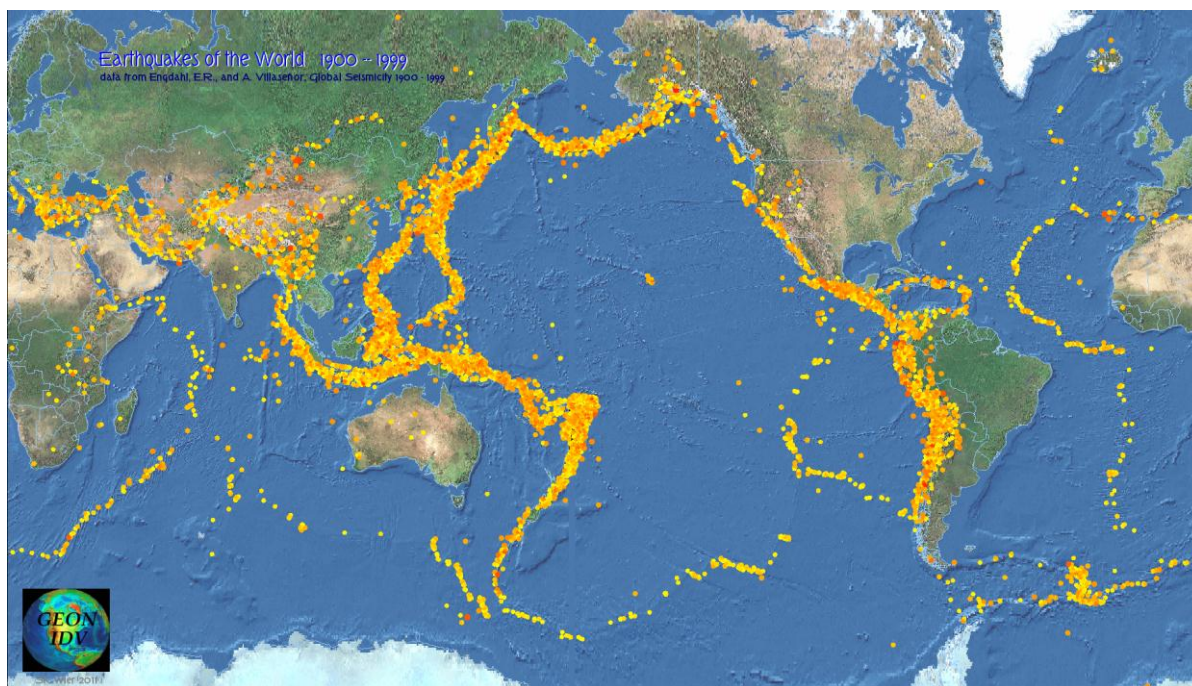
1. Увод

Земљотрес је изненадно и пролазно кретање земљине површине. Према геолозима, земља је трпела потресе овог типа милионима година пре настанка људи. Због насумичног карактера, недостатка видљивих узрока, и деструктивне моћи, међу древним цивилизацијама је било уврежено веровање да су земљотреси натприродне појаве – проклетство од Бога. У погледу геолошке временске скале, тек је недавно (средином седамнаестог века), на ове потресе почело да се посматра као на природне феномене који су директна последица процеса који се одвијају у земљи као планети. Тако је накнадно наука, посебно у деветнаестом веку, довела до огромног напретка у погледу инструмената за мерење и записивање података везаних за земљотресе. Сеизмолошки подаци многих земљотреса су сакупљени и анализирани да би се мапирала и разумела појава овог феномена. Ови подаци су се чак користили и за проучавање и разумевање унутрашње структуре Земље до завидног нивоа, што је, за узврат, помогло у правцу развоја различитих теорија које објашњавају узроке појављивања земљотреса. Док је срж знања извученог из сакупљених сеизмолошких података помогла у рационалном пројектовању грађевина да издрже потресе, такође је и открила неизвесну природу будућих земљотреса које пројектоване структуре треба да издрже. Дакле, појавили су се такође и концепти који се наслањају на теорије вероватноће у раду са земљотресима и пројектовању структура отпорних на исте.



И сеизмолози и инжењери (који се баве пројектовањем конструкција) користе сеизмолошке податке за разумевање земљотреса и њиховог утицаја, али су њихови циљеви различити. Сеизмолози фокусирају своју пажњу на глобална питања потреса и више се баве геолошким аспектима, укључујући и предвиђање земљотреса. Инжењери, са друге стране, се баве углавном локалним ефектима потреса који могу да изазову значајну штету грађевинама. Они трансформишу сеизмолошке податке у форму која је адекватна за предвиђање оштећења на објектима или, алтернативно, безбедно пројектовање објеката. Међутим, постоје многи аспекти сеизмологије који су од непосредног значаја за инжењеринг, а нарочито се односе на

боље разумевање сеизмолошких података и њиховог коришћења за пројектовање објеката отпорних на потресе.

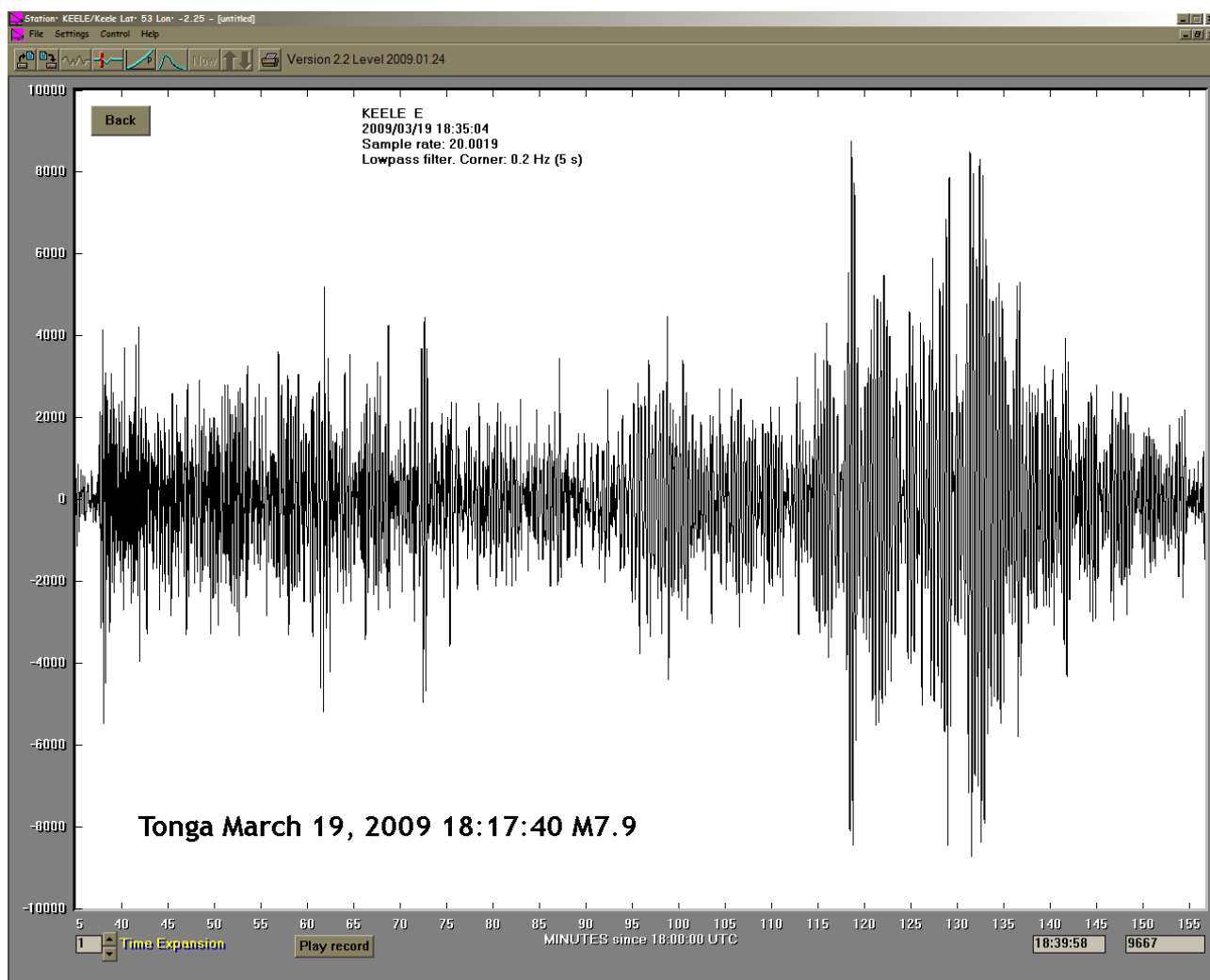


слика 1.1: Мапа епицентара земљотреса од 1900.-2000. године

1.1 Формат сеизмичких улазних података

Сеизмички улазни подаци су подаци земљотреса који су неопходни за извршавање различитих врста сеизмичких анализа. У контексту сеизмичке анализе и пројектовања конструкција, различити подаци земљотреса могу бити потребни у зависности од анализе која се обавља. Ови подаци су приказани на два различита начина, у детерминистичком и у облику вероватноће. Сеизмички улазни подаци у детерминистичком формату се користе за детерминистичке анализе и пројектовање објеката, док се оне у формату вероватноће користе за анализе насумичних вибрација конструкција под утицајем потресних сила, анализу сеизмичких ризика код структура, и процену штете на објектима услед будућих потреса. Сеизмички улазни подаци за структурну анализу су дати у временском домену, фреквентном домену или у оба. Додатно, неколико параметара потреса се такође користе као сеизмички улазни подаци ради комплетирања информација које су потребне за обављање различитих анализа. Они укључују магнитуду (величину, јачину, опсег) потреса, интензитет, максимално убрзање тла, максималну брзину тла, максимално померање тла, трајање потреса, доминантну фреквенцију, итд. За одређене врсте анализа, као што су, анализа ризика, процена штете на објектима, и анализа сеизмичке вероватноће, предвиђање сеизмичких улазних података за будуће земљотресе је од суштинског значаја.

Временски домен (Time History Records)



слика 1.2: Приказ убрзања земљотреса Тонга у виду временске серије података[13]

У пракси најприсутнији начин за описивање померања тла је коришћење временске серије података (time history records). Параметри кретања могу бити убрзање, брзина и померање, или сва три у комбинацији. Генерално, директно мерена величина је убрзање а остали параметри су изведене величине. Међутим, и брзина и померање могу се директно мерити. Измерена временска серија садржи грешке које потичу из различитих извора, као што су шум на високим и ниским фреквенцијама, грешка основне линије, и грешка код мерних инструмената. Ове грешке се уклањају из података пре њиховог коришћења. Измерени подаци су у аналогном облику, тако да се морају дигитализовати пре него се

користе као сеизмички улазни подаци. У последњих неколико година дигитални сеизмографи се све чешће користе али различите поменуте грешке подједнако су присутне и у дигиталној и аналогној форми. Временске серије копнених кретања се директно користе за анализу конструкција у временском домену, изложених детерминистичким сеизмичким улазним подацима [13].

У свакој мерној станици, померања тла се бележе у три ортогонална правца, два од њих су у хоризонталним правцима и трећи у вертикалном правцу. Дакле, три компоненте кретања тла су доступне из било које мерне станице. За потребе структурне анализе ове три компоненте копнених померања се трансформишу у оне компоненте које одговарају главним правцима. Уочено је да главни правац кретања потреса лежи у правцу линије која спаја мерну станицу са епицентром земљотреса. Правци друге две компоненте потреса се одређују у односу на главни правац. Стохастички, компоненте копнених померања у главним правцима нису у корелацији. На основу овог концепта, три главне компоненте кретања тла се вештачки генеришу на местима где репрезентативне временске серије померања нису доступне (ван мерних станица).

Фреквентни садржај потреса

Како одговор било које конструкције зависи од односа између природне учестаности саме конструкције и учестаности побуде (оптерећења), важно је знати фреквентни садржај померања тла. У ствари, за анализу конструкције у фреквентном домену потребно је да сеизмички улазни подаци буду у форми фреквентног садржаја померања тла. Најзгоднији начин за обезбеђивање ових информација јесте коришћење Фуријеове синтезе временских серија померања тла. Под претпоставком да се измерена временска серија података кретања тла понавља по периоди која је једнака трајању самог потреса, она се може представити као збир бесконачног броја хармоничних функција (познато као Фуријеова серија експанзије хармоничних функција).

2. Метода Коначних Елемената

2.1 Опште о МКЕ

Метод коначних елемената представља нумерички поступак решавања инжењерских проблема. У највећем броју случајева када анализирана структура има сложену геометрију и када је сложено оптерећење (као у случају сеизмичких утицаја) није могуће наћи решење у аналитичком облику. Аналитичко решење подразумева добијање аналитичких израза за рачунање тражених карактеристика на различитим местима структуре (померања, температура, напон и сл.). За добијање таквих података треба решити мноштво диференцијалних или парцијалних диференцијалних једначина. То је изводљиво само за врло једноставне проблеме. Уместо аналитичког решавања проблема које карактеришу сложена геометрија и сложена оптерећења користе се нумерички поступци, а један од њих, и најчешће коришћен, је метода коначних елемената (МКЕ). Решавање проблема методом коначних елемената своди се на решавање система алгебарских једначина. Добијена решења су приближна и односе се на одређене тачке структуре [7].

Процес моделирања система заснива се на дискретизацији континуума. Такав модел састоји се од коначних елемената, који су повезани у чворовима (елемент штапа), по граничним заједничким линијама (равански елемент), или заједничким површинама (просторни елемент). За сваки коначни елемент постављају се једначине а њиховом комбинацијом добијају се једначине целе структуре. Зависно од врсте проблема који се решава, као решења се добијају одговарајуће величине. Тако у случају рачунања напонско деформационог стања структуре резултати су померања сваког чвора и напони унутар сваког елемента структуре. Померања и напони су последица деловања спољашњег оптерећења. Код проблема који се не односе на структурну анализу, непознате у чворовима могу бити неке друге физичке величине нпр. температуре. Важност и употребљивост МКЕ посебно је дошла до изражаја са појавом моћних рачунарских система. Сама теорија МКЕ је сложена, математички одређена и дефинисана. Међутим за примену тј. добијање резултата прорачуна није неопходно улазити у дубину математичких теорија које су основа методе коначних елемената.

МКЕ је већ одавно у масовној употреби за прорачун различитих проблема. Не могу се ни замислити иоле озбиљни прорачуни без употребе овог моћног метода. И поред тога наставља се развој ових алата и истражују се нове могућности примене МКЕ.

У модерном конструкционом машинству користе се различити компјутерски софтвери ЦАЕ (CAE – Computer Aided Engineering) како би се оценила конструкција у сваком кораку у процесу дизајнирања. ЦАЕ алати се користе за анализе конематских и динамичких карактеристика конструкције. На тржишту постоји низ моћних КАД (CAD – Computer Aided Design) софтверских алата. Први програми нису имали могућност визуализације и даље су се развијали и добили нове верзије са много ширим спектром могућности. Неки од тих алата су Nastran, Sap (sada Abaqus, Ansys), Ideas, Flow Catia, Algor

итд. Софтвери су се развијали зависно од подручја примене али и за универзалну примену (статичку, динамичку, термичку анализу). Ранија примена МКЕ односила се само на структурну механику да би се касније проширила на решавање проблема преноса топлоте, електростатички потенцијал, механику флуида, анализу вибрација и разне друге проблеме који се јављају у машинству. Данас се развијају софтвери у подручју бризгања пластике који су у могућности да прикажу дистрибуцију температурног поља и пуњење калупа течном масом. Moldflow и C-Mold су софтвери који симулирају ток течне пластике код бризгања. У развоју електромашинства, нуклеарне технике, магнетизма и за анализе токова флуида, симулацију нелинарних проблема користе се суперрачунари (као што је CRAY).

2.2 Основни кораци у МКЕ

Инжењерски проблеми могу бити структурни и неструктурни (пренос топлоте и ток флуида). У структурној анализи циљ конструктора је да одреди померања и напоне у целој структури која је изложена деловању оптерећења. За многе проблеме немогуће је наћи расподелу деформација коришћењем класичних аналитичких метода па се користи МКЕ. Постоје два основна приступа у МКЕ. Метод сила и метод флексибилности. У методи сила основне непознате величине у проблему који се анализира јесу силе. Да би се добиле једначине структуре прво се постављају једначине равнотеже. Резултат је систем алгебарских једначина у којима су непознате величине силе које се из датих једначина одређују. Други приступ је метода померања или метода крутости у којој су основне непознате померања у чворовима. За постизање услова компатибилности код решавања конкретних проблема тражи се да су елементи повезани чворовима, дуж страница елемента или одговарајућих површина пре и после деловања оптерећења (у супротном проблеми залазе у домен механике лома). Основне једначине структуре садрже померања чворова, а користе се једначине равнотеже и веза између сила и померања. Од два поменута приступа већу примену је нашао други метод померања и његова формулација је слична за многе структурне проблеме. Већина програма се заснива на методи померања.

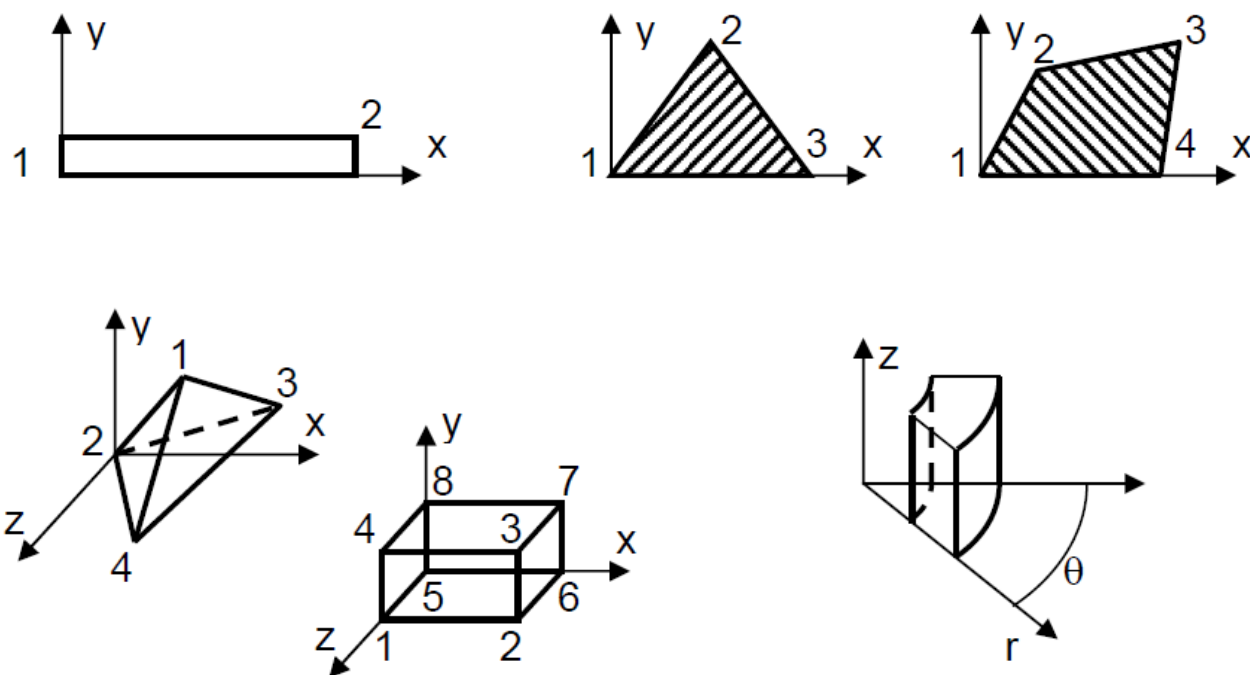
У МКЕ се користе модели структура у којима су међусобно повезани елементи који се називају коначни елементи. Сваком елементу се придружује функција померања. Сви елементи су повезани директно или индиректно (преко чворова, ивица или површина). На основу познатих вредности напона и деформација у једном чвору и елементу могу се одредити напони и деформације за било који други чвор и елемент структуре која се разматра, а чије су карактеристике материјала и оптерећења већ познате. Укупан број једначина структуре описује понашање свих чворова и представља систем алгебарских једначина које је најбоље представити у матричном облику. Да би се изложила процедура прорачуна по МКЕ неког проблема најбоље је специфицирати редослед корака у процедури.

Пре описа неопходних корака треба нагласити да се моделирање проблема по МКЕ изврши дискретизацијом структуре на одговарајући број коначних елемената, изабере врста (тип) елемента који се користи у анализи, затим дефинишу врсте оптерећења, гранични услови, ослонци (ограничења). Први корак у процедури односи се на моделирање док су

следећи, који ће бити описани, саставни део софтвера који се користи и обављају се аутоматски.

2.2.1. Дискретизација домена и избор врсте елемента

Избор елемента који се користи у МКЕ анализи зависи од природе проблема који се решава и жељене тачности резултата. Прво о чему треба водити рачуна односи се на чињеницу да ли је проблем једно, дво или тродимензионалан. Ако се ради о просторним или раванским решеткама онда се користе линијски или једнодимензионални елементи. Ако је проблем равански користе се дводимензионални равански елементи, а ако је проблем просторни користе се тродимензионални елементи [7].



слика 2.1: Приказ различитих елемената који се користе приликом дискретизације система

2.2.2. Избор функције померања

Избор функције померања врши се за сваки елемент. Функција је дефинисана унутар елемента и користи вредности израчунате у чворовима. За дводимензионални елемент функција померања је функција координата у ХУ равни. Функције су непознате величине у чворовима. Иста функција померања може се изабрати за сваки елемент у моделу коначних елемената дискретизоване структуре. Функције су тако одабране да се помоћу МКЕ мора остварити континуитет померања унутар тела тј. између свих елемената у чворовима, дуж страница и површина. Након избора функције померања успоставља се веза између деформација и померања као и веза између напона и деформација.

2.2.3. Дефинисање релација деформација-померање и напон-деформација

За сваки коначни елемент треба поставити једначине. Ако је проблем једнодимензионалан тј. постоји деформација само у једном правцу нпр. у Х правцу, тада је деформација ε_x и она је повезана са померањем „u“ у Х правцу.

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (1)$$

Вектор деформације ε (са одговарајућим бројем компонената) у материјалној тачки унутар елемента одређен је релацијом:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \quad (2)$$

где је B одговарајућа матрица која садржи изводе интерполационих функција [7]. Између напона σ и деформација ε такође постоје релације које се називају конститутивне релације. Једна од најједноставнијих и најпознатијих је Хуков (Robert Hooke) закон. За једнодимензиони проблем веза напона и деформације је:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (3)$$

Где је:

σ_x - Напон у Х правцу

E - Модул еластичности

Или:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (4)$$

у матричном облику где је C еластична конститутивна матрица. Након утврђивања датих релација поставља се матрица крутости која је повезана са напоном и деформацијом релацијом [7]:

$$K = \int_V B^T C B dV \quad (5)$$

2.2.4. Матрица крутости и једначине

У почетку су се матрице крутости елемената и једначине елемената одређивале на основу утицајних коефицијената крутости, што је у директној вези са структурном анализом. Након тога развијено је више метода за одређивање матрице крутости [1]:

1. Директни равнотежни метод (Direct Finite Element Method)
2. Варијационе методе (Variational Finite Element Methods)
3. Методе енергетског баланса (Energy Balance Finite Element Methods)
4. Методе тежинског резидуала (Methods of Weighted Residuals)

Метод тежинског резидуала заснива се на диференцијалним једначинама разматраног проблема. Метод се користи тамо где није могуће одредити функционал и у проблемима у којима функционал уопште не постоји. Од свих метода резидуала најпознатији је Галеркинов (Борис Григорович Галёркин) метод. На основу метода резидуала добијају се једначине које описују понашање елемената [2]. У матричном облику то је:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\{f\} = [k] \cdot \{u\} \quad (7)$$

Где су:

$\{f\}$ - вектор сила у чворовима елемента

$[k]$ - матрица крутости елемента

$\{u\}$ - вектор померања чворова елемента

2.2.5. Рачунање глобалне матрице крутости

Матрица крутости и једначине појединих коначних елемената добију се применом неке од метода наведених у кораку 4. Применом директне методе и суперпозиције, матрице појединих елемената могу се сабрати. На тај начин се добија глобална или укупна матрица крутости структуре. Овде мора бити испоштован концепт континуитета или компатибилности који захтева да структура задржи целовитост (непрекидност) тј. да нема прекида структуре. Глобална једначина структуре у матричној форми је:

$$\{F\} = [K] \cdot \{u\} \quad (8)$$

Где су:

$\{F\}$ - вектор сила у глобалном координатном систему

$[K]$ - глобална матрица крутости

$\{u\}$ - вектор познатих и непознатих померања свих чворова структуре

Глобална матрица крутости $[K]$ је сингуларна матрица јер је њена детерминанта једнака нули. Проблем сингуларитета матрице решава се увођењем одговарајућих граничних услова (ограничења или ослонци), тако да структура задржи постојеће место и да се не креће као круто тело [5]. Треба нагласити да се позната оптерећења уносе у глобалну матрицу сила $\{F\}$.

2.2.6. Одређивање померања целе структуре

Матрична једначина структуре – конструкције у коју су унесени гранични услови представља спрегнути систем алгебарских једначина у облику:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2n} \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (9)$$

где је „n“ укупан број непознатих степени слободе. Једначине се могу решити Гаусовом (Jochann Karl Friedrich Gauss) методом елиминације или применом неког итеративног поступка. Основне непознате су померања у чворовима [7]. То су прве величине које се одређују применом МКЕ.

2.2.7. Рачунање деформација и напона

Напони и деформације су непознате величине које се одређују у структурној анализи. Померања се израчунају у кораку 6. Након тога се коришћењем везе између деформација и померања и конститутивних релација израчунавају деформације и напони [7].

2.2.8. Интерпретација резултата

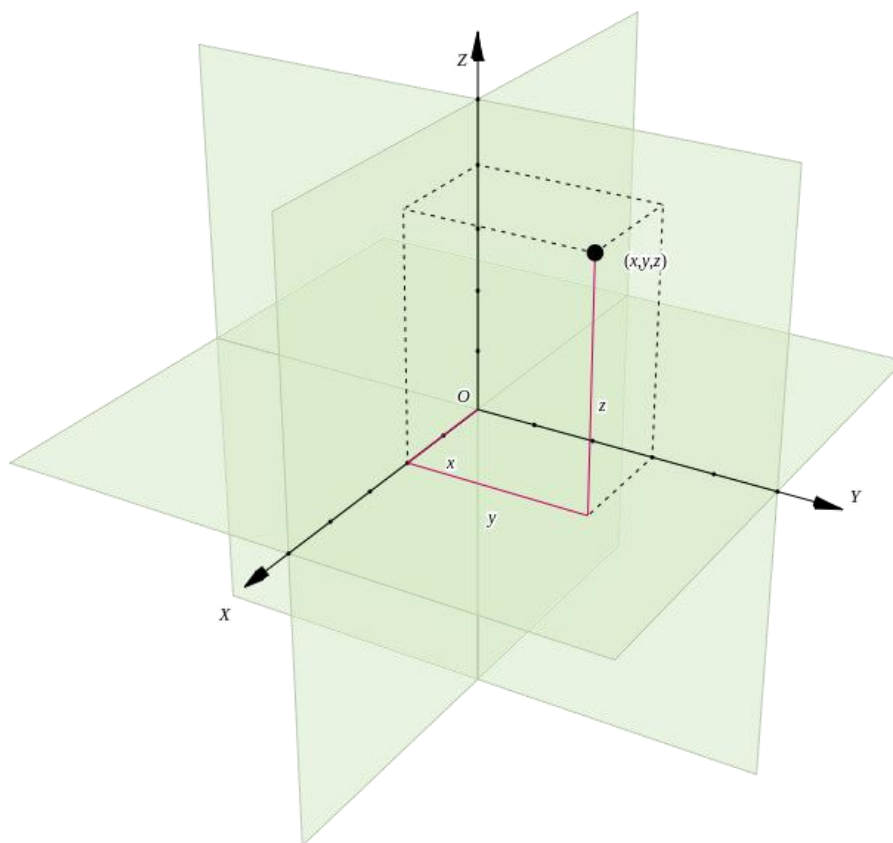
Закључак сваке анализе се своди на одређивање тачног места деловања највећих напона и деформација. На основу познавања напонско-деформационог стања као једног од важних фактора, конструктор ће доносити одлуке. Постпроцесорски компјутерски програми помажу кориснику да интерпретира и анализира резултате приказујући их у графичкој форми [8].

2.3 Координатни системи

У општем случају модел који се анализира дефинише се помоћу чворова смештених у тродимензионом простору. Положај тачака у простору одређен је координатним системом. Померања тачака али и друге величине које се траже, могу се због јасноће приказати у координатном систему различитом од оног у којем су дефинисани чворови. Координатни системи се користе да изразе положај улазних и излазних величина.

2.3.1. Основни или глобални координатни систем

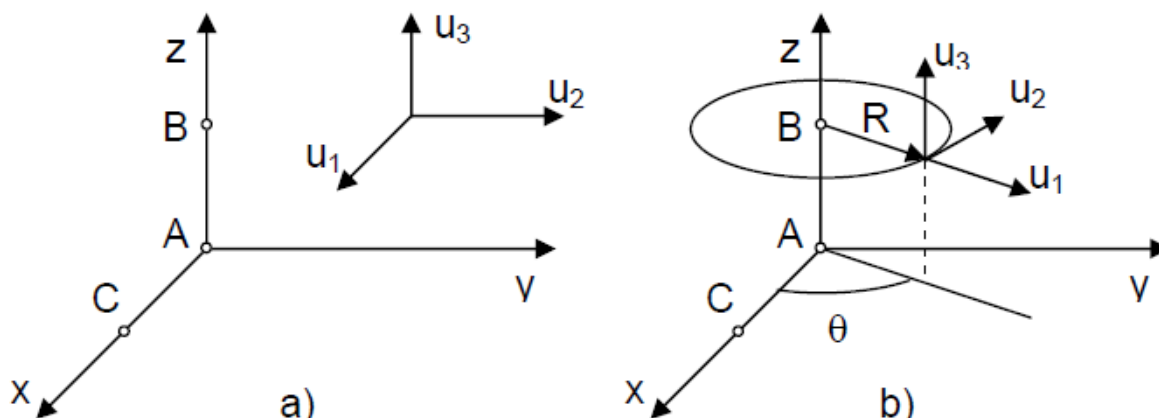
У глобалном координатном систему који је основни систем за све рачунарске програме дефинишу се ограничења, као и излазне величине померања. Координатни почетак глобалног система је нула.



Слика 2.2: Декартов координатни систем

2.3.2. Локални координатни систем

Локални координатни систем може бити са правоуганим, цилиндричним или сферним координатама. Положај локалног у односу на глобални систем одређен је са три тачке. Локални координатни систем се користи да се изразе резултати померања и специфицирају ограничења.



Слика 2.3: Локални координатни системи

2.3.3. Координатни систем елемента

Сваки елемент има један координатни систем који служи да се у њему прикажу излазни тангенцијални и нормални напони, као и моменти. У координатном систему елемента могу се дати и улазне карактеристике за једнодимензионе елементе. Ови координатни системи се одређују према елементу, а често код једнодимензионих елемената координатна оса спаја чворове елемента.

2.4 Материјали

У анализи МКЕ користе се дводимензионални и тродимензионални елементи. Они могу бити од различитих материјала. Програми за МКЕ омогућавају анализу структура од различитих материјала. Линеарно изотропни материјали су они код којих механичке особине не зависе од правца деловања оптерећења и исте су у свим правцима. Особине материјала које се најчешће дефинишу у прорачунима су: модул еластичности E , преко кога се рачуна модул клизања G , Поасонов (Poisson) број или коефицијент ν , и коефицијент термалног ширења α . Програми за анализу МКЕ дају могућност коришћења и линеарно анизотропних материјала као и линеарно ортотропних који су специјални случај много општијих анизотропних материјала. За линеарно температурно зависне изотропне материјале однос напона и деформације се најчешће даје у табеларном облику. У Ansys програму омогућено је уношење фамилије кривих напон-деформација које су зависне од температуре.

2.5 Примена методе коначних елемената

У пракси силе које делују на конструкције се мењају у току времена па померања појединих тачака зависе од времена. Такође, на кретање конструкције утичу инерцијалне карактеристике, која се при израчунавању кретања морају узети у обзир. Зато уместо статичких услова равнотеже морамо да поставимо диференцијалне једначине кретања, чијом интеграцијом долазимо до померања, брзина и убрзања појединих тачака конструкције. Као и у статичкој анализи метода коначних елемената има значајну примену у области динамике конструкција [7].

Проблеме динамике конструкција срећемо веома често у машинству код, на пример, изучавања кретања возила, у ваздухопловству; затим у грађевинарству, при анализи утицаја земљотреса на објекте као што су зграде, мостови, бране и други значајни објекти (што је и циљ овог рада); и у другим областима техничких и природних наука.

У општем случају кретања материјалног система диференцијалне једначине кретања можемо да напишемо, на пример, применом Лагранжевих једначина друге врсте или применом Даламберовог принципа. Овде ћемо диференцијалне једначине кретања континуума подељеног на коначне елементе, да изведемо користећи принцип виртуалног рада[7].

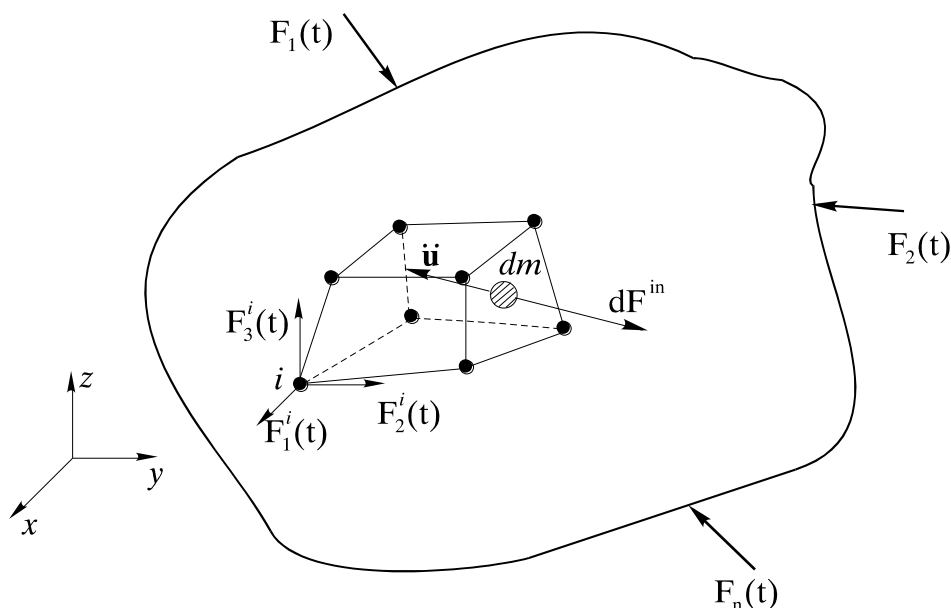
$$\delta A_u = \delta A_s \quad (10)$$

$$\int_V \sigma_{kj} \delta e_{kj} dV = \int_V F_j^v \delta u_j dV + \int_{S^\sigma} F_j^s \delta u_j dS \quad (11)$$

Претходни израз представља принцип виртуалног рада: виртуални рад унутрашњих сила деформабилног тела једнак је виртуалном раду спољашњих сила. Виртуални рад унутрашњих сила δA_u представља конкретно рад напона σ на виртуалним деформацијама, у матричном облику:

$$\delta A_u = \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV \quad (12)$$

$$\delta A_s = \int_V \delta u^T F^v dV + \int_S \delta u_s^T F^s dS \quad (13)$$



Слика 2.4: Силе које делују на елементарну масу коначног елемента

Посматрамо тело, подељено на коначне елементе, које се креће под дејством спољашњих сила $F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)$ које се мењају у току времена. Такође, померања чворова елемената су функције времена. Запреминским силама у једначини равнотеже коначног елемента додајемо инерцијалне силе. Елементарна запреминска инерцијална сила dF^{in} која одговара елементарној маси dm је:

$$dF^{in} = -\ddot{u}dm = -\ddot{u}\rho dV \quad (14)$$

где је $\ddot{u}$ убрзање масе dm , према сл. 2.4, ρ је густина тела, а dV елементарна запремина која одговара маси dm . Комбинацијом претходних једначина и увођењем инерцијалне силе у једначину виртуалног рада добијамо:

$$\int_V \delta e^T \sigma dV = \int_V \delta u^T (F^V - \rho \ddot{u}) dV + \int_S \delta u_s^T F^s dS \quad (15)$$

На основу интерполације за померање унутар коначног елемента, добијамо интерполације за брзине и убрзање тачака. Диференцирањем по времену релације за померања и њиховим увођењем у једначину 15 добијамо:

$$\delta U^T \int_V (B^T C B dV) U + \delta U^T \left(\int_V H^T \rho H dV \right) \ddot{U} = \delta U^T F \quad (16)$$

или:

$$M\ddot{U} + KU = F(t) \quad (17)$$

Овде смо увели ознаку M за матрицу маса коначног елемента, која се дефинише изразом:

$$M = \int_V \rho H^T H dV \quad (18)$$

Вектор $F(t)$ представља спољашње силе које делују у чворовима коначног елемента, а обухвата површинске, запреминске и концентрисане силе, у општем случају зависне од времена.

Често се у конструкцијама (материјалима) јављају силе отпора (дисипације) које су пропорционалне брзинама кретања тачака. Елементарна сила отпора dF^d , која одговара елементарној запремини dV је

$$dF^d = -b\ddot{u}dV \quad (19)$$

где b представља коефицијент отпора кретању, односно коефицијент пригушења. Заменом израза за силу отпора 19 у 15, као допунске запреминске силе, уз коришћење интерполационих функција, добијамо једначину кретања коначног елемента а да је при том матрица пригушења:

$$B = \int_V b H^T H dV \quad (20)$$

У општем случају матрична једначина кретања у структурној анализи има облик:

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [B] \cdot \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F_s\} + \{F_d\} \quad (21)$$

Где су:

$[M]$, $[B]$ и $[K]$ - матрице маса, пригушења и крутости респективно
 $\{\ddot{u}\}$, $\{\dot{u}\}$ и $\{u\}$ - вектори убрзања, брзина и померања респективно
 $\{F_s\}$ и $\{F_d\}$ - вектори статичких и динамичких оптерећења

Општа једначина кретања за линеарни материјал без нелинеарног оптерећења може се написати у облику:

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [B] \cdot \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F(t)\} \quad (22)$$

Пре решавања структурних динамичких проблема треба наћи природне фреквенције које се јављају када на структуру не делују никакве силе и то спада у домен модалне анализе.

3. Модална анализа

За правилну процену понашања конструкције изложене динамичким силама пресудан утицај има познавање сопствених кружних учестаности (фреквенција) и сопствених облика осциловања. Са проблемом одређивања сопствених вредности и сопствених вектора се срећемо и у другим областима технике и физике, а у литератури је познат као проблем сопствених вредности или еиген проблем [7].

Посматрамо систем без пригушења и дејства спољашњих сила, хомогени систем обичних диференцијалних једначина другог реда, који може да се напише у облику

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = 0 \quad (23)$$

Решење добијеног система једначина, обзиром на особине тригонометриских функција, можемо да представимо у следећем облику

$$\{U\} = \{\bar{U}\} \sin(\omega t + \alpha) \quad (24)$$

где $\{U\}$ представља вектор амплитуда, ω кружну учестаност слободних осцилација система и α је фазно угаоно померање. Двоструким диференцирањем израза 24 и заменом у 23 добијамо следећи хомогени систем од n алгебарских једначина по непознатим амплитудама $\bar{U}$.

$$([K] - \omega^2[M])\{\bar{U}\} = 0 \quad (25)$$

Да би хомогени систем 25 имао нетривијално решење потребно је да детерминанта система буде једнака нули, односно да је

$$p(\omega^2) = \det [K] - \omega^2 [M] = 0 \quad (26)$$

Једначина 26 представља полином реда $2n$ по ω односно реда n по $\lambda = \omega^2$, и у литератури је позната као карактеристична једначина система.

Решавањем једначине 26 по λ односно ω^2 добијамо сопствене учестаности система, којих у општем случају има n , и ређамо их по растућем реду; $\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_n^2$. Пошто у општем случају у затвореном облику можемо да решимо једначину 25 до трећег реда за систем n -тог реда је неопходно применити нумеричке поступке за одређивање корена $\lambda_i = \omega_i^2$.

За сваку кружну учестаност ω_i^2 из система једначина 25 можемо да одредимо сопствени вектор $\bar{U}_i$, па кажемо да ω_i^2 и $\bar{U}_i$ представљају сопствени пар. Обзиром да се ради о хомогеном систему алгебарских једначина из система 25 не можемо да одредимо апсолутне вредности амплитуда већ само њихове односе на тај начин што једну од једначина изостављамо из система. Вредности амплитуда у вектору $\bar{U}_i$ нормирамо на тај начин што усвајамо да је једна амплитуда једнака јединици или да је норма вектора $\|\bar{U}_i\|$ једнака јединици.

Чланови сопственог вектора $\bar{U}_i$ уствари представљају односе амплитуда померања појединих маса у случају када све масе осцилују са истом кружном учестаношћу ω_i . Даље, ако дефинишемо вектор сила $\bar{F}_i$, пропорционалан сопственом вектору $\bar{U}_i$ на следећи начин

$$F_i = \omega_i^2 [M] \bar{U}_i \quad (27)$$

онда једначину 25 можемо да напишемо у облику:

$$[K] U_i = F_i \quad (28)$$

Из последње једначине следи да ако је вектор сила дат са 27 онда је решење система 28 такође сопствени вектор $\bar{U}_i$, што се често користи у нумеричким поступцима.

Сопствени вектори имају битну особину ортогоналности у односу на матрицу маса и матрицу крутости која може матрично да се прикаже следећим релацијама

$$\bar{M} = \Phi^T \cdot M \cdot \Phi \quad , \quad \bar{K} = \Phi^T \cdot K \cdot \Phi \quad (29)$$

тако добијамо М и К надвучено који представљају дијагоналне матрице маса и крутости. Претпостављањем да је С Рајлијева функција пригушења, то јест, да је пропорцијална маси и крутости система:

$$C = \alpha \cdot M + \beta \cdot K$$

$$\bar{C} = \Phi^T \cdot C \cdot \Phi \quad (30)$$

На тај начин С надвучено такође постаје дијагонална матрица. Ова врста пригушења је позната и под називом класично пригушење. Будући да смо дефинисали М, К и С као дијагоналне матрице, једначина кретања система се конвертује у скуп n независних једначина кретања у форми:

$$\Phi^T \cdot M \cdot \Phi \cdot \ddot{q} + \Phi^T \cdot C \cdot \Phi \cdot \dot{q} + \Phi^T \cdot K \cdot \Phi \cdot q = -\Phi^T \cdot M_r \cdot U_g \quad (31)$$

или

$$\bar{m}_j \cdot \ddot{q}_j + \bar{c}_j \cdot \dot{q}_j + \bar{k}_j \cdot q_j = -\Phi^T \cdot M_r \cdot \ddot{u}_g; \quad j=1,...,m \quad (32)$$

У којој је:

$$\bar{m}_j = \Phi_j^T \cdot M \cdot \Phi_j$$

$$\bar{c}_j = \Phi_j^T \cdot C \cdot \Phi_j$$

$$\bar{k}_j = \Phi_j^T \cdot K \cdot \Phi_j$$

$$\omega_j^2 = \frac{\bar{k}_j}{\bar{m}_j}$$

$$\bar{c}_j = 2 \cdot \xi_j \cdot \omega_j \cdot \bar{m}_j \quad (33-37)$$

и ξ_j је модални коефицијент пригушења. Сада једначина кретања може бити написана на следећи начин:

$$\ddot{q}_j + 2 \cdot \xi_j \cdot \omega_j \cdot \dot{q}_j + \omega_j^2 \cdot q_j = - \sum_{k=1}^s \lambda_{jk} \ddot{u}_{gk} \quad (j=1, \dots, m) \quad (38)$$

У претходној једначини λ_{jk} је утицајни фактор j -тог мода за побуду на k -том стубу конструкције (у случају када побуда не утиче само у једној тачки основе) и дат је релацијом:

$$\lambda_{jk} = \frac{\Phi_j^T \cdot M \cdot r_k}{\Phi_j^T \cdot M \cdot \Phi_j} \quad (39)$$

r_k је k -та колона матрице r а $\ddot{u}_{gk}$ је k -ти елемент вектора $\ddot{u}_g$ који се састоји од s броја побуда. r је матрица утицајних коефицијената димензија $n \times m$ где је n број неоптерећених степени слободе а m је број улазних побуда на основи конструкције. Специјалан случај када је $s = 1$ представља побуду у само једној тачки основе конструкције.

Генерално оваква једначина кретања представља m број система са једним степеном слободе под утицајем побуде дате у виду дела једначине кретања на десној страни знака једнакости. За задате временске податке побуде $\ddot{u}_{gk}$, сваки од система са једним степеном слободе дат једначином кретања на овај начин може бити решен по q_j коришћењем конволуционог интеграла (Jean-Marie Constant Duhamel) и Њумаркове методе интеграљења (Nathan Mortimore Newmark), или анализе у фреквентном домену коришћењем Фуријеових серија (Jean-Baptiste Joseph Fourier). Када одредимо q_j неком од ових анализа, одзив система можемо наћи из једначине:

$$\{U\} = [\Phi] \cdot \{q\} \quad (40)$$

Где је:

U – вектор померања димензија $n \times 1$

Φ – модална матрица

q – вектор генералисаних координата

4. Анализа одзива система на произвољну побуду

Пре него приступимо анализи одзива система, морамо дефинисати неке параметре и појмове који ће нам је значајно олакшати.

4.1 Линеарни системи независни од времена

Коришћењем алата које смо у претходном тексту описали у великој мери смо поједноставили систем који желимо да анализирамо. Даљим искључивањем утицаја који су довољно занемарљиви долазимо до тога да систем можемо прогласити LTI системом (од Linear Time-Invariant system - Линеарни систем независан од времена) [15].

Особине LTI система као што само име каже су:

Линеарност:

$$\mathcal{H}(\alpha u[t] + \beta v[t]) = \alpha \mathcal{H}(u[t]) + \beta \mathcal{H}(v[t]) \quad (41)$$

Независност од времена:

$$y[t] = \mathcal{H}(x[t]) \Rightarrow y[t-r] = \mathcal{H}(x[t-r]) \forall r \quad (42)$$

Понашање LTI система је потпуно дефинисано његовим импулсним одзивом. Веома велика сила која делује у веома кратком временском интервалу, а при том њен интеграл по времену има коначну вредност, назива се импулсна функција. Ако узмемо за пример функцију

$$P = 1/\varepsilon \quad (43)$$

са трајањем ε које тежи нули очигледно је да интензитет расте са смањењем интервала трајања саме функције а притом магнитуа импулса дефинисана интегралом по времену је једнака јединици. Таква функција у граничном случају где $\varepsilon \rightarrow 0$ се назива јединичним импулсом и њена математичка репрезентација је $\delta(t-\tau)$ или такозвана Диракова делта функција (Paul Adrien Maurice Dirac):

$$\delta(t-\tau) = 0 \text{ за } t \neq \tau \quad (44)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) \cdot d\tau = 1 \quad \text{за} \quad -\infty < \tau < \infty \quad (45)$$

Диракова делта функција није функција у конвенционалном смислу већ се може посматрати више као операнд. Искористићемо једну важну особину δ функције а то је да интеграл производа било које функције у времену и $\delta(t-\tau)$ има вредност те функције у тачки t .

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \cdot d\tau = x(t) \text{ за } -\infty < \tau < \infty \quad (46)$$

А одговор система на импулсну побуду $\delta(t)$ је преносна функција система и означава се са $h(t)$ (или у случају $\delta(t-\tau)$ онда је то $h(t-\tau)$).

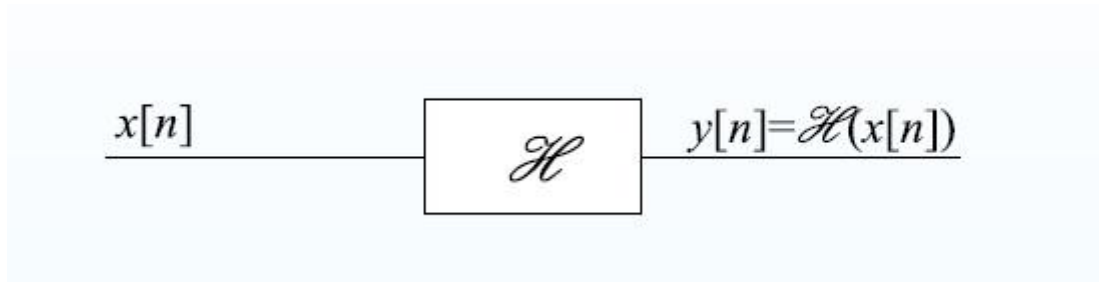
Дефинисали смо као задатак да нађемо решење за диференцијалну једначину кретања облика:

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [C] \cdot \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F(t)\} \quad (47/22)$$

изложеном иницијалним условима:

$$u(0) = 0 \text{ и } \dot{u}(0) = 0 \quad (48)$$

Приликом тражења генерализованог решења $F(t)$ ћемо посматрати као секвенцу импулса инфинитезималног трајања, а одзив система на ову функцију је сума одговора на индивидуалне импулсе. Погодно је што се ови индивидуални одзиви могу написати као одговори система на јединични импулс. Први корак је да представимо одзив система ($y(t)$) преко самог улаза ($x(t)$) и једне функције преноса ($h(t)$), што је карактеристично за LTI системе. Ова функција се назива конволуција или интеграл конволуције.



Слика 4.2: Duhamel-ов интеграл или конволуција

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \text{или} \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau \quad (49)$$

Конволуција и поменуте нумеричке интеграције као метод за налажење одзива система на произвољну побуду нису баш адекватне за систем који има више од два или три степена слободе, компликоване функције улаза и мали корак интеграције. Да би избегли комплексне и захтевне методе интеграције послужићемо се још неким особинама LTI система. Сваки LTI систем за ограничен улаз (Bounded input) има и ограничен излаз (Bounded output) тј. сваки LTI систем је BIBO стабилан:

$$|y[t]| \leq B \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad - \text{ за континуалне временске функције}$$

$$|y[n]| \leq B \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad - \text{ за дискретне временске функције}$$

То нам дозвољава да извршимо пресликавање из временског домена у фреквентни домен коришћењем Фуријеове трансформације и тиме компликоване методе конволуције у временском домену преведемо у пуко множење у фреквентном домену [15]. За BIBO стабилне системе:

$$Y(e^{i\omega}) = X(e^{i\omega}) \cdot H(e^{i\omega}) \quad (50)$$

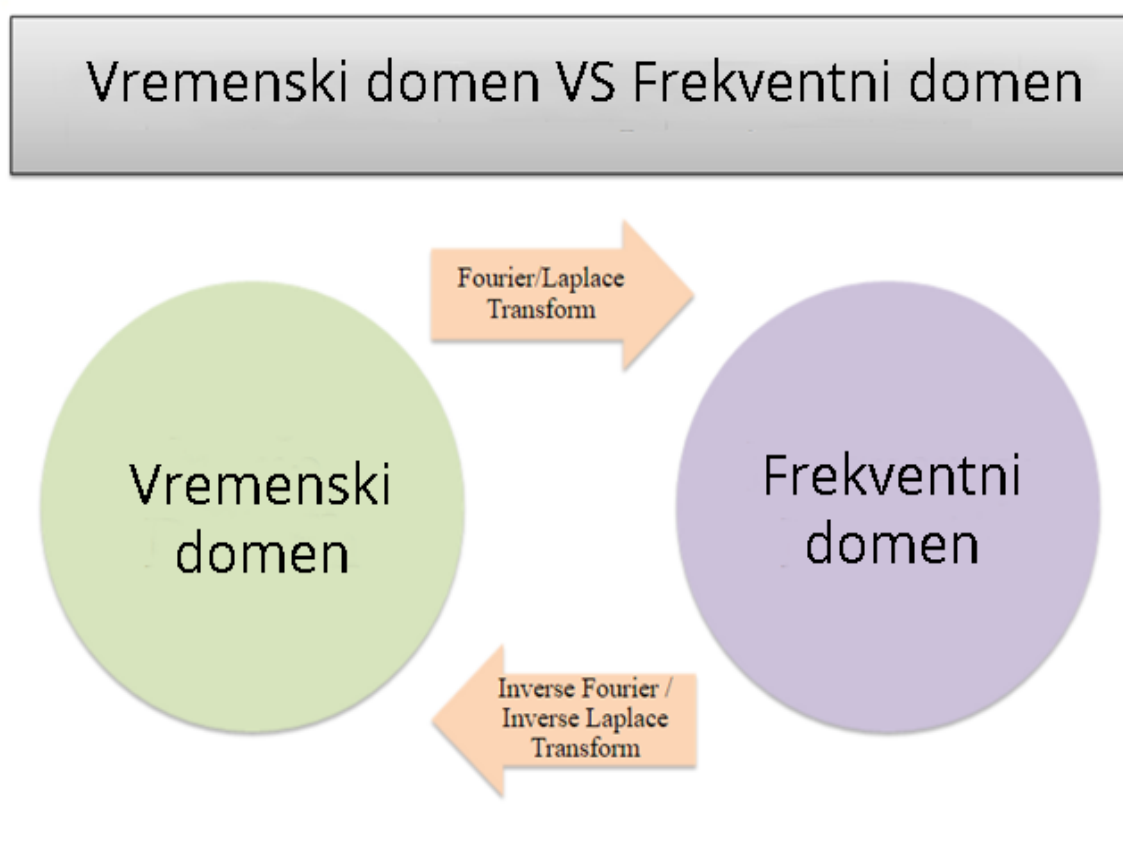
или

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \quad (51)$$

Где је $H(\omega)$ функција комплексног одзива система. У општем случају све три функције које фигуришу у претходној једначини су комплексне функције фреквенције ω и свака представља Фуријеову трансформацију (по номенклатури обележене великим словом у

фреквентном домену док су њихови инверзни парови обележени малим словом у временском домену) респективно излаза, улаза и преносне функције.

4.2 Фуријеова трансформација



Фуријеова трансформација је специјални случај Лапласове (Pierre-Simon, marquis de Laplace) трансформације чија функција у изворном облику гласи:

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (52)$$

где је:

$$s = \sigma + i\omega \quad (53)$$

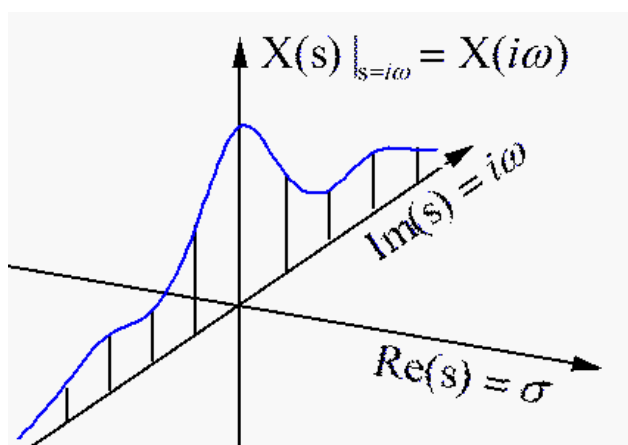
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

Слика 4.3: Лапласова трансформација

Из приложеног видимо да се Лапласова трансформација користи када је функција дефинисана за $t \geq 0$ док Фуријеову трансформацију користимо када је функција дефинисана на целом временском домену:

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \quad (54)$$

при том је очигледно да је $\sigma = 0$ још једина разлика између две поменуте трансформације. Члан σ је вредност функције s на реалној а $i\omega$ на имагинарној оси, при том је $i = \sqrt{-1}$ и представља имагинарни број.



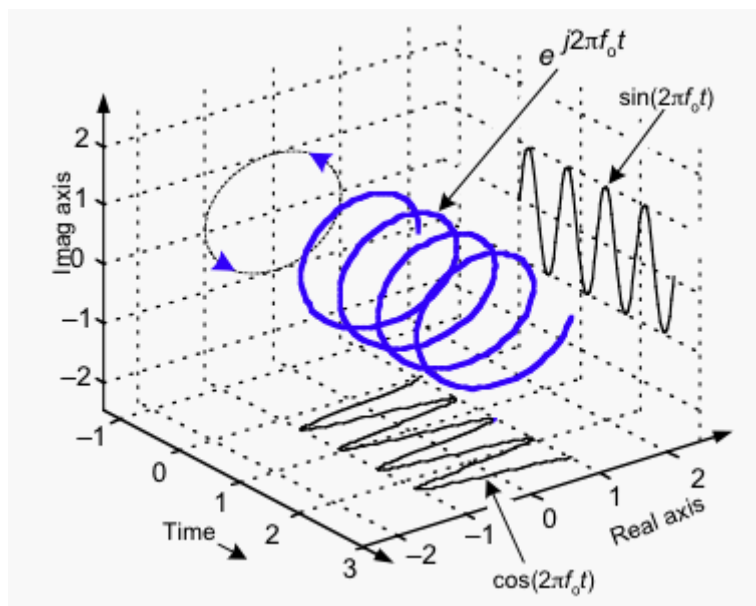
Слика 4.4: Фуријеова трансформација

Фуријеова трансформација декомпонује одређени временски сигнал у скуп хармоника различитих фреквенција који тај сигнал чине. Обрнути поступак се назива инверзна Фуријеова трансформација.

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
(55-56)

У овом математичком принципу, као што смо навели, фигуришу комплексне функције тј. комплексни бројеви. Познато је да се множењем било ког реалног броја имагинарном јединицом i не мења сам интензитет поменутог реалног броја већ та операција у принципу представља прелазак тог броја са реалне осе координатног система (Арганд дијаграм) на имагинарну осу тј. ротацију за 90° . Да би боље објаснили принцип функционисања Фуријеове трансформације објаснићемо га на примеру функције комплексног синусоида [12].



Слика 4.5: Функција комплексног синусоида

Функција комплексног синусоида је e^{ix} , а добро нам је позната једначина:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$
(57)

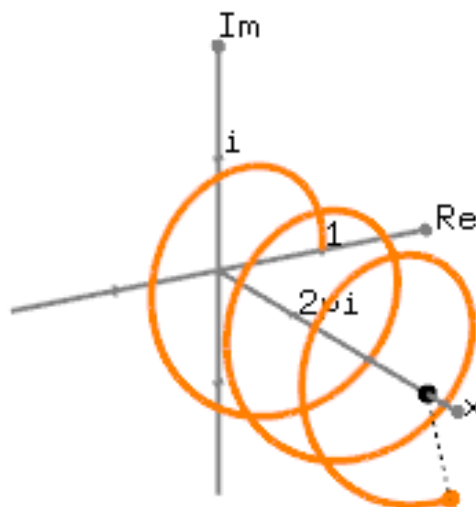
Још половином 18.века математичар Леонард Ојлер (Leonhard Euler) је доказао овај принцип и он се и данас користи под називом Ојлерова једначина. Доказ Ојлерове једначине лежи једноставно у развоју синусне и косинусне функције у Тејлоров (Brook Taylor) или Маклоренов (Colin Maclaurin) ред, и њиховим поређењем [6].

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} \dots\end{aligned}\tag{58}$$

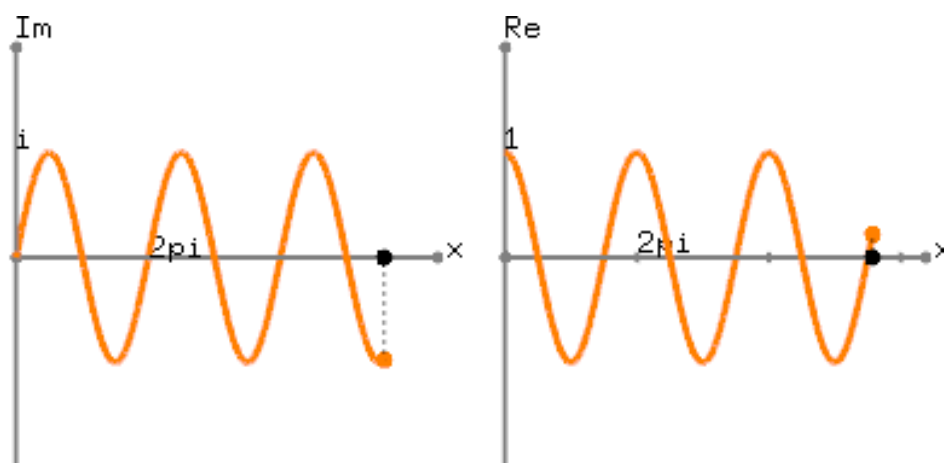
Ако сменимо $z = ix$ у претходну једначину

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \cos(x) + i \sin(x)\end{aligned}\tag{59}$$

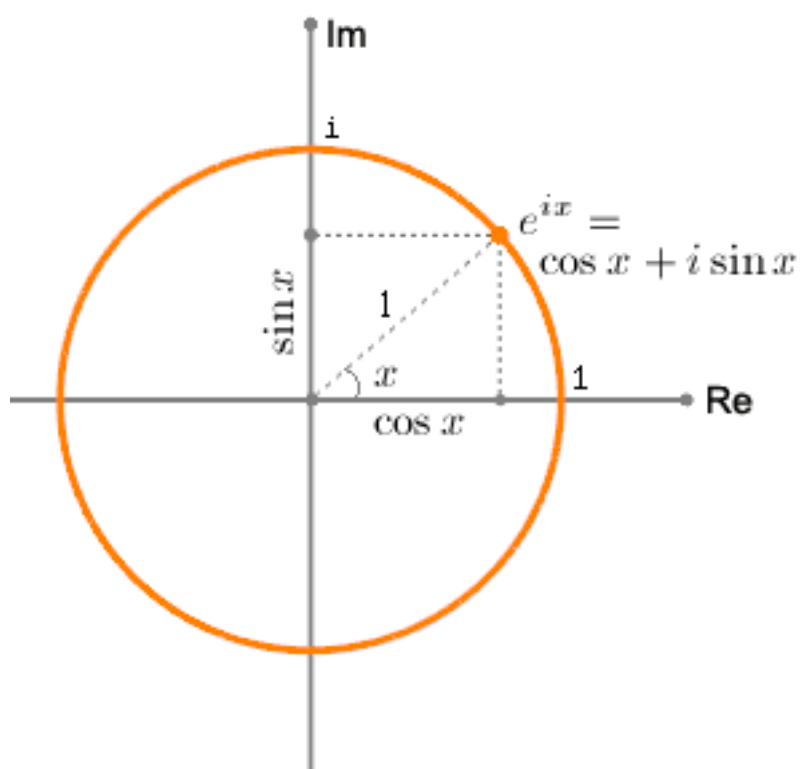
Ова функција уствари означава ротацију око координатног почетка за x радијана. Графички:



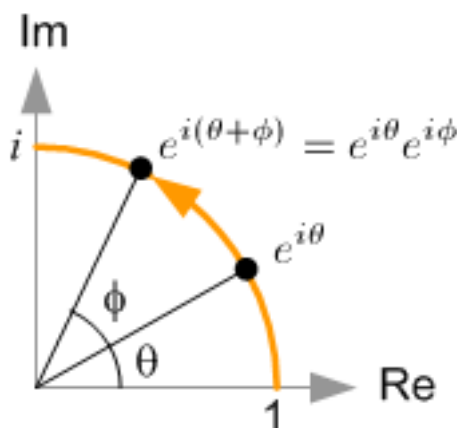
Слика 4.6: Графички приказ ротације у простору



Слика 4.7: Приказ ротације у равни а)имагинарној б)реалној



Слика 4.8: Графички приказ ротације око координатног почетка (Ојлерова формула)



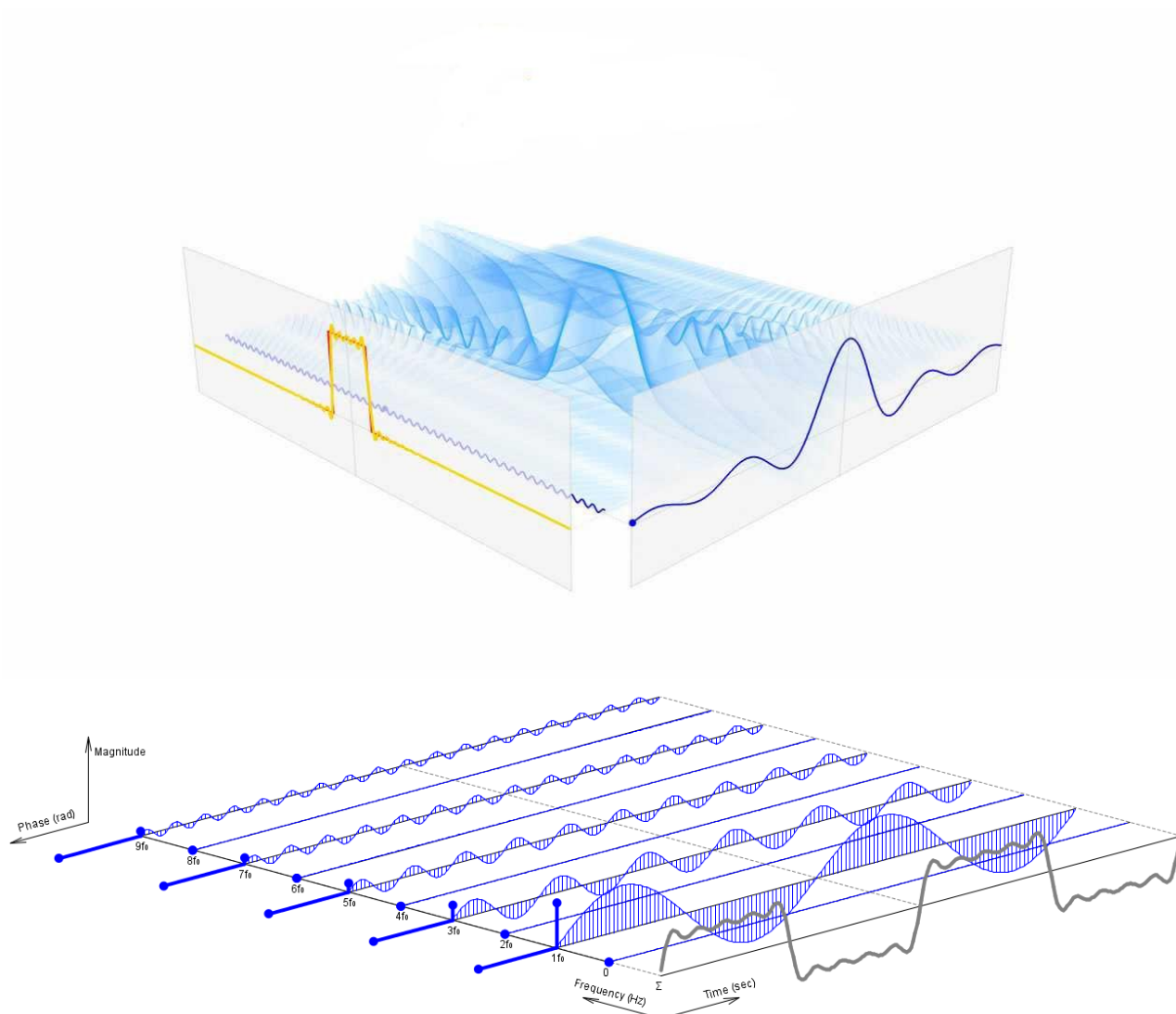
Слика 4.9: Фазно померање

Множењем било ког реалног броја A са $e^{i\omega t}$ дешава се ротација броја A за x радијана. Број A назива се још и амплитуда, док се број x назива фазни угао. За прецизан описнеког кружног кретања потребно је знати још и брзину којом се врши кружно кретање, односно кружну фреквенцију ω . Ако овај систем применимо на записе земљотреса у временском домену код којих је на реалној оси приказано време онда је функција:

$$A \cdot e^{i\omega t} \quad (60)$$

Џозеф Фурије (1768-1830) био је француски математичар и физичар који је дошао до замисли да се било каква функција, била она периодична или не, може представити као сума одређеног (или бесконачног) броја комплексних синусоида $A \cdot e^{i\omega t}$. У почетку ова идеја није наишла на одобравање, али након деценијске дебате Фуријеове трансформације су доказане. На своју примену, међутим, чекале су до развоја рачунара односно брзе Фуријеове трансформације у 20.веку, када су постале један од најважнијих математичких алата у свим инжењерским наукама [1,2,4,5].

Оригинални запис у временском домену након Фуријеове трансформације постаје запис у фреквентном домену. Претварање функције из временског у фреквентни домен омогућава нам да видимо које су фреквенције хармоничних функција највише заступљене у оригиналном запису и колике су амплитуде и фазни углови хармоничних функција (кругова) за сваку фреквенцију. Добијамо заправо „учешће“ сваке фреквенције у формирању оригиналне функције у временском домену од хармоника.



Слика 4.10: Графичка репрезентација Фуријеове трансформације

Генерално разликујемо Фуријеову трансформацију континуалног и дискретног сигнала (DFT). Дискретна трансформација је такође апроксимација Фуријеове трансформације континуалног сигнала али с'обзиром да је наш улазни сигнал (земљотрес) записан као дискретни сигнал одређени ниво апроксимације је у старту извршен приликом записивања поремећаја. Самим тим нема дискретизације улазног поремећаја „per se“. Притом сматрамо да је DFT еквивалент континуалној Фуријеовој трансформацији сигнала чије су вредности познате само у N тренутака са константним временски размаком T (коначна серија података). Рецимо да је $f(t)$ континуални сигнал који је извор података и да је број N семплова означено са $f[0], f[1], f[2], \dots, f[k], \dots, f[N-1]$. Фуријеова трансформација оригиналног сигнала била би:

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (61)$$

Можемо се односити према сваком семплу $f(k)$ као према импулсу који има зону деловања $f[k]$. Из тога следи да интегранди постоје само у семплованим тачкама:

$$F(i\omega) = \int_0^{(N-1)T} f(t)e^{-i\omega t} dt = f[0]e^{-i0} + f[1]e^{-i\omega T} + \dots + f[k]e^{-i\omega kT} + \dots + f[N-1]e^{-i\omega(N-1)T} \quad (62)$$

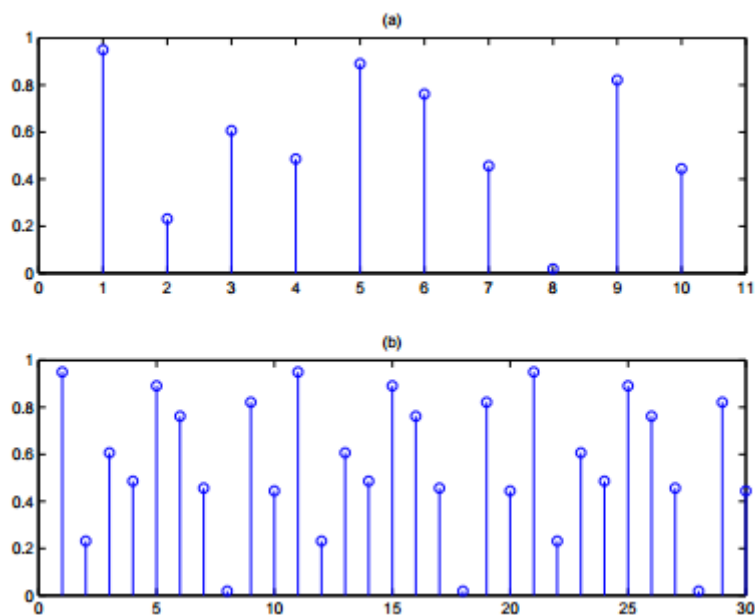
Или

$$F(i\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f[k]e^{-i\omega kT} \quad (63)$$

Ми можемо у принципу рачунати за свако ω , али са N тачака података за улаз, само ће N финалних излаза бити значајно. Континуална Фуријеова трансформација се може рачунати само на коначном интервалу (фундаментални период T_0) а не на интервалу од $-\infty$ до $+\infty$ ако је форма сигнала периодична. Слично томе, и због чињенице да постоји само коначан број улазних семплова података, DFT третира дискретни сигнал као периодичан

$$f(N) \div f(2N-1) \text{ исто је што и } f(0) \div f(N-1) \quad (63)$$

Стога се секвенца приказана на следећој слици 4.11 (а) сматра периодом периодичне секвенце на слици 4.11 (б).



Слика 4.11: а) периода и б) периодична секвенца

Пошто операција третира улазне податке као да су периодични, ми за DFT користимо фундаменталну или Никвистову (Harry Nyquist) фреквенцију као разлику између две суседне фреквенције у серији ($1/NT$ Hz или $2\pi/NT$ рад/сек) и њене хармонике:

$$\omega = 0, \frac{2\pi}{NT}, \frac{2\pi}{NT} \times 2, \dots, \frac{2\pi}{NT} \times n, \dots, \frac{2\pi}{NT} \times (N-1) \quad (64)$$

или генерално:

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-i \frac{2\pi}{N} nk} \quad (n = 0 : N-1) \quad (65)$$

$F(n)$ је Дискретна Фуријеова Трансформација секвенце $f[k]$.

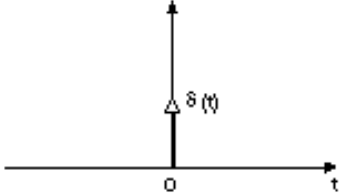
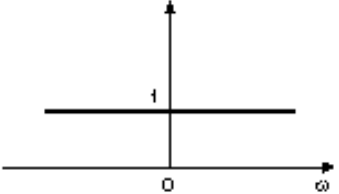
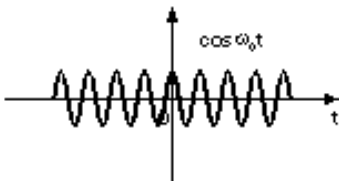
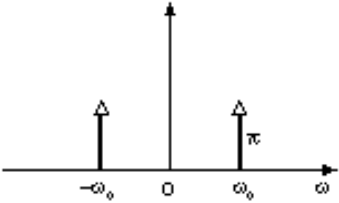
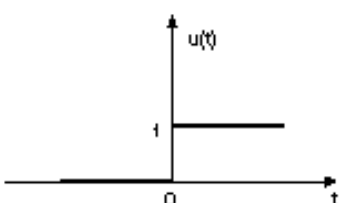
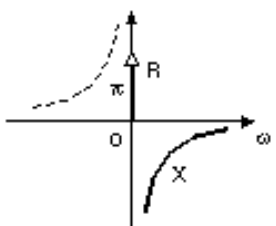
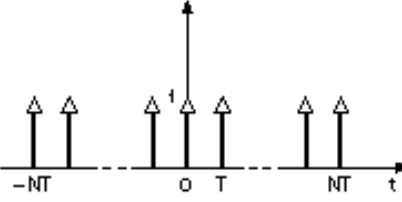
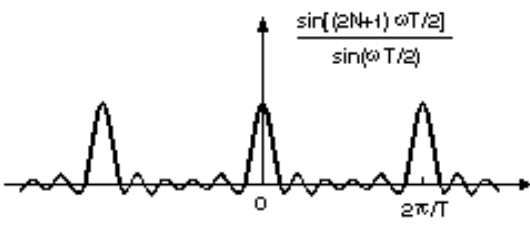
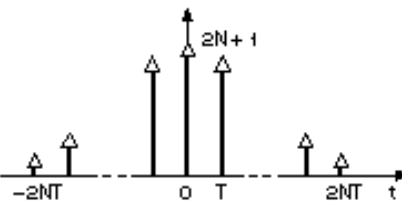
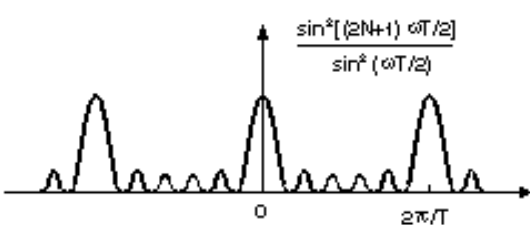
Инверзна DFT је:

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F[n] e^{+i \frac{2\pi}{N} nk} \quad (66)$$

Време потребно да се DFT израчуна помоћу дигиталног рачунара зависи углавном од броја мултипликација које су потребне. Код DFT тај број је директно сразмеран N^2 (матрично множење вектора) где је N такозвана "дужина" трансформације. За већину проблема, N се бира тако да буде најмање 256 како би се добила разумна апроксимација за спектар секвенце коју разматрамо, тако да брзина процесирања игра све већу улогу [6].

Од средине шездесетих година развијени су високо ефикасни компјутерски алгоритми за израчунавање DFT-а познати као алгоритми Брзе Фуријеове Трансформације (Fast Fourier Transformation - FFT) и они се ослањају на то да у DFT постоји много редувантних калкулација. На слици 4.12 је приказана трансформација неколико основних функција.

Transforms of singularity functions

$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$	
	
	
	
	
	
$\delta(x)\delta(y) \Leftrightarrow 1$	$\delta(x) \Leftrightarrow 2\pi\delta(v)$
$\varphi(x) \Leftrightarrow 2\pi\Phi(u)\delta(v)$	$\varphi(x)\delta(y) \Leftrightarrow \Phi(u)$

Слика 4.12: Трансформација сингуларних функција

4.3 Брза Фуријеова трансформација (FFT)

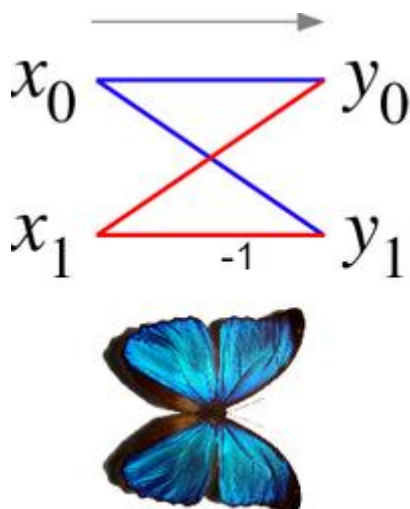
FFT је универзални назив за све алгоритме који служе за оптимизацију Дискретне Фуријеове Трансформације. Прва општеприхваћена појава алгоритма везана је за хладноратовске покушаје од стране Сједињених Америчких Држава да прате учесталост нуклеарних проба у Совјетском Савезу мерењем сеизмичких потреса ван његових граница. За то им је била потребна оптимизација DFT-а и налажење начина за његово брзо израчунавање. Решење се појавило 1965.године у виду Cooley–Tukey алгоритма названог по James Cooley-у из IBM-а и John Tukey-у са универзитета Princeton. Тада је по први пут примену нашао алгоритам који је још 1805.године установио Гаус (Carl Friedrich Gauss) у мало измењеном облику док је проучавао трајекторије астероида [15].

Овај алгоритам блиско одређује Дискретну Фуријеову трансформацију произвољног композита величине $N=N_1N_2$ користећи мање подтрансформације N_1 и N_2 , рекурзивно, да би смањио време израчунавања на $O(N \log N)$ за високе композитне (бројеви који нису прости) бројеве N . С'обзиром на важност овог алгоритма, варијације на тему су познате под сопственим називима. Основна карактеристика Cooley–Tukey алгоритма је да разбија DFT на мање DFT-ове и она омогућава да се он произвољно комбинује са било којим алгоритмом за оптимизацију DFT-а (алгоритми који оптимизују основне факторе које Cooley–Tukey не може да декомпонује).

Radix-2 или DIT алгоритам (Decimation in Time) је најједноставнији и најзаступљенији тип Cooley–Tukey FFT алгоритма иако високо оптимизоване имплементације истог користе друге форме. Он дели DFT величине N на два повезана DFT-а величине $N/2$ у свакој рекурзивној фази. Два дела трансформације се односе на парне и непарне чланове који се засебно пролазе кроз трансформацију а онда се комбинују да би представили комплетну DFT [6,15].

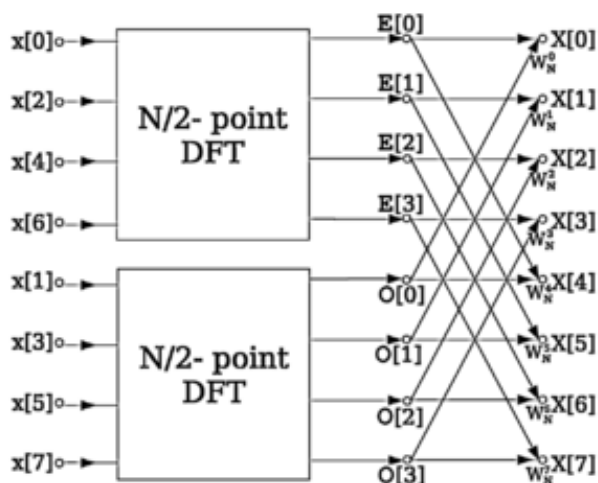
Генерално, Radix-2 је DFT величине 2 која узима два улаза (x_0, x_1 - одговарајуће излазе две подтрансформације) и преводи их у два излаза (y_0, y_1) по формули:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 + x_1 \\ y_1 &= x_0 - x_1 \end{aligned} \tag{67}$$



Слика 4.13: "Butterfly" дијаграм

Ово је такозвани лептир дијаграм (Butterfly) и добио је назив због изгледа који недвосмислено подсећа на изглед Морфо лептира. То је график тока сигнала који повезује улазе на левој страни са излазима који од њих зависе на десној у такозваној "лептир" фази radix-2 алгоритма [15].



Слика 4.14: Развијени "Butterfly" дијаграм

4.4 Одзив LTI система

Још једном ћемо се вратити на функцију комплексног синусоида и приказати какав је одговор (LTI) система у временском домену на овакву побуду. Дакле, ако посматрамо комплексни синусоид као побуду система:

$$p(t) = e^{i\omega t} \text{ или } p(t) = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (68)$$

где прва од ове две једначине представља компактну репрезентацију синусне и косинусне функције заједно. Одговор система ће бити хармонично кретање при улазној фреквенцији ω које се математички може приказати као:

$$u(t) = H_u(\omega) e^{i\omega t} \quad (69)$$

У наведеној једначини $u(t)$ је одговор система у виду померања или деформација а $H_u(\omega)$ тек треба одредити. Ако диференцирамо по времену добићемо изразе за брзину и убрзање респективно:

$$\dot{u}(t) = i\omega H_u(\omega) e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad \ddot{u}(t) = -\omega^2 H_u(\omega) e^{i\omega t} \quad (70)$$

Ако сада све добијене изразе за одзиве система у виду померања, брзине, убрзања и побуде у облику компактне репрезентације комплексног синусоида сменимо у једначину кретања:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (71)$$

добијамо:

$$m(-\omega^2 H_u(\omega) e^{i\omega t}) + ci\omega H_u(\omega) e^{i\omega t} + kH_u(\omega) e^{i\omega t} = e^{i\omega t} \quad (72)$$

или

$$H_u(\omega) e^{i\omega t} (-\omega^2 m + i\omega c + k) = e^{i\omega t} \quad (73)$$

што се своди на:

$$H_u(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k} \quad (74)$$

чиме смо дошли до преносне функције система. У циљу упрошћавања нотације решићемо се индекса u у преносној функцији која означава комплексни фреквентни одговор система. Ако се сада подсетимо импулсне побуде и интеграла конволуције:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau \quad (75)$$

и искористимо још једну важну особину конволуције као математичке операције, а то је комутативност, добићемо следећи израз:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \cdot h(\tau) \cdot d\tau \quad (76)$$

С тим да нам је побуда комплексни синусоид тј:

$$x(t) = e^{i\omega t} \quad (77)$$

из тога следи:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau \quad (78)$$

или

$$y(t) = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} h(\tau) d\tau \quad (79)$$

Ако нам је померање одзив система онда је:

$$y(t) = u(t) = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} h(\tau) d\tau = H(\omega) e^{i\omega t} \quad (80)$$

Аналогно можемо написати и одзив система у виду брзине и убрзања.

Овим смо нашли и везу између комплексног фреквентног одзива система и одзива система на импулсну побуду. Очигледно је да су ова два одзива такође међусобно повезана Фуријеовом трансформацијом:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} h(\tau) d\tau \quad (81)$$

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} H(\omega) d\omega \quad (82)$$

На основу претходних разматрања видимо једну јако битну особину LTI система која нам недвосмислено приказује да је одзив оваког система на побуду у виду комплексног синусоида такође функција комплексног синусоида помножена комплексним бројем који је независан од времена. Ову функцију можемо искористити за проналажање свих преносних функција у фреквентном домену тј. комплексних одзива.

4.5 Одзив SDOF (Single degree of freedom - систем са једним степеном слободе) система на периодичну функцију

За функцију $p(t)$ од времена t кажемо да је периодична функција од t са периодом понављања једнаким T_0 ако задовољава следећу релацију:

$$p(t+nT_0) = p(t) \quad (83)$$

где је n интеџер са негативним или позитивним вредностима [5]. Периодична функција са коначним бројем прекида и коначним бројем екстремних (максимум и минимум) вредности у временском распону једнаком периоду T_0 може бити представљена бесконачном тригонометријском серијом:

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi n f_0 t \quad (84)$$

где су a_n и b_n константне које тек треба да утврдимо а $f_0 = 1/T_0$ је фреквенција у виду броја циклуса по секунди. Тригонометријска серија из једначине 84 је познатија као Фуријеова

серија. Постављањем $\omega_0 = 2\pi f_0$ где је ω_0 фреквенција у радијанима по секунди, серија може бити изражена у алтернативној форми:

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t \quad (85)$$

Да би одредили a_n коефицијенте, помножићемо леву и десну страну једначине 85 са $\cos m\omega_0 t$ и интегралити по периоду. Приметићемо да је:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T_0 / 2 & n = m \end{cases} \quad (86)$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos m\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ T_0 & m = 0 \end{cases} \quad (87)$$

и

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0 \quad \text{за свако } m \text{ и } n \quad (88)$$

Тако добијамо следећи израз за коефицијенте a :

$$a_0 = 1 / T_0 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} p(t) dt \quad (89)$$

$$a_n = 2 / T_0 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} p(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (90)$$

Да би одредили b_n коефицијенте, слично, помножићемо леву и десну страну једначине 85 са $\sin m\omega_0 t$ и интегралити по периоду. Добијамо да је :

$$b_n = 2 / T_0 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} p(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (91)$$

Написаћемо и експоненциалну форму Фуријеове серије која је компактнија:

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\omega_0 t} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 t} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (92)$$

у којој је c_n :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} p(t) \{ (e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}) - (e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}) \} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} p(t) e^{-in\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (93)$$

Целокупни одзив SDOF система на оптерећење у виду периодичне функције може бити одређено пуким сумирањем одзива на индивидуалне компоненте уз услов да је систем линеаран и да важи принцип суперпозиције. Морамо навести да наша периодична репрезентација оптерећења у оваквој консталацији важи само за стабилно стање и одзив који добијемо не садржи прелазни члан одзива. Када је оптерећење константно и има амплитуду p_0 одзив у стању стабилности дат је релацијом:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \quad (94)$$

За синусну функцију оптерећења $p_0 \sin \Omega t$ и косинусну $p_0 \cos \Omega t$ одзив система у стању стабилности са пригушењем и без, дати су респективно:

Синусна функција оптерећења система без пригушења

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \Omega t \quad (95)$$

Синусна функција оптерећења система са пригушењем

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \{ (1 - \beta^2) \sin \Omega t - 2\xi\beta \cos \Omega t \} \quad (96)$$

Косинусна функција оптерећења система без пригушења

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \cos \Omega t \quad (97)$$

Косинусна функција оптерећења система са пригушењем

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \{ 2\xi\beta \sin \Omega t + (1 - \beta^2) \cos \Omega t \} \quad (98)$$

где је $\beta = \Omega / \omega$ а ω је природна фреквенција система. Аналогно може се изразити и одзив непригушеног и пригушеног SDOF система на побуду изражену Фуријеовом серијом у једначини 85. За систем без пригушења:

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{k} \frac{1}{1-\beta_n^2} \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{k} \frac{1}{1-\beta_n^2} \sin n\omega_0 t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{k} \frac{1}{1-\beta_n^2} \cos n\omega_0 t \quad (99)$$

где је $\beta_n = n\omega_0 / \omega$. На исти начин можемо доћи до одзива пригушеног система на исту побуду:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{k} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \{2\xi\beta_n \sin n\omega_0 t + (1-\beta_n^2) \cos n\omega_0 t\} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{k} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \{(1-\beta_n^2) \sin n\omega_0 t - 2\xi\beta_n \cos n\omega_0 t\} \\ &= \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} [\{a_n 2\xi\beta_n + b_n(1-\beta_n^2)\} \sin n\omega_0 t \\ &+ \{a_n(1-\beta_n^2) 2\xi\beta_n - b_n 2\xi\beta_n\} \cos n\omega_0 t] \end{aligned} \quad (100)$$

Једначине 99 и 100 су репрезентација Фуријеове серије одзива тако да морају бити периодичне са периодом T_0 [1,2].

Ако сада уведемо комплексну функцију фреквенције у виду једначине 74 и експоненциалну форму Фуријеове серије - једначина 92, њиховом комбинацијом добијамо одзив система на периодичну функцију:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(n\omega_0) e^{in\omega_0 t} \quad (101)$$

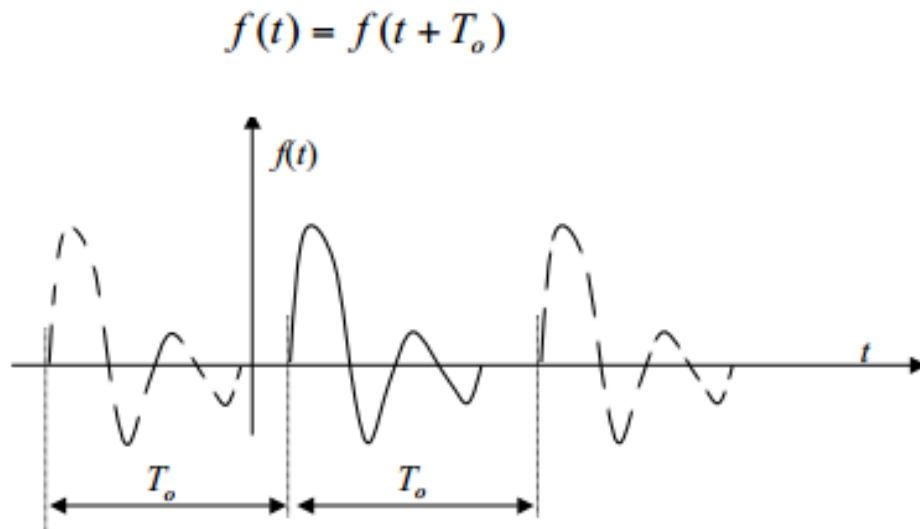
где је

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} p(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (102)$$

4.6 Одзив система на непериодичну (произвољну) функцију

Да би добили Фуријеову репрезентацију произвољног (непериодичног) оптерећења морамо конструисати периодичну верзију задатог оптерећења. Први корак је одабир вредности коју ћемо користити као периоду. Изабрана вредност, наравно, мора бити далеко

већа од трајања задатог оптерећења. Унутар сваке периоде, периодична верзија има амплитуду једнаку задатом оптерећењу у трајању самог оптерећења а после тога је амплитуда једнака нули. Периодична верзија конструисана на овај начин приказана је на слици 4.15.



Слика 4.15: Конструкција периодичног сигнала од произвољног оптерећења

Очигледно је да део функције који је приказан испрекиданом линијом представља фиктивна оптерећења која, фактички, не постоје. Ако сада T_o продужимо енормно, фиктивна оптерећења ће се померити у бесконачност и у граничном случају ћемо добити верну репрезентацију задатог оптерећења. Овакво резонување користимо да би добили Фуријеову репрезентацију непериодичног оптерећења [5]. Прво, с'обзиром да је T_o велика вредност постављамо следећу релацију:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_o} = \Delta\Omega \quad \text{и} \quad n\omega_0 = \Omega_n \quad (103-104)$$

Када ову нотацију уведемо у једначину 93 добијамо:

$$c_n T_o = \int_{-T_o/2}^{T_o/2} p(t) e^{-i\Omega_n t} dt \quad (105)$$

и из једначине 92 следи :

$$p(t) = \frac{1}{T_o} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n T_o e^{i\Omega_n t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n T_o e^{i\Omega_n t} \Delta\Omega \quad (106)$$

У граничном случају када се T_0 приближава бесконачности, Ω_n постаје континуална функција и једначина 105 прелази у:

$$c_n T_0 = P(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (107)$$

а једначина 106 поприма следећи облик:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \quad (108)$$

где смо дискретну координату $\Omega_n = n\Delta\Omega$ заменили њеном континуалном верзијом Ω .

Можемо да приметимо везу између $p(t) \Leftrightarrow P(\Omega)$ као пар Фуријеове трансформације.

Када смо одредили Фуријеову репрезентацију непериодичног оптерећења, веома једноставно ћемо доћи до одзива линеарног система на задато непериодично оптерећење коришћењем претходно поменутих трансформација и особина LTI система.

4.7 Одзив MDOF (Multi degree of freedom - систем са више степени слободе) система

Водеће једначине за систем са пропорционалним пригушењем могу бити трансформисане у серију неспрегнутих SDOF једначина коришћењем алата описаних у претходним поглављима. Ради лакшег разумевања релевантни кораци су поновљени.

Трансформација у нормалне координате:

$$u = \sum_{n=1}^M \phi_n y_n \quad (109)$$

где је искоришћено само M релевантних модова (облика осциловања) од укупно N модова, и M може бити значајно мање од N [1]. Дата је и n -та једначина из серије трансформисаних једначина облика:

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = p_n \quad (110)$$

уз почетне услове:

$$\begin{aligned}y_{0n} &= \phi_n^T M u_0 \\ \dot{y}_{0n} &= \phi_n^T M v_0\end{aligned}\tag{111}$$

Једначине 110 и 111 су главне једначине SDOF система. Када одредимо одзив система у нормалним координатама, одзив система у физичким координатама можемо одредити коришћењем једначине 109 за трансформацију назад.

5. Пример

Приказаћемо поступак анализе на примеру седмоспратнице (односно тродимензионалног модела зграде од седам спратова). Суштина целог поступка је решавање једначине кретања на коју се још једном позивамо:

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [C] \cdot \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F(t)\} \quad (21)$$

или коришћењем само природних модова у модалној анализи:

$$\Phi^T \cdot M \cdot \Phi \cdot \ddot{q} + \Phi^T \cdot C \cdot \Phi \cdot \dot{q} + \Phi^T \cdot K \cdot \Phi \cdot q = -\Phi^T \cdot M_r \cdot U_g \quad (31)$$

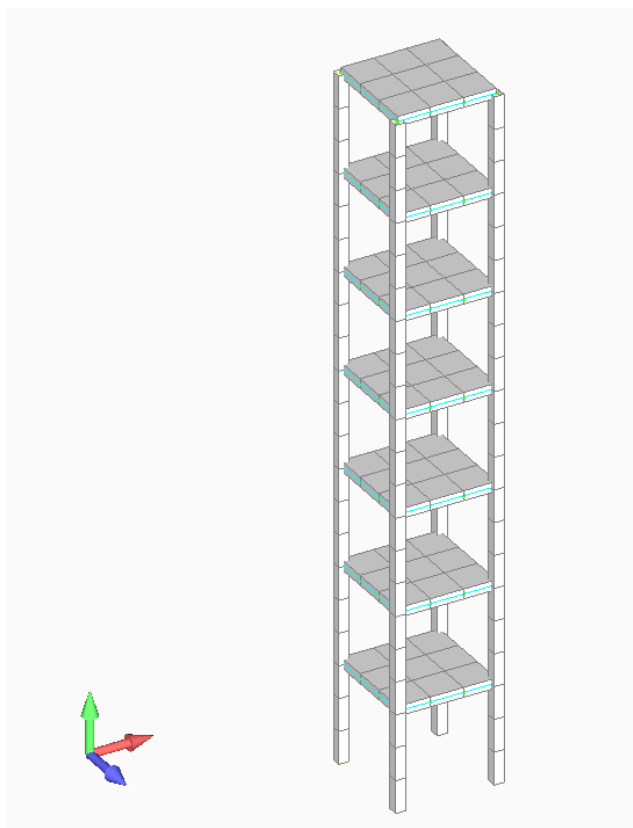
тј.

$$\bar{m}_j \cdot \ddot{q} + \bar{c}_j \cdot \dot{q} + \bar{k}_j \cdot q = -\Phi^T \cdot M_r \cdot \ddot{u}_g \quad (32)$$

За израду модела коришћени су елементи греде и елементи плоче у тродимензионалном простору. Материјал је бетон са модулом еластичности (Јунгов модул) $E = 30 \cdot 10^6 \frac{KN}{m^2}$ униформно за цео модел. Укупан број гредних елемената је 84, елемената плоче 64, а број чворова је 173 (172 чвора на самој структури и један чвор у коме ћемо задати оптерећење).

$$u = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots, u_N\} \quad (112)$$

- где су са u обележена померања по чворовима а са N број чворова који немају ограничења.



Слика 5.1: Тродимензионални модел конструкције

На овом моделу смо извршили три анализе:

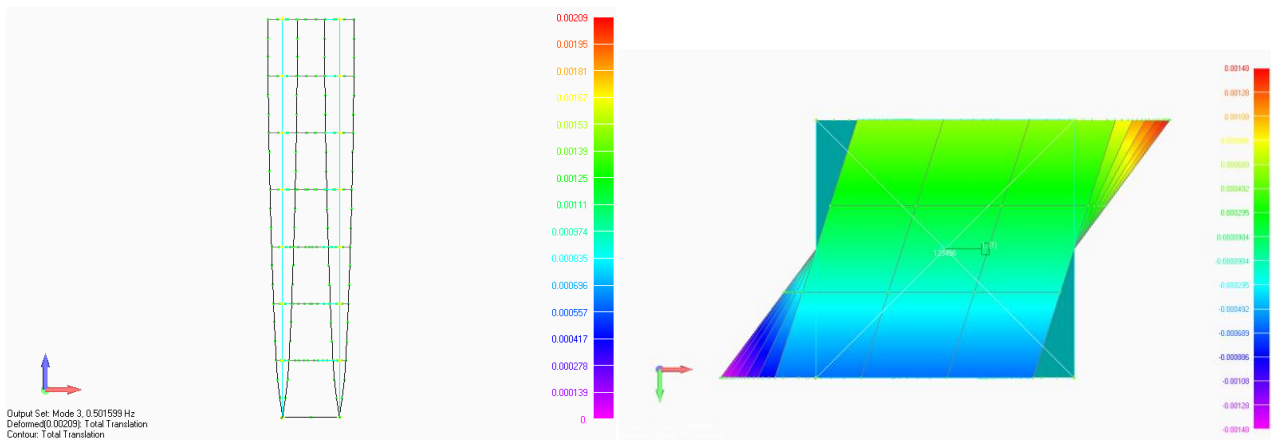
1. Модалну анализу
2. Анализу утицаја земљотреса у фреквентном домену
3. Анализу утицаја земљотреса у временском домену

Модална анализа је извршена тако што су матрице маса M и крутости K добијене коришћењем програмског пакета ПАК (РАК) као и природни модови и природне фреквенције (првих 30 јединствених и релевантних модова и њихових природних фреквенција) [8].

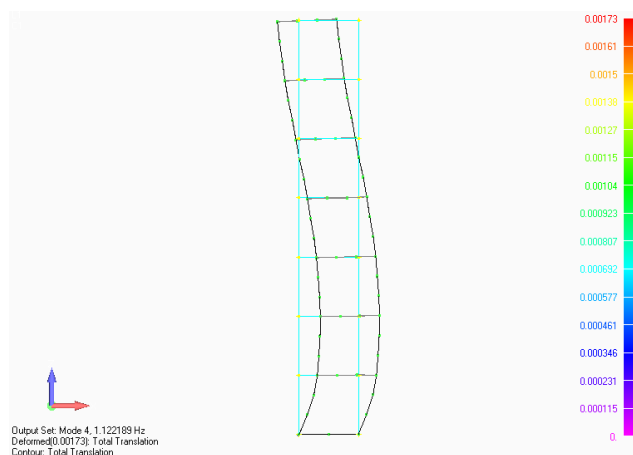
Природни модови или првих 7 утицајних облика осциловања који приказују померања чворова по X оси (због конструкције модела при чему нам је основа квадратног облика у модовима 2,5 и 8 се виде померања по Y оси и њих нећемо узимати у обзир је су ти модови по фреквенцији једнаки онима који им претходе само се померање манифестује у различитим правцима) приказани су на следећим сликама:



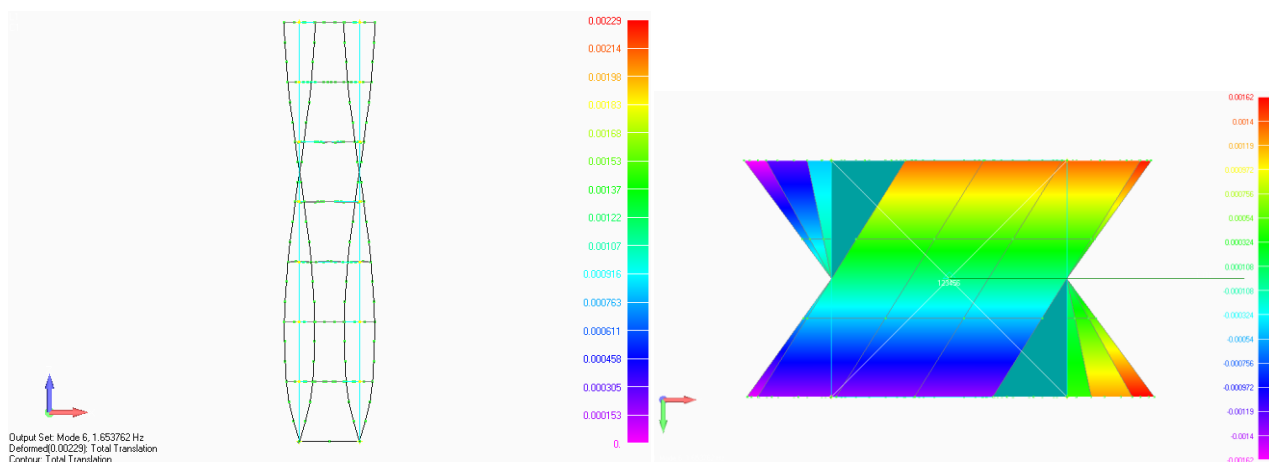
Слика 5.2: Облик осциловања 1. $\omega_1 = 0,353282$



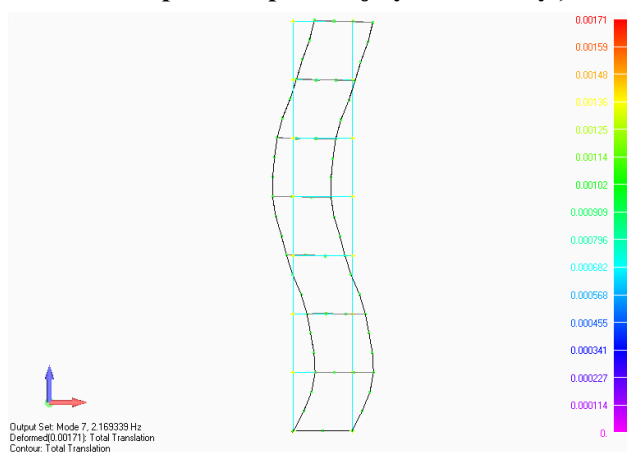
Слика 5.3: Облик осциловања 3. $\omega_2 = 0,501599$ (Поред слике погледа спреда дата је слика одоздо да се прикаже ротација у том моду)



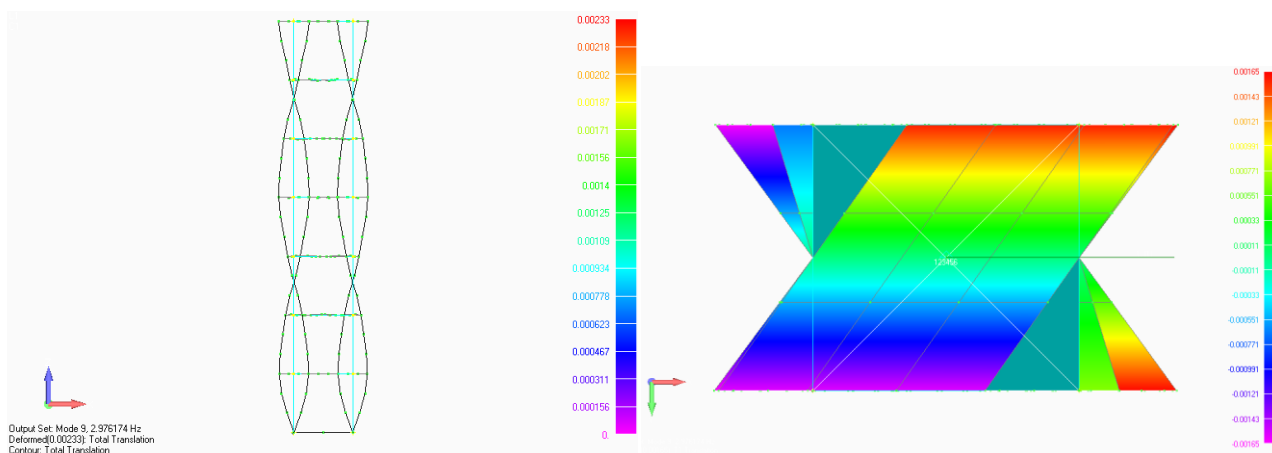
Слика 5.4: Облик осциловања 4. $\omega_3 = 1,122189$



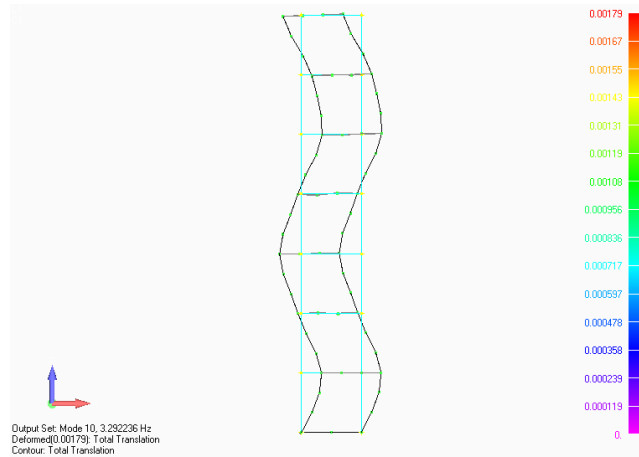
Слика 5.5: Облик осциловања 6. $\omega_4 = 1,653762$ (Поред слике погледа спреда дата је слика одоздо да се прикаже ротација у овом моду)



Слика 5.6: Облик осциловања 7. $\omega_5 = 2,169339$



Слика 5.7: Облик осциловања 9. $\omega_6 = 2,976174$ (Поред слике погледа спреда дата је слика одоздо да се прикаже ротација у овом моду)



Слика 5.8: Облик осциловања 10. $\omega_7 = 3,292236$

Модове осциловања смо искористили за трансформацију из једног система координата у други (систем нормалних или главних координата). Следећи корак је трансформација система из временског у фреквентни домен. Када би радили фреквентну анализу само за фреквенције природних или фундаменталних модова (облика осциловања) трансформације би обавити тако што би прво пребацили саму генерализовану координату (користећи побуду у виду комплексног синусоида) а затим и побуду у виду сеизмичких утицаја (убрзање тла) из временског домена у фреквентни:

$$q_j(t) = \bar{q}_j(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad [113]$$

$$\ddot{U}_g(\omega) = \int_0^T \ddot{U}_g(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad [114]$$

Сада можемо написати једначину динамичке равнотеже у фреквентном домену:

$$[-\omega^2 \cdot M_j + i \cdot \omega \cdot C_j + K_j] \bar{q}_j(\omega) = -\Phi_j^T m \quad [115]$$

Или у матричном облику:

$$H(\omega) \cdot \bar{q}(\omega) = P(\omega) \quad [116]$$

Чиме долазимо до горепоменутих функција комплексног одзива система где је:

$$H_{jj}(\omega) = [-\omega^2 \cdot M_j + i \cdot \omega \cdot C_j + K_j] \quad [117]$$

$$\text{дијагонална матрица у којој је: } H_{jk} = 0 \text{ за } j \neq k \quad [118]$$

$$\text{а у случају побуде у виду комплексног синусоида } P(\omega) = -\Phi_j^T \cdot m \quad [119]$$

Померања у сваком од природних модова онда би била:

$$\bar{u}_j(\omega) = \bar{q}_j(\omega) \cdot \Phi_j \quad [120]$$

А укупно померање:

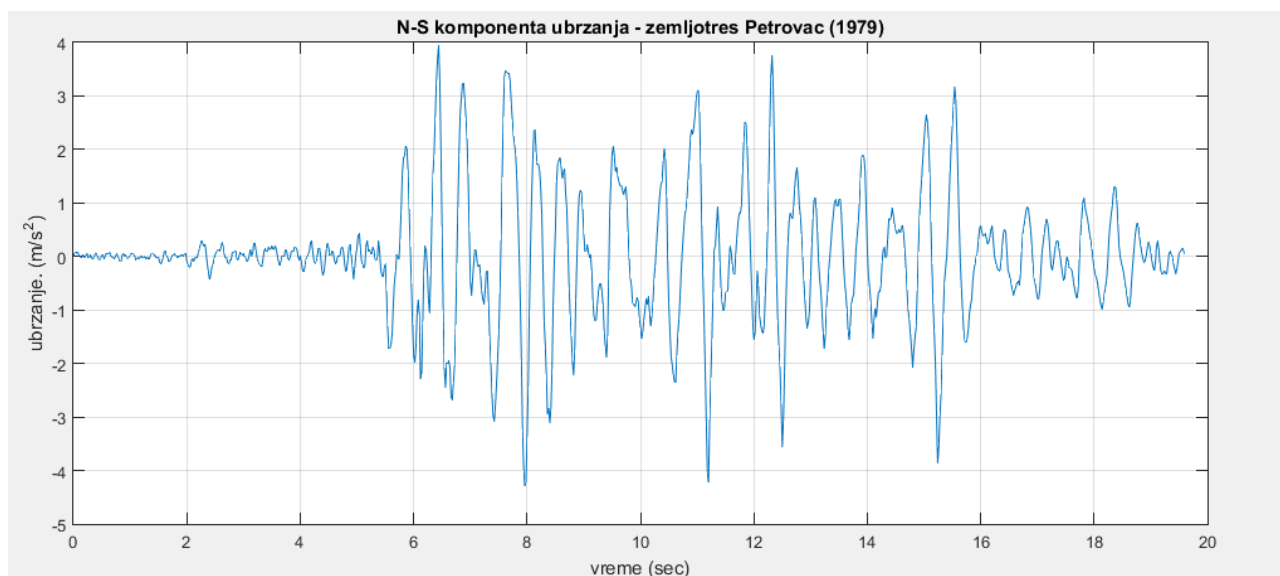
$$\bar{u}(\omega) = \sum_1^J \bar{u}_j(\omega) \quad [121]$$

С'обзиром да ћемо фреквентну анализу радити за цео спектар фреквенција користићемо програмски пакет MATLAB да би извршили трансформацију сигнала (побуде) у фреквентни домен уз помоћ већ поменутог алгоритма Брзе Фуријеове Трансформације. Произвољна побуда коју ћемо користити је пример убрзања земљотреса Петровац из 1979. године (слика 5.6) и биће приказана у облику:

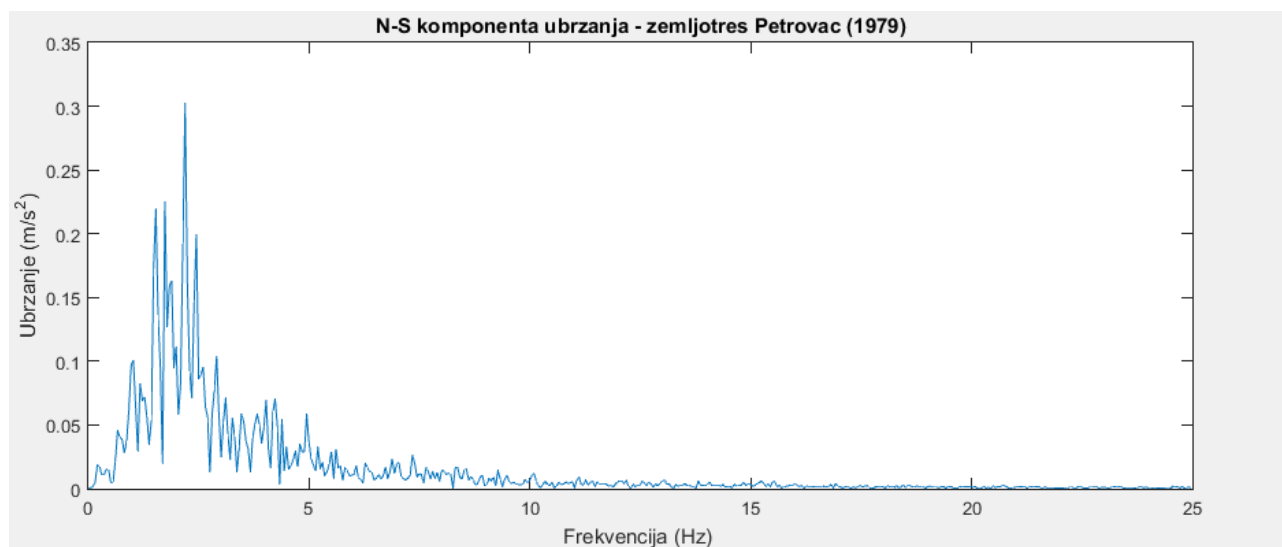
$$P_j(\omega) = \int_0^T \ddot{u}_g(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad [122]$$

или

$$P_j(\omega) = [\text{FFT}(\ddot{u}_g(t))] \quad [123]$$



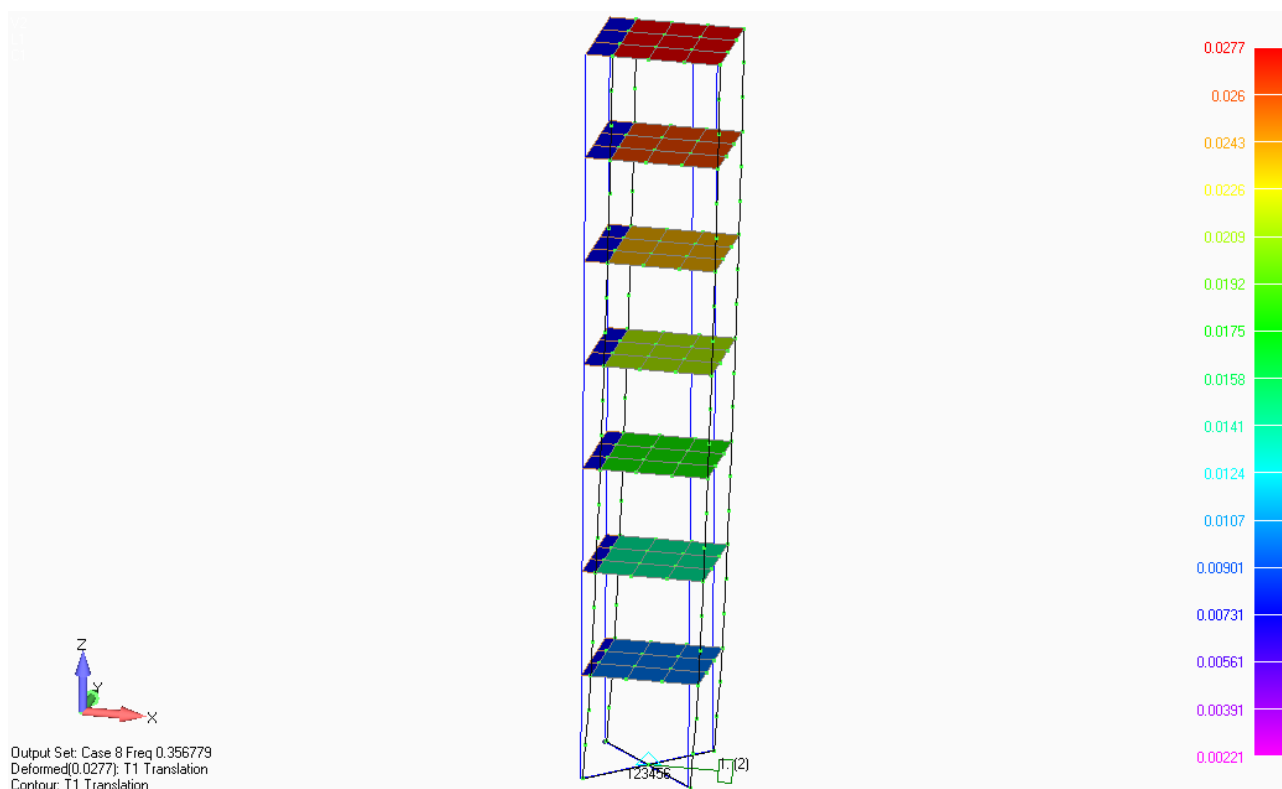
Слика 5.9: Временска серија убрзања земљотреса Петровац 1979. године



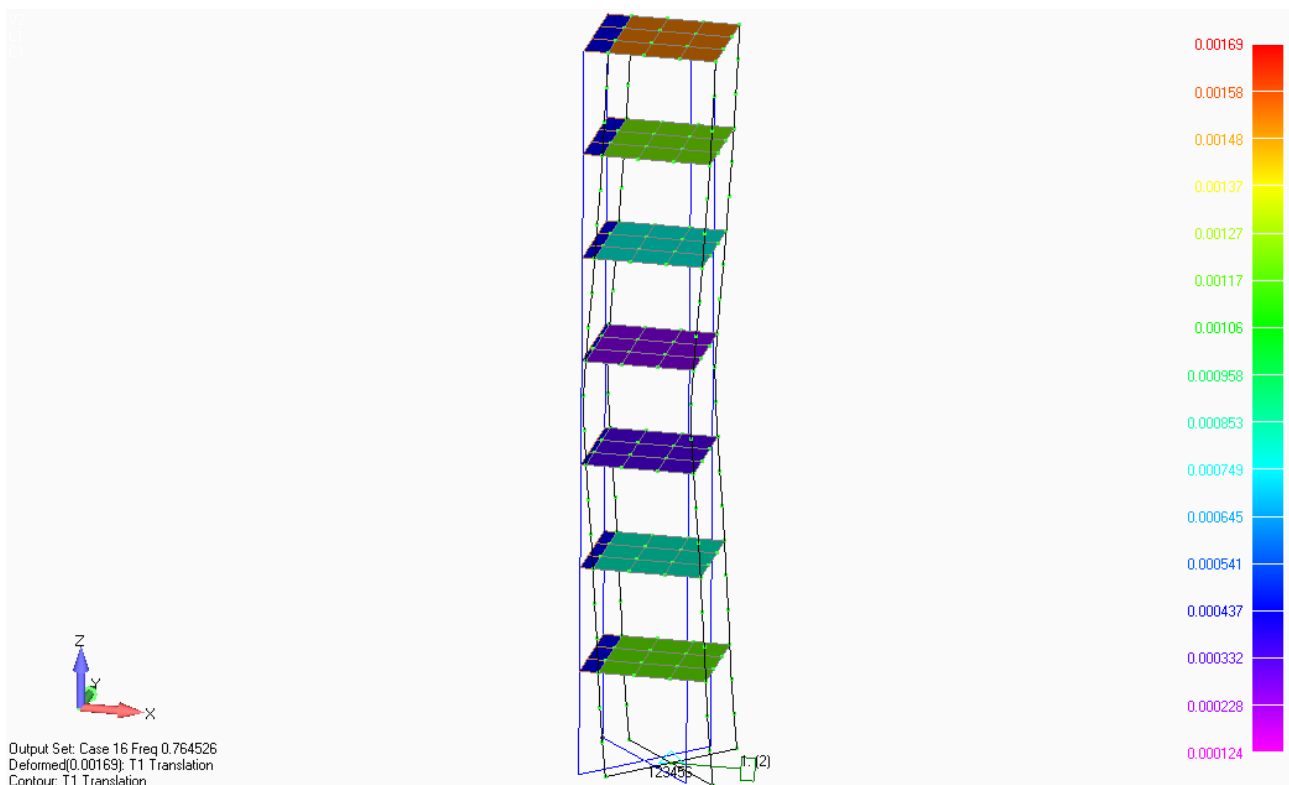
Слика 5.10: Конструкција побуде у фреквентном домену коришћењем FFT алгоритма

Затим ћемо побуду у фреквентном домену коју смо конструисали коришћењем FFT алгоритма у MATLAB-у извести у програмско окружење FEMAP и искористити је као оптерећење које делује на модел седмоспратнице и извршити анализу утицаја овакве побуде коришћењем солвера NASTRAN. Овим ћемо показати и могућности спрезања различитих софтвера и коришћење добрих алата и страна сваког од њих. [код у MATLAB-у којим смо извршили трансформацију сигнала налази се у прилогу]

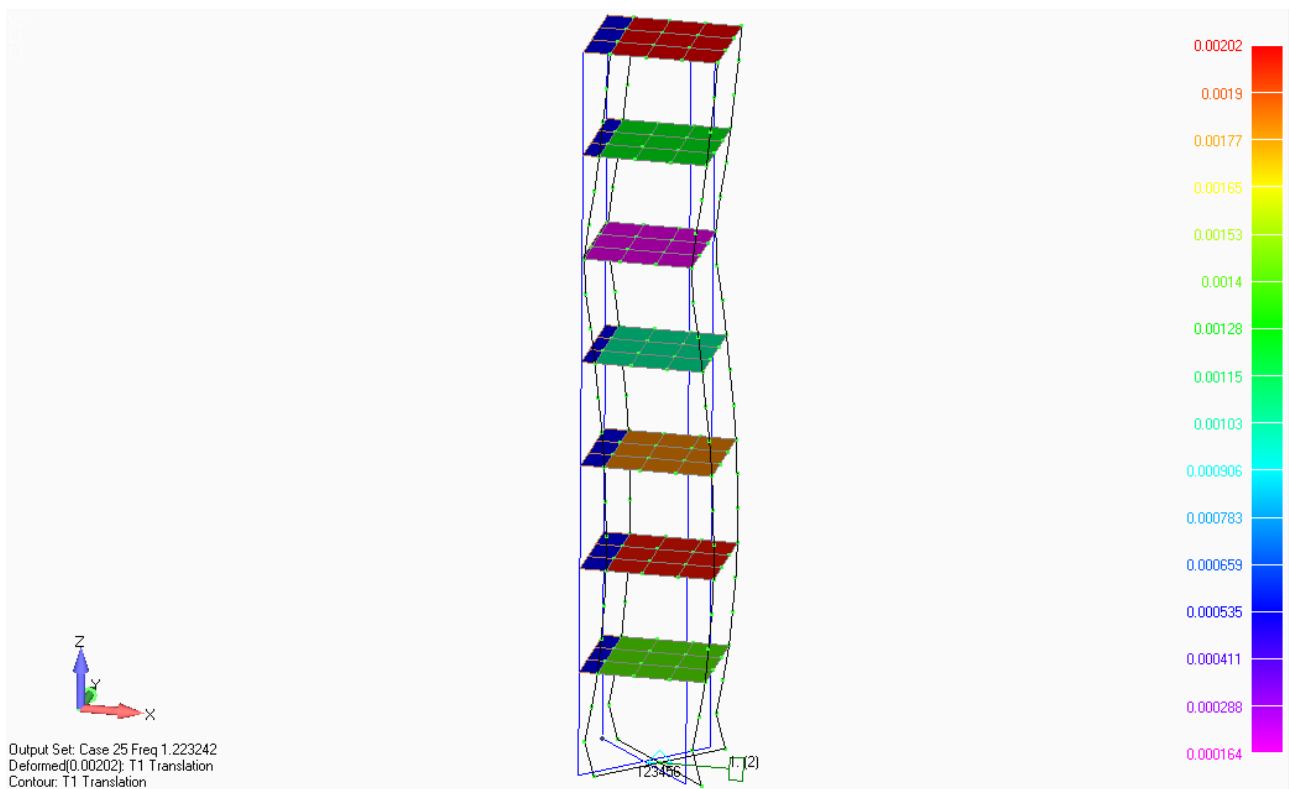
Визуелна репрезентација резултата фреквентне анализе за неколико најнижих фреквенција дата је на сликама 5.8, 5.9 и 5.10. Поља померања су приказана коришћењем увећавајућег фактора 2 и сенке недеформисане конструкције да би се лакше сагледала.



Слика 5.11: Визуелна репрезентација померања свих чворова као резултат фреквентне анализе коришћењем FEMAP-а, NASTRAN-а и MATLAB-а (за фреквенцију 0.356779 Hz)

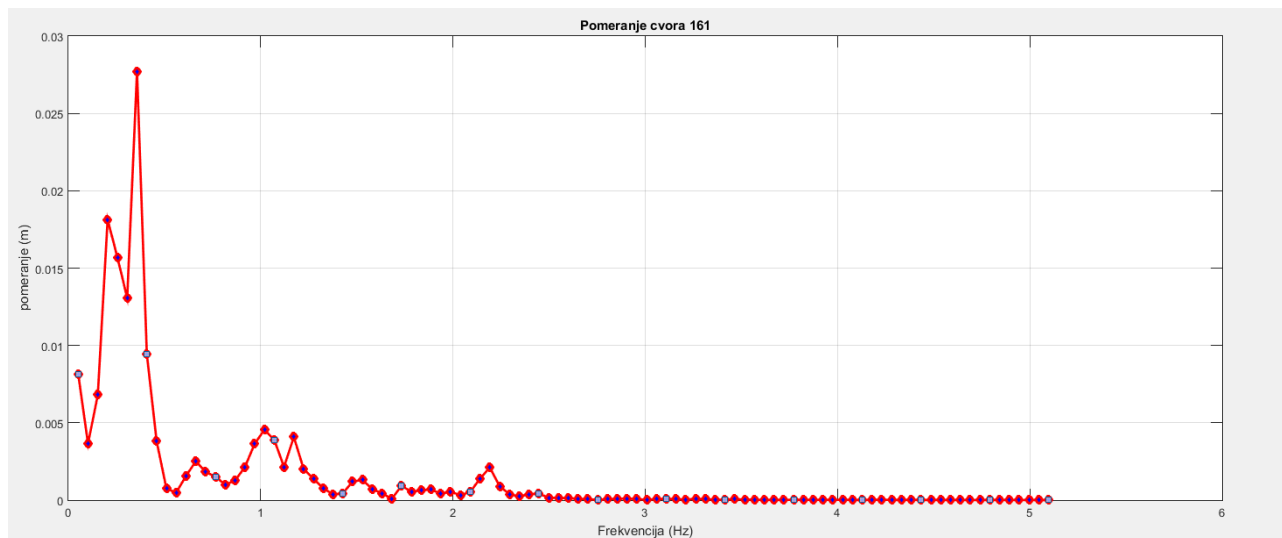


Слика 5.12: Визуелна репрезентација померања свих чворова као резултат фреквентне анализе коришћењем FEMAP-а, NASTRAN-а и MATLAB-а (за фреквенцију 0.764526 Hz)

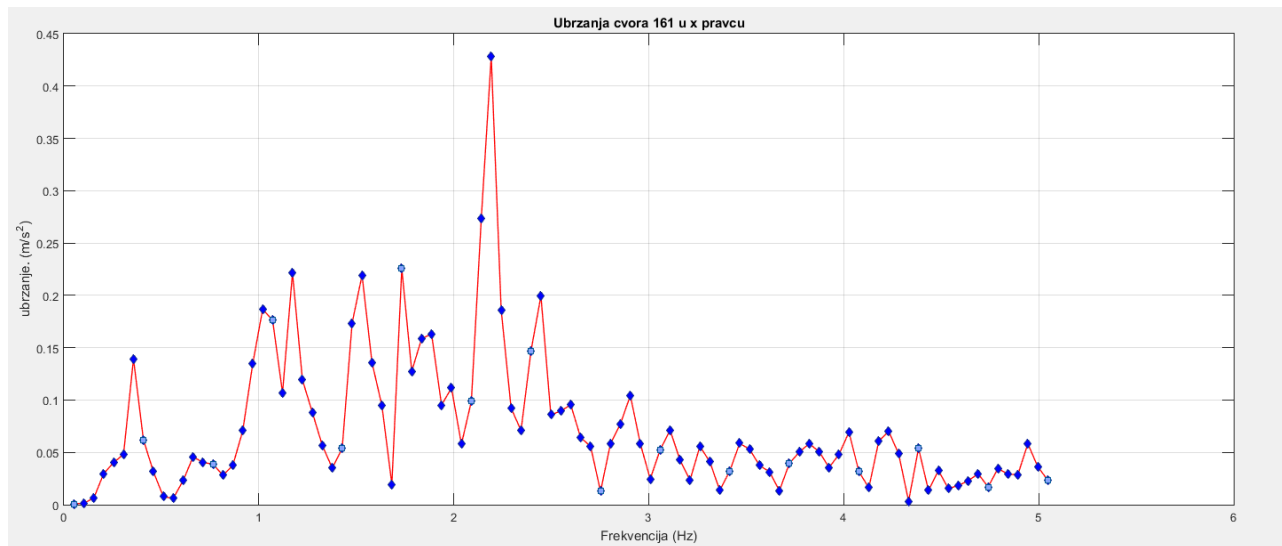


Слика 5.13: Визуелна репрезентација померања свих чворова као резултат фреквентне анализе коришћењем FEMAP-а, NASTRAN-а и MATLAB-а (за фреквенцију 1.223242 Hz)

Поље померања једног од чворова (чвор 161 у коме је померање највеће) са врха конструкције дато је на слици 5.11 за првих 100 најнижих фреквенција (од 0 до 5Hz) јер више фреквенције безмало да не утичу на померање.



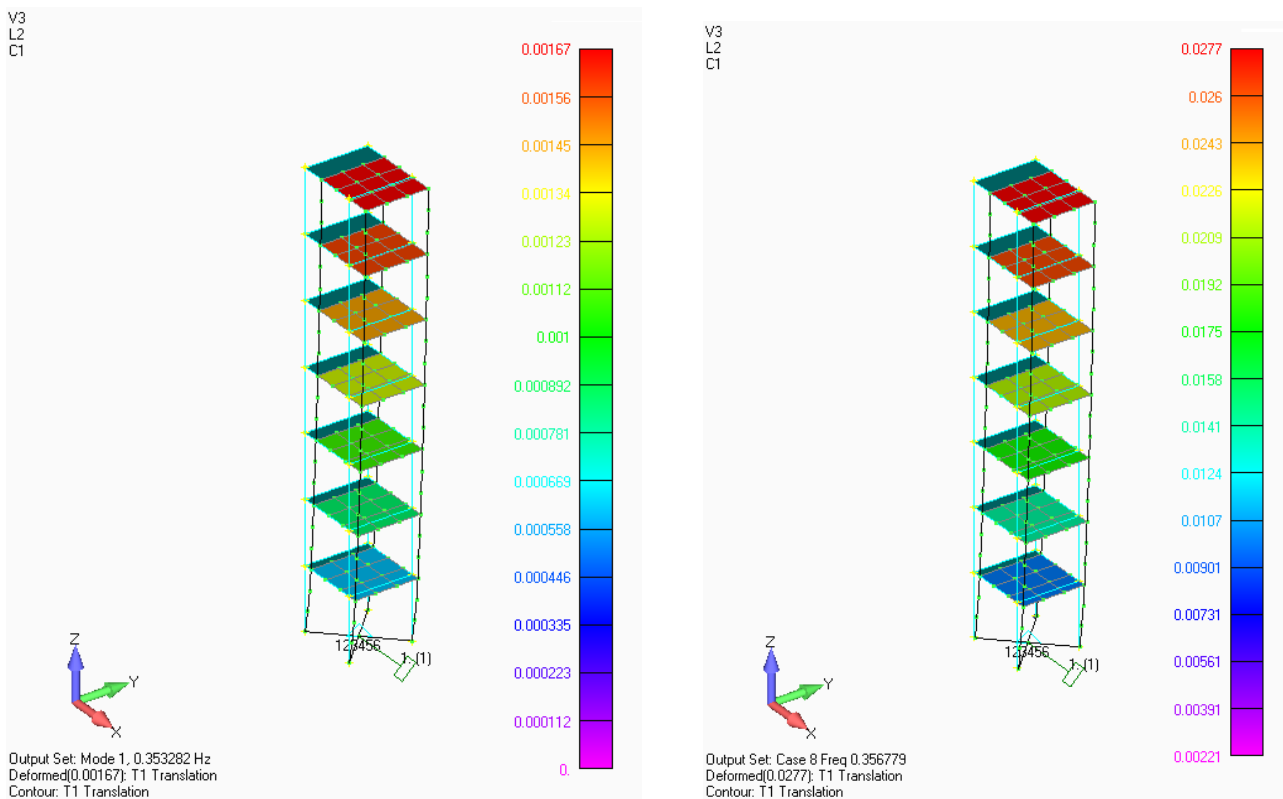
Слика 5.14: Померање чвора 161 на крову конструкције за најнижих 100 фреквенција



Слика 5.15: Убрзања чвора 161 на крову конструкције у x правцу за првих 100 фреквенција

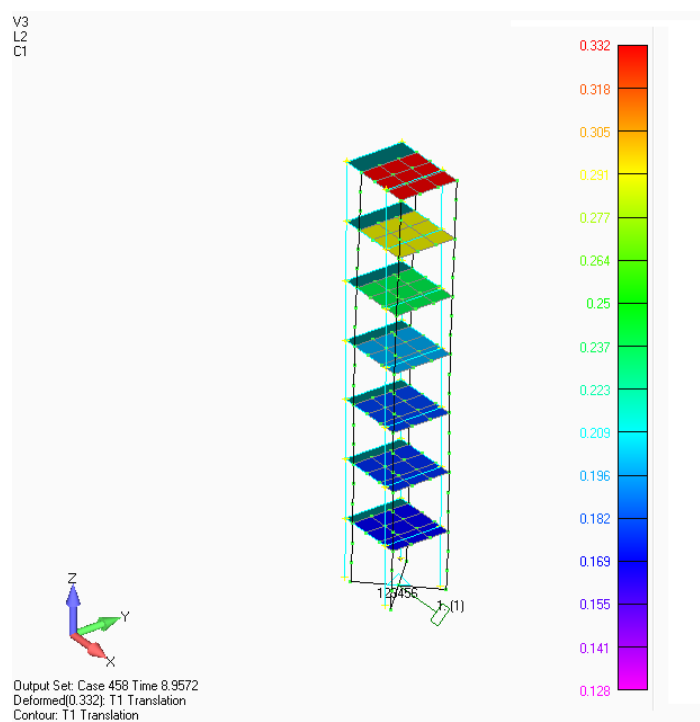
Можемо приметити и да се највеће померање чвора на крову конструкције које смо добили фреквентном анализом јавља на фреквенцији која приближно одговара фреквенцији првог облика померања у модалној анализи.

$$\omega_1 \sim 0,35\text{Hz}$$



Слика 5.16. Померање конструкције у модалној и фреквентној анализи на фреквенцији $\omega \sim 0,35\text{Hz}$

На крају смо урадили и анализу у временском домену да би приказали померање чворова конструкције за време трајања самог земљотреса (Петровац 1979.). Највеће померање чвора 161 на крову конструкције дешава се 8,9572 секунде од почетка потреса.



Слика 5.17. Визуелна репрезентација померања структуре тренутку $T=8,9572$ секунди од почетка деловања земљотреса

6. Закључак

Утицај сеизмичких поремећаја на живи свет планете земље је енорман. Генерална идеја овог рада је била да се опишу и објасне методи динамичке анализе сеизмичких утицаја на конструкције који се користе да би се исте учиниле што отпорнијим на поменуте. Извршен је прорачун сеизмичког оптерећења на модел бетонске зграде како би се утврдило понашање моделиране конструкције услед побуде у виду земљотреса и дате су теоријске основе алгоритама и метода који се користе за ове прорачуне у фреквентном домену.

Анализа у фреквентном домену нам омогућава да сагледамо поља померања, брзина и убрзања по различитим утицајним фреквенцијама осциловања и у суштини се користи због једноставности извођења и мањих захтева за ресурсима од директне или инкременталних метода интеграције.

Приказане, поменуте и урађене анализе су све линераног типа и претпоставља се да су све деформације мале што је довољно да за једноставну и генерализовану представу понашања грађевина под утицајем земљотреса. За потпуно разумевање понашања како моделираних тако стварних конструкција неопходно је урадити нелинеарну анализу.

7. Прилог

У овом прилогу налази се код којим смо извршили трансформацију сигнала земљотреса (који се догодио 1979. године са епицентром у месту Петровац у Црној Гори) из временског у фреквентни домен користећи програмско окружење MATLAB.

Програм за трансформацију сигнала

```
%Uvodjenje pobude (ubrzanja NS komponente zemljotresa Petrovac 1979)
fid=fopen('petrovac.dat','r');
Pe=textscan(fid,'%f %f');
fclose(fid);
```

} Импортовање временске серије убрзања

```
Tvec=Pe[1,1];
ag=Pe[1,2];
Td=19.6;
td=0.02;
N=fix(length(ag));
```

} Неопходни подаци за трансформацију

```
agwF=(fft(ag));
agwD=abs(agwF/N);
agw=agwD(1:N/2+1);
Fs=1/td;
f = Fs*(0:(N/2))/N;
```

} Функција којом се врши трансформација сигнала

```
% Iscrtavanje grafika ubrzanja u funkciji vremena
figure;
plot(Tvec,ag);
grid
title('N-S komponenta ubrzanja u vremenskom domeu - zemljotres Petrovac (1979)')
xlabel('vreme (sec)')
ylabel('ubrzanje. (m/s^2)')
```

```
% Iscrtavanje grafika ubrzanja u funkciji frekvencije
figure;
plot(f,agw);
grid
title('N-S komponenta ubrzanja u frekventnom domenu - zemljotres Petrovac (1979)')
xlabel('Frekvencija (Hz)')
ylabel('ubrzanje. (m/s^2)')
```

Програм за штампање дијаграма померања и убрзања

```
fid=fopen('prvih 100 frq.dat','r');
cvor=textscan(fid,'%f %f');
fclose(fid);
Frq=cvor{1,1};
Mov=cvor{1,2};
fid=fopen('T1 Ubrzanje.dat','r');
Ubcvor=textscan(fid,'%f %f');
fclose(fid);
FrqU=Ubcvor{1,1};
ACC=Ubcvor{1,2};
```

Импортовање података из листинга који смо добили анализом утицаја побуде на грађевину користећи солвер NASTRAN

```
% Iscrtavanje grafika pomeranja čvora 161 u funkciji frekvencije
figure;
plot(Frq,Mov,'-*r');
grid
title('Pomeranje cvora 161')
xlabel('Frekvencija (Hz)')
ylabel('pomeranje (m)')
```

```
% Iscrtavanje grafika ubrzanja čvora 161 u funkciji frekvencije
figure;
plot(FrqU,ACC,'-*r');
grid
title('Ubrzanja cvora 161 u x pravcu')
xlabel('Frekvencija (Hz)')
ylabel('ubrzanje. (m/s^2)')
```

Literatura

- [1] - Chopra AK (2012). Dynamics Of Structures - Theory and Applications to Earthquake Engineering, Fourth Edition, Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall, One Lake Street, Upper Saddle River, NJ 07458.
- [2] - Clough RW, Penzien J (2003). Dynamics Of Structures, Third Edition, Computers & Structures, Inc. 1995 University Ave. Berkeley, CA 94704 USA
- [3] - Ferreira AJM (2009). MATLAB Codes for Finite Element Analysis - Solids and Structures, Springer Science + Business Media BV
- [4] - Gawronski WK (2004). Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures, Springer-Verlag New York
- [5] - Humar JL (2002). Dynamics Of Structures, Second Edition, Swets & Zeitlinger B.V., Lisse
- [6] - James JF (2011). A Student's Guide to Fourier Transforms with Applications in Physics and Engineering, Third Edition, Cambridge University Press The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK
- [7] - Којић М, Славковић Р, Живковић М, Грујовић Н (2010). Метод Коначних Елемената I - Линеарна анализа, Машински факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац
- [8] - Kojić M., Slavković R., Živković M. and Grujović N., PAK-finite element program for linear and nonlinear structural analysis and heat transfer, University of Kragujevac, Faculty of Engineering, Kragujevac
- [9] - Lyshevski SE (2003). Engineering and Scientific Computations Using MATLAB, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. Published simultaneously in Canada.
- [10] - Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP (2007). Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing, Third Edition, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo
- [11] - Quarteroni A, Saleri F (2003). Scientific computing with Matlab, Springer

Internet stranice:

- [12] - <https://betterexplained.com/articles/an-interactive-guide-to-the-fourier-transform/> [датум приступања страници: 22.01.2016]
- [13] - <https://nisee.berkeley.edu/elibrary/list?e=1848&start=1> [датум приступања страници: 02.02.2016]
- [14] - <http://www.mathworks.com/>
- [15] - <https://en.wikipedia.org/>